3.5) TEORIA DELLA CURVATURA PER VARIETÀ EMBEDDED IN UNO SPAZIO EUCLIDEO

3.5.1) INTRODUZIONE

Questa ultima sezione del capitolo è dedicata alla geometria differenziale locale di ordine $p \geq 2$ di (aperti di) una varietà n-dim(ensionale) M^n (propriamente) embedded [1] in uno spazio *euclideo* E_m (m>n)-dim $\equiv R^m$ (quindi automaticamente una varietà riemanniana, con metrica *indotta* definita positiva), possibilmente orientato. Come si vedrà, ci spingeremo fino a p = m per n = 1 (caso delle curve), mentre ci limiteremo a p = 2 per 1 < n < m. Particolare attenzione sarà riservata al caso m = n + 1, quando cioè M^n sia una **ipersuperficie** (o semplicemente **superficie** se m = 3). Nel loro insieme, questi aspetti della geometria differenziale locale presentano grandissimo interesse concettuale e storico (si può infatti dire che l'intero corpo della disciplina prese sostanzialmente avvio dal loro studio, nel primo Ottocento e soprattutto per opera di Gauss, almeno per n = 2 e m = 3) , ed hanno una fondamentale funzione propedeutica ai nostri fini a seguire.

Buona parte dei problemi geometrico-differenziali di ordine $p \geq 2$ afferiscono alla cosiddetta "Teoria generale della Curvatura". La condizione, alla quale ci atterremo, che lo spazio sommergente E_m sia euclideo [2] è essenziale se si vuole evitare che la sua forma quadratica Q si annulli per qualche vettore non nullo. La teoria della curvatura può allora svilupparsi nel modo tradizionale evitando le difficoltà derivanti dalla esistenza di vettori non nulli ma di pseudomodulo nullo. Nel seguito, converrà denotare con $q \equiv \langle q^{1 \leq i \leq n} \rangle$ le n coordinate (di R^n, o di un suo aperto) alle quali viene riferita M^n, e con $\mathbf{x}$ il punto di $R^{m \geq n}$; per brevità, inoltre, in questa sezione scriveremo $(\cdot\,,\cdot)$ per il prodotto interno, in luogo di $G(\cdot\,,\cdot)$.

La situazione più elementare si ha per n = 1 ed m = 2 (curve del piano euclideo R^2, che converrà supporre orientato), che ricordiamo qui appresso. Sia dunque $q(\in I) \mapsto \mathbf{x}(\in E_2)$, dove $I =: (0,1)$, un 2-embedding (quindi per definizione $|d_q\mathbf{x}| > 0$ in I) di I in R^2 orientato, $R^{2\wedge}$; sia poi

(1) $\quad \mathbf{t} = \mathbf{t}(q) =: (d_q\mathbf{x}/|d_q\mathbf{x}|)(q)$

[1] Qui e nel seguito della sezione, per evitare possibili autointersezioni ci si potrebbe limitare a considerare r-immersioni di un aperto *abbastanza piccolo* di R^n; ma per semplicità, noi faremo di norma la più forte richiesta che quelle r-immersioni siano in effetti r-embeddings. Eviteremo anche di ricordare il carattere locale della teoria, dicendo semplicemente "varietà" per "aperto di varietà", ecc.

[2] O possibilmente antieuclideo. Quest'ultimo caso richiede alcuni banali aggiustamenti rispetto a quello euclideo, e sarà tralasciato.

il versore tangente all'arco piano aperto $\mathbf{x}(I)$, diretto nel verso della q crescente, in $\mathbf{x}(q)$, e $\alpha = \alpha(q)$ ($\in C^1(I)$) l'angolo (con segno) che $\mathbf{t}(q)$ fa con una prefissata direzione orientata di $R^{2\wedge}$. Allora, $\forall q \in I$,

(2) $\kappa = \kappa(q) =: (d_q\alpha/|d_q\mathbf{x}|)(q)$

si definisce come **curvatura con segno** dell'arco $\mathbf{x}(I)$ nel punto $\mathbf{x}(q)$. Si noti che κ riceve un segno solo in quanto $R^2 \equiv R^{2\wedge}$ sia orientato (cioè vi sia prescritto un senso di rotazione). Se si pone $s = s(q) =: \int_{q'=0}^{q} |d_q\mathbf{x}|(q')dq'$, la funzione $s(q)$ è $C^2(I)$, con valori in $I_1 =: (0,s(1))$ e ivi monotona crescente, è quindi unicamente invertibile in $q = q(s)$, anch'essa $C^2(I_1)$. Le definizioni (1,2) possono allora semplificarsi in

(1bis) $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) =: d_s\mathbf{x}(s)$,

e rispettivamente in

(2bis) $\kappa = \kappa(s) =: d_s\alpha(s)$,

dove $\mathbf{x}(q(s))$, $\mathbf{t}(q(s))$, ecc., si sono riscritti come $\mathbf{x}(s)$, $\mathbf{t}(s)$, ecc.

