8.5 INTEGRAZIONE DI FORME DIFFERENZIALI ESTERNE SU VARIETÀ: COMPLEMENTI

Con l'opera di É. Cartan (Élie, 1869-1951), Weyl (Hermann, 1885-1955), Morse (Marston, 1892-1977), de Rham (Georges, allievo di É. Cartan, 1903-1990), Hodge (William, 1903-1975), e poi di altri matematici delle generazioni successive (Grothendieck, Atyiah, Singer, ecc.), la geometria differenziale ha conosciuto ulteriori grandi progressi, proponendosi come una regione di confluenza tra le categorie dell'algebra, dell'analisi e della topologia (ad esempio intrecciandosi con la teoria delle equazioni differenziali). La teoria delle varietà differenziabili orientabili ed il calcolo su di esse con forme differenziali esterne sono espressioni di tali sviluppi unificanti.

D'altra parte, è indubitabile che il corpo della geometria differenziale *moderna* (diciamo, sviluppata dopo il terzo-quarto decennio del '900) presenti un interesse ancora marginale per il fisico matematico "medio" (almeno, per quello che si occupa di fisica macroscopica). Questo resta vero anche se teorie come quelle di de Rham e di Hodge hanno fornito una trattazione rigorosa e completa di questioni di indubbio interesse fisico-matematico-macroscopico che erano state fino ad allora considerate su basi in buona parte intuitive. Non viene con ciò tradita la nota regola secondo cui la matematica precede significativamente le scienze esatte che su di essa si modelleranno, in simmetria con l'altra regola secondo cui quelle stesse scienze agiscono come un potente stimolo sullo sviluppo della matematica stessa.

Tale situazione rende difficile decidere cosa sia opportuno aggiungere *qui*, a completamento di quanto se ne è già detto, intorno al calcolo differenziale e integrale con forme differenziali esterne su varietà orientabili e congruamente differenziabili. Ad esempio, gli sviluppi più generali e sistematici dell'analisi nel dominio degli operatori ellittici su varietà lisce sono certamente al di là dei confini che ci siamo imposti. Quanto segue in questa Sez. 8.5 si limita pertanto a trattare di alcune questioni di teoria delle forme esterne e della loro integrazione che abbiamo ritenuto di interesse per il fisico matematico (macroscopico) e che si possono ancora affrontare con strumenti relativamente semplici: in pratica, restando nell'ambito dell'analisi delle funzioni di più variabili reali usualmente qualificata come "standard". [1]

---

[1] Come è naturale, i trattati specializzati in teoria delle forme differenziali esterne enfatizzano (talvolta eccessivamente) l'importanza di queste ultime in competizione con il calcolo tensoriale, nel quadro generale dell'analisi su varietà e della fisica matematica che ne fa uso nei suoi modelli. In proposito, può essere utile menzionare alcune delle opere più note (a chi scrive), ordinate per data di pubblicazione: É. Cartan, v. Bibl. Gen. A, 1945; G. de Rham, v. Bibl. Gen. A, 1960; H. Flanders, v. Bibl. Gen. A, 1963; H. Cartan: "Formes differentielles", Hermann 1967; Y. Choquet-Bruhat: "Géometrie differentielle et systèmes extérieurs", Dunod 1968; H. Holmann, H. Rummler: "Alternierende Differentialformen", BI Wissenschaftsverlag 1972; S. Brehner, H. Haar: "Differentialformen u. Vektoranalysis", VEB Deutch. Wiss. 1973; E. Heil: "Differentialformen", BI Wissenschaftsverlag 1974; W. Slobodzinski "Exterior Forms and their Applications", Pol. Sci. Publ. 1976; C. Von Westenholz: "Differential Forms and their Applications", North Holland 1978. Utili informazioni si troveranno anche in: W. Hodge: "Theory and Applications of harmonic Integrals",

8.5.1) κ-FORME E DUALITÀ DI HODGE

Converrà cominciare tornando alla definizione dell'(n−κ)-tensore antisimmetrico duale di Hodge di un dato κ-tensore antisimmetrico in una varietà elementare pseudoriemanniana ${}^{r\geq 1}M^n \equiv M$ di cui alla (4.4.3, 20), avendo scelto come fattore di normalizzazione $\mathsf{N}_{n,\kappa} = (-1)^{\kappa(\kappa+1)/2}/(n-\kappa)!$ (v. (4.4.3, 23)). In virtù dell'isomorfismo tra κ-tensori antisimmetrici e κ-forme esterne, questa definizione si estende alle seconde, ad esempio facendo uso della loro 2ª rappresentazione canonica (v. la (4.4.2, 18)). Vale a dire, se

(1) $\nu_{(\kappa)}\, x_{(1)} .. x_{(\kappa)} = \sum_{\langle i\rangle} \nu_{i1\, ..\, i\kappa}\, x_{(1)}{}^{i1} \wedge .. \wedge x_{(\kappa)}{}^{i\kappa}$

(dove la somma è su $\langle i\rangle = \langle i_1, .., i_\kappa\rangle = \langle n,\kappa\rangle$-indice stretto, e i coefficienti $\nu_{i1\, ..\, i\kappa}$ sono antisimmetrici) è una κ-forma di partenza, si ha precisamente, per la sua duale di Hodge,

(2) $*\nu_{(\kappa)}\, y_{(1)} .. y_{(n-\kappa)} = \sum_{\langle j\rangle} \mu_{j1\, ..\, j(n-\kappa)}\, y_{(1)}{}^{j1} \wedge .. \wedge y_{(n-\kappa)}{}^{j(n-\kappa)}$,[2]

dove la somma è su $\langle j\rangle = \langle n,n-\kappa\rangle$-indice stretto, e dove

(3) $\mu_{j1\, ..\, j(n-\kappa)} =: \mathsf{N}_{n,\kappa} \sum_{\langle i\rangle} \sum_{\langle p\rangle} \nu_{p1\, ..\, p\kappa}\, g^{i1p1} .. g^{i\kappa p\kappa}\, e_{i1\, ..\, i\kappa\, j1\, ..\, j(n-\kappa)}{}^{1\, ..\, n} \sqrt{|g|}$.

Qui $\langle p\rangle$ è $\langle n,\kappa\rangle$-indice stretto, g_{hk} è il tensore fondamentale della varietà, g il suo determinante, e $e_{h1..hn}{}^{1\, ..\, n}$ è il solito simbolo di Kronecker generalizzato. Si noti che il 2° membro della (3) è uguale a $\mathsf{N}_{n,\kappa}\sum_{\langle i\rangle}\nu^{i1\, ..\, i\kappa}\varepsilon_{i1\, ..\, i\kappa\, j1\, ..\, j(n-\kappa)}$, dove $\varepsilon_{(n)}$ è il n-tensore (e non il n-pseudotensore) di Ricci se ci si limita a trasformazioni (1-diffeomorfe) equiverse delle coordinate; e che con questa sostituzione la (3) equivale alla (4.4.3, 20) più sopra menzionata.

Se in particolare la varietà in oggetto è lo spazio euclideo R^n e si usa una base ortonormale, allora $g_{hk} = \delta_{hk}$, e la (3) si semplifica nella

(4) $\mu_{j1\, ..\, j(n-\kappa)} = \mathsf{N}_{n,\kappa} \sum_{\langle i\rangle} \nu^{i1\, ..\, i\kappa}\, e_{i1\, ..\, i\kappa\, j1\, ..\, j(n-\kappa)}{}^{1\, ...\, n}$,

dove ovviamente $\nu^{i1\, ..\, i\kappa} \equiv \nu_{i1\, ..\, i\kappa}$; ovvero, la (2) diventa

(5) $*\nu_{(\kappa)}\, y_{(1)} .. y_{(n-\kappa)} = \mathsf{N}_{n,\kappa} \sum_{\langle i\rangle} \nu^{i1\, ..\, i\kappa} \sum_{\langle j\rangle} e_{i1\, ..\, i\kappa\, j1\, ..\, j(n-\kappa)}{}^{1\, ...\, n}\, y_{(1)}{}^{j1} \wedge .. \wedge y_{(n-\kappa)}{}^{j(n-\kappa)}$.

