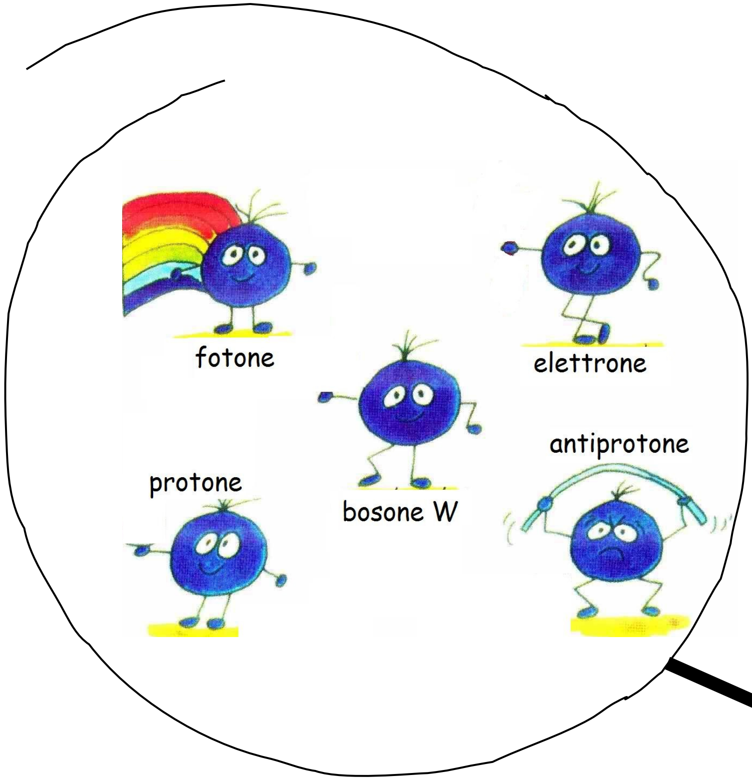
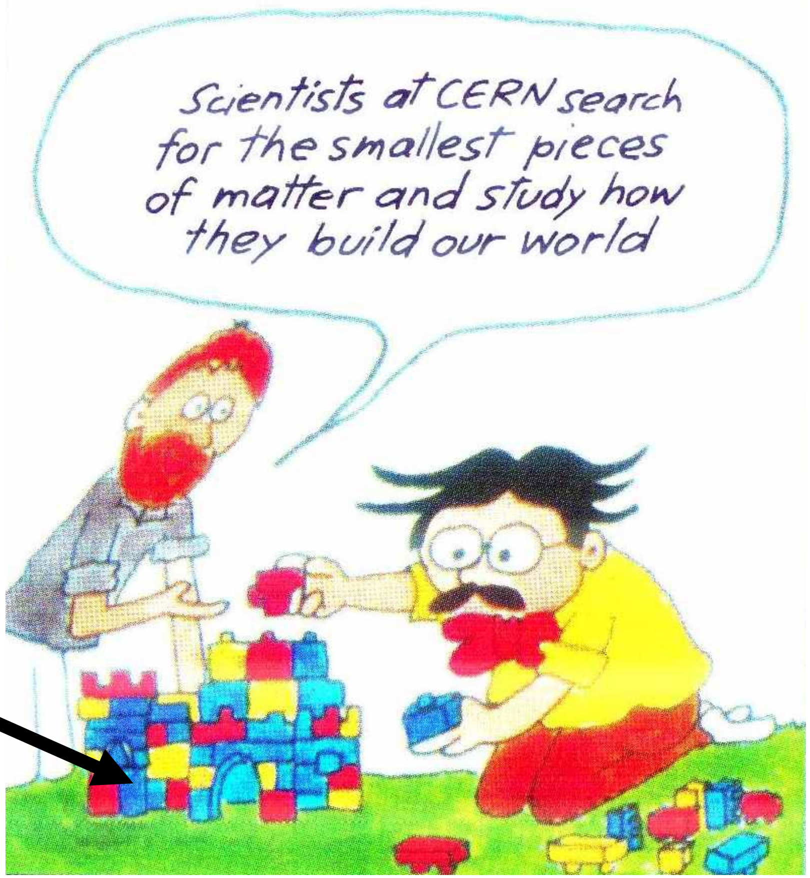
Elementi
di
Statistica

1

… diamo un senso

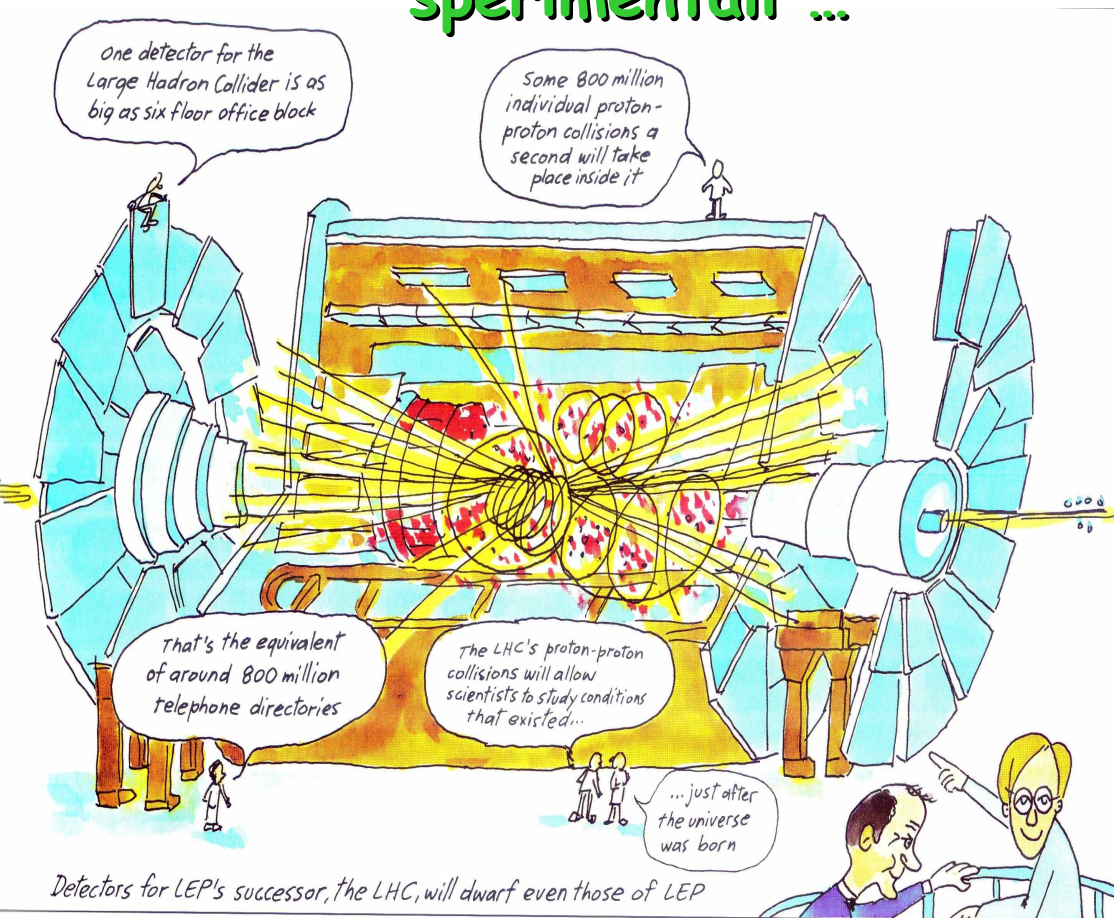
Spiega il complesso
mediante il semplice
nel mondo dell'infinitamente piccolo …



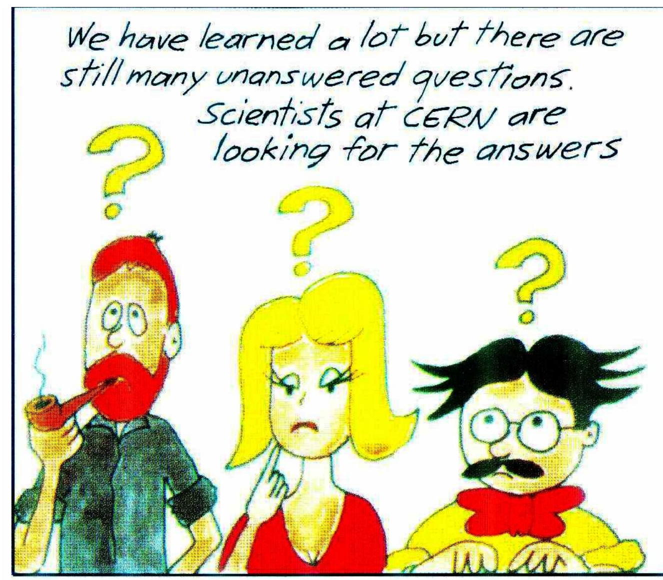


... applicando la ben nota manovra a tenaglia :
il metodo scientifico

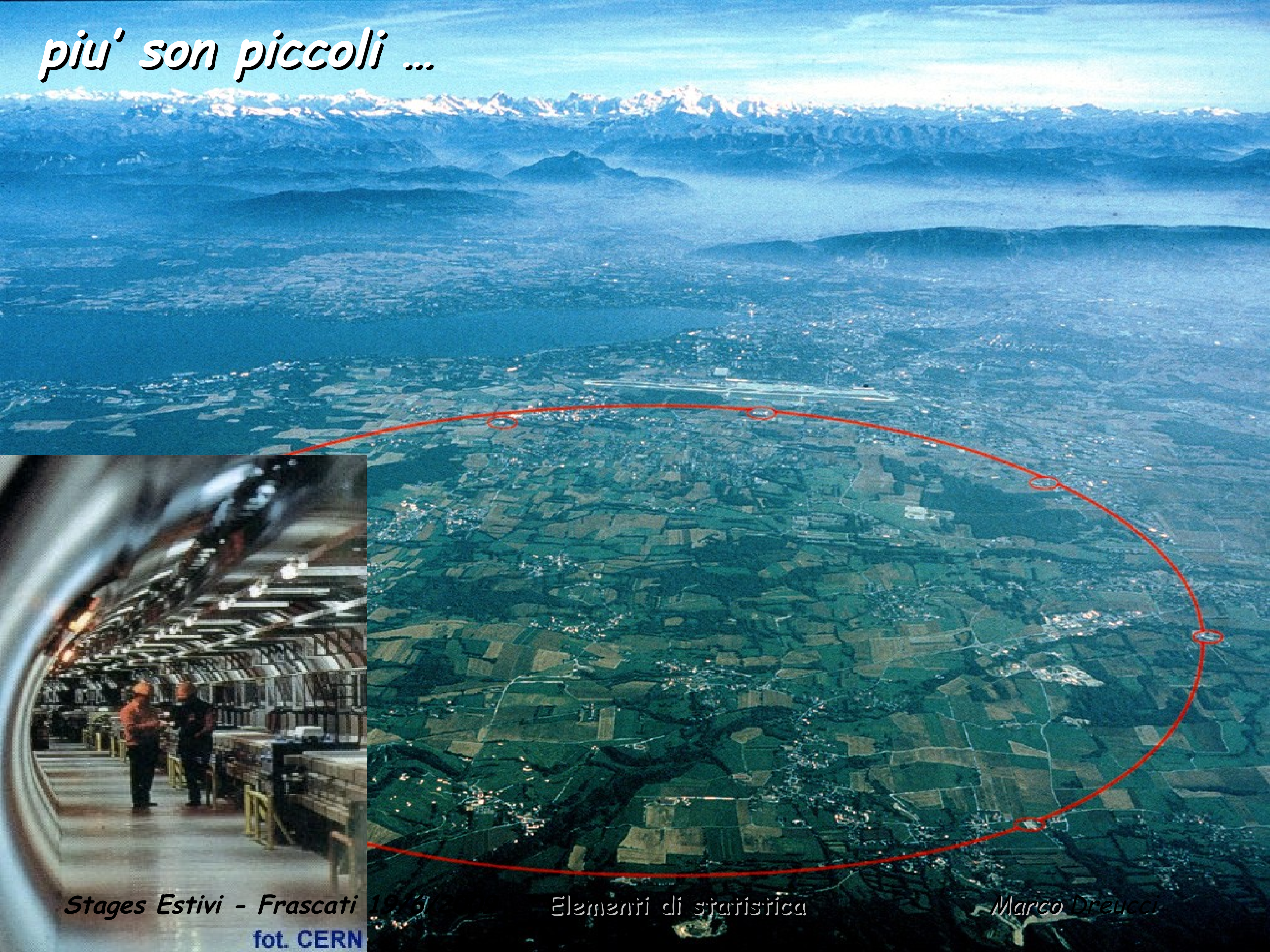
sperimentali ...



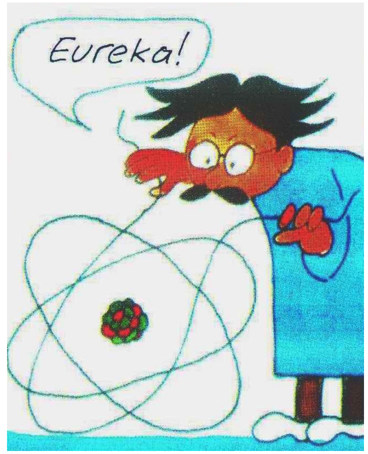
... teorici



piu' son piccoli ...



… cosa si misura nella HEP ?



Parametri fondamentali

- Branching ratio (**BR**)
- vita media (τ)
- massa (**m**)
- costanti di accoppiamento
- ……

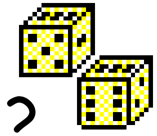
$\pi^{o} \rightarrow \gamma\ \gamma\ ,\ e^{+}e^{-}\gamma$

Altro (ma di supporto)

- quantita' di moto $\vec{q}$ di una particella ;
- energia E rilasciata in un calorimetro da una particella ;
- angoli e direzioni delle particelle che si producono ;
- intervalli temporali, Δ t ;
- efficienza di un rivelatore ;
- contaminazione in un campione ;
- ……

BR, branching ratio

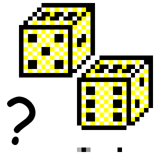
Canali	BR
$\Phi \rightarrow K^+K^-$	(~ 49 %)
$K_S K_L$	(~ 34 %)
$\pi^+\pi^-\pi^0$	(~ 15 %)
$\eta\,\gamma$	(~ 1.3%)



e il determinismo dove e' finito ?

- Nel mondo dell'infinitamente piccolo le condizioni iniziali non possono essere determinate in modo completo (**principio di indeterminazione**). Ne segue che nel mondo delle particelle elementari le leggi sono sempre **leggi di probabilita'**.

BR, branching ratio

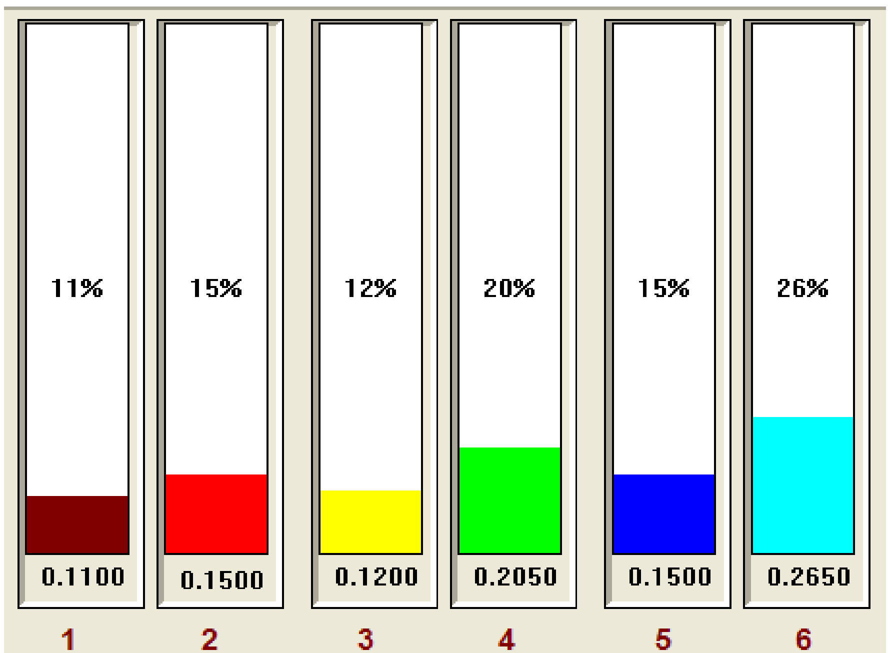


	Canali	BR
$\Phi \rightarrow$	K^+K^-	(~ 49 %)
	K_SK_L	(~ 34 %)
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	(~ 15 %)
	$\eta\,\gamma$	(~ 1.3%)

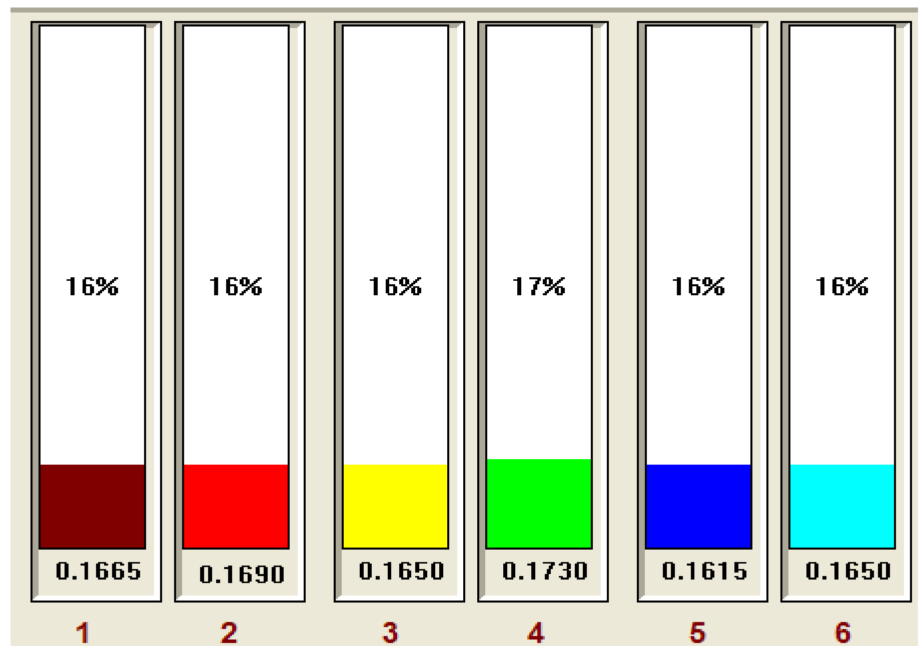
e il determinismo dove e' finito ?