Se $\kappa(s_0) = 0$ per un valore s_0 isolato di I_1, $\mathbf{x}(s_0)$ si dice un **punto di flesso** di $\mathbf{x}(I_1)$. $\mathbf{x}(I_1)$ è poi un segmento rettilineo (aperto, e orientato secondo la q crescente) sse $\kappa(s) \equiv 0$ in I_1. Supposto > 0, $|\kappa(s)|$ eguaglia il reciproco del raggio del cerchio (di $R^{2\wedge}$) che ha un contatto del 2° ordine con $\mathbf{x}(I_1)$ (**cerchio osculatore** di $\mathbf{x}(I_1)$ nel punto $\mathbf{x}(s)$, e che giace, rispetto a $\mathbf{x}(I_1)$, dalla parte della sua concavità). Dicendo x, y le coordinate cartesiane ortogonali standard di $R^{2\wedge}$, e dando all'angolo $d\alpha$ l'usuale segnatura sinistrorsa, l'arco $\mathbf{x}(I_1)$ si descriverà nella forma $y = y(x)$. Si trova così che $\kappa = y''/(1+y'^2)^{3/2}$, ove l'apice denota la derivata d_x. Se poi $\kappa(s) \equiv \text{cost} > 0$ in I_1, $\mathbf{x}(I_1)$ è un arco (aperto) di cerchio di raggio 1/cost.

La teoria della curvatura nasce da questi elementari concetti, per poi svilupparsi nelle loro molte possibili ramificazioni e generalizzazioni, a diversi e crescenti livelli di astrazione. Si considerano così: (i) le $m - 1$ **curvature** ($m \geq 2$) di un arco di classe di continuità (CdC) m embedded in R^m; (ii) le infinite 2-**curvature** di una ipersuperficie ($n\geq2$)-dim di CdC 3 embedded in R^{n+1}, o (iii) di una varietà di CdC 3 embedded in $R^{m>(n+1)}$ o (iv) in $E_{m\geq(n+1,\pi}$ pseudoeuclideo; (v) le **curvature** di una varietà differenziabile astratta (di CdC 3, ($n\geq2$)-dim) a metrica generalmente indefinita, .. e via dicendo. Nella loro accezioni più avanzate, le curvature possono addirittura non essere numeri, ma applicazioni, o gruppi, ecc. Nel resto di questa sezione, ci limiteremo a considerare aspetti della teoria relativa ai casi (i), (ii) e (iii).

3.5.2) CASO DELLE CURVE, n = 1

Il caso m = 3 di (i) è ancora elementare e ben noto. Partendo da un 3-embedding q ($\in$I) $\mapsto$ **x** ($\in R^3$), (quindi per definizione $|d_q\mathbf{x}| > 0$ in I), sia ancora $\mathbf{t} =: d_s\mathbf{x}$ (versore tangente, di CdC 2), e

(1) $\kappa = \kappa(s) =: |d_s\mathbf{t}|(s) \geq 0$.

Nel seguito riferiremo la curva alla sua coordinata naturale s, che converrà pensare in I piuttosto che in I_1, dividendo per s(1) l'originale coordinata q. Per definizione, la **curvatura assoluta** (o anche **1ª curvatura**) dell'arco spaziale **x**(I), nel punto **x**(s), è adesso questa funzione $\kappa(s)$, evidentemente ≥ 0 e $C^1(I)$; vale a dire, la nuova curvatura è "assoluta" a differenza di quella di un arco piano dianzi introdotta. Distingueremo due possibilità, e cioè (a) $d_s\mathbf{t} \neq 0$ in tutto I, e (b) $\equiv$ la negazione di (a).

Cominciando con (a), sia

(2) $\kappa\mathbf{n} =: d_s\mathbf{t}$;

questa definisce un vettore $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$, evidentemente unitario, $C^1(I)$ e ortogonale a **t** $(1 = (\mathbf{t},\mathbf{t}) \Rightarrow$ $\Rightarrow (d_s\mathbf{t},\mathbf{t}) = 0)$, che si dice **versore normale principale**, dell'arco **x**(I), in **x**(s). Il piano di **n**(s) e **t**(s) o **piano osculatore** della curva in **x**(s), si definisce come il piano con cui essa ha un contatto del 2° ordine. Infine,

(3) $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s) =: (\mathbf{t} \times \mathbf{n})(s)$,

che è a sua volta unitario e $C^1(I)$ (nonché ovviamente normale a **t** e a **n,** quindi al piano osculatore), si dice **versore binormale** (di **x**(I), in **x**(s)). Per l'unitarietà di **b**, $(d_s\mathbf{b},\mathbf{b}) = 0$; e per l'ortogonalità di **b** a **t** e a **n**, tenuto conto della (2), $(d_s\mathbf{b},\mathbf{t}) = 0$. Dunque $d_s\mathbf{b}$ (che è C(I)) è ortogonale a **b** e a **t**, ossia parallelo a **n**. Potremo pertanto scrivere:

(4) $d_s\mathbf{b} = \tau\mathbf{n}$,

ove $\tau = \tau(s)$ è una conveniente funzione di s in I, di classe C(I), che si dice **torsione** (o anche **2ª curvatura**) dell'arco, in **x**(s). Resta da esprimere $d_s\mathbf{n}$, ciò che si ottiene subito derivando la $-\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{b}$. Il risultato è:

(5) $d_s\mathbf{n} = -\tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}$,

di classe C(I). [3] Le (2,4,5) sono tradizionalmente note come **formule di Frénet-Serret** [4]; alcune loro ovvie conseguenze sono $\tau^2 = |d_s\mathbf{b}|^2$ (oltre all'analoga $\kappa^2 = |d_s\mathbf{t}|^2$), $\kappa^2 + \tau^2 = |d_s\mathbf{n}|^2$ (quindi, $|d_s\mathbf{n}|^2 =$

