

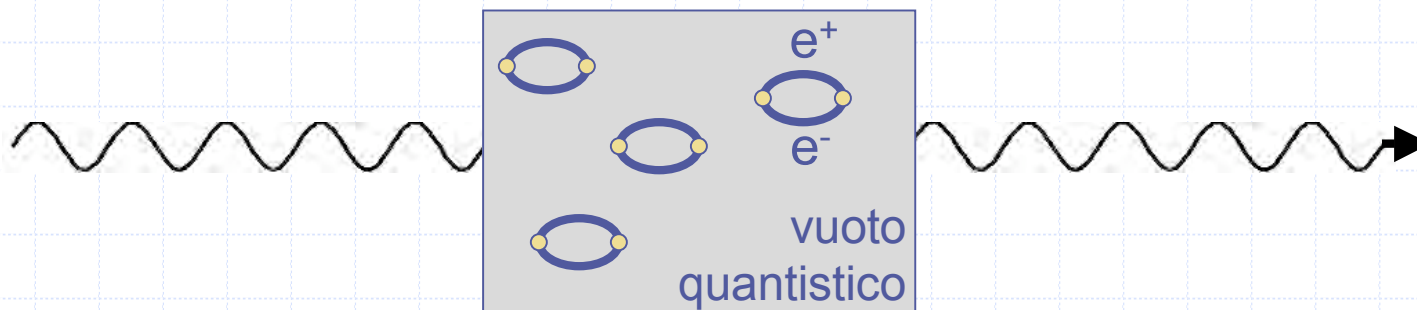
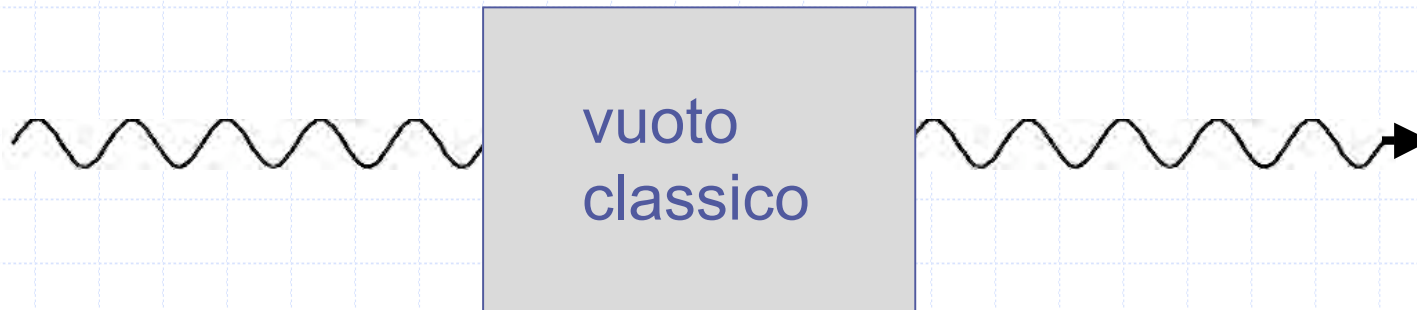


Tests di QED con raggi X di bassa energia

Edoardo Milotti
SPARX Workshop
LNF, May 9-10, 2005



Lagrangiane efficaci



Prendiamo il solito tensore del campo e.m. (metrica $-, +, +, +$, e inoltre $\hbar = c = 1$):

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il tensore duale:

$$\tilde{F}^{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon^{abcd} F_{cd}$$

possiamo allora costruire i seguenti invarianti:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab}$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4} F_{ab} \tilde{F}^{ab}$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \quad \mathcal{G} = \frac{1}{4} F_{ab} \tilde{F}^{ab} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Le richieste di Lorentz e gauge invarianza, e la richiesta che le equazioni contengano al più le derivate prime dei campi implicano che la Lagrangiana del campo e.m. debba essere proporzionale a \mathcal{F}

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

\mathcal{G} viene eliminato anche dalla richiesta che la teoria sia P-invariante, e quindi non ci possono essere potenze dispari di \mathcal{G}

Ci si aspetta che una teoria quantistica non sia lineare, quindi eliminiamo la richiesta di linearità.