- Nel mondo dell'infinitamente piccolo le condizioni iniziali non possono essere determinate in modo completo (**principio di indeterminazione**). Ne segue che nel mondo delle particelle elementari le leggi sono sempre **leggi di probabilita'**.

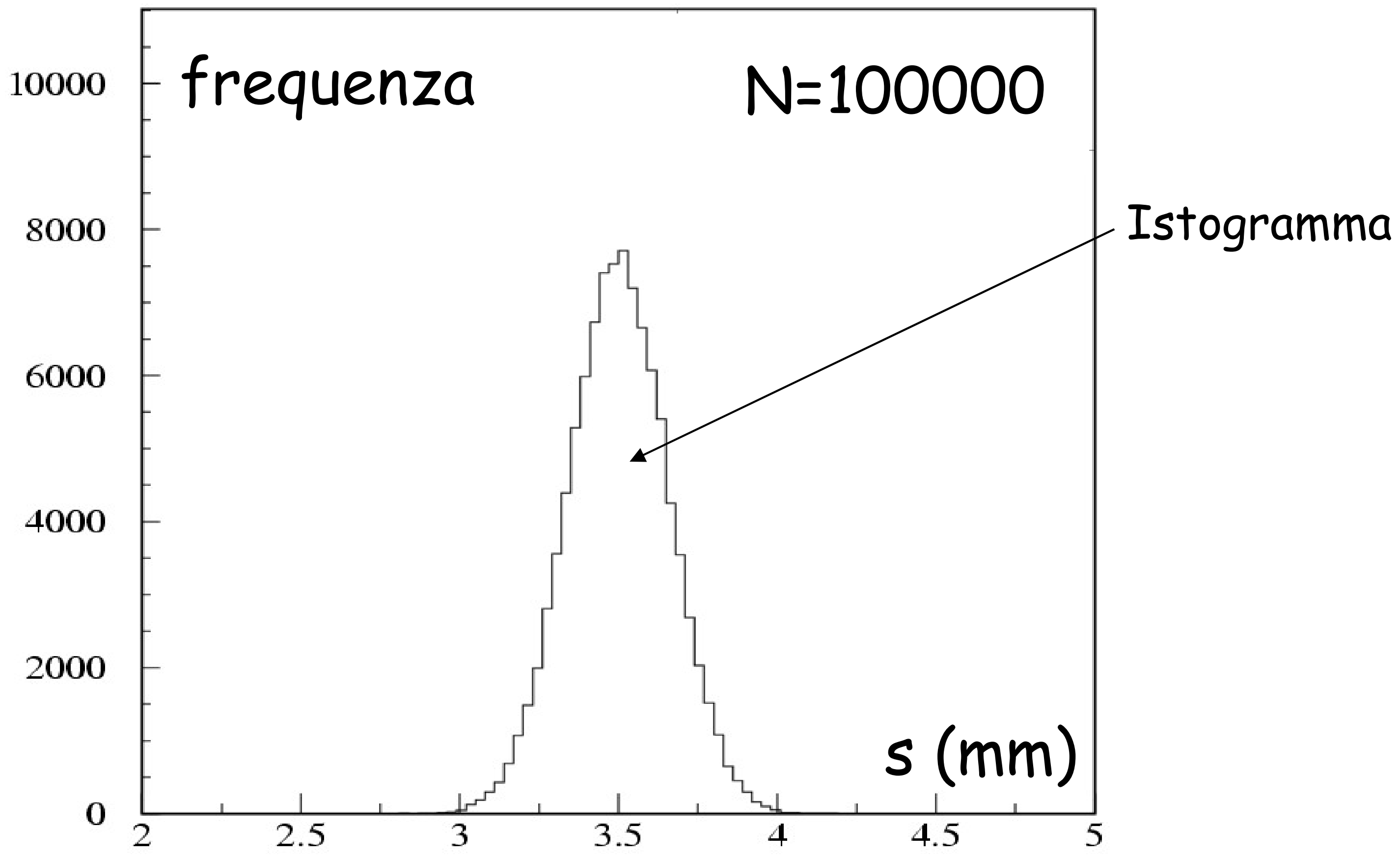
N=200 lanci



N=2000 lanci



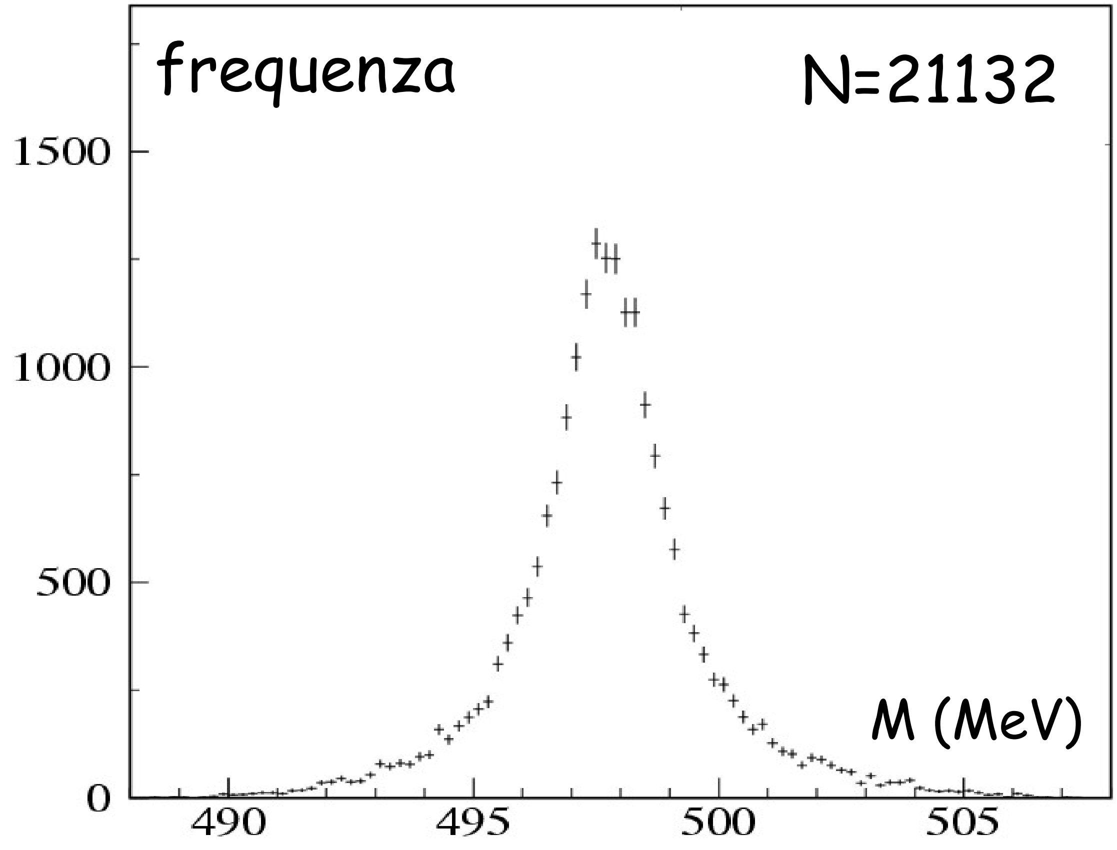
Misura spessore cavo elettrico



- Errori casuali
- Errori sistematici

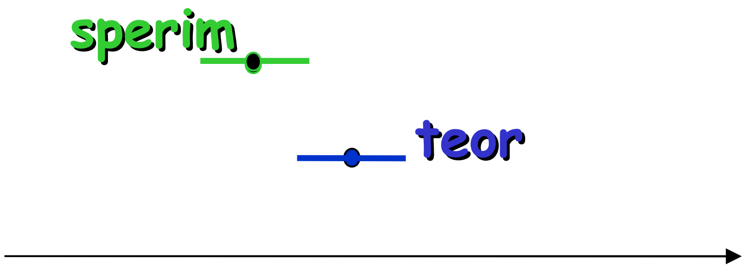
una cosiddetta
misura 'difficile' ...

Misura massa K_L



e' una variabile aleatoria !

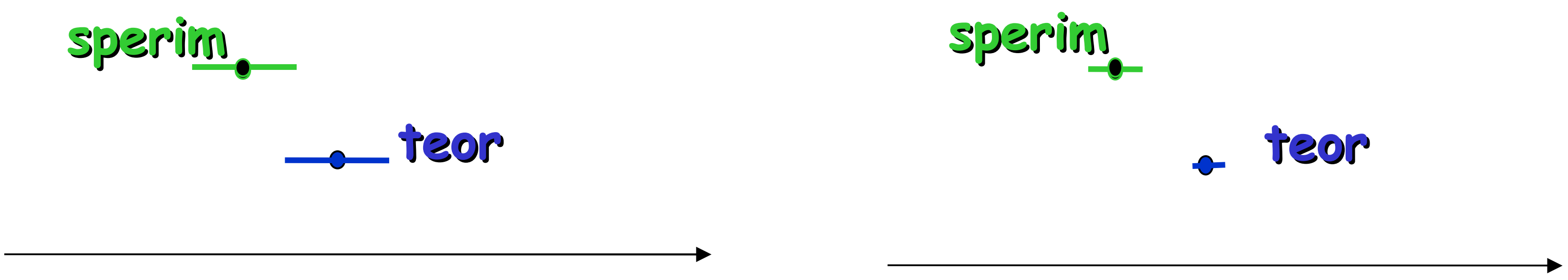
• Le incertezze (sperimentali e/o teoriche) possono essere diminuite ;



il risultato di una operazione di misura … **e' una variabile aleatoria !**

• Le incertezze (sperimentali e/o teoriche) possono essere diminuite ;

• La situazione puo' cambiare nel tempo…



2
Variabile aleatorie
e
funzioni di distribuzione

Indicatori fondamentali

Valor medio

$$m = \frac{\sum x_i}{N}$$

Deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m - x_i)^2}{N-1}}$$

$x = m \pm \sigma$

$e_x = \sigma / m$

Indicatori fondamentali

Valor medio

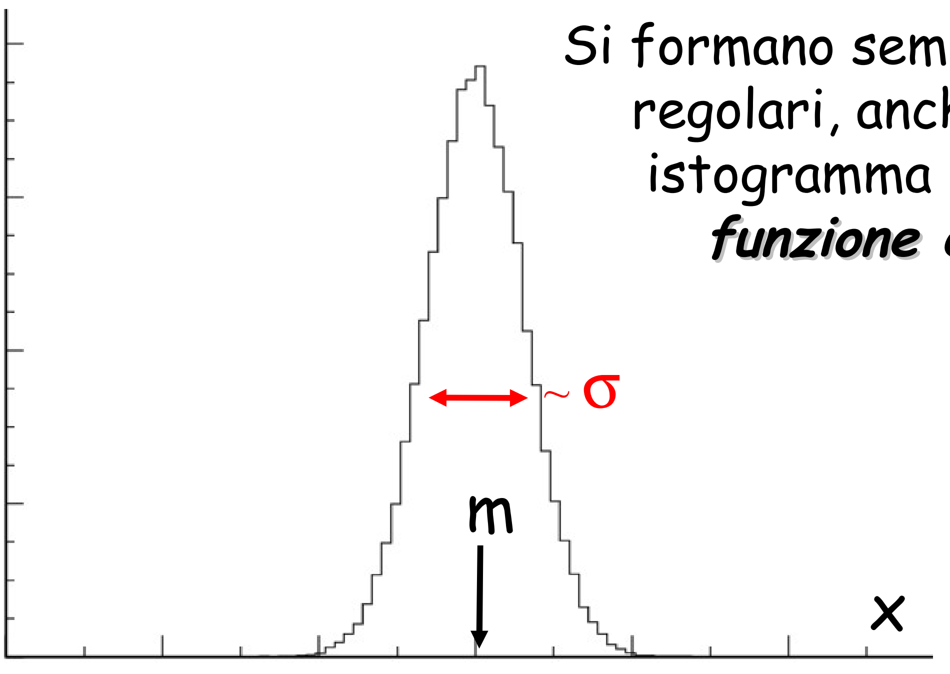
$$m = \frac{\sum x_i}{N}$$

Deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m - x_i)^2}{N-1}}$$

$x = m \pm \sigma$

$e_x = \sigma / m$



Si formano sempre istogrammi regolari, anche troppo ! Ogni istogramma segue qualche ***funzione di distribuzione***

Tipi di variabili aleatorie (I)

VA : ***gaussiana***
FDD: gaussiana o normale o 'campana'

Misura di una grandezza 'ben definita', in presenza di ***errori casuali***.

tempo di caduta di un oggetto
spessore cavo elettrico
massa di una particella
durata di un macchinario
misura di un intervallo di tempo

Tipi di variabili aleatorie (I)

VA : **gaussiana**
FDD: gaussiana o normale o 'campana'

Misura di una grandezza 'ben definita', in presenza di ***errori casuali***.

tempo di caduta di un oggetto
spessore cavo elettrico
massa di una particella
durata di un macchinario
misura di un intervallo di tempo

VA : **binomiale**
FDD: binomiale

Si immagini una prova il cui esito sia:
successo o insuccesso.

Il numero di successi in N prove e' una variabile aleatoria, e ovviamente: $0 \leq k \leq N$.

risultato lancio di una moneta
risultato lancio di un dado
rivelazione di una data particella
canale di decadimento per una particella
misura dello spin di un elettrone

Tipi di variabili aleatorie (I)

VA : **gaussiana**
FDD: gaussiana o normale o 'campana'

Misura di una grandezza 'ben definita', in presenza di ***errori casuali***.

tempo di caduta di un oggetto
spessore cavo elettrico
massa di una particella
durata di un macchinario
misura di un intervallo di tempo

VA : **binomiale**
FDD: binomiale

Si immagini una prova il cui esito sia:
successo o insuccesso.