[3] Si verifica senza difficoltà che, in forza delle (2,4,5) sono soddisfatte tutte le relazioni che derivano dalla unitarietà di **t**, **n**, **b** e dalla loro mutua ortogonalità secondo la (3). Ad esempio, da $(\mathbf{n},\mathbf{t}) = 0$ segue $(d_s\mathbf{n},\mathbf{t}) + (\mathbf{n},d_s\mathbf{t}) = 0$, e il 1° membro di questa vale effettivamente $-\kappa+\kappa$ per le (2,5); oppure $d_s\mathbf{t} = d_s\mathbf{n} \times \mathbf{b} + \mathbf{n} \times d_s\mathbf{b} = (-\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}) \times \mathbf{b} + \mathbf{n} \times \tau\mathbf{n} = \kappa\mathbf{n}$, .. e così via. Le (2,4,5) costituiscono cioè un insieme coerente di vincoli tra **t**, **n**, **b** e loro s-derivate, che definiscono i due scalari $\kappa \geq 0$ e τ.

$= |d_s\mathbf{t}|^2 + |d_s\mathbf{b}|^2$), e $(\mathbf{t}, d_s\mathbf{t} \times d_s^2\mathbf{t}) = -\kappa^2\tau$. Si vede subito, infine, che l'alternativa (a) equivale a alla indipendenza lineare di **t** e di $d_s\mathbf{t}$ (in I). Per concludere, notiamo che (sotto a)) **n** è pari rispetto a q, mentre **t** e **b** sono dispari; quindi $d_q\mathbf{b}$ è pari, τ è pari e $d_q\mathbf{n}$ è dispari.

Venendo all'alternativa (b), è ovvio che le definizioni (salvo la (3)) e i risultati di cui sopra perdono senso quando $d_s\mathbf{t} = 0$, perché **n**, e quindi anche il piano osculatore e **b**, non sono più definiti. Se ciò avviene per un valore isolato di s, per definizione abbiamo ivi un punto di flesso dell'arco, mentre se avviene nell'intero I (o in un suo aperto), **x**(I) è un segmento rettilineo aperto e orientato.

Se $\kappa > 0$ e $\tau \equiv 0$ in I, **b** è costante, quindi **n** e **t** appartengono sempre allo stesso piano, e lo stesso arco **x**(I) è in questo piano. Ci si aspetta dunque una ricaduta nel precedente caso dell'arco in $R^{2\wedge}$. In effetti, riferendo il piano a coordinate cartesiane standard (x,y) con il conseguente orientamento standard del piano stesso, e prendendo come direzione di riferimento l'asse x, abbiamo $t_y = t_x \mathrm{tg}\alpha$, da cui $d_s t_y = t_x(1+\mathrm{tg}^2\alpha)d_s\alpha + d_s t_x \mathrm{tg}\alpha = n_y\kappa$, e similmente $d_s t_x = n_x\kappa$; ovvero, essendo $n_x = -n_y\mathrm{tg}\alpha$,

$$(6_1)\qquad t_x d_s\alpha = n_y\kappa,$$

e

$$(6_2)\qquad t_y d_s\alpha = -n_x\kappa.$$

Quadrando e sommando le (6) troviamo $|d_s\alpha|^2 = \kappa^2$, compatibilmente con la (3.5.1, 2bis). Più specificamente, poiché almeno una delle due componenti di **t** è $\neq 0$, almeno una delle (6) definisce $d_s\alpha$ in valore e segno; $d_s\alpha$ ha dunque il segno di n_y/t_x e/o di $-n_x/t_y$, e la coerenza con il caso piano è così completa.

Il caso dell'arco embedded in $R^{m>3}$ è naturalmente più complicato, ma la relativa teoria estende elegantemente quella, come abbiamo visto elementare, dell'arco embedded in R^3. Partiremo cioè dall'm-embedding (di CdC m) q $(\in I/s(1)) \mapsto \mathbf{x}$ $(\in R^m)$, (per cui $|d_q\mathbf{x}| > 0$ in I/s(1)). Il caso base (al quale ci limiteremo qui) è quello in cui i vettori $d_s\mathbf{x}$, $d_s^2\mathbf{x}$, … $d_s^m\mathbf{x}$ (pensati come funzioni di s) sono supposti linearmente indipendenti in I; quindi essi sono una base di R^m. Questi m vettori si possono ortonormalizzare, nell'ordine in cui sono scritti, con la procedura di Gram-Schmidt (vedi S.sez. 3.2.4), generando così una base ortonormale $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots \mathbf{t}_m$ di R^m (con $\mathbf{t}_1 = \pm d_s\mathbf{x} = \pm \mathbf{t}$, perché $|d_s\mathbf{x}| = 1$), essendo $\mathbf{t}_1$ di CdC m−1, $\mathbf{t}_2$ di CdC m−2, … $\mathbf{t}_m$ di CdC 0 in I. Se $1 \le h \le m$ e $1 \le k \le m$, per costruzione è dunque:

$$(7)\qquad (\mathbf{t}_h,\mathbf{t}_k) = \delta_{hk}.$$

---

[4] Tuttavia una loro versione equivalente era stata pubblicata da A.L. Cauchy nel lontano 1826 ("Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la geométrie"), quando sia F.J. Frénet (1816-1900) che J.A. Serret (1819-1885) erano certamente più assorbiti nei loro giochi infantili che nella matematica.