Alternativamente, partendo dalla $\nu_{(\kappa)}$ in 1ª rappresentazione canonica (v. la (4.4.2, 16))

(6) $\nu_{(\kappa)}\, x_{(1)} .. x_{(\kappa)} = \sum_{\langle\alpha\rangle} {}^{\circ}\nu_{\alpha 1\, ..\, \alpha\kappa}\, x_{(1)}{}^{\alpha 1} \wedge .. \wedge x_{(\kappa)}{}^{\alpha\kappa}$,

con $\langle\alpha\rangle = \langle\alpha_1, .., \alpha_\kappa\rangle = \langle n,\kappa\rangle$-indice strettamente ordinato, sempre in R^n e base ortonormale, e usando la normalizzazione $\mathsf{N}_{n,\kappa}$, si trova:

Cambridge Un. Press 1952; M. Spivak: "Calculus on Manifolds", Benjamin 1965; M. Spivak, vol I, v. Bibl. Gen. A, 1970.

[2] Il pedice $_{(\kappa)}$ in $\nu_{(\kappa)}$ nei primi membri delle (1, 2) e successive (5, 6) ecc., potrebbe qui considerarsi superfluo, ma lo abbiamo aggiunto per essere più espliciti in successive occasioni.

(7) $\quad *\nu_{(\kappa)}\, y_{(1)} .. y_{(n-\kappa)} = \sum_{\langle\beta\rangle} {}^\circ\mu_{\beta 1\, ..\, \beta(n-\kappa)}\, y_{(1)}{}^{\beta 1} \wedge .. \wedge y_{(\kappa)}{}^{\beta(n-\kappa)}$,

dove $\langle\beta\rangle = \langle\beta_1, .., \beta_{n-\kappa}\rangle$ è il $\langle n,n-\kappa\rangle$-indice strettamente ordinato complementare di $\langle\alpha\rangle$, e in luogo della (4) si deve usare la

(8) $\quad {}^\circ\mu_{\beta 1\, ..\, \beta(n-\kappa)} =: (-1)^{\Sigma\alpha}\, {}^\circ\nu_{\alpha 1\, ..\, \alpha\kappa}$,

dove l'esponente di -1 è un'abbreviazione per $\sum_{t=1}{}^{\kappa} \alpha_t$. La (8) è più semplice della (4), ma di essa meno suggestiva, perché la (4) lega tra loro (linearmente) le componenti $\mu_{j1\, ..\, j(n-\kappa)}$ e $\nu_{i1\, ..\, i\kappa}$ di due tensori antisimmetrici (un $(n-\kappa)$-tensore e rispettivamente un κ-tensore, il primo duale del secondo), mentre i coefficienti ${}^\circ\mu_{\beta 1\, ..\, \beta(n-\kappa)}$ e ${}^\circ\nu_{\alpha 1\, ..\, \alpha\kappa}$ nella (8) non possono qualificarsi allo stesso modo. Come sappiamo (v. S.sez. 4.4.3) applicando ad un κ-tensore antisimmetrico l'operatore $* \circ *$ si riproduce lo stesso κ-tensore moltiplicato per il fattore-segno $(-1)^{n(n+1)/2}$. Questo fatto riemerge nella (8), in quanto $\sum_{t=1}{}^{\kappa} \alpha_t + \sum_{s=1}{}^{n-\kappa} \beta_s = 1 + 2 + .. + n \equiv n(n+1)/2$ [3] in forza della complementarità. La definizione di $*\nu_{(\kappa)}$ attraverso le (2, 3) è carta-indipendente; quindi, se $M = R^n$, quella attraverso le (4,5), oppure attraverso le (7, 8), è base-indipendente. Questo significa che passando ad altra carta (o ad altra base), la risultante $*\nu_{(\kappa)}$ è la trasformata della vecchia forma nella nuova carta (o base).

In particolare, secondo la (5) (quindi sempre in R^n, ed in base ortonormale) la 0-forma $\nu_{(0)} \equiv \nu = 1$ ha come duale la n-forma $*1\, y_{(1)} .. y_{(n)}$; e questa, essendo $N_{n,0} = 1/n!$, è uguale a $(1/n!)\sum_{\langle j\rangle} e_{j1\, ..\, jn}{}^{1\, ..\, n}\, y_{(1)}{}^{j1} \wedge .. \wedge y_{(n)}{}^{jn} \equiv y_{(1)}{}^{1} \wedge .. \wedge y_{(n)}{}^{n}$. Similmente, sempre secondo la (5), si vede che la 1-forma $\nu_{(1)}x = \sum_{i=1}{}^{n} \nu_i x^i$ ha come duale la $(n-1)$-forma

(9) $\quad *\nu_{(1)}\, y_{(1)} .. y_{(n-1)} = -(1/(n-1)!)\sum_{\langle j\rangle}\sum_{p=1}{}^{n} \nu_p\, e_{p\, j1\, ..\, j(n-1)}{}^{1\, ...n}\, y_{(1)}{}^{j1} \wedge .. \wedge y_{(n-1)}{}^{j(n-1)}$,

dove $\langle j\rangle$ è $\langle n,n-1\rangle$-indice stretto. Si può allora provare che

(10) $\quad -(1/(n-1)!)\sum_{\langle j\rangle} e_{p\, j1\, ..\, j(n-1)}{}^{1\, ..\, n}\, y_{(1)}{}^{j1} \wedge .. \wedge y_{(n-1)}{}^{j(n-1)} = (-1)^p\, y_{(1)}{}^{1} \wedge .. \wedge y_{(p-1)}{}^{p-1} \wedge y_{(p)}{}^{p+1} \wedge .. \wedge y_{(n-1)}{}^{n}$

per ogni $1 \le p \le n$. La (10) è ovvia per $n = 1$ (quindi $p = 1$), perché da una parte $-\, e_1{}^1 = -1$ (1° membro della (10)) e dall'altra $(-1)^1 = -1$ (2° membro). La dimostrazione può allora procedere per induzione su n (lasciata al lettore). [4] Si conclude che

(11) $\quad *\nu_{(1)}\, y_{(1)} .. y_{(n-1)} = \sum_{p=1}{}^{n} (-1)^p\, \nu_p\, y_{(1)}{}^{1} \wedge .. \wedge y_{(p-1)}{}^{p-1} \wedge y_{(p)}{}^{p+1} \wedge .. \wedge y_{(n-1)}{}^{n}$.

---

[3] Per inciso, l'uguaglianza $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ ricorda il celeberrimo episodio dell'infanzia di Gauss narrato in tutte le sue biografie, e che ci permettiamo a nostra volta di riferire. Per tenerli quieti, il maestro aveva assegnato ai bimbi della sua classe il compito di sommare i primi cento numeri a partire da 1. Mentre i compagni cominciavano a diligentemente computare, il piccolo Karl (10 anni) forniva subito il risultato esatto (5050), avendo capito con un semplice ma ingegnoso ragionamento che esso era uguale al prodotto di 50 per 101.