Il numero di successi in N prove e' una variabile aleatoria, e ovviamente:
$0 \leq k \leq N$.

risultato lancio di una moneta
risultato lancio di un dado
rivelazione di una data particella
canale di decadimento per una particella
misura dello spin di un elettrone

VA : **poissoniana**
FDD: poissoniana

Caso particolare di var.binom.:
- *successo*: ***evento raro***, $p \approx 0$
- numero **infinito** di prove $N \approx \infty$

incidenti stradali in un anno
nascite al mese all'ospedale
 # decadimenti in 5 s di una sostanza radioattiva
di eventi in un "bin" di un istogramma

Tipi di variabili aleatorie (II)

VA : **gaussiana**
FDD: gaussiana o normale o 'campana'

m

σ

- **Misura massa particella**

$m = 139$ MeV ;

$\sigma = 2$ MeV

$\sigma / m = 0{,}014$ (1,4%)

Tipi di variabili aleatorie (II)

VA : gaussiana
FDD: gaussiana o normale o 'campana'

$$m$$
$$\sigma$$

VA : binomiale
FDD: binomiale

p = probabilita' successo

$$m = pN$$

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$$

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{\sqrt{Np(1-p)}}{pN} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- **Misura massa particella**

m = 139 MeV ;

σ = 2 MeV

σ / m = 0,014 (1,4%)

- **Rivelatore** (p=0.62)

N=50 -> m= 31; σ =3 (10%)
N=10^3 -> m= 620; σ =15 (2.4%)
N=10^6 -> m=620000; σ =485 (0.08%)

Tipi di variabili aleatorie (II)

VA : gaussiana
FDD: gaussiana o normale o 'campana'

$$m \quad \sigma$$

- **Misura massa particella**

m = 139 MeV ;

σ = 2 MeV

σ / m = 0,014 (1,4%)

VA : binomiale
FDD: binomiale

p = probabilita' successo

$$m = pN$$
$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$$
$$\frac{\sigma}{m} = \frac{\sqrt{Np(1-p)}}{pN} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- **Rivelatore** (p=0.62)

N=50 -> m= 31; σ =3 (10%)
$N=10^3$ -> m= 620; σ =15 (2.4%)
$N=10^6$ -> m=620000; σ =485 (0.08%)

VA : poissoniana
FDD: poissoniana

p = probabilita' successo

$$m = pN$$
$$\sigma = \sqrt{m}$$

- **Nascite in un ospedale**

Se m=25/mese su N=15207:
→ σ =5/mese; p=0.0016/mese

- **Sostanza radioattiva**

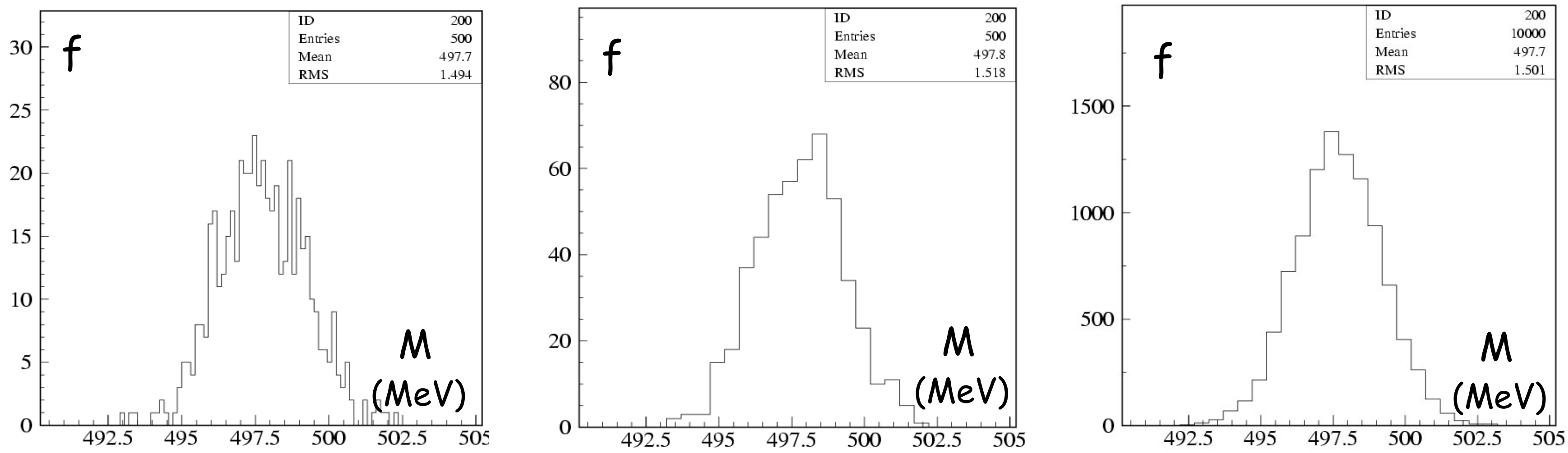
Se $p=1.5\times 10^{-8}$/s e $N=10^9$:
→ m=6.7/s ; σ =2.6/s

- **Entries/bin**

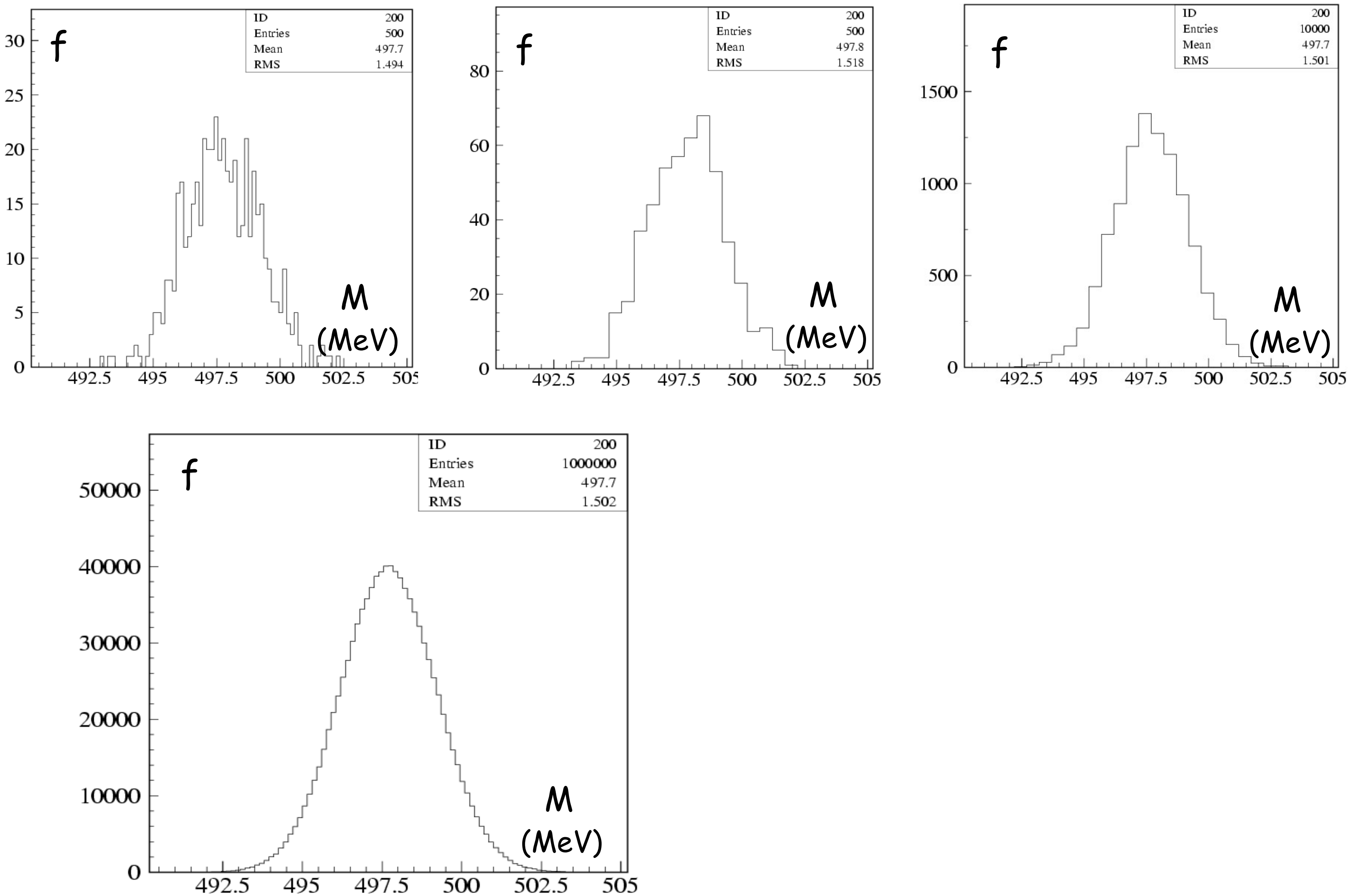
Es.: misura massa K_L (go back)

Misura massa particella ...

fdd gaussiana

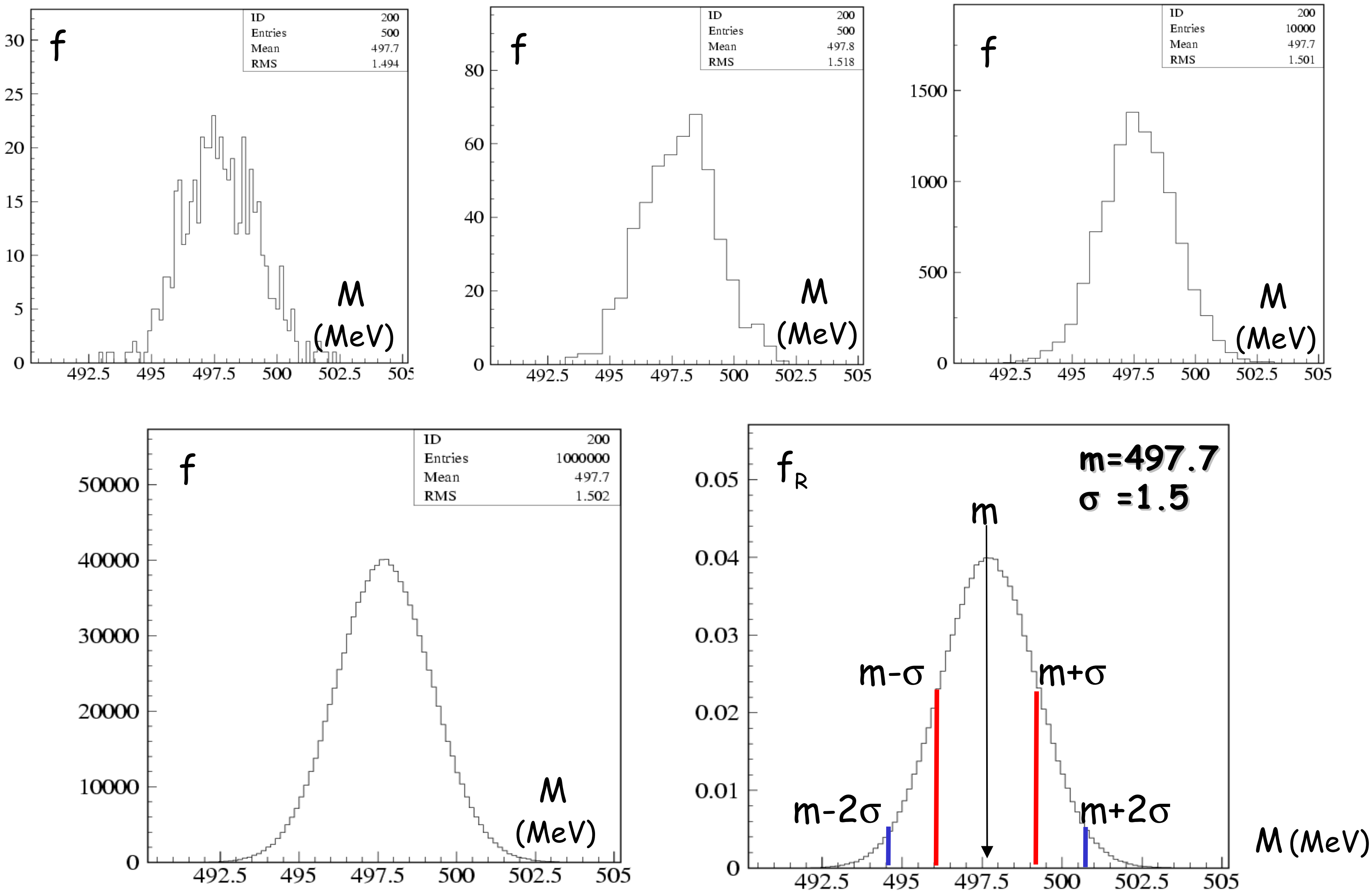


Misura massa particella ... **fdd gaussiana**



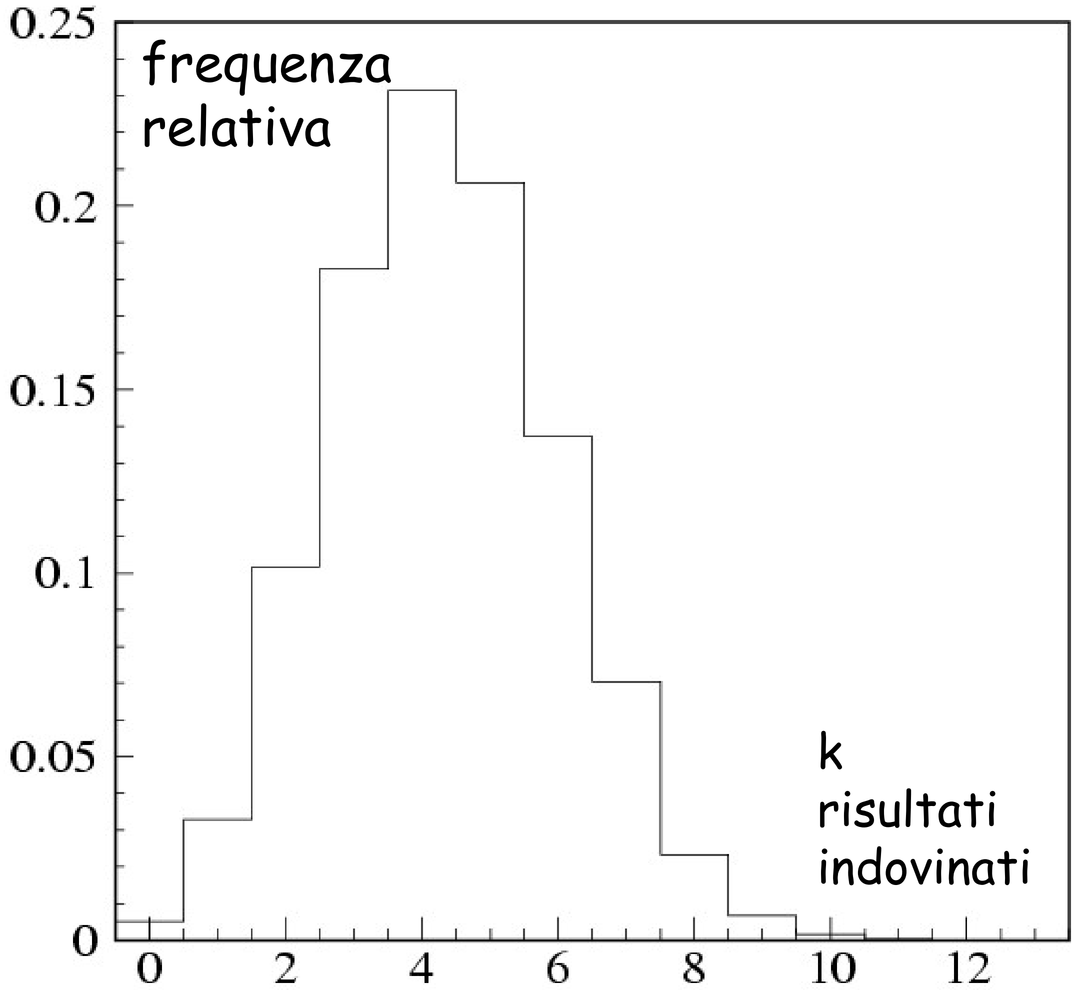
Misura massa particella ...

fdd gaussiana

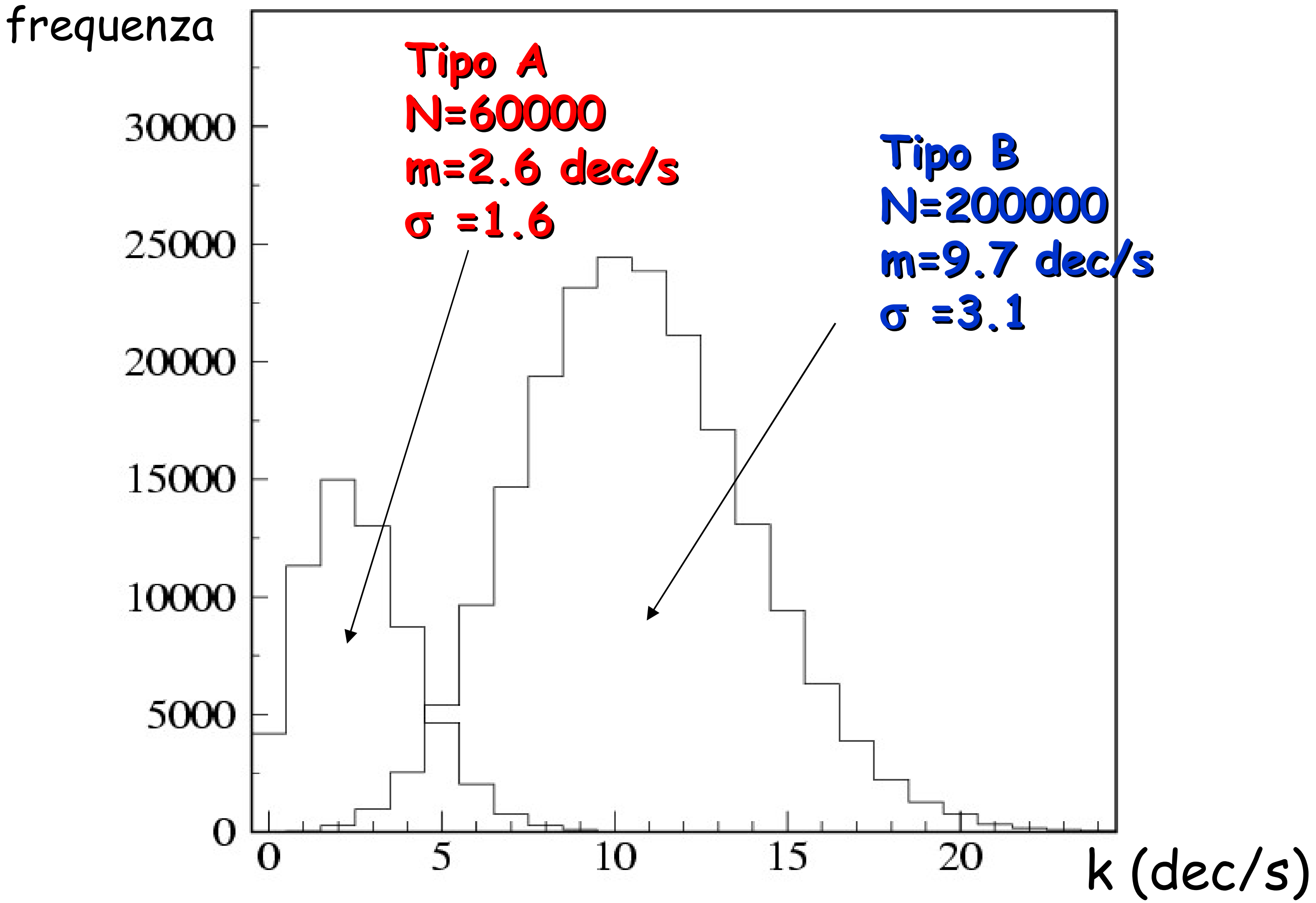


Risultati della schedina ...