D'altra parte, ponendo mente a come funziona la procedura di GS, è facile rendersi conto che

(8) $\quad d_s\mathbf{t}_h = \sum_{i=1}^{h+1} \mathbf{t}_i \gamma_{ih}$,

dove i coefficienti γ_{ih} (che dimensionalmente sono reciproci di una lunghezza) sono forniti dalla procedura stessa. La (8) può allora riscriversi, diciamo come (8bis), ponendo uguale a m il limite superiore della sommatoria, ma con l'intesa che

(9) "$\gamma_{ih} = 0$ se $i > h+1$".

Moltiplicando internamente la (8bis) per $\mathbf{t}_k$ e tenendo conto della (7), si ottiene subito:

(10) $\quad \gamma_{kh} = (\mathbf{t}_k, d_s\mathbf{t}_h)$;

sommando questa alla stessa avendovi scambiato tra loro h e k, e tenendo ancora conto della (7), si vede che $\gamma_{kh} + \gamma_{hk} = 0$, e in particolare $\gamma_{hh} = 0$; ed anche, in forza della (9), che:

(9bis) "$\gamma_{ih} = 0$ se $i > h - 1$".

In conclusione, la m×m-matrice $\{\gamma_{hk}\}$ è antisimmetrica ed ha soltanto le due paradiagonali (h,i=h+1) e (h,i=h−1) diverse da zero. Posto $\kappa_h =: \gamma_{h+1,h}$ per $1 \le h \le m$, questo risultato mostra che la (8bis) è in realtà

(11_1) $\quad d_s\mathbf{t}_h = -\mathbf{t}_{h-1}\kappa_{h-1} + \mathbf{t}_{h+1}\kappa_h$,

per $2 \le h \le m-1$, mentre

(11_2) $\quad d_s\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2\kappa_1$

per h = 1, e

(11_3) $\quad d_s\mathbf{t}_m = -\mathbf{t}_{m-1}\kappa_{m-1}$

per h = m. Le κ_h, per $1 \le h \le m-1$, sono $m-1$ **curvature di ordine** $2 \le h+1 \le m$, funzioni di s, tutte $\neq 0$ per la supposta indipendenza lineare delle $d_s\mathbf{x}$, $d_s^2\mathbf{x}$, …$d_s^m\mathbf{x}$, e che possono essere tutte assunte positive, senza limitazioni di generalità, mediante una congrua scelta degli orientamenti di $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$, … $\mathbf{t}_m$ (come sappiamo, la procedura di GS ci lascia questa libertà). Alla luce della (10), si vede anche che la CdC di $\kappa_{1\le h\le m-1}$ è $m-(h+1)$; in particolare quella di κ_1 è $m-2$ e quella di κ_{m-1} è 0. Il piano di $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ ha un contatto del 2° ordine con l'arco $q \mapsto x$, il 3-piano di $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ e $\mathbf{t}_3$ un contatto del 3° ordine, e così via. È immediato ridursi al caso m = 3 facendo $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}$, $\mathbf{t}_2 = \mathbf{n}$ (con il che $\kappa_1 = \kappa > 0$) e $\mathbf{t}_3 = \pm\,\mathbf{b}$ a seconda che $\tau < 0$ o $\tau > 0$ (con il che κ_2 è sempre positivo). Anche più semplice è ridursi al caso m = 2, perché allora ci sono soltanto due equazioni da considerare.

Le (11) possono dirsi **formule di Frénet-Serret generalizzate**. La richiesta di indipendenza lineare delle $d_s\mathbf{x}$, … $d_s^m\mathbf{x}$ in I ha un semplice significato intuitivo: nessun pezzo d'arco (di lunghezza strettamente positiva) può essere contenuto in un sottospazio proprio di R^m, o come anche si dice, ogni tale pezzo d'arco è **propriamente sghembo in** R^m. Che in queste condizioni tutte le curvature generalizzate siano $\neq 0$ si trae anche dalla espressione del quadrato di $\kappa_{1\leq q\leq m-1}$ che, si può verificare, è la seguente:

(12) $\kappa_h^2 = \mathrm{Gr}\{d_s\mathbf{x}, .., d_s^{h-1}\mathbf{x}\}\mathrm{Gr}\{d_s\mathbf{x}, .., d_s^{h+1}\mathbf{x}\}/\mathrm{Gr}^2\{d_s\mathbf{x}, .., d_s^h\mathbf{x}\}$

per $2 \leq h \leq m-1$, e

(12bis) $\kappa_1^2 = \mathrm{Gr}\{d_s\mathbf{x}, d_s^2\mathbf{x}\}$

per $h = 1$. La tesi è allora ovvia, perché nessuno dei gramiani tra quelli che figurano nelle (12,12bis) può essere zero. Le (12) confermano tra l'altro che la CdC di κ_h è $m-(h+1)$. Notiamo infine che tutte le curvature fin qui definite, a partire dalle (3.5.1, 1), hanno dimensione lunghezza^{-1}.