Per ridurre il numero di invarianti supponiamo che i campi non siano troppo velocemente variabili, quindi continuiamo ad ignorare le derivate

$$\partial_c F_{ab} \approx 0$$

Si può dimostrare facilmente che valgono le relazioni

$$F_{ab}F^{cb} - \tilde{F}_{ab}\tilde{F}^{cb} = 2\mathcal{F}\delta_a^c \quad F_{ab}\tilde{F}^{cb} = \mathcal{G}\delta_a^c$$

Utilizzando queste formule si può quindi dimostrare che gli invarianti di terzo ordine si annullano e quindi le prime correzioni vengono dagli invarianti di quarto ordine, che sono

$$\mathcal{F}^2 \quad \mathcal{G}^2 \quad \mathcal{F}\mathcal{G}$$

ma l'ultimo termine viene eliminato dalla richiesta di parità della teoria

La Lagrangiana più generale che rispetta le invarianze Lorentz, di gauge e la parità, e contiene termini fino al quarto ordine nei campi è

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} + c_1 \mathcal{F}^2 + c_2 \mathcal{G}^2$$

e il risultato del calcolo QED è

$$c_1 = \frac{8\alpha^2}{45m^4}; \quad c_2 = \frac{14\alpha^2}{45m^4}$$

On Gauge Invariance and Vacuum Polarization

JULIAN SCHWINGER

Harvard University, Cambridge, Massachusetts

(Received December 22, 1950)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= -\mathfrak{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-m^2 s) \\
 &\quad \times \left[(es)^2 \mathfrak{G} \frac{\operatorname{Re} \operatorname{cosh} esX}{\operatorname{Im} \operatorname{cosh} esX} - 1 - \frac{2}{3} (es)^2 \mathfrak{F} \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) + \frac{2\alpha^2 (h/mc)^3}{45 mc^2} \\
 &\quad \times [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2] + \dots
 \end{aligned}$$

Conseguenze della Lagrangiana modificata

$$\varepsilon_{ij} \approx \delta_{ij} + c_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \delta_{ij} + 2c_2 B_i B_j$$

$$\varepsilon_{ij} \approx \delta_{ij} + \frac{4\alpha^2}{45m^4} \left[2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \delta_{ij} + 7B_i B_j \right] \quad (QED)$$

$$\mu_{ij} \approx \delta_{ij} - c_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \delta_{ij} + 2c_2 E_i E_j$$

$$\mu_{ij} \approx \delta_{ij} + \frac{4\alpha^2}{45m^4} \left[2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \delta_{ij} + 7E_i E_j \right] \quad (QED)$$

ci aspettiamo quindi modifiche in molte configurazioni di campo e anche alterazioni della velocità della luce

Birifrangenza elettromagnetica

$$F_{ab} \rightarrow F_{ab} + f_{ab}$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \frac{1}{4} (F_{ab} + f_{ab}) (F^{ab} + f^{ab}) \approx \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + \frac{1}{2} F_{ab} f^{ab}$$

$$\mathcal{G} \rightarrow \frac{1}{4} (F_{ab} + f_{ab}) (\tilde{F}^{ab} + \tilde{f}^{ab}) \approx \frac{1}{4} \tilde{F}_{ab} F^{ab} + \frac{1}{2} \tilde{F}_{ab} f^{ab}$$

inoltre, assumendo che sia $\partial_a f^{ab} = 0$ al primo ordine,
si trova che ci sono due modi di propagazione

Velocità dei due modi di propagazione

$$v_1 \approx 1 - c_1 l_2^2$$

$$v_2 \approx 1 - c_2 l_2^2$$

$$l_2^2 = \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B} \right)^2 - \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \mathbf{E} \right)^2$$

in particolare, se il campo elettrico è nullo

$$v_1 \approx 1 - c_1 B_{\perp}^2$$

$$v_2 \approx 1 - c_2 B_{\perp}^2$$

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{\Delta v}{c} = (c_2 - c_1) B_{\perp}^2 \\ &= \frac{2\alpha^2}{15m^4} B_{\perp}^2 \quad (QED) \end{aligned}$$

Photon splitting

VOLUME 25, NUMBER 15

PHYSICAL REVIEW LETTERS

12 OCTOBER 1970

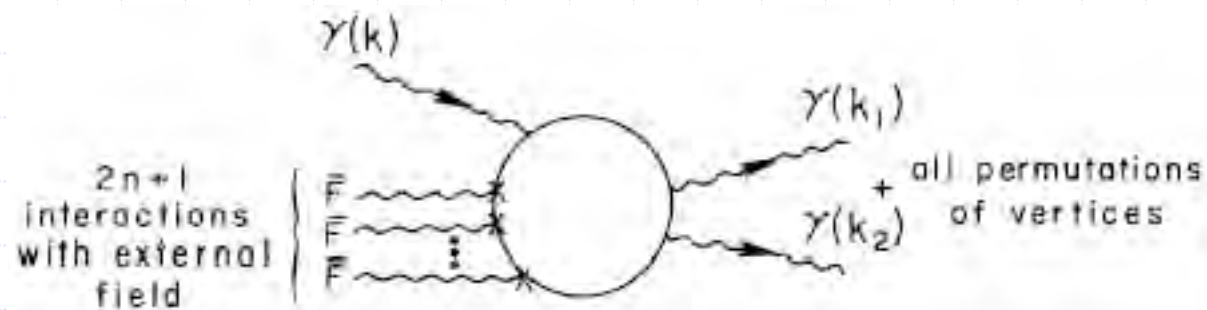
PHOTON SPLITTING IN A STRONG MAGNETIC FIELD