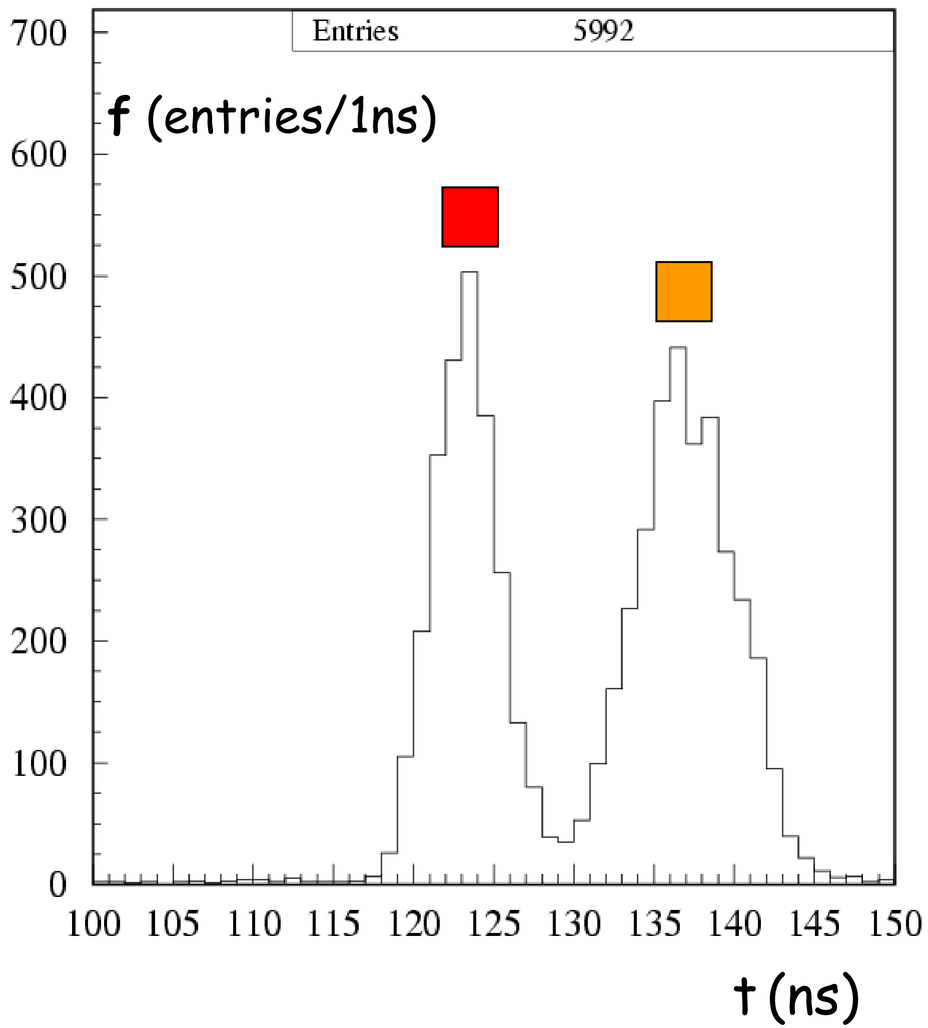
fdd binomiale

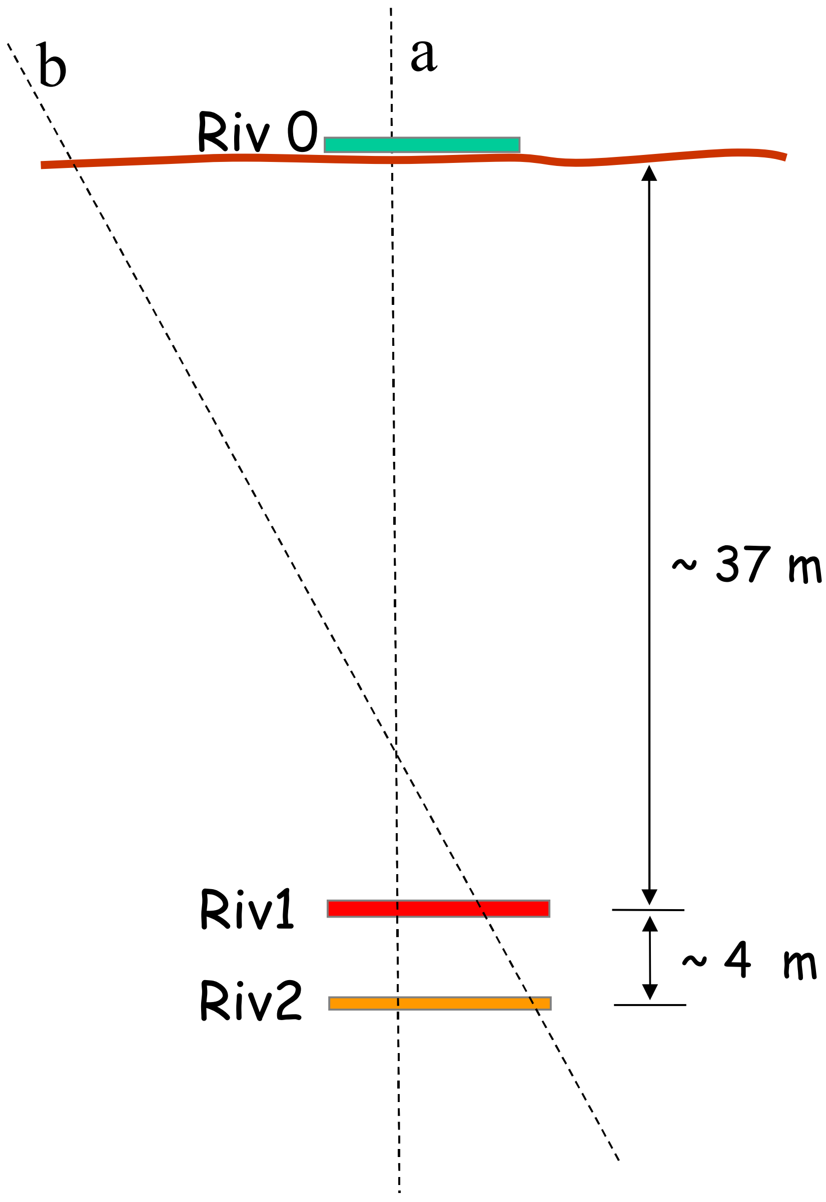


fdd poissoniana



Misura intervallo temporale ...

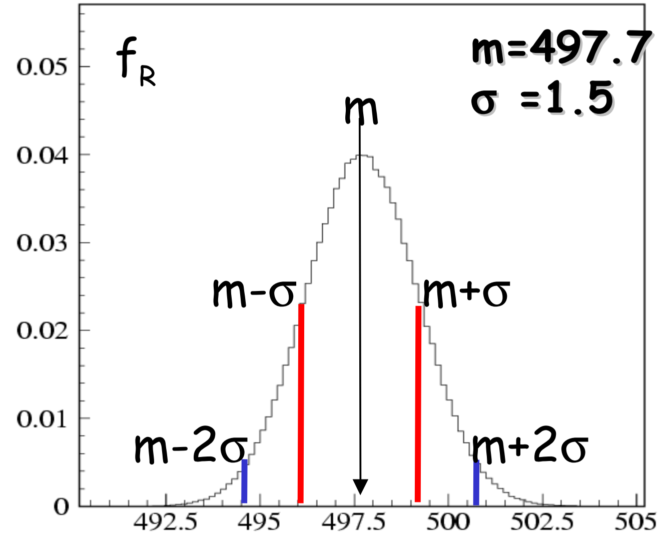




Le FDD

VA : **gaussiana**
FDD: gaussiana o normale

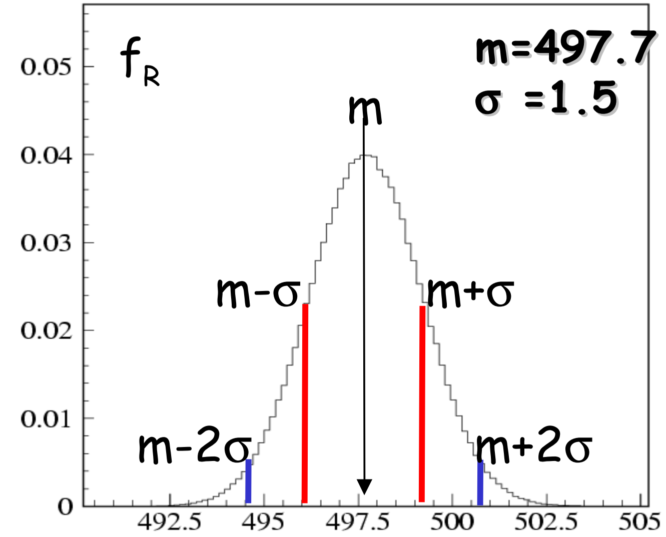
$$f(x;\,\mathrm{m},\sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma}}\, e^{-\frac{(m-x)^2}{2\sigma^2}}$$



Le FDD

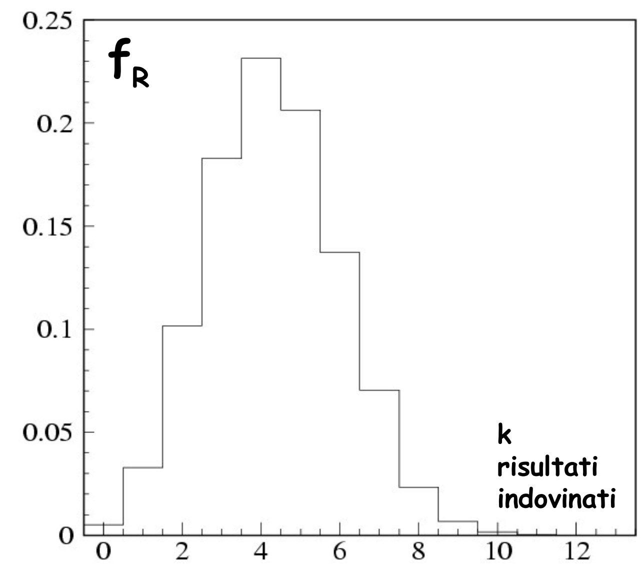
VA : **gaussiana**
FDD: gaussiana o normale

$$f(x;\underline{m,\sigma}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(m-x)^2}{2\sigma^2}}$$



VA : **binomiale**
FDD: binomiale

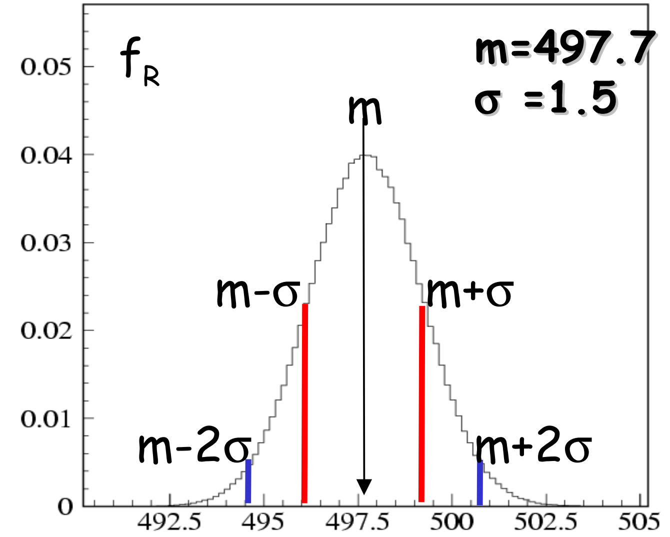
$$P(k;\underline{n, p}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$



Le FDD

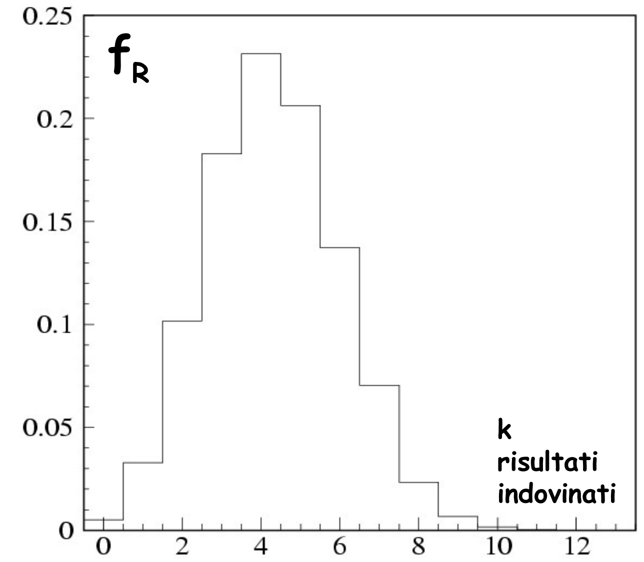
VA : gaussiana
FDD: gaussiana o normale

$$f(x;\underline{m,\sigma}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(m-x)^2}{2\sigma^2}}$$