3.5.3) Caso delle (iper)superfici, $2 \leq n = m-1$

Passiamo ora a considerare il punto (ii) del nostro programma (v. S.sez. 3.5.1), quello cioè delle superficie ($n = 2$) e delle ipersuperficie ($n > 2$) embedded in R^{n+1} (per brevità, nel seguito non continueremo a distinguere tra superficie e ipersuperficie). Lo studio di questo caso, ove M^n è assunta di CdC $r \geq 3$, è facilitato dal fatto che esiste esattamente un vettore (definito a meno di un fattore $\neq 0$), diciamo $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0\lambda$, ortogonale a M^n, cioè al suo piano tangente n-dim ${}_n\Pi \equiv \Pi$, per ipotesi munito della base locale $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1\div n}$ [5].

È chiaro che le proprietà di M^n connesse al campo normale, fin qui non necessariamente unitario $\mathbf{n} = \mathbf{n}(q)$ (ove q è in R^n, o in un suo aperto) dipendono dalla configurazione di M^n in R^{n+1}; ma esistono legami tra quel campo normale ed il tensore di curvatura di M^n che ne sono indipendenti. Ciò è ben rappresentato dalla (3.4.2, 9): infatti essa può scriversi

(1) $(h_{ik}h_{jh} - h_{ih}h_{jk})\mathcal{Q}(\mathbf{n}) = \rho_{ijkh}$,

ove gli h_{ik} sono opportuni coefficienti a due indici (con dimensione lunghezza/coordinata^2 se $\mathbf{n}$ è adimensionale), simmetrici in quegli indici e definiti dalla

(2) $\mathbf{n}h_{ik} = \mathbf{f}_{i/k} = \mathbf{f}_{k/i}$;

cioè di tipo doppiamente covariante rispetto alle solite trasformazioni r-diffeomorfe $q \mapsto q'$. Questi coefficienti sono quindi componenti covarianti di un (campo di) 2-tensore simmetrico $h_{(2)}$ di M^n che

[5] Posto infatti $\mathbf{f}_i = C_i^{\mu}\mathbf{F}_\mu$ (indici latini variabili su 1, .., n; indici greci, salvo il ν' che segue in questa nota, su 1, .., n+1), $\mathbf{n} = n_\nu\mathbf{F}^\nu$, le n condizioni di ortogonalità sono $0 = (\mathbf{f}_i,\mathbf{n}) = C_i^{\mu}\, n_\nu\delta_\mu^{\ \nu} = C_i^{\nu}n_\nu$. Queste sono n equazioni lineari nelle n+1 incognite n_ν, e possono sempre scriversi, con una rinominazione degli indici, come $C_i^{\nu'}n_{\nu'} = -C_i^{n+1}\lambda$, dove $\nu' = 1, .., n$ e $\det(C_i^{\nu'}) \neq 0$ per ipotesi, e dove si è scritto λ per n_{n+1}. Il sistema è unicamente risolubile, e dà $n_{\nu'} = \lambda n_{0\nu'}$ (ove gli $n_{0\nu'}$ sono ormai noti), e $n_{n+1} = \lambda$; cioè $\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}_0$ avendo posto $n_{0\,n+1} = 1$. Quanto sopra si applica anche al caso già considerato $n = 1$, $m = 2$. Si noti anche che, se lo spazio sommergente fosse propriamente pseudoeuclideo (contrariamente alla nostra effettiva ipotesi), il fattore λ non potrebbe definirsi (comunque a meno del segno) prescrivendo una condizione di normalizzazione $\mathcal{Q}(\mathbf{n}) = \lambda^2\mathcal{Q}(\mathbf{n}_0) = 1$, a meno di non escludere la possibilità $\mathcal{Q}(\mathbf{n}_0) = 0$, come sarebbe sempre vero sse lo spazio fosse euclideo o antieuclideo.

si dice suo **2° tensore fondamentale** (intendendosi allora che $g_{(2)}$ ne è il 1°). Normalizzando **n** secondo

(3) $\quad Q(\mathbf{n}) = 1,$

non si ottiene ancora il segno del fattore λ, ma le conseguenze pratiche di questa ambiguità, comunque eliminabile, sono limitate. La (1) diventa così:

(4) $\quad h_{ik}h_{jh} - h_{ih}h_{jk} = \rho_{ijkh}$, [6]

importante ed inatteso legame tra il 2° tensore fondamentale di M^n e il tensore di curvatura (costruito in termini del solo 1° tensore fondamentale), dovuto a Gauss per n = 2 (il Theorema egregium [7] di cui alla S.sez. 9.1.1). Per n = 2, $\rho_{1212} = \det\{h_{ik}\}_{i,k=1,2}$.

Eliminando ρ_{ijkh} tra le (4) e le (3.4.2, 1) (o espressioni equivalenti), si verifica anche, in forza della simmetria dei simboli di Christoffel rispetto al 1° e 3° indice, che $\partial\Gamma_i{}^s{}_k/\partial q^j + \Gamma_p{}^s{}_j\Gamma_i{}^p{}_k - h_{ik}h_j{}^s$ è simmetrico rispetto allo scambio di j con k. Queste simmetrie, che investono il rapporto tra i coefficienti di Christoffel e il 2° tensore fondamentale − quindi tra il 1° e il 2° tensore fondamentale − si dicono **simmetrie di Gauss**.