[4] Procedendo ad una verifica diretta della (10) si ha, ad es. per $n = 2$ e $p = 1$: 1° membro (10) $= -\, e_{12}{}^{12}\, y_{(1)}{}^2 = -\, y_{(1)}{}^2$, 2° membro $= (-1)^1 x_{(1)}{}^2 = -\, x_{(1)}{}^2$. Similmente per $n = 2$ e $p = 2$ i due membri valgono entrambi $+\, x_{(1)}{}^1$, ecc.

I precedenti risultati si applicano senza problemi a forme differenziali esterne: ad esempio, nelle (1, 2) basta sostituire alle $x_{(1)}{}^{i1}$, .., $x_{(\kappa)}{}^{i\kappa}$, $y_{(1)}{}^{j1}$, .., $y_{(n-\kappa)}{}^{j(n-\kappa)}$ gli elementi della base cotangente dx^{i1}, .., $dx^{i\kappa}$, dx^{j1}, .., $dx^{j(n-\kappa)}$ della varietà. Partendo dalla κ-forma differenziale in 2ª rappresentazione canonica $\sum_{\langle i\rangle}\nu_{i1\,..\,i\kappa}dx^{i1}\wedge\,..\,\wedge dx^{i\kappa}$, si passa alla (n−κ)-forma differenziale duale $\sum_{\langle j\rangle}\mu_{j1\,..\,j(n-\kappa)}dx^{j1}\wedge$ .. .. $\wedge dx^{j(n-\kappa)}$ sostituendovi $\mu_{j1\,..\,j(n-\kappa)}$ mediante la (3). Se poi la κ-forma differenziale di partenza è $dx^1\wedge\,..\,\wedge dx^\kappa$, (in 1ª rappresentazione canonica, sempre nello spazio R^n e con base ortonormale), e si usano le (7, 8), si ottiene la duale come $(-1)^{\kappa(\kappa+1)/2}\,dx^{\kappa+1}\wedge\,..\,\wedge dx^n$. In particolare partendo dalla 1-forma differenziale pfaffiana $\nu_{(1)} = \sum_{i=1}{}^n \nu_i dx^i$, abbiamo:

(12) $\quad *\nu_{(1)} = \sum_{j=1}{}^n (-1)^j\,\nu_j\,dx^1\wedge\,..\,\wedge[[dx^j]]\wedge\,..\,\wedge dx^n.$

8.5.2) CODIFFERENZIAZIONE

Come si è già osservato, il fatto che gli spazi lineari $\Lambda^{0\le\kappa\le n}$ e $\Lambda^{n-\kappa}$ abbiano la stessa dimensione è una conseguenza della identità $C_n{}^\kappa = C_n{}^{n-\kappa}$, cfr. S.sez. 4.4.1. L'operatore lineare stella di Hodge $*$ stabilisce una corrispondenza *biunivoca* tra gli elementi di tali spazi, ed è quindi invertibile secondo le $*\colon \Lambda^\kappa \to \Lambda^{n-\kappa}$, $(*)^{-1}\colon \Lambda^{n-\kappa} \to \Lambda^\kappa$. Tutto questo è di pertinenza algebrica; ma acquista rilievo anche nell'*analisi* delle forme differenziali esterne attraverso l'introduzione di una operazione "duale" della differenziazione, la **codifferenziazione**.

La differenziazione (∂) di una κ-forma differenziale, definita mediante la (4.5.1, 3), fu introdotta da É. Cartan, anche se probabilmente era già nota a Frobenius parecchio tempo prima. Questa ∂ gode delle seguenti proprietà: (i) ∂ è lineare (sullo spazio lineare delle (0≤κ≤n)-forme di CdC h ≥ 1, sottospazio di Λ^κ, e produce una (κ+1)-forma di CdC h −1, quindi appartenente ad un sottospazio di $\Lambda^{\kappa+1}$); [5] (ii) applicata ad un prodotto wedge di forme, ∂ soddisfa la legge "para-leibniziana" (4.5.1, 8); (iii) applicata ad una 0-forma, ∂ produce il suo differenziale standard (una 1-forma); (iv) applicata due volte di seguito ad una κ-forma di (CdC ≥ 2), ∂ produce una (κ+2)-forma nulla (lemma di Poincaré). Le due proprietà (i,ii) caratterizzano ∂ come una **antiderivazione**.

L'opportunità di continuare a menzionare le classi di continuità (delle forme e della varietà) è ormai discutibile, e potremo evitare questo tipo di precisazione convenendo di limitarci a forme e varietà *lisce*, cioè (le une e le altre) di CdC ∞. Ciò non in quanto essa crei particolari difficoltà, ma

[5] Sarebbe dunque più appropriato scrivere ad es. $\partial^{(\kappa)}$ in luogo di ∂, e similmente (vedi più sotto) $\delta^{(\kappa)}$ in luogo di δ.

soltanto complicazioni banali. Conservando il simbolo Λ^κ per questo più ristretto significato, potremo dunque scrivere ∂: $\Lambda^\kappa \to \Lambda^{\kappa+1}$ senza preoccuparci d'altro. Ricordiamo (v. S.sez. 4.5.1) che ∂ è carta-indipendente, sebbene $\partial v_{i1\,..\,i\kappa}/\partial x^s$ non sia, in generale, la componente covariante di un (κ+1)-tensore antisimmetrico. (Se tuttavia nella espressione di $\partial v_{(\kappa)}$ si sostituisce $\partial v_{i1\,..\,i\kappa}/\partial x^s$ con il corrispondente oggetto completamente antisimmetrizzato rispetto ai suoi κ+1 indici, $\partial v_{[i1\,..\,i\kappa}/\partial x^{s]}$, la ($\kappa$+1)-forma così ottenuta coincide con l'originale $\partial v_{(\kappa)}$, e quindi tale $\partial v_{[i1\,..\,i\kappa}/\partial x^{s]}$ è covariante (esercizio).)

In una varietà elementare pseudoriemanniana (liscia), e per $0 \le \kappa \le n$, introdurremo ora il **codifferenziale** della κ-forma (liscia) $v_{(\kappa)}$, $\delta v_{(\kappa)}$, [6] come

(1) $\delta v_{(\kappa)} =: *\partial * v_{(\kappa)}$.

Se in particolare $\kappa = 0$, $*v_{(0)}$ è una n-forma, e quindi $\partial * v_{(0)} \equiv 0$ in quanto (n+1)-forma: il codifferenziale di una 0-forma è identicamente nullo. Poiché nella (1) sia i due operatori-stella che ∂ sono lineari, anche δ è lineare. È chiaro che, per $\kappa > 0$, δ trasforma una κ-forma in una ($\kappa-1$)-forma, ovvero che δ: $\Lambda^\kappa \to \Lambda^{\kappa-1}$; infatti la prima (da destra) $*$ porta ad una (n$-\kappa$)-forma, la ∂ ad una (n$-\kappa$+1)-forma, e infine la seconda $*$ ad una (n$-$(n$-\kappa$+1))-forma = ($\kappa-1$)-forma. (Quanto al caso $\kappa = 0$, per quanto abbiamo visto più sopra le cose vanno come se una forma di grado "negativo" sia identicamente nulla, in simmetria con quanto accade per una forma di grado maggiore di n.) In conclusione ∂ e δ sono operatori lineari "reciproci": il primo eleva di una unità il grado della forma operanda mentre il secondo lo riduce di altrettanto. Posto $C =: (-1)^{n(n+1)/2}$, si vede subito che insieme con la $*\partial* = \delta$ vale la duale $*\delta* = \partial$. Infatti $*\delta* = **\partial** = C^2\partial = \partial$. [7]

Sotto le assunte condizioni, il codifferenziale di una ($0\le\kappa\le n$)-forma è unicamente definito dalle (8.5.1, 2 e 3), e dunque è naturale proporsi di studiarne le proprietà su questa base. Se ci si chiede tuttavia − ad esempio − come si esprima il codifferenziale di un prodotto wedge, si constata che il suo calcolo è laborioso, perché occorre tener conto della presenza del tensore fondamentale della varietà nella (3) all'atto della derivazione esterna ∂. Quindi nell'espressione generale del

---

[6] Con notazione più conveniente, si potrebbe scrivere ∂* in luogo di δ; ma la δ è più comoda, ed è ormai entrata nell'uso.