VA : binomiale
FDD: binomiale

$$P(k;\underline{n,p}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

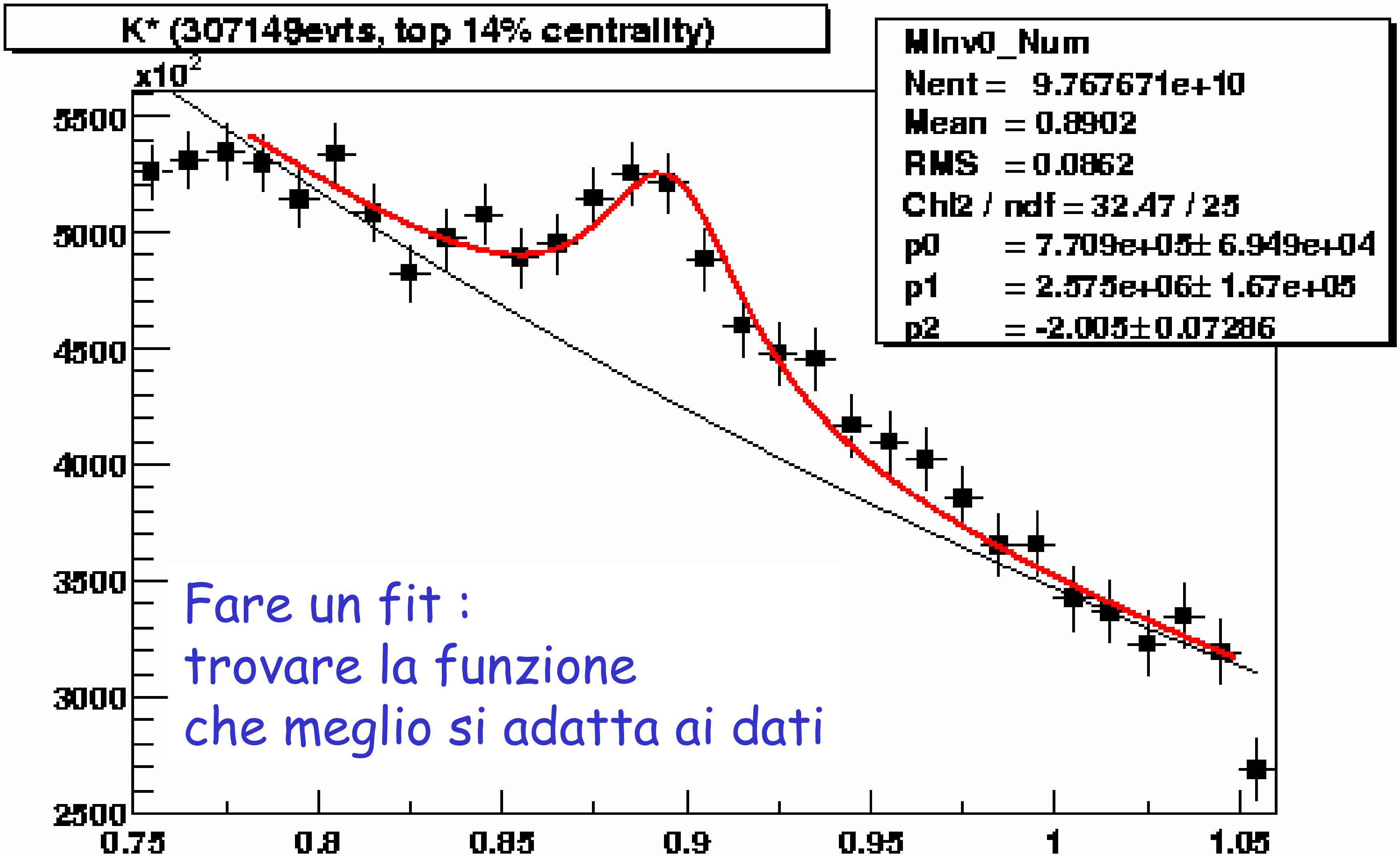


VA : poissoniana
FDD: poissoniana

$$P(k;\underline{m}) = \frac{m^k e^{-m}}{k!}$$

3
Curva di accostamento (Fit)

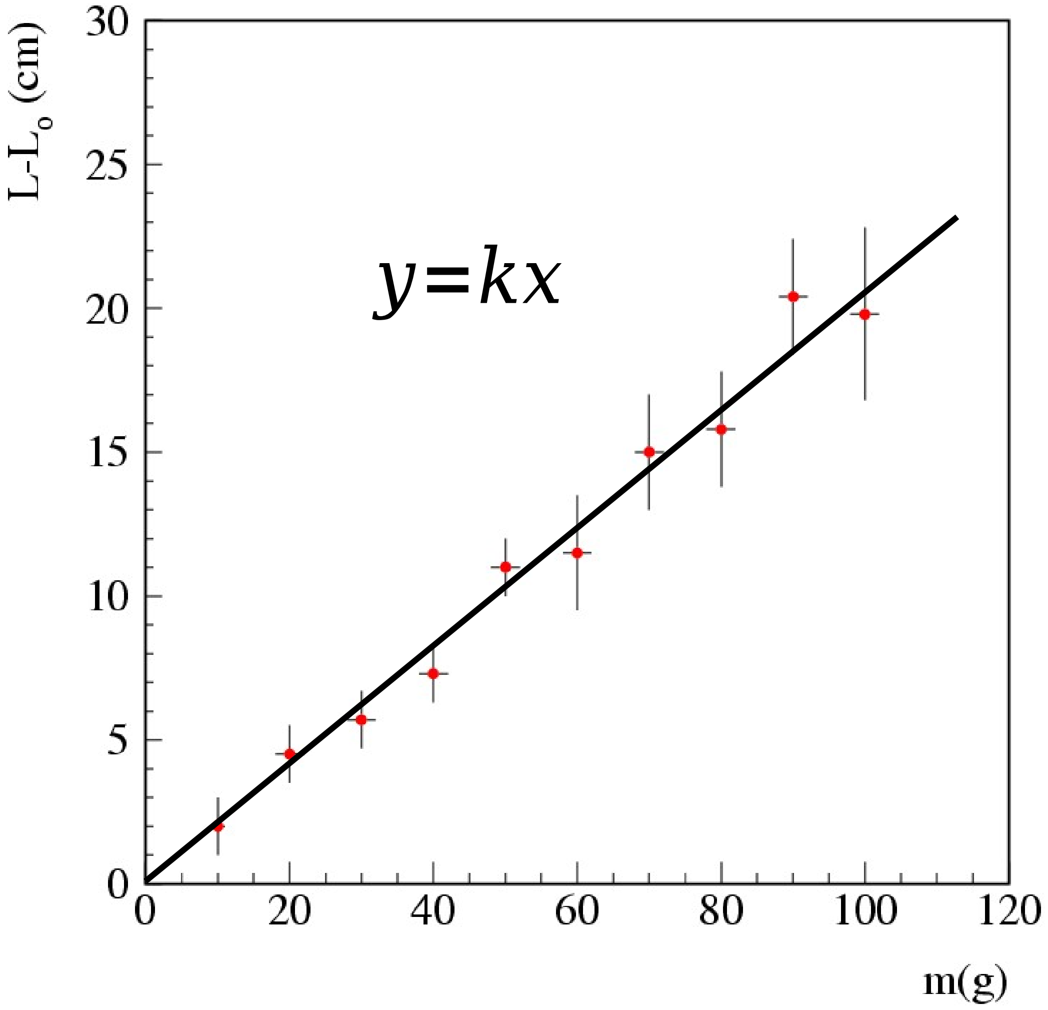
relazione matematica=legge fisica=grafico :
i valori sperimentali si adattano ad esso ?



Fare un fit :
trovare la funzione
che meglio si adatta ai dati

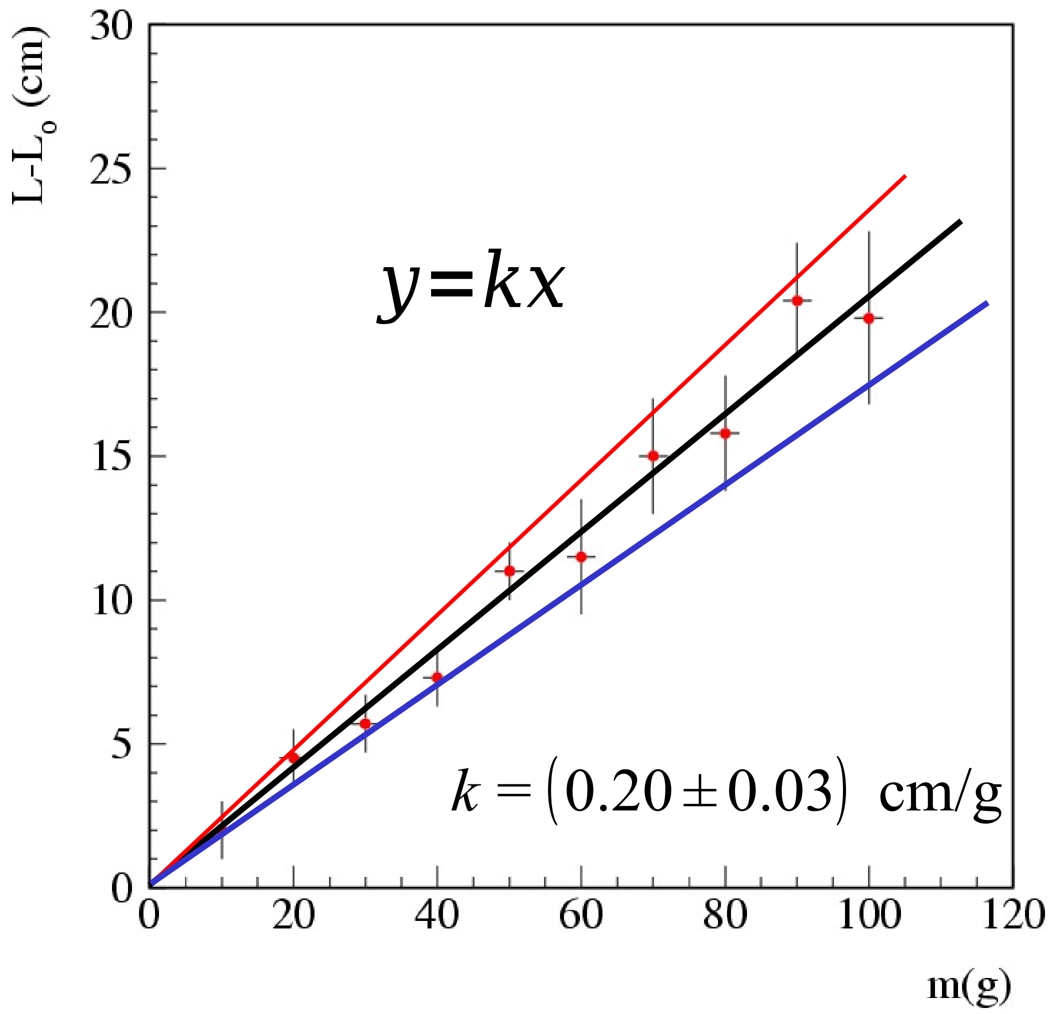
A scuola si fa a mano ...

Allungamento di una molla (I)



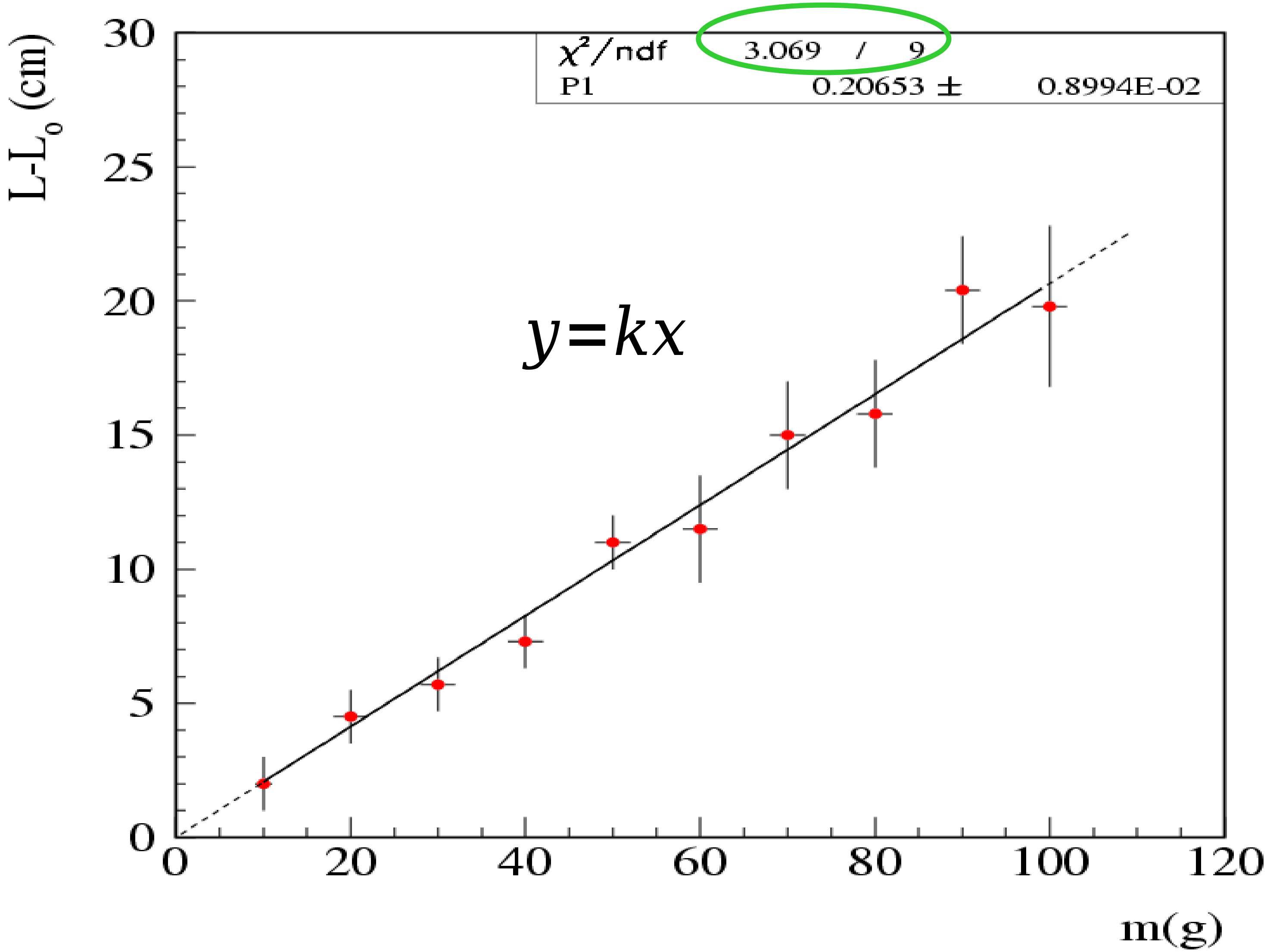
A scuola si fa a mano …

Allungamento di una molla (I)

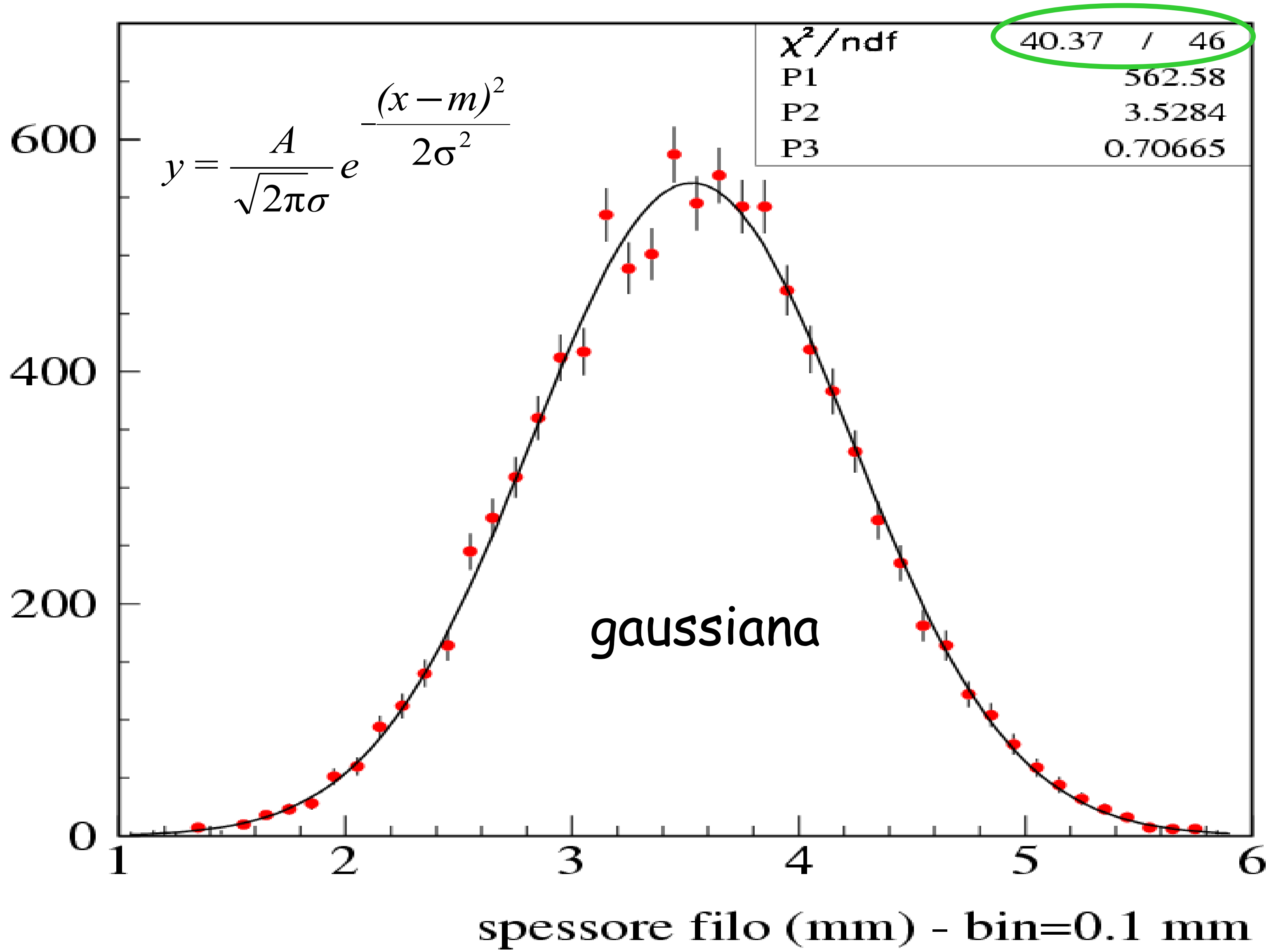


Ma esistono vari programmini ...