In forza della (3), derivando rispetto a q^i abbiamo

(5) $\quad 0 = \partial Q(\mathbf{n})/\partial q^i = 2(\mathbf{n},\mathbf{n}_{/i}),$

secondo la quale gli n vettori $\mathbf{n}_{/i}$ sono tangenti alla varietà (si è scritto $\mathbf{n}_{/i}$ piuttosto che $\partial\mathbf{n}/\partial q^i$ perché le due notazioni sono equivalenti per un vettore *considerato come invariante*). La (2) può allora immediatamente risolversi rispetto alle h_{ik} moltiplicandola internamente per **n**. Si ottiene così:

(6) $\quad h_{ik} = (\mathbf{n},\mathbf{f}_{i/k}),$

ovvero anche, tenuto conto della $0 = (\mathbf{n},\mathbf{f}_i)$, e dunque della $0 = \partial/\partial q^k\,(\mathbf{n},\mathbf{f}_i) = (\mathbf{n}_{/k},\mathbf{f}_i) + (\mathbf{n},\mathbf{f}_{i/k})$,

(7) $\quad - h_{ik} = (\mathbf{n}_{/k},\mathbf{f}_i) = (\mathbf{n}_{/i},\mathbf{f}_k).$

Risolte rispetto alle $\mathbf{n}_{/k}$, cioè nella forma

(8) $\quad \mathbf{n}_{/k} = - \mathbf{f}^i h_{ik},$

le (7) diventano le **equazioni di Weingarten** (J. Weingarten, 1836-1910), e pongono in evidenza un altro significato delle h_{ik} (oltre a quello manifesto nella loro definizione (2)), cioè di componenti covarianti ($_i$) del vettore tangente $- \mathbf{n}_{/k}$. Derivando $_{/h}$ le (6), si ha poi:

(9) $\quad h_{ik/h} = (\mathbf{n}_{/h},\mathbf{f}_{i/k}) + (\mathbf{n},\mathbf{f}_{i/kh}) = (\mathbf{n},\mathbf{f}_{i/kh}),$

perché come sappiamo, $\mathbf{f}_{i/k}$ è ortogonale e $\mathbf{n}_{/h}$ è tangente alla varietà. Sottraendo dalla (9) la sua alternata rispetto a $(_{h,k})$, e ricordando la (3.4.2, 14), otteniamo infine

---

[6] Si ricordi che le componenti di $\rho_{(4)}$ sono di CdC r−2; quindi lo sono quelle di $h_{(2)}$ sotto la normalizzazione (3), alla luce della (2) o anche delle successive (6,7), perché **n** è di CdC r−1. Si noti anche che il 1° membro della (4) è il minore costruito sulle righe di indici (i,j>i) e sulle colonne di indici (k,h>k) della n×n-matrice $\{h_{ih}\}$.

[7] «La curvatura K di una superficie dipende soltanto dai coefficienti g_{ik} della prima forma fondamentale e dalle loro derivate prime e seconde. Quindi K è una proprietà intrinseca della superficie.» (1827)

(10) $h_{ik/h} - h_{ih/k} = 0$.

Queste (10), note come **equazioni di Mainardi-Codazzi**, (G. Mainardi, 1800-1879, D. Codazzi, 1824-1875 [8]) affermano che il tensore triplo derivato del 2° tensore fondamentale è completamente simmetrico. Anche più manifestamente nella forma

(11) $\partial h_{ik}/\partial q^h + h_{jh}\Gamma_i{}^j{}_k = \partial h_{ih}/\partial q^k + h_{jk}\Gamma_i{}^j{}_h$

esse costituiscono vincoli differenziali del 1° ordine tra il 1° e il 2° tensore fondamentale, lineari nelle h_{ik}. Infine dalle (3.4.2, 7) e dalle (2) si desumono le $n(n+1)/2$ **equazioni di Gauss**:

(12) $\partial \mathbf{f}_i/\partial q^k = \mathbf{f}_j\Gamma_i{}^j{}_k + \mathbf{n}h_{ik}$.

È interessante la seguente interpretazione intuitiva del 2° tensore fondamentale. Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q) = X^\nu(q)\mathbf{F}_\nu$ il generico punto di M^n, e si consideri l'ipersuperficie $M^{n\prime}$ spostata lungo $\mathbf{n}$ di una piccola lunghezza $\varepsilon > 0$ rispetto alla M^n originale, quindi di equazione $\mathbf{x}'(q) = \mathbf{x}(q) + \varepsilon\mathbf{n}(q)$. Differenziando rispetto alla $\mathbf{x}(q)$, si ha $d\mathbf{x} = \mathbf{F}_\mu\partial X^\mu/\partial q^i dq^i$ (dove al solito gli indici greci vanno da 1 a n+1 e quelli latini da 1 a n); e differenziando $\mathbf{n}(q)$, $d\mathbf{n} = \mathbf{n}_{/k}dq^k = -h_{pk}\mathbf{f}^p dq^k$. A meno di termini di secondo ordine in ε, e ricordando che $\mathbf{f}_j = \partial X^\nu/\partial q^j\mathbf{F}_\nu \equiv \partial\mathbf{x}/\partial q^j$, otteniamo dunque:

(13) $(d\mathbf{x}',d\mathbf{x}') - (d\mathbf{x},d\mathbf{x}) = 2\varepsilon(d\mathbf{x},d\mathbf{n}) = -2\varepsilon[\partial X^\mu/\partial q^i\partial X^\nu/\partial q^j G_{\mu\nu}\, h_{pk}\, g^{pj}]dq^i dq^k = -2\varepsilon h_{ik}dq^i dq^k$.