S. L. Adler, J. N. Bahcall,* C. G. Callan, and M. N. Rosenbluth

The Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540

(Received 6 August 1970)

We determine the absorption coefficient and polarization selection rules for photon splitting in a strong magnetic field, and describe the possible application of our results to pulsars.



il primo diagramma che contribuisce ha $n=1$, (esagono)

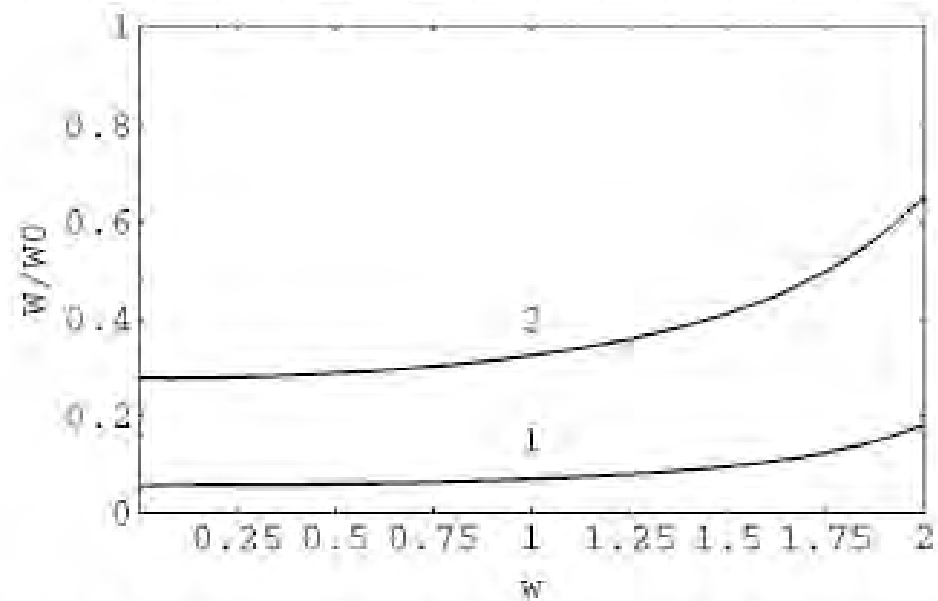


FIG. 2. The dependence of total probability W (in terms of W_0) on photon energy ($w = \omega/m$) for $H = H_0$ (curve 1) and $H = H_0/2$ (curve 2). The probability W_0 is given in the text.

Baier & al., PRL 77 (1996) 1691

$$H_0 = \frac{m^2 c^2}{e\hbar} \approx 4.41 \cdot 10^9 T$$

Un'importante alternativa al calcolo QED: la Lagrangiana di Born e Infeld

La motivazione iniziale per l'introduzione di questa Lagrangiana consisteva nel rendere realizzabile un'idea di Mie per eliminare la singolarità di campo di una carica puntiforme

$$\mathcal{L}_{mech.} = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right) = b^2 \left(1 - \sqrt{1 - mv^2/b^2}\right)$$

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \rightarrow \mathcal{L}_{BI}^{(1)} = b^2 \left(1 - \sqrt{1 - (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)/b^2}\right)$$

$$\mathcal{L}_{BI}^{(1)} = b^2 \left(1 - \sqrt{1 + F_{ab} F^{ab} / 2b^2} \right) = b^2 \left(1 - \sqrt{1 + 2\mathcal{F}/b^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BI} &= b^2 \left(1 - \sqrt{-\det(\eta_{ab} + F_{ab}/b)} \right) \\ &= b^2 \left(\sqrt{-\det(\eta_{ab})} - \sqrt{-\det(\eta_{ab} + F_{ab}/b)} \right) \\ &= b^2 \left(1 - \sqrt{1 + 2\mathcal{F}/b^2 - \mathcal{G}^2/b^4} \right) \\ &= b^2 \left(1 - \sqrt{1 + (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)/b^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2/b^4} \right) \end{aligned}$$