[7] Il lettore ha certamente notato, a proposito di κ-forme e κ-catene, una sorta di "difetto di simmetria" tra la derivazione (∂) delle prime, che produce (κ+1)-forme, e la **bordificazione** ((∂) ≡ passaggio alla frontiera) delle seconde, che produce ($\kappa-1$)-catene. In certo senso, la coderivazione (δ), in luogo della derivazione (∂), ristabilisce l'equilibrio; ma allora, per simmetria, si intuisce la possibilità di introdurre una conveniente operazione sulle catene che produca (κ+1)-catene a partire da κ-catene (**cobordificazione**). Questo è precisamente quanto avviene nella teoria omologica assiomatica, con l'introduzione dell'operatore lineare cosiddetto "di cobordismo", che si denota (δ). Va da sé che con tale teoria siamo in piena Topologia Algebrica.

codifferenziale figurano linearmente le derivate prime (standard) del tensore fondamentale. Ma se ancora $M = R^n$ e si opera in una base ortonormale ($g^{ik} = \delta^{ik}$), il risultato è immediatamente accessibile. Si verifica infatti (esercizio) che in tali condizioni una legge "paraleibniziana" vale anche per δ, come è vero per ∂ in una qualsiasi varietà (anche priva di connessione) e in coordinate generali. Vale a dire, se ν è una κ-forma e ν' è una κ'-forma,

(10) $\delta(\nu\wedge\nu') = \delta\nu\wedge\nu' + (-1)^\kappa \nu\wedge\delta\nu'$.

Il calcolo del codifferenziale della 1-forma pfaffiana $\nu_{(1)} = \sum_{i=1}^n \nu_i dx^i$ si effettua facilmente mediante la (8.5.1, 12). Prendendone la ∂, si trova (con [[ ]] ≡ simbolo soppressore)

(11) $\partial{*}\nu_{(1)} = \sum_{j=1}^n (-1)^j \partial\nu_j/\partial x^j\, dx^1\wedge .. \wedge[[dx^j]]\wedge .. \wedge dx^n \equiv -\sum_{j=1}^n \partial\nu_j/\partial x^j\, dx^1\wedge .. \wedge dx^n$.

Sempre con $C = (-1)^{n(n+1)/2}$, la duale di questa n-forma è la 0-forma $-\,C\sum_{j=1}^n \partial\nu_j/\partial x^j$. Quindi il codifferenziale della anzidetta pfaffiana è (in R^n e in una base ortonormale) il prodotto di $-\,C$ per la divergenza del vettore di componenti ν_j.

Ricordando che $** = C\,\mathrm{Id}$ (v. S.sez. 4.4.3), una proprietà di δ che si giustifica subito, e che vale senza limitazioni, è quella espressa dalla

(12) $\delta\circ\delta \equiv \delta^2 = *\partial**\partial* = C*\partial^2* = 0$,

(in forza del lemma di Poincaré e in simmetria con il lemma stesso). Segue quindi che

(13) $(\partial+\delta)^2 = \partial^2 + \partial\delta + \delta\partial + \delta^2 \equiv \partial\delta + \delta\partial$.

La (13) propone all'attenzione l'operatore lineare del 2° ordine $\Delta =: \partial\delta + \delta\partial$ (due volte la parte simmetrica di $\partial\delta$, o di $\delta\partial$), i cui due addendi lasciano, ciascuno per suo conto, invariato il grado della forma su cui agiscono. Esso si dice operatore **di Laplace-Beltrami**, e gioca un ruolo importante nella moderna geometria differenziale. Si ha anche, sempre in forza della $\partial^2 \equiv 0$,

(14_1) $\partial*\delta = \partial**\partial* = C\partial^2* \equiv 0$,

(14_2) $\delta*\partial = *\partial**\partial = C*\partial^2 \equiv 0$.

Inoltre,

(15_1) $\partial\delta* = \partial*\partial** = C\partial*\partial = **\partial*\partial = *\delta\partial$.

Da questa, agendo prima a sinistra e poi a destra (o viceversa) con $*$, si ha la simmetrica:

(15_2) $*\partial\delta = \delta\partial*$. [8]

In conseguenza delle precedenti,

---

[8] La (15_2) può anche giustificarsi partendo dalla $\partial = *^{-1}\delta*^{-1}$, simmetrica della (1). Si ha $\partial\delta = *^{-1}\delta*^{-1}*\partial* = *^{-1}\delta\partial*$, e quindi la ($15_2$) agendo a sinistra con $*$.

(16) $\quad *\Delta = *(\partial\delta + \delta\partial) = *\partial\delta + *\delta\partial = \delta\partial* + \partial\delta* = (\delta\partial + \partial\delta)* = \Delta*$;

vale a dire, l'operatore Δ, che lascia invariato il grado della forma su cui agisce, commuta con la stella $*$.

La identificazione esplicita dell'operatore Δ in una varietà pseudoriemanniana e in coordinate generali è un po' laboriosa; ma potremo accontentarci di farlo nel solito caso elementare di R^n e in una base ortonormale ($g^{ik} = \delta^{ik}$). Basterà limitarsi alla κ-forma differenziale monomia $\nu_{(\kappa)} = \nu(x)dx^1\wedge .. \wedge dx^\kappa$, con $\nu(x)$ di classe C^2. Mediante procedure ormai familiari, si trova (esercizio):

(17₁) $\quad (1/C)\delta\partial\nu_{(\kappa)} = -\sum_{j=1}^{\kappa} \partial^2\nu/\partial x^j\partial x^j\, dx^1\wedge .. \wedge dx^\kappa -$

$$- (-1)^\kappa \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{s=\kappa+1}^{n} (-1)^j\, \partial^2\nu/\partial x^s\partial x^j\, dx^s\wedge dx^1\wedge .. \wedge[[dx^j]]\wedge .. \wedge dx^\kappa;$$

e similmente,

(17₂) $\quad (1/C)\partial\delta\nu_{(\kappa)} = -\sum_{s=\kappa+1}^{n} \partial^2\nu/\partial x^s\partial x^s\, dx^1\wedge .. \wedge dx^\kappa +$

$$+ (-1)^\kappa \sum_{s=\kappa+1}^{n} \sum_{j=1}^{\kappa} (-1)^j\, \partial^2\nu/\partial x^j\partial x^s\, dx^s\wedge dx^1\wedge .. \wedge[[dx^j]]\wedge .. \wedge dx^\kappa.$$

Sommando, risulta dunque:

(18) $\quad \Delta\nu_{(\kappa)} = -C\sum_{i=1}^{n} \partial^2\nu/\partial x^i\partial x^i\, dx^1\wedge .. \wedge dx^\kappa$;

ovvero, $\Delta\nu_{(\kappa)}$ uguaglia la κ-forma differenziale monomia di partenza con la ν sostituita da $\sum_{i=1}^{n} \partial^2\nu/\partial x^i\partial x^i$, e moltiplicata per il fattore-segno $-C$. [9] La conclusione, a questo punto banale, è che passando alla generica κ-forma differenziale $\nu_{(\kappa)} = \sum_{\langle i\rangle}\nu_{i1\,..\,i\kappa}\, dx^{i1}\wedge .. \wedge dx^{i\kappa}$ (in 2ª rappresentazione canonica, e dove $x^1, .., x^n$ sono coordinate cartesiane ortogonali), l'operatore Δ la trasforma nella κ-forma $-C\sum_{\langle i\rangle}\sum_{j=1}^{n} \partial^2\nu_{i1\,..\,i\kappa}/\partial x^j\partial x^j\, dx^{i1}\wedge .. \wedge dx^{i\kappa}$; ovvero, la trasforma nella κ-forma di partenza con $\nu_{i1\,..\,i\kappa}$ sostituita da $\sum_{j=1}^{n} \partial^2\nu_{i1\,..\,i\kappa}/\partial x^j\partial x^j$, e moltiplicata per $-C$.