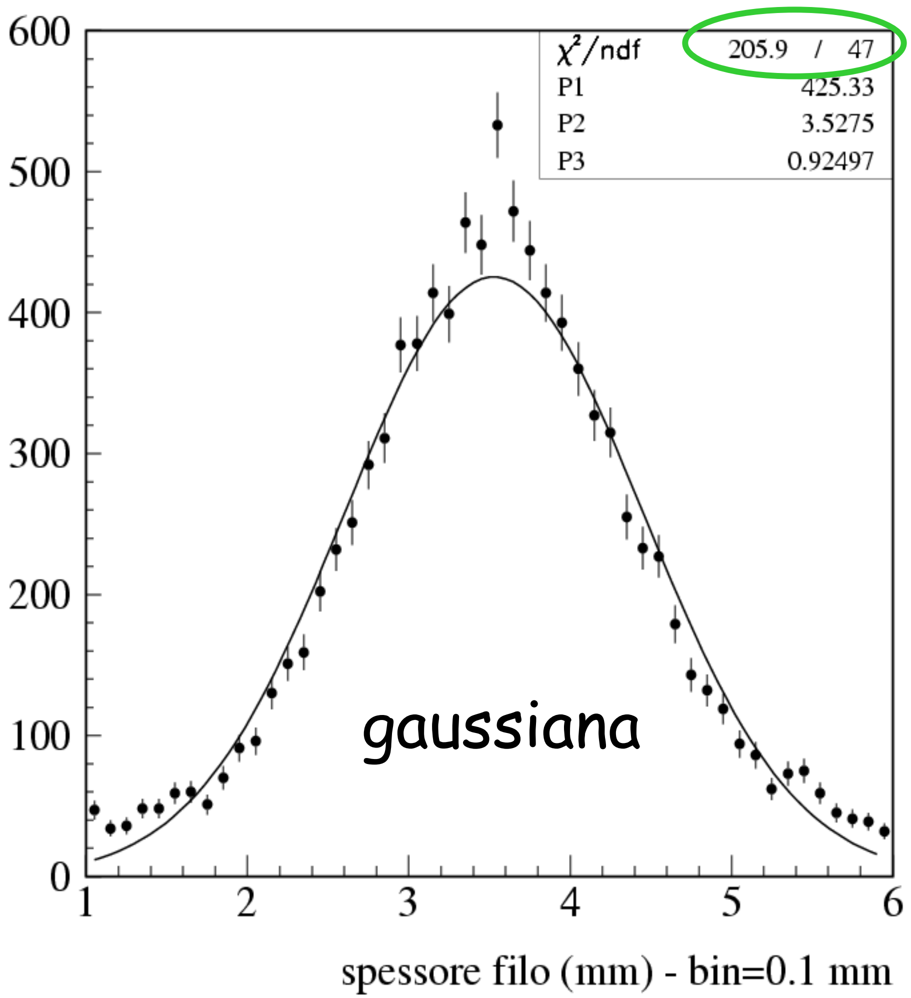
Allungamento di una molla (II)



Spessore di un cavo elettrico (I)

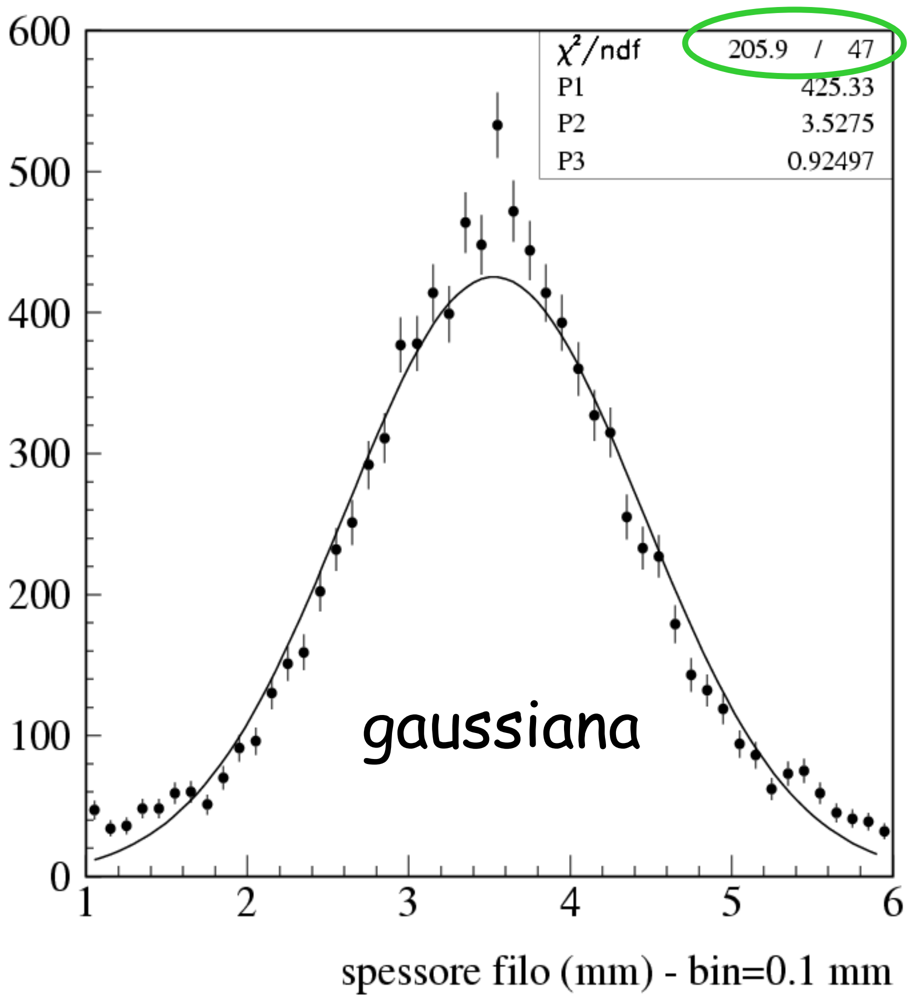


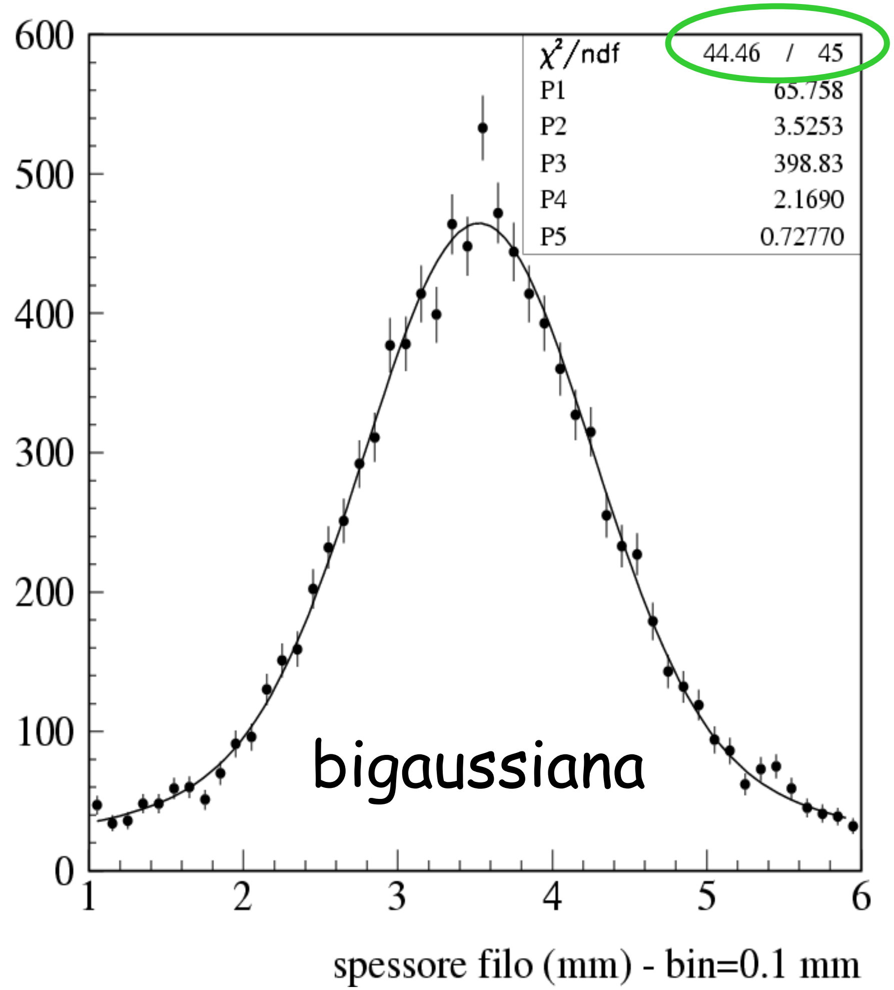
Spessore di un cavo elettrico (II)



Errori casuali da due sorgenti …

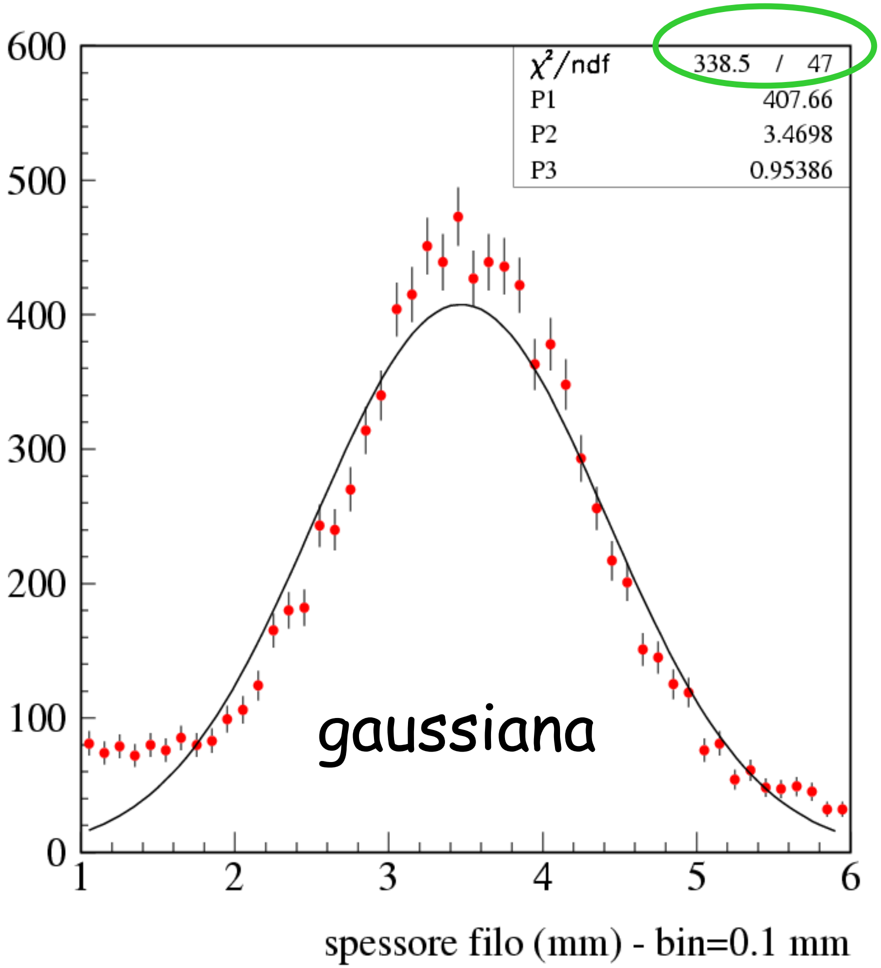
Spessore di un cavo elettrico (II)





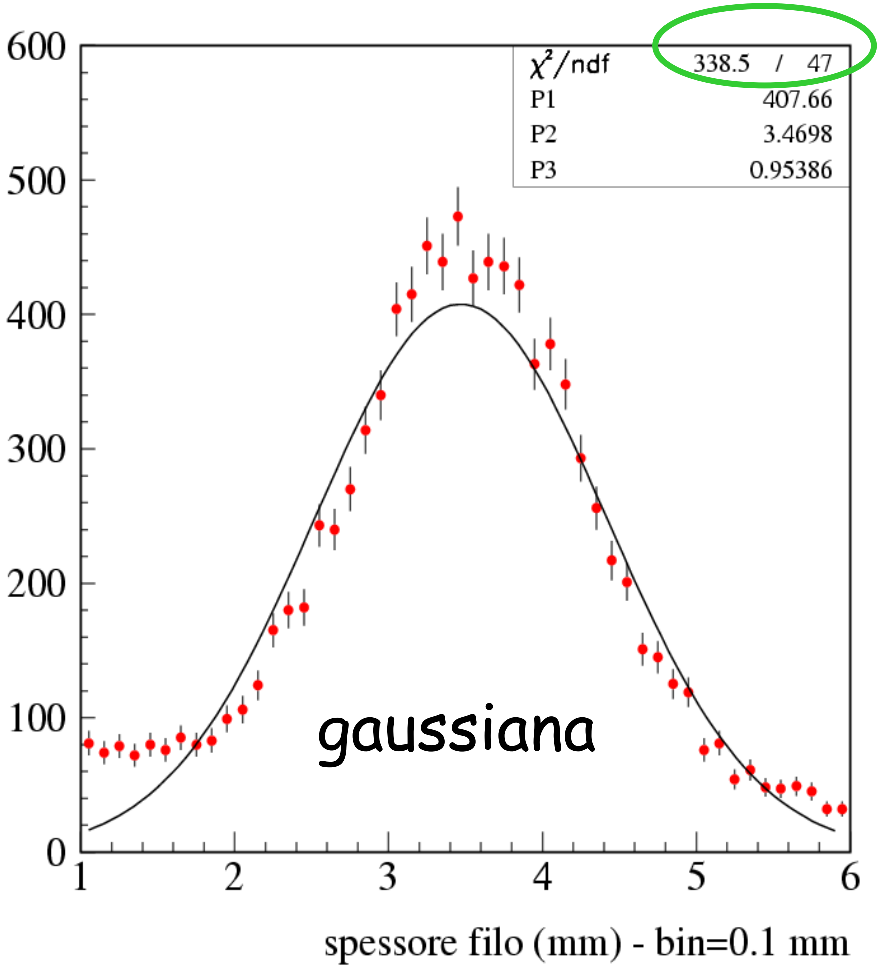
Spessore di un cavo elettrico (III)

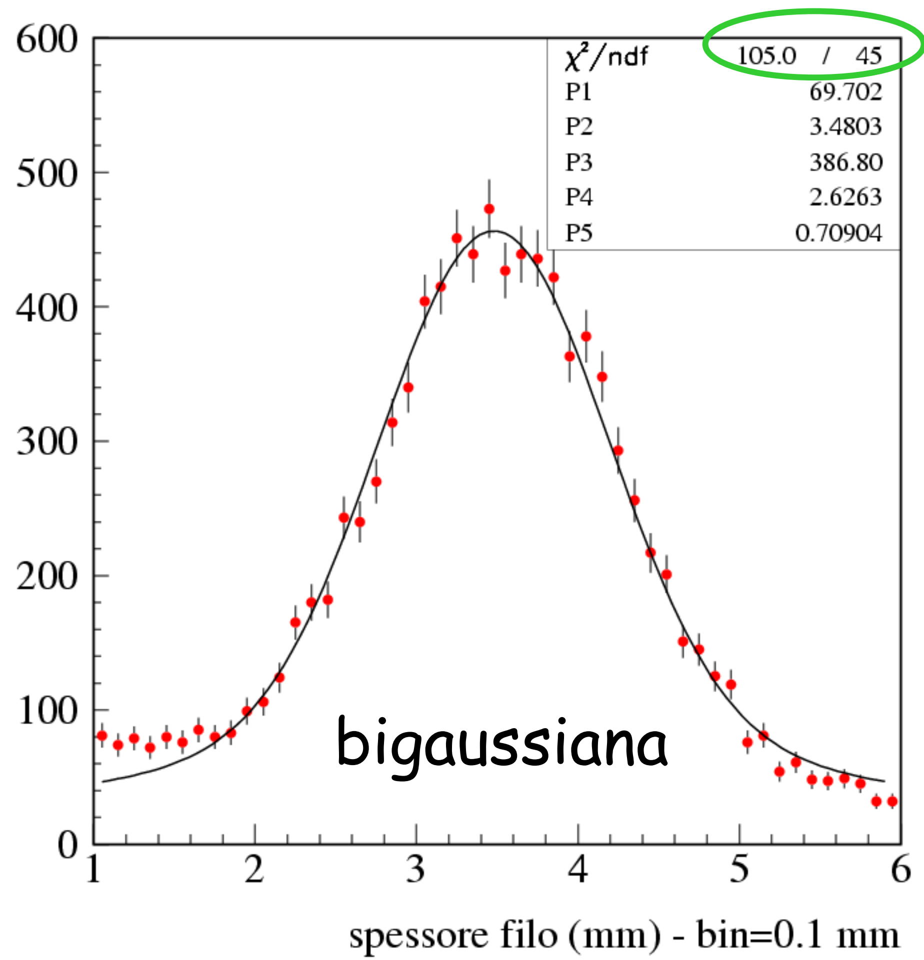
Disturbo di tipo non casuale, e dunque non gaussiano, ne' bigaussiano ...



Disturbo di tipo non casuale, e dunque non gaussiano, ne' bigaussiano ...

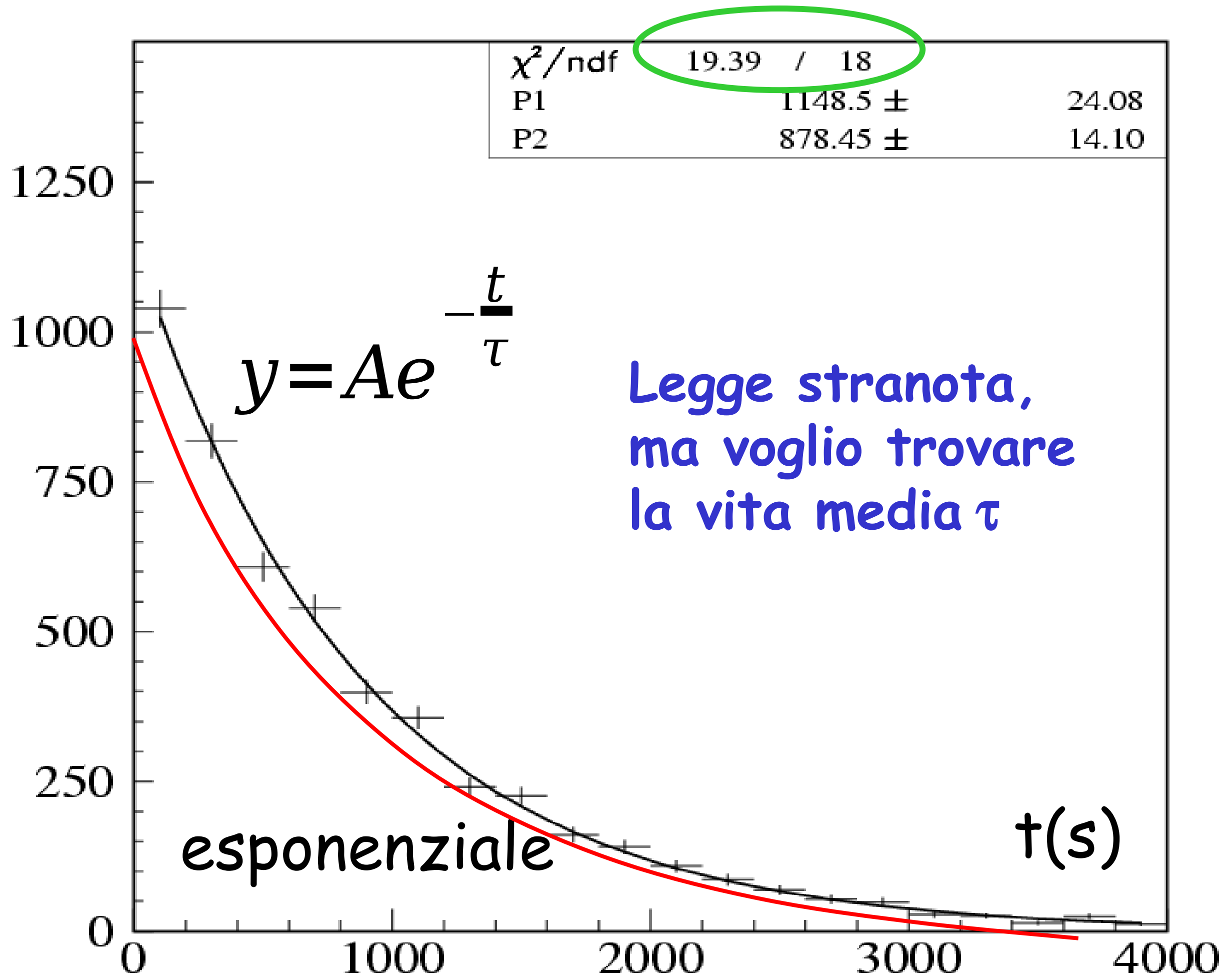
Spessore di un cavo elettrico (III)





Un fit non e' fatto sempre per verificare l'adattamento, ma per **trovare qualche parametro** *…*

Misura vita media



Legge stranota, ma voglio trovare la vita media τ

Quale e' il criterio per dire che un fit e' OK ?