Born e Infeld avevano stimato $b \approx 10^{12}$ T

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BI} &= b^2 \left(1 - \sqrt{1 + (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)/b^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 / b^4} \right) \\ &\approx -\frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) + \frac{1}{8b^2} \left[(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right]\end{aligned}$$

La Lagrangiana di Born e Infeld non coincide
con quella del calcolo perturbativo QED

Esperimenti a bassa energia (luce visibile o IR)

EUROPEAN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH

Proposal D2
9 June 1980

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF VACUUM POLARIZATION EFFECTS
ON A LASER LIGHT-BEAM PROPAGATING IN A STRONG MAGNETIC FIELD

E. Iacopini, P. Lazeyras, M. Morpurgo, E. Picasso,
B. Smith and E. Zavattini

CERN, Geneva, Switzerland

and

E. Polacco

Università di Pisa, Italy

abbiamo visto prima che $\Delta n = \frac{2\alpha^2}{15m^4} B_{\perp}^2$

se si introduce il campo critico

$$B_c = \frac{m^2 c^2}{e\hbar} \approx 4.41 \cdot 10^9 T$$

si può scrivere:

$$\Delta n = \frac{\alpha}{30\pi} \left(\frac{B_{\perp}}{B_c} \right)^2 \approx 7.7 \cdot 10^{-5} \left(\frac{B_{\perp}}{B_c} \right)^2$$

e quindi, con un campo di circa 6T, $\Delta n \approx 1.7 \cdot 10^{-22}$

come si può osservare una differenza di indice di rifrazione così ridotta?

$$\Delta\varphi = kL\Delta n = \frac{2\pi}{\lambda} L\Delta n$$

allora, con $L \approx 10^5 \text{m}$, $\lambda \approx 1 \mu\text{m}$, si trova $\Delta\varphi \approx 10^{-10} \text{radianti}$