Come ben ci si aspetta, l'analogo calcolo costa alquanta più fatica se riferito ad una generica varietà pseudoriemanniana e a coordinate generali. Ad ogni modo, (si dimostra che) il risultato consta di due addendi, dei quali il primo è $-C\sum_{\langle i\rangle} (\nu_{i1\,..\,i\kappa/j}{}^{j})\, dx^{i1}\wedge .. \wedge dx^{i\kappa} \equiv -C\nu_{(\kappa)/j}{}^{j}$ ($_{/j}{}^{j}$ essendo l'usuale laplaciano in coordinate generali), e il secondo contiene linearmente il tensore di curvatura della varietà. Questo asserto costituisce il **teorema di Weitzenbök**. Una forma $\nu_{(\kappa)}$ soddisfacente la ($^+$) $\Delta\nu_{(\kappa)} = 0$ in un aperto di M si dice ivi **Δ-armonica** [10]. Abbiamo dunque due diverse accezioni di "armonicità" delle κ-forme. La prima accezione (**∇^2-armonicità**) parte dal corrispondente κ-tensore

---

[9] Alcuni autori definiscono Δ come $-(\partial\delta + \delta\partial)$, forse per evitare il segno meno nella (18).

[10] L'originale definizione di Hodge è più forte: $\nu_{(\kappa)}$ è armonica se è al contempo $\partial\nu_{(\kappa)} = 0$ e $\delta\nu_{(\kappa)} = 0$. Che da questa condizione scenda la $\Delta\nu_{(\kappa)} = 0$ è ovvio. Di seguito, ci atterremo alla definizione data nel testo, che (si dimostra) equivale alla definizione di Hodge sse le forme sono a supporto compatto.

antisimmetrico, ed è definita dalla $(\ldots)_{/i}{}^{i} = 0$ (tra parentesi, la componente del tensore). [11] La seconda accezione si riferisce invece direttamente alla κ-forma, ed è definita dalla ($^{+}$). Alla luce del teorema di Weitzenbök, le due definizioni differiscono in generale [12] , ma coincidono nel solito caso elementare di R^n e base ortonormale, in cui il tensore di curvatura è identicamente nullo.

Come una forma (differenziale) si dice "chiusa" in un punto se è ivi nullo il suo differenziale (∂) (cfr. S.sez. 4.5.1), una forma si dice **cochiusa** in un punto se è ivi nullo il suo codifferenziale (δ). Similmente, come una κ-forma (differenziale) si dice "esatta" (o "omologa a zero") in un aperto se è ivi uguale al differenziale di una $(\kappa-1)$-forma, una κ-forma si dice **coesatta** (o "coomologa a zero") se è ivi uguale al codifferenziale di una $(\kappa+1)$-forma. In forza della $\delta^2 \equiv 0$, come l'essere esatta (per una forma) implica l'essere chiusa, l'essere coesatta implica l'essere cochiusa. Due forme di grado uguale si dicono **omologhe** [**coomologhe**] tra loro, in un dato aperto, se la loro differenza è ivi esatta [coesatta]. La precedente espressione "tra loro" è giustificata dal fatto che la relazione di omologia [di coomologia] è una relazione di equivalenza, e quindi è simmetrica (esercizio).

8.5.3) Il "problema ∂ - δ"

Nella S.sez. 5.2.3 ci siamo diffusamente occupati del seguente problema del "rotore-divergenza" (in R^3, e in un dominio compatto semplicemente connesso $X \subset R^3$ con contorno ∂X abbastanza regolare): "determinare (se esiste) un campo vettoriale $v = v(x \in X)$ soddisfacente alle $\nabla \times v = \omega$, $\nabla \cdot v = \theta$ in X, per ω e θ dati in X abbastanza regolari e sotto la $\nabla \cdot \omega = 0$, possibilmente sotto opportune condizioni addizionali sul contorno ∂X che lo rendano unico". Il "problema ∂-δ" di cui al titolo di questa sottosezione è una generalizzazione del problema rot-div che si enuncia come segue: "date una $(\kappa+1)$-forma chiusa $\lambda_{(\kappa+1)}$ ed una $(\kappa-1)$-forma cochiusa $\mu_{(\kappa-1)}$ con comune supporto (aperto) compatto $X \subset M^n$, determinare (se esiste) una κ-forma $\nu_{(\kappa)}$ soddisfacente in X alle

(1_1) $\quad \partial\nu_{(\kappa)} = \lambda_{(\kappa+1)}$,

(1_2) $\quad \delta\nu_{(\kappa)} = \mu_{(\kappa-1)}$,

sotto eventuali condizioni che rendano la soluzione unica."

---

[11] Ricordiamo che se il tensore operando è uno scalare f, $f_{/i}{}^{i} = |g|^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \partial(|g|^{1/2} f^{/i})/\partial x^i$.

[12] Che l'operatore $_{/i}{}^{i}$ non possa contenere il tensore di curvatura è intuitivamente evidente. Infatti come sappiamo quest'ultimo nasce dalla considerazione della parte *antisimmetrica* di $_{/ik}$, mentre $_{/i}{}^{i} \equiv {}_{/ik}g^{ik}$ coinvolge soltanto la parte *simmetrica* di $_{/ik}$.

Gli oggetti a 2° membro delle (1), la $(\kappa+1)$-forma chiusa $\lambda_{(\kappa+1)}$ e la $(\kappa-1)$-forma cochiusa $\mu_{(\kappa-1)}$, sono i "dati forzanti" del problema. Essi sono assegnabili sotto i vincoli $\partial^2\lambda_{(\kappa+1)} = 0$ e rispettivamente $\delta^2\mu_{(\kappa-1)} = 0$ derivanti dal lemma di Poincaré, e per il resto ad arbitrio. Studieremo qui appresso questo problema ∂-δ quando $M^n = R^n$ (e per brevità, con $n > 2$), dimostrando costruttivamente che la soluzione esiste ed è unica sotto una naturale condizione all'infinito. (Lo stesso problema, riferito ad una generica varietà n-dim liscia, anche elementare, sarebbe alquanto più difficile da trattare.)

In virtù della linearità, possiamo suddividere il problema in due sue versioni particolari: la prima ("problema I"), in cui è $\lambda_{(\kappa+1)} \equiv 0$ in X, e la seconda ("problema II"), in cui è $\mu_{(\kappa-1)} \equiv 0$ in X. Cominciamo con il problema I, cioè con il sistema $\partial\nu_{(\kappa)} = 0$, $\delta\nu_{(\kappa)} = \mu_{(\kappa-1)}$ sotto $\delta\mu_{(\kappa-1)} = 0$.