Questa dice che la "derivata normale" della 1ª forma differenziale (nel verso di $\mathbf{n}$), diciamo $\partial_n(g_{jh}dq^j dq^h)$, è uguale alla 2ª forma differenziale $h_{ik}dq^i dq^k$ moltiplicata per -2. [9]

Quando n = 2 (caso della superficie), il tensore di curvatura ha essenzialmente un'unica componente, ad es. covariante, diciamo ρ_{1212}, e la (4) può scriversi:

(14) $\rho_{ikrs} = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{rs}\, h/g$,

dove per brevità si sono denotati con h, e rispettivamente con g, i determinanti delle relative matrici $\{h_{ik}\}$ e $\{g_{ik}\}$, e ε_{ik} sono le componenti covarianti del 2-tensore antisimmetrico di Ricci, pari a $\sqrt{g}\Upsilon_{ik}$ (per cui $\rho_{1212} = h$). Il fattore scalare $K =: h/g$ si dice tradizionalmente **curvatura gaussiana**, o anche **curvatura totale** (benché a rigore sia una 2-curvatura) di M^2. Esso è semplicemente legato all'invariante ρ di $\rho_{(4)}$ (l'invariante scalare di curvatura), perché per n = 2 si ha $\rho = g^{ik}g^{jh}\rho_{ijhk} = -2g^{-1}\rho_{1212} = -2K$. Si sottolinea che mentre il 2° tensore fondamentale è collegato a proprietà della superficie che variano quando questa viene flessa senza deformarla metricamente, come mostra la (14) ciò non può ripetersi per il suo determinante $h = \rho_{1212}$, invariante per flessione. Se si preferisce, si può dire che il tensore *estrinseco* $h_{(2)}$ ha determinante *intrinseco*: un altro modo di enunciare il Theorema egregium.

---

[8] Nella letteratura russa, come **equazioni di Peterson-Codazzi**. Il contributo del matematico russo Karl M. Peterson è del 1853, quindi anteriore a quello di Mainardi.

[9] In termini del punto $\mathbf{x}$ si può ottenere una espressione del 2° tensore fondamentale usando l'insieme dei vettori $\{\mathbf{x}_{/i}\} = \{\partial\mathbf{x}/\partial q^i\}$ come base dello spazio tangente alla varietà. Si ha così: $h_{ik} = (\mathbf{n},\mathbf{x}_{/ik}) = (\mathbf{n},\partial^2{}_{ik}\mathbf{x})$. L'ultima uguaglianza è dovuta alla $\mathbf{x}_{/ik} = \partial_k\mathbf{x}_{/i} - \mathbf{x}_{/p}\Gamma_i{}^p{}_k$, tenuto conto che $\mathbf{x}_{/i} \equiv \partial_i\mathbf{x}$.

Passando infine ad *iper*superficie immerse in uno spazio euclideo, consideriamo il $(r\geq 3)$-embedding di $I^{n\geq 2}$ in R^{n+1}

(15) $q \equiv \langle q^{1\leq i\leq n}\rangle\ (\in I^n) \mapsto \mathbf{x}\ (\in E_{n+1})$,

che definisce la ipersuperficie $M^n \equiv \mathbf{x}(I^n)$ embedded in E_{n+1}; e su di esso, l'r-embedding di I in I^n

(16) $\mu\ (\in I) \mapsto q\ (\in I^n)$.

Facendo il prodotto dei due r-embeddings, otteniamo l'r-embedding

(17) $\mu\ (\in I) \mapsto \mathbf{x}\ (\in M^n)$,

che descrive l'arco (aperto, orientato secondo μ crescente) $\Gamma =: \mathbf{x}(I)$ di M^n. Definiremo ora la **derivata** d_μ **lungo** Γ **rispetto al parametro** μ, di generici campi tensoriali di CdC ≥ 1 definiti in M^n, come:

(18) $d_\mu =: {}_{/i}d_\mu q^i$.

Porremo poi ancora $s = s(\mu) =: \int_0 |d_\mu \mathbf{x}|\, d\mu$, ove ora $|d_\mu \mathbf{x}| =: [\sum_{i=1}^n (d_\mu q^i)^2\, |\partial \mathbf{x}/\partial q^i|^2]^{1/2}$. Questa $s(\mu)$ è di CdC r e monotona crescente in $I_s =: (0, s(1))$. Possiamo quindi considerare l'r-embedding

(19) $s\ (\in I_s) \mapsto \mathbf{x}\ (\in M^n)$,

che riferisce l'arco Γ alla sua lunghezza orientata. Naturalmente la derivata rispetto ad s lungo l'arco Γ, per campi tensoriali di M^n, è $d_s =: {}_{/i}d_s q^i$. Definendo al solito il versore tangente a Γ come $\mathbf{t} =: d_\mu \mathbf{x}/|d_\mu \mathbf{x}| \equiv d_s \mathbf{x}$, si riconosce subito che $t^i = d_s q^i$, per cui è anche $d_s =: {}_{/i}t^i$. [10]