fattore di amplificazione
della cavità $\approx 10^5$

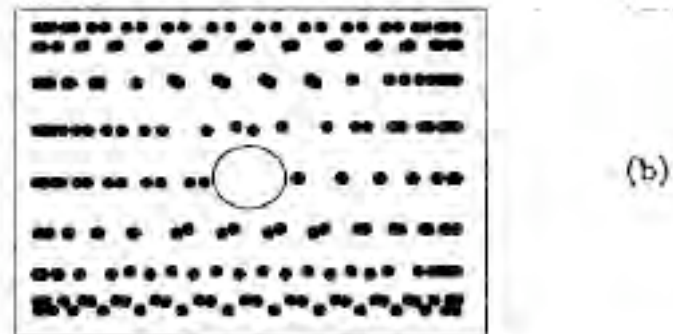
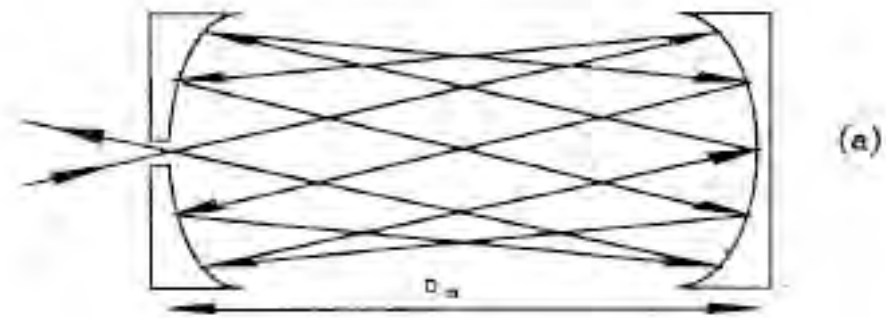
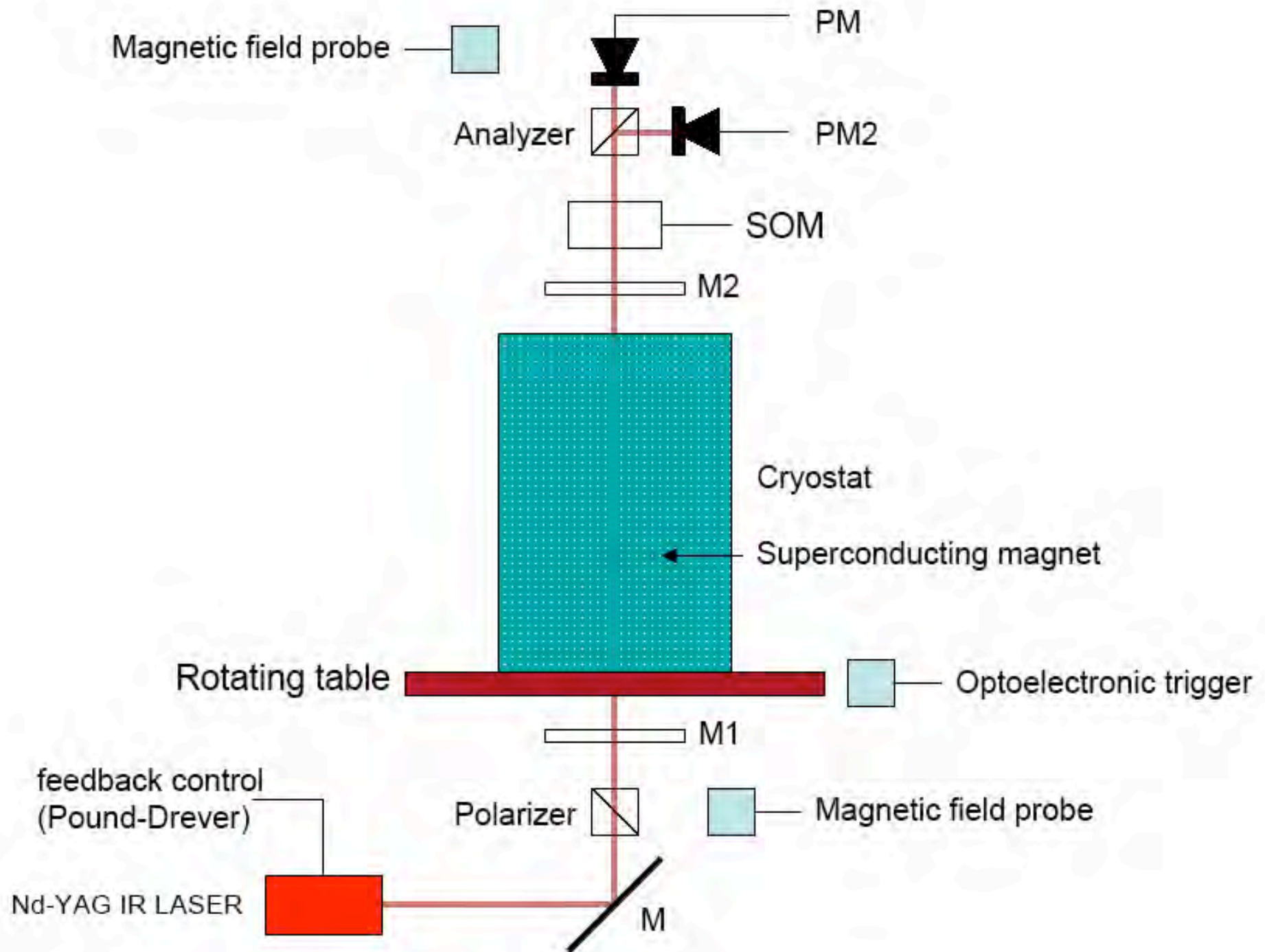


FIG. 5. (a) Delay line optical cavity for $n = 5$, $m = 1$. (b) Calculated impact points on the end mirror for a cavity with 460 traversals.



con una sensibilità $\sigma_\phi \approx 10^{-7} \frac{\text{radianti}}{\sqrt{\text{Hz}}}$

si raggiunge un rapporto S/N ≈ 1 in circa 10 giorni

In PVLAS la durata massima di un run è di circa tre ore, e in questo caso il rapporto segnale rumore (di origine puramente statistica) è ≈ 0.1

Test con una sorgente intensa di raggi X

$$\Delta\varphi = kL\Delta n = \frac{2\pi}{\lambda} L\Delta n = \frac{\alpha}{15} \left(\frac{B_{\perp}}{B_c} \right)^2 \frac{L}{\lambda}$$

per ottenere lo stesso effetto che PVLAS ottiene con fotoni da 1 eV, passando a fotoni da 1 keV, bisogna prendere $L \approx 100\text{m}$ (a parità di campo e senza cavità)