I) Trascurando ormai, quando superfluo, di scrivere i pedici in ν, λ e μ, usiamo la 1^a rappresentazione canonica per μ secondo la $\mu = \mu[\xi] = \sum_{\langle\alpha\rangle} \mu_{\langle\alpha\rangle}(\xi)\, d\xi^{\alpha 1}\wedge .. \wedge d\xi^{\alpha(\kappa-1)}$, dove $\xi \equiv \equiv \langle\xi^1, .., \xi^n\rangle$ sono coordinate cartesiane ortogonali, e $\langle\alpha\rangle$ è un $\langle n,\kappa-1\rangle$-indice strettamente ordinato. Nella S.sez. 5.2.3, vedi in particolare la (5.2.3, 1), abbiamo introdotto il potenziale coulombiano "di volume". Poniamo dunque, per $n > 2$,

(2) $\varphi_{(\kappa-1)}[\xi] =: \sum_{\langle\alpha\rangle} (\int_X \mu_{\langle\alpha\rangle}(x)\, |\xi-x|^{2-n} d(x))\, d\xi^{\alpha 1}\wedge .. \wedge d\xi^{\alpha(\kappa-1)}$,

dove $d(x)$ sta per $dx^1 .. dx^n$, X è il comune supporto delle funzioni $\mu_{\langle\alpha\rangle}$, e gli integrali a 2° membro sono appunto potenziali coulombiani di volume. Nel seguito, per brevità sottintenderemo il pedice $_{(\kappa-1)}$ in φ. Vogliamo calcolare $\delta\varphi[\xi]$. Abbiamo innanzitutto:

(3) $*\varphi[\xi] = \sum_{\langle\beta\rangle} (\int_X \mu^*_{\langle\beta\rangle}(x)\, |\xi-x|^{2-n} d(x))\, d\xi^{\beta 1}\wedge .. \wedge d\xi^{\beta(n-\kappa+1)}$,

dove $\langle\beta\rangle$ è il $\langle n,n-\kappa+1\rangle$-indice strettamente ordinato complementare a $\langle\alpha\rangle$, e $\mu^*_{\langle\beta\rangle}$ sta per $(-1)^{\Sigma\alpha}\mu_{\langle\alpha\rangle}$ con l'esponente $^{\Sigma\alpha}$ di (-1) uguale ora a $\sum_{t=1}^{\kappa-1}\alpha_t$. Questa $*\varphi$ è una $(n-(\kappa-1))$-forma. La successiva ∂, tenendo conto che è lecita la derivazione sotto il segno (v. S.sez. 5.2.3, punto (b)), porta a

(4) $\partial*\varphi[\xi] = -\sum_{\langle\beta\rangle} \sum_{i=1}^n (\int_X \mu^*_{\langle\beta\rangle}(x)\partial|\xi-x|^{2-n}/\partial x^i d(x))\, d\xi^i\wedge d\xi^{\beta 1}\wedge .. \wedge d\xi^{\beta(n-\kappa+1)}$,

dove il segno $-$ compensa il fatto che la derivazione di $|\xi-x|^{2-n}$ è fatta rispetto a x^i invece che rispetto a ξ^i. L'integranda $\mu^*_{\langle\beta\rangle}(x)\partial|\xi-x|^{2-n}/\partial x^i$ nella (4) può scriversi $\partial(\mu^*_{\langle\beta\rangle}(x)|\xi-x|^{2-n})/\partial x^i - - |\xi-x|^{2-n}\partial\mu^*_{\langle\beta\rangle}/\partial x^i$. Integrato rispetto a $x \in X$, il contributo di contorno del primo termine è nullo perché μ è a supporto compatto.

Quanto al secondo termine, esso ha a fattore $\sum_{\langle\beta\rangle} \sum_{i=1}^n \partial\mu^*_{\langle\beta\rangle}/\partial x^i\, d\xi^i\wedge d\xi^{\beta 1}\wedge .. \wedge d\xi^{\beta(n-\kappa+1)}$, cioè $\partial*\mu[\xi]$ calcolato per $\xi = x$ $(\in X)$, $(\partial*\mu[\xi])|_{\xi=x}$. Ma anche quest'ultimo oggetto è nullo, in quanto

$0 \equiv \delta\mu = *\partial*\mu$, e $*$ è invertibile. In conclusione $\partial*\varphi[\xi] = 0$, e quindi anche $\delta\varphi[\xi] = 0$. Poniamo ora, restaurando per un momento il pedice in φ,

(5) $\nu_{(\kappa)} =: C\partial\varphi_{(\kappa-1)}/((n-2)G_{n-1})$

dove G_{n-1} è la J-misura della sfera (n−1)-dim di raggio 1 (cfr. S.sez. 5.2.3, punto (a)). Mostriamo che tale $\nu_{(\kappa)}$ risolve il problema ∂-δ di tipo I. Da una parte $\partial\nu_{(\kappa)} = 0$ in X, come richiesto. Dall'altra, $\delta\nu_{(\kappa)} = C\delta\partial\varphi/((n-2)G_{n-1})$. Ora $\delta\partial\varphi = (\Delta-\partial\delta)\varphi \equiv \Delta\varphi$ perché, come abbiamo appena mostrato, $\delta\varphi \equiv 0$. Segue che $\delta\nu_{(\kappa)} = \Delta\varphi C/((n-2)G_{n-1})$. Dalla S.sez. 5.2.3, punto (c), sappiamo che $\nabla^2\varphi = - \mu(n-2)G_{n-1}$;[13] e inoltre, sappiamo (v. S.sez. 8.5.2) che in R^n e in base ortonormale, è $\nabla^2 = - C\Delta$. In definitiva $\delta\nu_{(\kappa)} = -\nabla^2\varphi/((n-2)G_{n-1}) = \mu$ in X, come richiesto. È così stata costruita una soluzione del problema I. #

II) La trattazione del problema II, cioè del sistema $\delta\nu = 0$, $\partial\nu = \lambda$ sotto $\partial\lambda = 0$, è ormai molto semplice. Risulta $\delta*\lambda = *\partial**\lambda = C*\partial\lambda = 0$. Secondo quanto abbiamo mostrato studiando il problema I, esiste ed è costruibile una (n−κ)-forma ψ per cui $\delta\psi = *\lambda$ e $\partial\psi = 0$. Affermiamo che una soluzione del problema II è $\nu_{(\kappa)} = *\psi$ (si noti che $*\psi$ è effettivamente una κ-forma). Infatti, da una parte abbiamo $\delta\nu_{(\kappa)} = \delta*\psi = *\partial**\psi = C*\partial\psi = 0$. Dall'altra, $\partial\nu_{(\kappa)} = \partial*\psi = *^{-1}\delta*^{-1}*\psi = *^{-1}\delta\psi = \lambda$. Con questo, la dimostrazione è conclusa. #

I teoremi di esistenza per i problemi I e II sono stati così dimostrati in modo costruttivo. Ovviamente, la soluzione dell'originario problema ∂-δ è la somma delle soluzioni dei problemi I e II, e così il teorema di esistenza è dimostrato anche per quello. Ci poniamo adesso il problema dell'unicità della soluzione costruita. Supponiamo che esistano due soluzioni ν e ν' del problema ∂-δ; allora per la loro differenza $\nu^* = \nu' - \nu$ deve aversi $\partial\nu^* = 0$, $\delta\nu^* = 0$, e quindi $\Delta\nu^* = 0$ in tutto R^n; cioè ν^* deve essere Δ-armonica in R^n. Poiché la Δ-**armonicità** e la ∇^2-**armonicità** coincidono in R^n e in una base ortonormale (il caso al quale ci siamo riferiti), ν^*, o meglio i suoi coefficienti $\nu^*_{\langle\alpha\rangle}$, devono essere ∇^2-armonici, cioè $\nabla^2\nu^*_{\langle\alpha\rangle} = 0$ in R^n. Ma le ν e ν' effettivamente costruite, e quindi la stessa ν^* (ossia i relativi coefficienti) tendono a zero per $|\xi| \to \infty$. In conclusione i $\nu^*_{\langle\alpha\rangle}$ sono ∇^2-armonici e tendono a zero per $|\xi| \to \infty$; e come ben sappiamo, questo implica che ν^* sia nulla in tutto R^n, e in particolare in X; qed. Questo risultato si può parafrasare affermando che «il