• Se il fenomeno in studio e' ben noto, la funzione $y = f(x; \alpha, \beta)$ e' gia' decisa. Lo scopo del *fit* e' allora di determinare i valori dei parametri (α e β in questo caso) che corrispondono al **miglior adattamento della curva ai dati sperimentali** .

Quale e' il criterio per dire che un fit e' OK ?

- Se il fenomeno in studio e' ben noto, la funzione $y = f(x;\alpha,\beta)$ e' gia' decisa. Lo scopo del *fit* e' allora di determinare i valori dei parametri (α e β in questo caso) che corrispondono al **miglior adattamento della curva ai dati sperimentali** .

- I valori che corrispondono al miglior adattamento sono quelli che rendono minima la quantita' seguente :

valore **sperimentale**

valore **teorico**

$$\frac{\chi^2}{N-2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - f(x_i;\alpha,\beta)}{\sigma_i}\right)^2}{N-2}$$

Quale e' il criterio per dire che un fit e' OK ?

• Se il fenomeno in studio e' ben noto, la funzione $y = f(x; \alpha, \beta)$ e' gia' decisa. Lo scopo del *fit* e' allora di determinare i valori dei parametri (α e β in questo caso) che corrispondono al **miglior adattamento della curva ai dati sperimentali**.

• I valori che corrispondono al miglior adattamento sono quelli che rendono minima la quantita' seguente :

valore sperimentale

valore teorico

Van der Waals

$$\frac{\chi^2}{N-2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - f(x_i;\alpha,\beta)}{\sigma_i}\right)^2}{N-2}$$

$\sim 1 \rightarrow$ O.K. !

$> 1 \rightarrow$ K.O. !

4

La propagazione degli errori

Misure indirette, ovvero grandezze calcolate ...

Le misure indirette (I)

$$V = V_2 - V_1$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Misure indirette, ovvero grandezze calcolate ...

Le misure indirette (I)

$$V = V_2 - V_1$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

visione pessimistica :

$$\Delta V = \Delta V_2 + \Delta V_1$$

$$0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta r}{r}$$

Le misure indirette (I)

Misure indirette, ovvero grandezze calcolate ...

$$V = V_2 - V_1$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

visione pessimistica :

$$\Delta V = \Delta V_2 + \Delta V_1$$

$$0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta r}{r}$$

visione realistica :

$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_1^{\,2} + \Delta V_2^{\,2}}$$

$$\sqrt{0{,}2^2 + 0{,}2^2} = 0{,}28$$

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right) = \sqrt{\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a \oplus b$$

Le misure indirette (II)

1) $i = Q/t$

2) $K = \frac{1}{2} mv^2$

3) $m = m_1+m_2+m_3$

4) $A = \pi \cdot r^2$ cerchio

5) $p = p_1 + p_2$

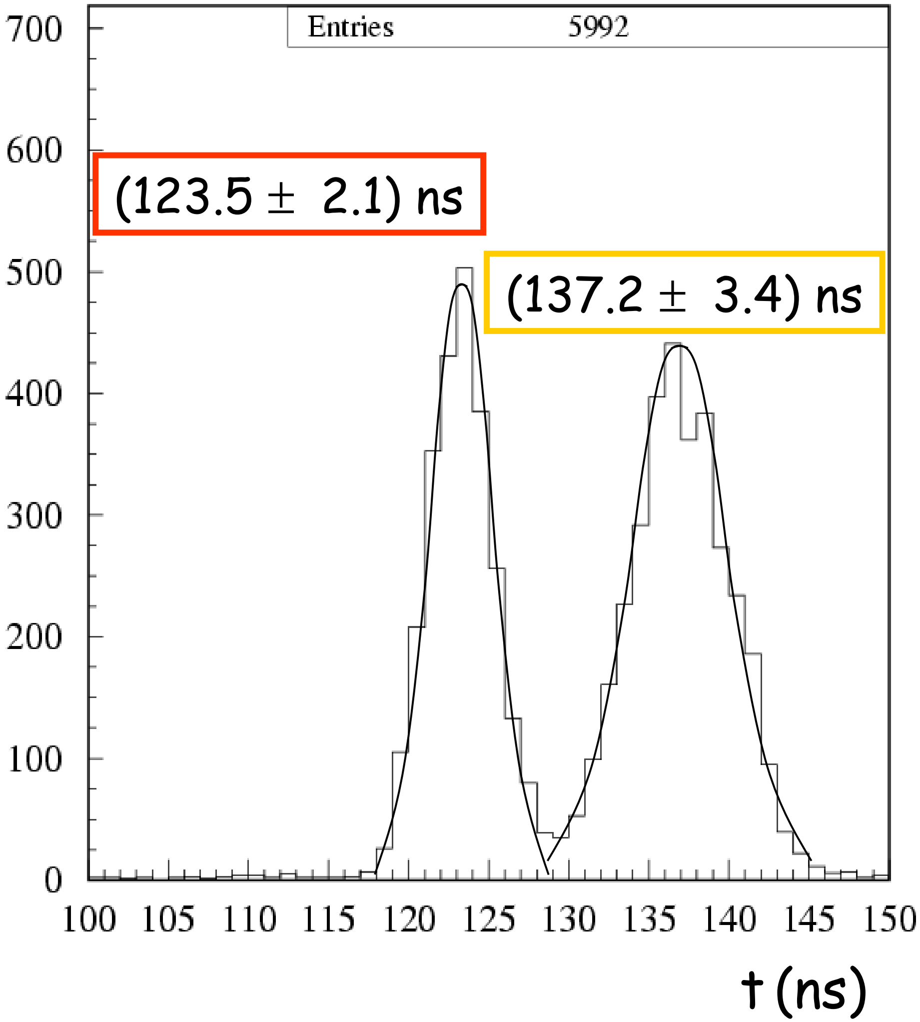
6) $I = \sigma \cdot A \cdot T^4$

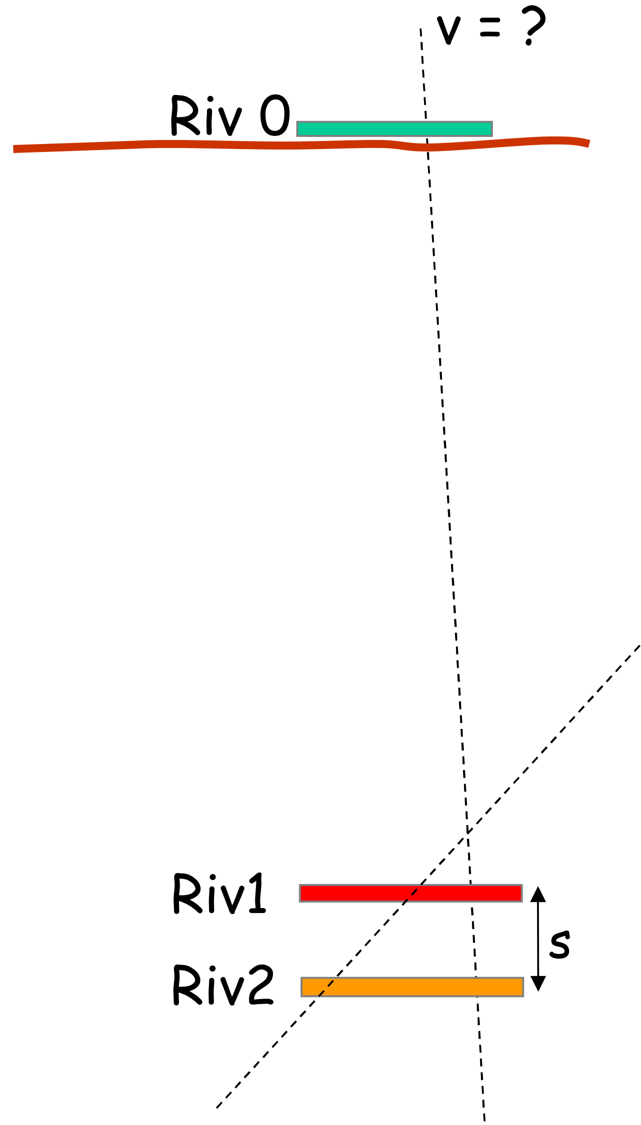
7) $Q = kS(T_2-T_1)/d$

corrente elettrica	$\frac{\Delta i}{i} = \frac{\Delta Q}{Q} \oplus \frac{\Delta t}{t}$
energia cinetica	$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta m}{m} \oplus 2\frac{\Delta v}{v}$
massa totale	$\Delta m = \Delta m_1 \oplus \Delta m_2 \oplus \Delta m_3$
area di un	$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta \pi}{\pi} \oplus 2\frac{\Delta r}{r}$
	$\Delta p = \Delta p_1 \oplus \Delta p_2$
pressione totale	$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta \sigma}{\sigma} \oplus \frac{\Delta A}{A} \oplus 4\frac{\Delta T}{T}$
potenza irradiata	$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta k}{k} \oplus \frac{\Delta S}{S} \oplus \frac{\Delta T_2 \oplus \Delta T_1}{T_2 - T_1} \oplus \frac{\Delta d}{d}$

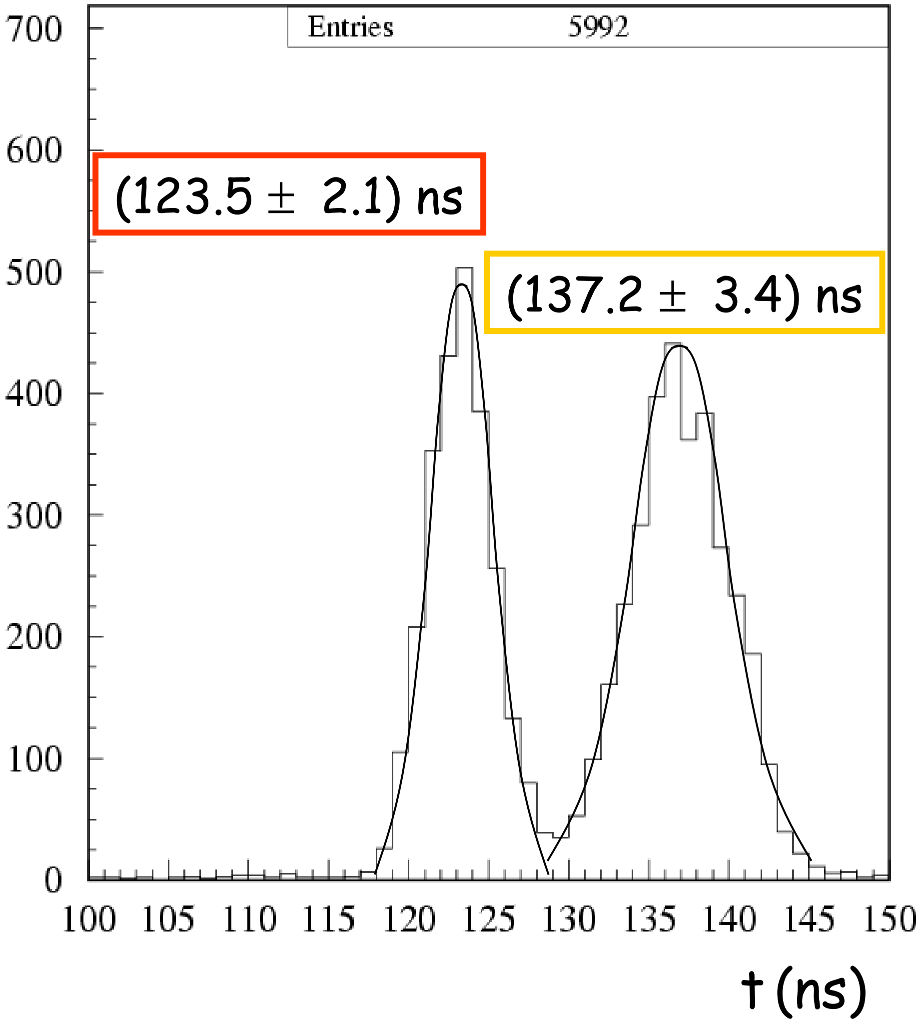
calore trasmesso

Esempio 1 (raggi cosmici)



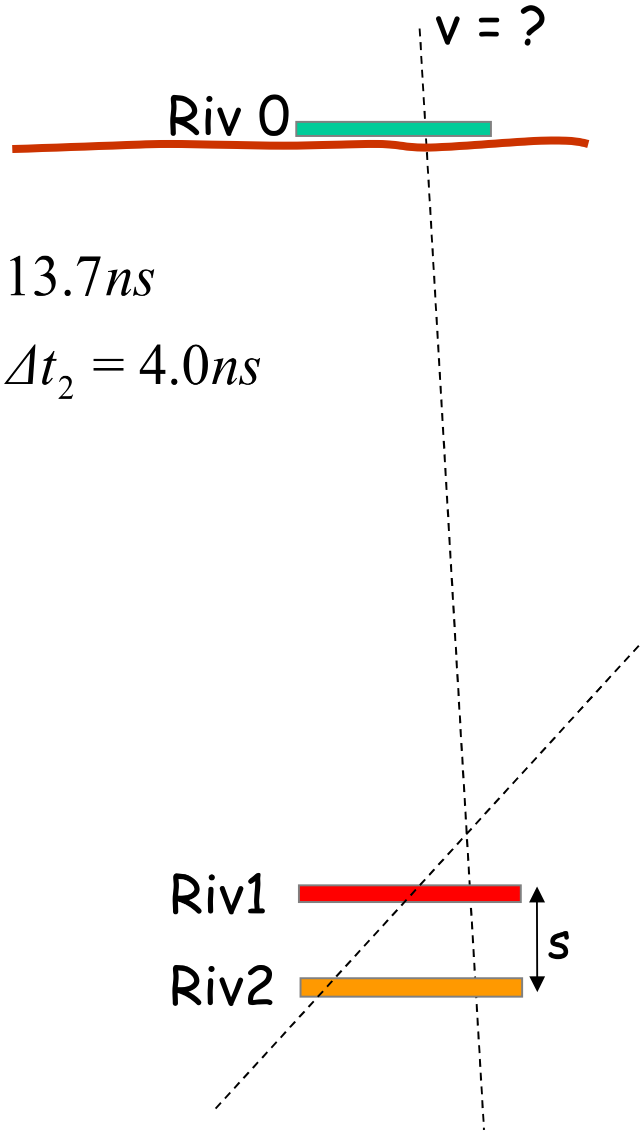


Esempio 1 (raggi cosmici)