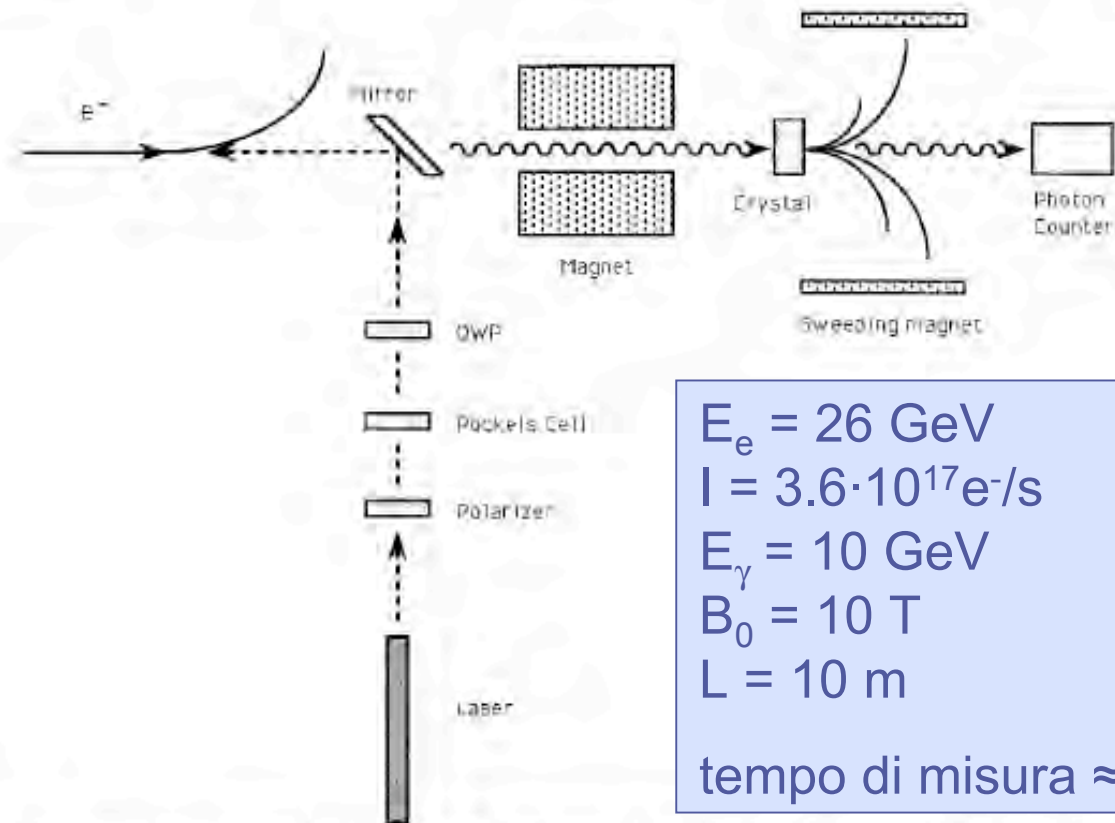
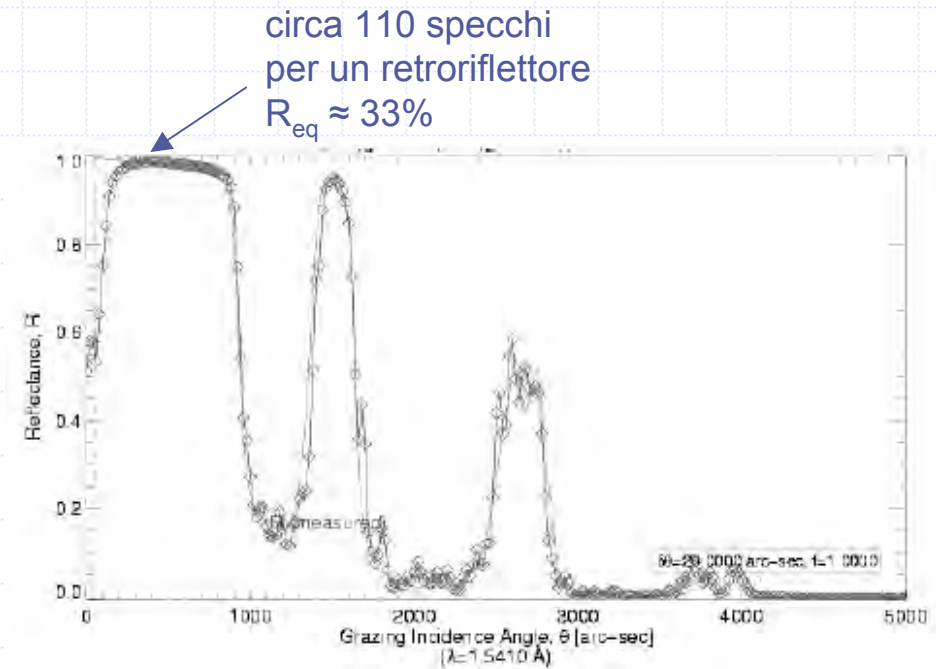
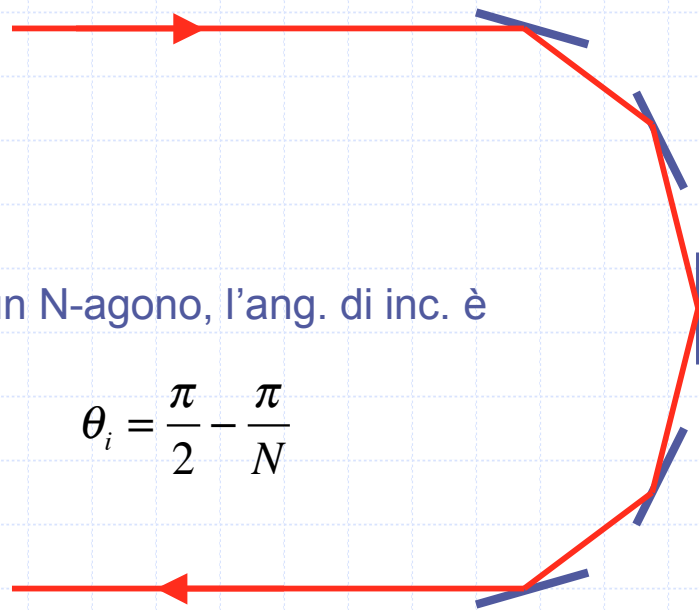