[13] È chiaro che relazioni di questo tipo vanno sempre intese riferendole ai coefficienti delle forme (come abbiamo già fatto), in questo caso ai $\varphi_{\langle\alpha\rangle}$ e rispettivamente ai $\mu_{\langle\alpha\rangle}$.

problema ∂-δ ha una e una sola soluzione in un compatto X di R^n nella classe delle forme definite in R^n i cui coefficienti tendono a zero con la variabile indipendente $\to \infty$». [14, 15]

Resta da chiarire in che senso il problema rot-div è una specializzazione del problema ∂-δ. Innanzitutto si deve fare n = 3 e $\kappa = 1$; cioè $\nu = \nu_{(1)}$ è la 1-forma $\nu_i dx^i$, dove sottintendiamo la somma da 1 a 3 sugli indici ripetuti, e $x^{i=1,2,3}$ sono coordinate cartesiane ortogonali. Abbiamo dunque $\partial\nu_{(1)} = \partial\nu_i/\partial x^s\, dx^s \wedge dx^i$. Sviluppando questa espressione e scrivendo brevemente ∂_s per $\partial/\partial x^s$, troviamo

(6) $\quad \partial\nu_{(1)} = (\partial_1\nu_2 - \partial_2\nu_1)dx^1\wedge dx^2 + \mathrm{cicl}(1,2,3)$.

Ricordiamo che le componenti di $\underline{\omega} \equiv \nabla\times\underline{\nu}$ (dove con $\underline{\nu}$ denotiamo il vettore di componenti ν_i) sono

(7) $\quad \omega_1 = \partial_2\nu_3 - \partial_3\nu_2$,

e le simili che si ottengono con la rotazione ciclica degli indici (1, 2, 3); per cui la (6) può anche scriversi

(6′) $\quad \partial\nu_{(1)} = \omega_1 dx^2\wedge dx^3 + \mathrm{cicl}(1,2,3)$.

La (6′) è dunque la prima equazione del problema ∂-δ, con il termine forzante a 2° membro. Si verifica subito che la condizione di compatibilità $\partial^2\nu_{(1)} = 0$ equivale alla $\nabla\cdot\nabla\times\underline{\nu} = 0$, cioè alla $\nabla\cdot\underline{\omega} = 0$. La duale della (6′) è la 1-forma pfaffiana

(8) $\quad *\partial\nu_{(1)} = -\,\omega_i dx^i = -\,\underline{\omega}$.

Calcoliamo adesso la 0-forma $\delta\nu_{(1)} = *\partial*\nu$. Si ha

(9) $\quad *\nu_{(1)} = -\,(\nu_1 dx^2\wedge dx^3 + \mathrm{cicl}(1,2,3))$;

quindi

(10) $\quad \partial*\nu_{(1)} = -\,\partial_i\nu_i\, dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 \equiv -\,\nabla\cdot\underline{\nu}\, dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$,

e quindi

(11) $\quad \delta\nu_{(1)} = *\partial*\nu_{(1)} = -\,*\theta$,

nel cui 2° membro compare il termine forzante $\theta = \nabla\cdot\underline{\nu}$. Essendo quest'ultima una 0-forma, la duale del lemma di Poincaré $\delta^2\nu = 0$ è soddisfatta automaticamente, e quindi θ è libero da vincoli. Il problema ∂-δ risultante è dunque quello del sistema costituito dalla (8), che essendo C = 1 per n = 3 si riscrive equivalentemente come

[14] Quest'ultima restrizione esclude la considerazione di soluzioni *polidrome* del sistema $\partial\nu = \delta\nu = 0$ quando X non sia semplicemente connesso.

[15] Il caso n = 2, qui non considerato, si tratta analogamente sostituendo a $|\xi - x|^{2-n}$ con $\ln(|\xi - x|^{-1})$, cfr. S.sez. 5.2.3.

(8bis) $\partial v_{(1)} = - *(\omega_i dx^i) = - *\underline{\omega}$

(dove $*\underline{\omega}$ è una 2-forma sotto il vincolo $\nabla\cdot\underline{\omega} = 0$), e dalla (11) stessa (con θ libero). Si noti la analogia formale tra la (11) e la (8bis).

8.5.4) I TEOREMI DI DE RHAM [16]

Nella S. sez. 8.4.2 abbiamo illustrato il teorema di Poincaré-Stokes (PS) avendo introdotto la nozione di κ-catena in termini di κ-quadrati unitari di R^n orientato. Accingendoci ad enunciare i teoremi di de Rham, è storicamente corretto (oltre che più generale e flessibile) riproporre brevemente quel percorso partendo dai κ-simplessi di R^n stesso (sotto $0 \le \kappa \le n$, cfr. S.sez. 5.1.2). Il lettore non dovrebbe avere difficoltà – alla fine – a convincersi della equivalenza delle due procedure.

Come sappiamo, un ($0\le\kappa\le n$)-simplesso di R^n è unicamente determinato da una (κ+1)-pla *ordinata* di punti $\langle P_0, P_1, .., P_\kappa\rangle$ di quello spazio tali che i κ vettori $P_1-P_0, .., P_\kappa-P_0$ siano linearmente indipendenti. Precisamente, il corrispondente κ-simplesso è l'insieme dei punti $P = \sum_{i=0}^{\kappa} t_i P_i$ per qualunque scelta dei $t_{0\le i\le\kappa}$ che siano ≥ 0 e soddisfino il vincolo $\sum_{i=0}^{\kappa} t_i = 1$, e sarà nel seguito denotato come $[P_0, P_1, .., P_\kappa]$. La frontiera $\partial[P_0, P_1, .., P_\kappa]$ del κ-simplesso $[P_0, P_1, .., P_\kappa]$ si definisce allora come il (κ-1)-simplesso $\sum_{i=0}^{\kappa}(-1)^i\, [P_0, .. [[P_i]], ..P_\kappa]$, dove [[ ]] è il solito simbolo di soppressione. Una κ-catena (finita) può trattarsi come combinazione lineare formale del tipo $c_{(\kappa)} = \sum \varepsilon_s S_{(\kappa)}{}^s$, dove ε_s sono reali arbitrari e $S_{(\kappa)}{}^s$ sono κ-simplessi. La frontiera di tale κ-catena è definita come $\partial c_{(\kappa)} = \sum \varepsilon_s \partial S_{(\kappa)}{}^s$, ed è evidentemente una (κ−1)-catena. Sussiste il lemma $\partial^2 c_{(\kappa)} = 0$ per qualunque ($0\le\kappa\le n$)-catena. Questo è evidente per κ = 0 e κ = 1, perché ogni simplesso di grado negativo è nullo per definizione. Per κ = 2 si ha poi: $\partial^2[P_0, P_1, P_2] = \partial[P_1, P_2] - \partial[P_0, P_2] + \partial[P_0, P_1] = ([P_2] - [P_1]) - ([P_2] - [P_0]) + ([P_1] - [P_0]) \equiv 0$. La generalizzazione al caso $2 < \kappa \le n$ può ottenersi per induzione, ed è lasciata al lettore come esercizio. Denotiamo infine con $X_{i,j}$, $0 \le i \le \kappa \le n$, $1 \le j \le n$, la j-ma coordinata del punto P_i del generico κ-simplesso. Il κ-simplesso per cui $X_{i,j} = \delta_{ij}$ si dirà (κ-simplesso) **standard** e si denoterà con S^κ. [17]

---

[16] G. De Rham, "Sur l'analysis situs des variétés a n dimensions", J. Math. Pures Appl., Sér. 9, **10** (1931). Benché i teoremi siano stati ovviamente stabiliti da De Rham, l'idea di una connessione tra la coomologia e le forme differenziali risale a Poincaré.