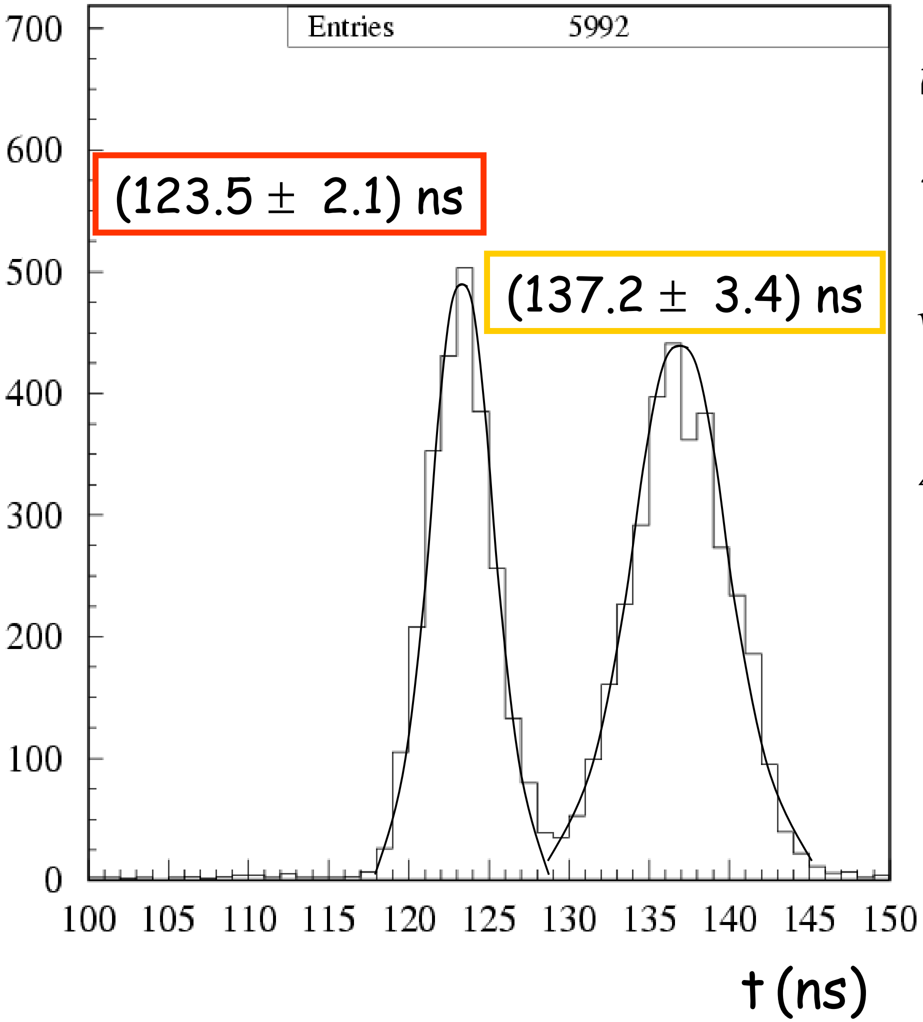


$$t_{12} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = 13.7ns$$

$$\Delta t_{12} = \Delta t_1 \oplus \Delta t_2 = 4.0ns$$



Esempio 1 (raggi cosmici)



$$t_{12} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = 13.7ns$$

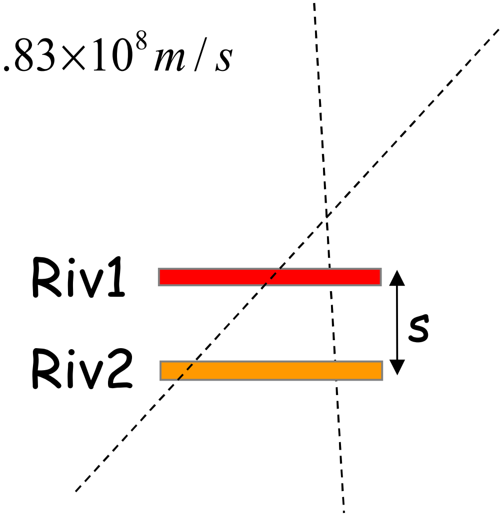
$$\Delta t_{12} = \Delta t_1 \oplus \Delta t_2 = 4.0ns$$

$$v = \frac{s}{t_{12}} = \frac{3.8m}{13.7\times 10^{-9}s} = 2.77\times 10^{8} m/s$$

$$\Delta v = v\left(\frac{\Delta s}{s} \oplus \frac{\Delta t_{12}}{t_{12}}\right) = 0.83\times 10^{8} m/s$$

~ 2%

~ 30%



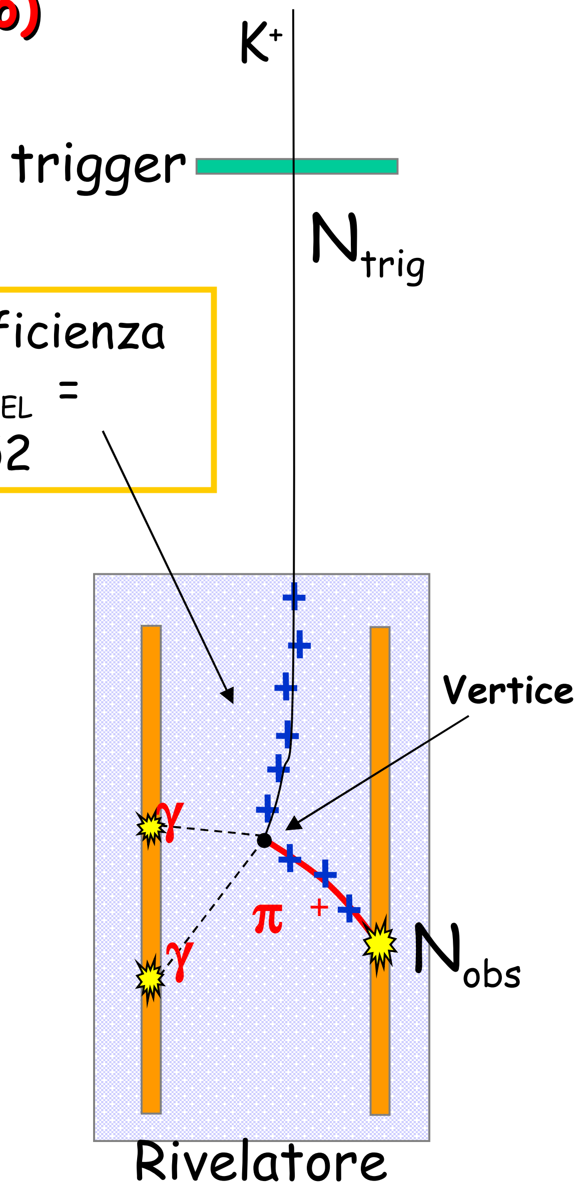
Esempio 2 (branching ratio)

$$K^+ \rightarrow \begin{cases} \pi^+ \pi^- \pi^+ \\ \pi^+ \pi^0 \pi^0 \\ \pi^0 \pi^+ \end{cases}$$

$\pi^0 \mu^+ \nu_\mu$

$\pi^0 e^+ \nu_e$

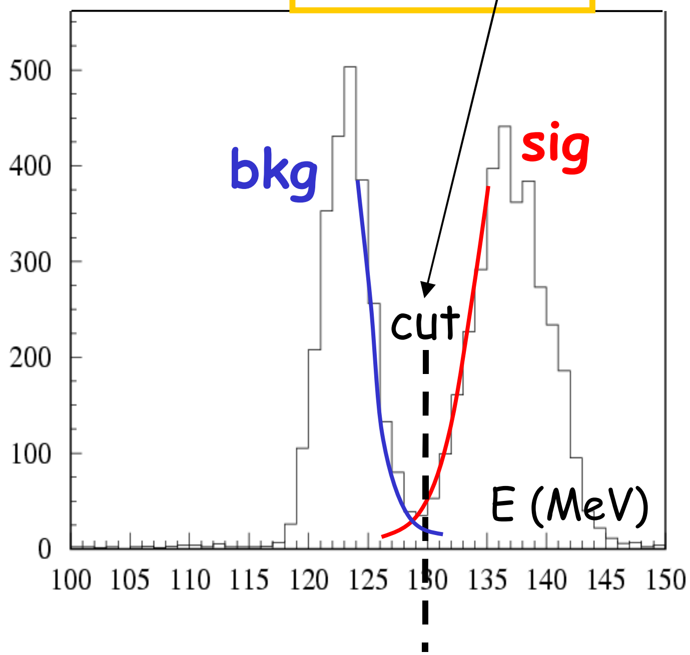
$\mu^+ \nu_\mu$



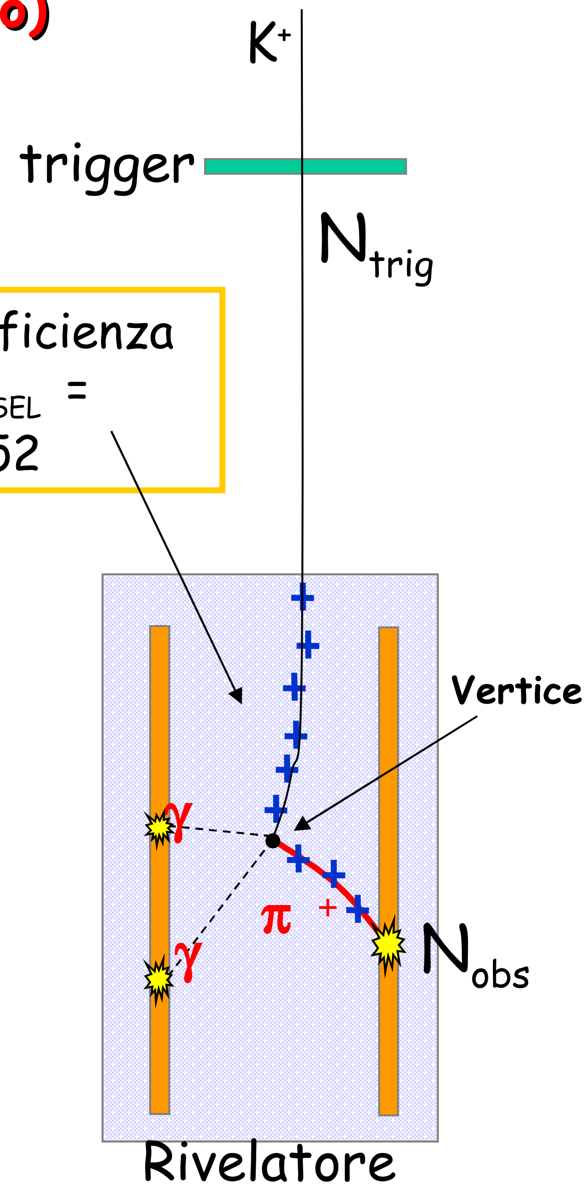
Esempio 2 (branching ratio)

$K^+ \rightarrow$
- $\pi^+ \pi^- \pi^+$
- $\pi^+ \pi^0 \pi^0$
- $\pi^0 \pi^+$
- $\pi^0 \mu^+ \nu_\mu$
- $\pi^0 e^+ \nu_e$
- $\mu^+ \nu_\mu$

Efficienza
ε_{CUT} = 0.94



Efficienza
ε_{SEL} = 0.52



Esempio 2 (branching ratio)

$K^+ \to$

$\pi^+ \pi^- \pi^+$

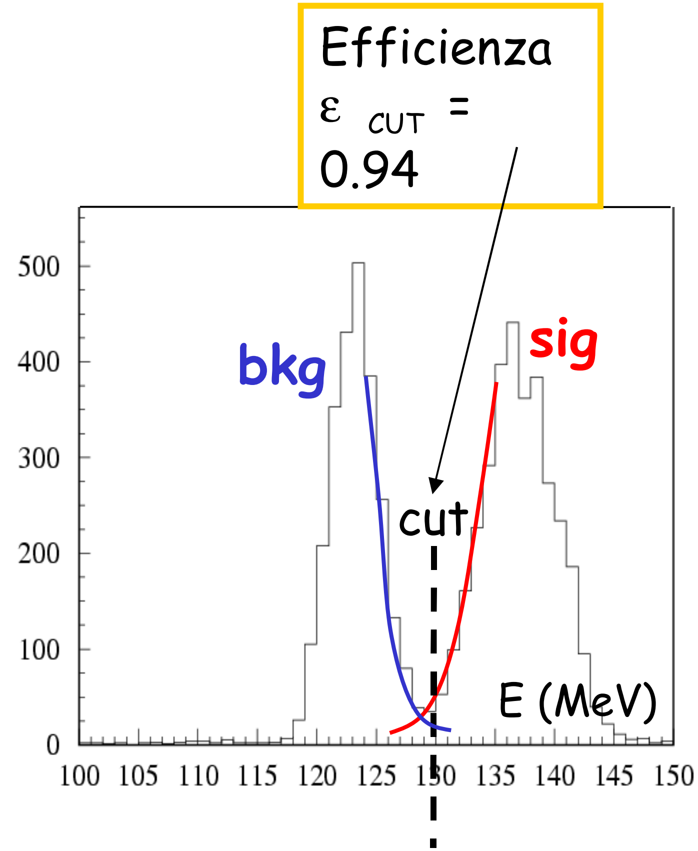
$\pi^+ \pi^0 \pi^0$

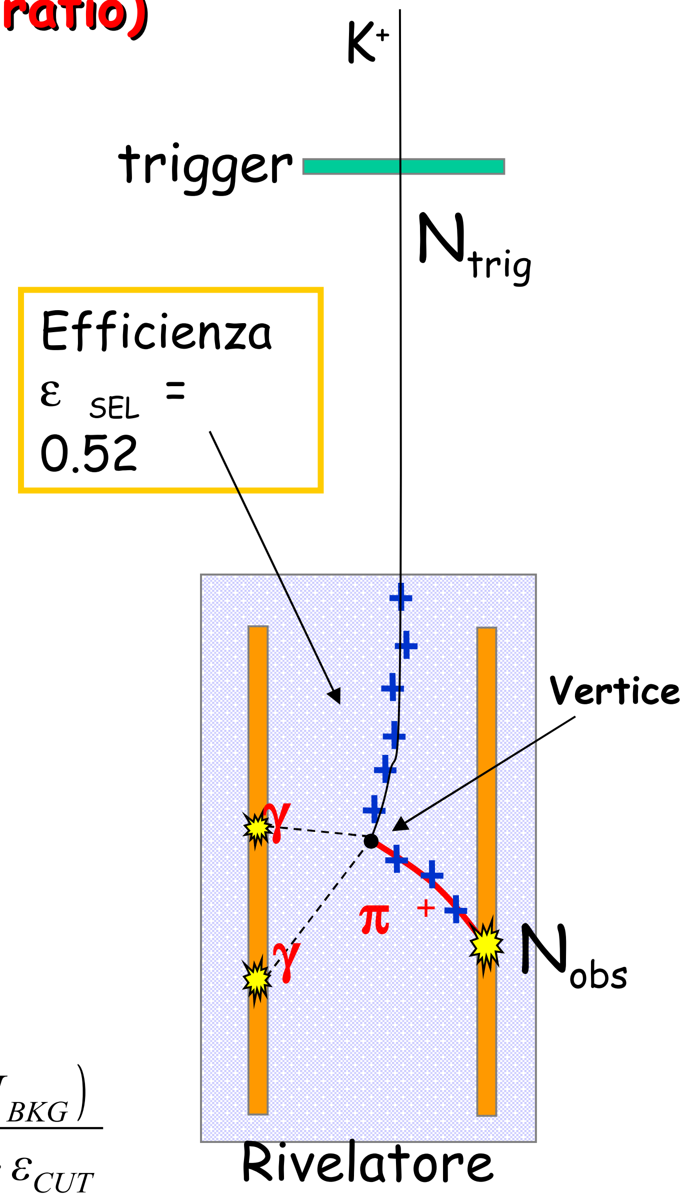
$\pi^0 \pi^+$

$\pi^0 \mu^+ \nu_\mu$

$\pi^0 e^+ \nu_e$

$\mu^+ \nu_\mu$





$$BR\left(K^+ \to \pi^0\pi^+\right) = \frac{N_{SIG}}{N_{trig}} = \frac{\dfrac{\left(N_{OBS} - N_{BKG}\right)}{\varepsilon_{SEL}\varepsilon_{CUT}}}{N_{trig}} = \frac{\left(N_{OBS} - N_{BKG}\right)}{N_{trig}\cdot\varepsilon_{SEL}\cdot\varepsilon_{CUT}}$$

5
Combinazione di misure

Scrivere i risultati

• Ogni misura, normalmente, riporta separatamente due errori: **statistico** e **sistematico** :

$$\mathbf{BR}\ (K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) = 0.21 \pm 0.01_{stat} \pm 0.02_{sist}$$

• La precisione della misura in questo esempio sara' :
$e_{BR} = \Delta_{BR}/BR = (0.01 \oplus 0.02)/0.21 \sim 0.11$

Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure ?
- Da più misure indipendenti del tipo $(x_i \pm \sigma_i)$ di una stessa grandezza, come si ricava il valore più attendibile ?

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{p_{tot}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{p_{tot}}}$$

$$\frac{1}{\sigma_i^2}$$

Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure ?
- Da più misure indipendenti del tipo ($x_i \pm \sigma_i$) di una stessa grandezza, come si ricava il valore più attendibile ?

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{p_{tot}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{p_{tot}}}$$

$$\frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$x_1 = (0.49 \pm 0.03) \rightarrow \mathrm{p}_1 = 1111$$

$$x_2 = (0.47 \pm 0.01) \rightarrow \mathrm{p}_2 = 10000$$

Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure ?
- Da più misure indipendenti del tipo $(x_i \pm \sigma_i)$ di una stessa grandezza, come si ricava il valore più attendibile ?

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{p_{tot}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{p_{tot}}}$$

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$x_1 = (0.49 \pm 0.03) \rightarrow p_1 = 1111$$

$$x_2 = (0.47 \pm 0.01) \rightarrow p_2 = 10000$$

$$\bar{x} = \frac{1111 \times 0.49 + 10000 \times 0.47}{11111} = 0.472 \qquad \sigma(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{11111}} = 0.009$$

$$x = (0.472 \pm 0.009)$$