Fig. 2. Layout of the proposed experimental apparatus. A Pockels cell is also included: it allows to switch electrically between opposite circular polarization states.

Una possibilità: utilizzare specchi ad incidenza radente per costruire cavità multipass e riprodurre una struttura simile a LAS con raggi X a 1 keV

in un N-agono, l'ang. di inc. è

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}$$



D. Spiga et al.: "Development of multilayer coatings (Ni/C - Pt/C) for hard X-ray telescopes by e-beam evaporation with ion assistance", SPIE Proc. **5488**

Problemi:

- con ripetute riflessioni su specchi ad incidenza radente si seleziona uno stato di polarizzazione ben definito
- i polarizzatori a 1 keV hanno una qualità molto inferiore a quella dei polarizzatori per luce visibile

Attualità di un test di QED

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BI} &= b^2 \left(\sqrt{-\det(\eta_{ab})} - \sqrt{-\det(\eta_{ab} + F_{ab}/b)} \right) \\ &\rightarrow b^2 \left(\sqrt{-\det(g_{ab})} - \sqrt{-\det(g_{ab} + F_{ab}/b)} \right)\end{aligned}$$

Einstein & Kaufmann, Ann. Math. **59** (1954) 230

La Lagrangiana di BI compare in modo naturale in teorie di stringhe e supersimmetriche

LETTER TO THE EDITOR

Born–Infeld–Einstein actions?

S Deser^{†§} and G W Gibbons^{‡||}

[†] Department of Physics, Brandeis University, Waltham, Massachusetts 02254, USA

[‡] DAMTP, Cambridge University, Silver Street, Cambridge CB3 9EW, UK

Born–Infeld (BI) electrodynamics [1] has earned its longevity through its elegant, compact, determinantal form,

$$I_{\text{BI}} = -1/2 \lambda^2 \int d^4x \{-|g_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu}|\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