[17] La possibilità di assumere come "standard" altri tipi di simplessi va incontro a problemi, per così dirli, di "equanimità". Ad esempio scegliendo come standard il κ-simplesso $[P_0, .., P_\kappa]$ per cui le distanze $P_0P_1, ..P_{\kappa-1}P_\kappa$ sono

Il passaggio a κ-simplessi di una varietà (elementare liscia) n-dim M è strettamente analogo a quello illustrato partendo dai κ-quadrati unitari (v. S.sez. 8.4.1). L'immagine in $\lambda(M) \subset R^n$ del κ-simplesso standard S^κ attraverso un'applicazione φ: $S^\kappa \to \lambda(M)$, definita a meno di un 1-diffeomorfismo equiverso di S^κ, si denoterà $\Sigma_{(\kappa)}$. (Ad esso corrisponde un κ-dominio di M $\lambda^{-1}(\Sigma_{(\kappa)})$). La frontiera $\partial\Sigma_{(\kappa)}$ in $\lambda(M)$ è l'immagine attraverso φ della frontiera di S^κ, $\partial\Sigma_{(\kappa)} = \varphi(\partial S^\kappa)$. Una κ-catena (finita) di $\lambda(M)$ è una combinazione lineare formale del tipo $c = \sum\varepsilon_s\Sigma_{(\kappa)}{}^s$, dove ε_s sono reali, e la sua frontiera è $\partial c = \sum\varepsilon_s\partial\Sigma_{(\kappa)}{}^s$, evidentemente una $(\kappa-1)$-catena.

La dimostrazione del teorema di PS parte dalla definizione di integrale di una κ-forma $\nu_{(\kappa)}$ su un κ-simplesso standard S^κ, che sarà ancora data dalla (8.4.1, 4) e generalizzazioni, in cui a $\mathcal{U}_{(\kappa)}$ si sostituisca $\Sigma_{(\kappa)} =: \varphi(S^\kappa)$ e a I^κ, S^κ. Si è così ridotti ad un integrale κ-plo standard, e la dimostrazione procede in analogia con quella del caso in cui avevamo scelto i κ-quadrati unitari, in luogo dei κ-simplessi standard, come domini fondamentali. (Il lettore potrà facilmente ripercorrere le tappe della dimostrazione.)

Possiamo ormai enunciare, senza dimostrarli, i teoremi di de Rham. Come in precedenza, una κ-catena di $\lambda(M)$ si dice un κ-ciclo se la sua frontiera è nulla. Per quanto abbiamo visto più sopra ($\partial^2 \equiv 0$), la frontiera di una κ-catena è automaticamente un κ-ciclo, ma non sempre vale il contrario; esattamente come una κ-forma esatta è automaticamente chiusa, ma non sempre vale il contrario. (Come vedremo tra un momento, il primo teorema di de Rham risponde appunto alla domanda: "sotto quali condizioni una κ-forma chiusa è esatta?".)

Ad ogni coppia formata da un κ-ciclo z ($\partial z = 0$) e da una κ-forma chiusa ν ($\partial\nu = 0$) della varietà, si associa l'integrale $\int_z\nu$, che si dice κ-**periodo di** ν **su** z. Se in particolare il κ-ciclo z è una frontiera, il periodo di ν su z è nullo in forza del teorema di PS: posto infatti $z = \partial c$ per una conveniente $(\kappa+1)$-catena c, abbiamo $\int_z\nu = \int_{\partial c}\nu = \int_c\partial\nu = 0$, (ove la penultima uguaglianza è il teorema di PS), perché $\partial\nu = 0$ per ipotesi. Quindi se per certi κ-cicli z^s e per certi reali ε_s avviene che $\{\varepsilon_s, z^s\}$ sia una frontiera, allora $\sum\varepsilon_s\int_{zs}\nu = 0$ per ogni κ-forma chiusa ν.

Sussiste il **primo teorema di de Rham**:

T_1. «Una κ-forma chiusa ν di $\lambda(M)$ è esatta sse per ogni κ-ciclo z di $\lambda(M)$ z risulta $\int_z\nu = 0$.»

È facile rendersi conto che un tale asserto non dipende da λ, cioè che è carta-indipendente.

La naturale controparte di T_1 è il **secondo teorema di de Rham**:

---

unitarie e il cui baricentro è l'origine di R^n, si pone il problema di come orientarlo (nel senso delle rotazioni intorno all'origine) in un modo che non appaia arbitrario, attesa l'isotropia del simplesso.

T_2. «Se ad ogni κ-ciclo z^s di $\lambda(M)$ si associa un reale $Per(z^s)$ tale che valga l'implicazione "per certi reali ε_s, $\{\varepsilon_s, z^s\}$ è una frontiera" $\Rightarrow$ "per quegli ε_s, $\sum\varepsilon_s Per(z^s) = 0$", allora *esiste* una κ-forma chiusa ν di $\lambda(M)$ per la quale il periodo su z^s è uguale a $Per(z^s)$, e questo per ogni z^s di $\lambda(M)$; per la quale cioè $\forall z^s\{\int_{zs}\nu = Per(z^s)\}$.»
Ancora, questo asserto è carta-indipendente.

I teoremi di de Rham, qui riferiti ad una varietà elementare, possono generalizzarsi a varietà generiche (tuttavia questo non è affatto banale). La loro importanza sta anche nel fatto che, come è vero per molte varietà, elementari e non, esiste un insieme finito di κ-cicli che "abbraccia", via combinazioni lineari e a meno di κ-frontiere, l'insieme di *tutti* i κ-cicli della varietà. Ad esempio per la $(n\geq 1)$-sfera unitaria (una varietà n-dim non elementare), ogni $(0 < \kappa < n)$-ciclo è una frontiera, e ogni n-ciclo può esprimersi come somma di un multiplo della n-sfera stessa e di una n-frontiera.

Aggiungiamo un commento conclusivo. Un lettore di orientamento pragmatico potrebbe obiettare che dall'armamentario concettuale propostogli nelle ultime due sezioni di questo capitolo (e soprattutto nella presente Sez. 8.5) non si tragga alcun risultato sostanzialmente nuovo rispetto a quelli che già il calcolo tensoriale su varietà metriche provvede (almeno, su scala locale). Quel lettore avrebbe sostanzialmente ragione, ma il punto non è questo. Ciò che abbiamo inteso offrirgli qui, infatti, è soltanto una iniziazione, per non dire lo stesso *vocabolario*, necessari per affrontare – col dovuto impegno ma senza difficoltà proibitive – la geometria/topologia differenziale del '900; o almeno quella parte di essa di più diretta pertinenza alla fisica matematica (coomologia di de Rham di varietà algebriche, forme e integrali armonici, varietà e forme di Kahler, ecc.).