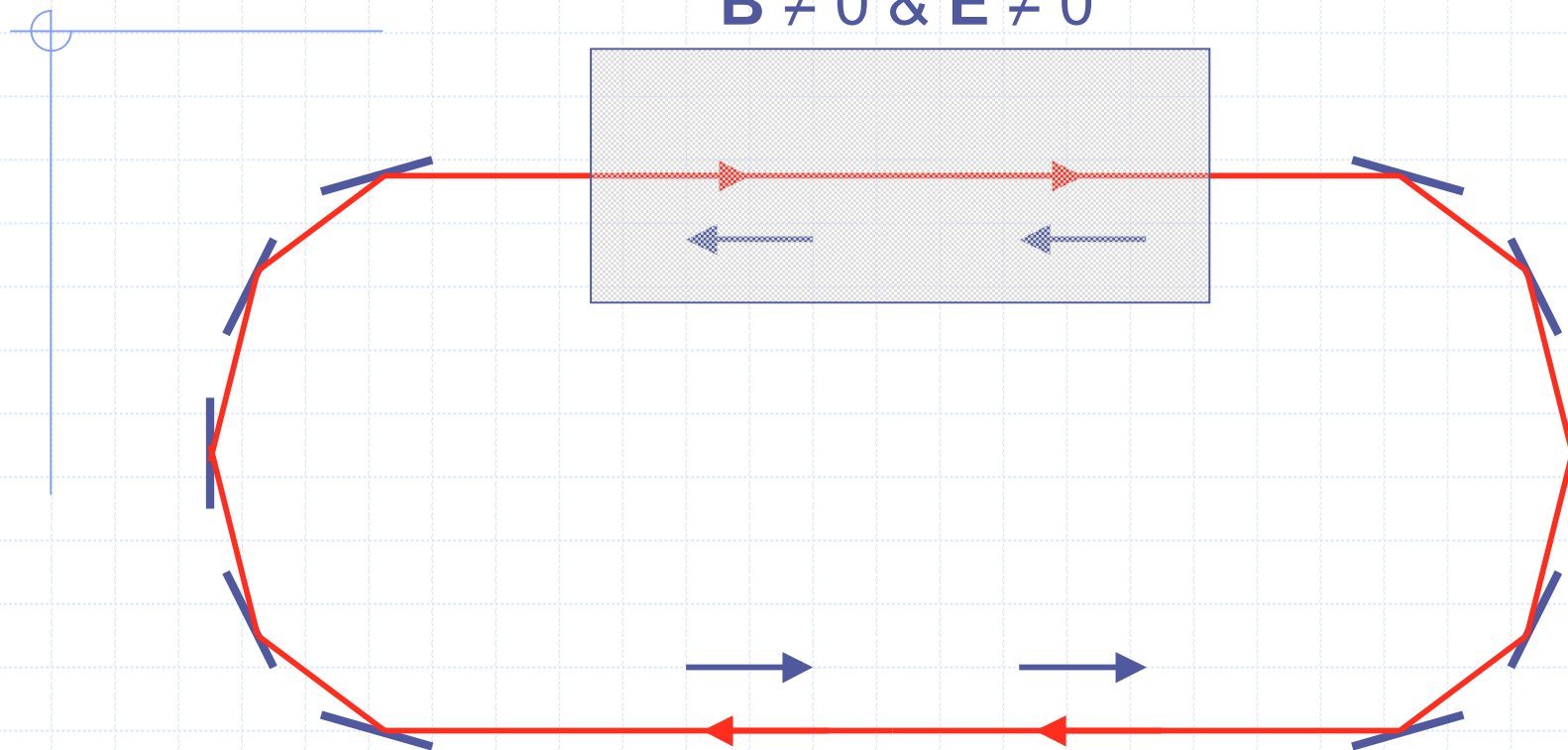
It reduces to Maxwell theory for small amplitudes and shares with it two special properties, duality invariance [2] and causal, physical propagation [3]. Its quartic terms reproduce the effective action of one-loop SUSY QED. Not surprisingly, it regularly surfaces in more general contexts, most recently in various aspects of strings, branes and M. A further asset of (1) is the absence of ghost photon modes that are associated with models involving explicit derivatives on quadratic terms. This means that its famous taming of the Coulomb self-energy is not obtained at the price of ghost compensation, but really stems from its nonpolynomial nature¶ and concomitant dimensional constant λ .

Nel 1970 Boillat (J. Math. Phys. 11 (1970) 941) ha dimostrato che la Lagrangiana di BI è la sola che produce un vuoto non-birifrangente (a parte la Lagrangiana non fisica $\mathcal{L} = \mathcal{F}/g$), e quindi se si rinuncia alla polarizzazione, si può comunque fare un test significativo ... ma un test di che cosa?

Denisov (PRD **61** (2000) 036004) ha mostrato che nel caso della Lagrangiana di BI

$$v_{\pm} = c \left\{ \pm \left[1 - \frac{1}{2b^2} (B_0^2 + E_0^2) - \frac{1}{2b^2 k^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)^2 - \frac{1}{2b^2 k^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 \right] \right. \\ \left. \pm \frac{1}{b^2 k} \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) E_0 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) B_0 \right] + \frac{1}{b^2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \right\}$$

e quindi la velocità di gruppo è sensibile alla direzione di propagazione



Questo richiede anche un campo elettrico elevato, e Denisov, nei suoi calcoli preliminari, prende $E \approx 60 \text{ MV/cm}$ e $B \approx 40 \text{ T}$.

Conclusioni (?):

Utilizzando una tecnologia vicina a quella degli acceleratori, e raggi X a 1 keV, una misura dei parametri della Lagrangiana non lineare del campo EM è probabilmente fattibile, ma al momento non è ancora chiaro che l'utilizzo dei raggi X sia superiore a quello della radiazione visibile o nel vicino IR.

Il test con il retroriflettore non riesce a distinguere tra Lagrangiana di BI e quella ottenuta dal calcolo QED perturbativo, a causa dell'insensibilità ad uno degli stati di polarizzazione.