Torniamo ora al campo dei versori normali a M^n, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(q)$, di CdC $r-1$ e orientato in base a una definita scelta del segno del fattore λ [11], per il quale è $(\mathbf{t},\mathbf{n}) \equiv 0$ su M^n. Poiché gli n vettori (di CdC $r-2$) $\mathbf{n}_{/i}$ sono tangenti, lo stesso è vero per $d_s\mathbf{n} = t^i\mathbf{n}_{/i}$. Porremo:

(20) $\kappa_\Gamma =: -(\mathbf{t},d_s\mathbf{n}) = (\mathbf{n},d_s\mathbf{t}) \equiv \kappa_\Gamma(s)$,

scalare con segno (o possibilmente nullo), funzione di s di CdC $r-2$ e di dimensioni lunghezza^{-1}, che diremo **curvatura di** M^n **secondo** Γ (la seconda uguaglianza (20) consegue dalla $(\mathbf{n},\mathbf{t}) = 0$). Si noti che κ_Γ non risente dell'orientamento di Γ, perché sia $\mathbf{t}$ che $d_s\mathbf{n}$ sono dispari rispetto a μ; ma come $h_{(2)}$, risente di quello (essenzialmente convenzionale) di $\mathbf{n}$. Poiché $d_s\mathbf{t} = t^i(t^j\mathbf{f}_j)_{/i} = t^it^j\,\mathbf{f}_{j/i} + d_st^j\mathbf{f}_j$, moltiplicando internamente per $\mathbf{n}$ quest'ultima, in forza della (6) si ottiene $(\mathbf{n},d_s\mathbf{t}) = h_{ij}t^it^j$, ovvero (**formula di Meusnier**, Jean, 1754 – 1793)

(21) $h_{ij}t^it^j = \kappa_\Gamma$, [12]

---

[10] Infatti $\mathbf{t} = d_s\mathbf{x} = \mathbf{x}_{/i}\, d_sq^i = \mathbf{f}_i\, d_sq^i$, da cui la tesi. La $g_{ik}d_sq^i\, d_sq^k \equiv 1$ conferma così l'unitarietà di $\mathbf{t}$.

[11] Usualmente l'orientamento di $\mathbf{n}$ si fissa in modo che $n^\nu f_1^{\iota 1}\ldots f_n^{\iota n}\, \varepsilon_{\nu\, \iota 1\, ..\iota n}$, ove $f_1^{\iota 1}$ è la componente controvariante (ι_1) di $\mathbf{f}_1$,..ecc, sia positivo. Ciò presuppone che R^{n+1} sia orientato, e stabilisce un corrispondente orientamento su M^n.

[12] Questa vale ormai per una generica direzione (non orientata) $\mathbf{t}$ di H.

i due membri della quale sono ovviamente dispari rispetto all'orientamento di **n**. D'altra parte, se $d_s\mathbf{t} \neq 0$, la (3.5.2, 11_2) definisce un versore $\mathbf{t}_2$ parallelo a $d_s\mathbf{t}$ e orientato in modo che κ_1, 1ª curvatura di Γ, sia positiva. Segue da ciò che

(22) $\kappa_\Gamma = \kappa_1(\mathbf{n},\mathbf{t}_2)$,

e quindi $\kappa_\Gamma^2 \leq \kappa_1^2$, perché $(\mathbf{n},\mathbf{t}_2)^2 \leq 1$: il modulo della curvatura di M^n secondo Γ, κ_Γ, non supera la 1ª curvatura (assoluta) di Γ. La (22) è scritta usualmente nella forma

(22bis) $\kappa_\Gamma = \kappa_1\cos\varphi$,

dove φ è l'angolo tra **n** e $\mathbf{t}_2$. Se in particolare $\mathbf{t}_2$ è tangente a M^n, allora $\kappa_\Gamma = 0$; per n = 2, questo significa che il piano osculatore di Γ coincide con il piano tangente di M^2. Se poi l'arco Γ è una sezione *normale* di M^n, cioè l'intersezione di M^n con un piano (bidimensionale) contenente **n**, il suo piano osculatore è il piano normale, cioè $\mathbf{t}_2 = \pm\,\mathbf{n}$, e dunque $(\mathbf{t}_2,\mathbf{n})^2 = 1$: le due curvature κ_Γ e κ_1 coincidono, possibilmente a meno del segno. Ciò permette di interpretare $|\kappa_\Gamma|$ (modulo della curvatura di M^n secondo la sua sezione normale Γ) come 1ª curvatura (assoluta) κ_1 di Γ. Questa conclusione (che vale anche per $d_s\mathbf{t} = 0$, allorché $\kappa_\Gamma = \kappa_1 = 0$) rende conto della denominazione di "curvatura" adottata per κ_Γ.

Se $\kappa_\Gamma = 0$, la direzione del versore tangente all'arco Γ, diciamo $\pm\,\mathbf{a}$ (perché definito a meno del segno) si dice **direzione asintotica**. Per una direzione asintotica $\pm\,\mathbf{a}$ è dunque, in generale:

(23) $Q_h(\mathbf{a}) =: h_{ij}a^ia^j \equiv 0$.

Certe direzioni asintotiche possono non essere reali (cioè possono non esistere); se poi la forma quadratica Q_h associata a $h_{(2)}$ è definita (positiva o negativa), non ne esistono del tutto.[13] La (23) è banalmente soddisfatta per ogni **a** se $h_{(2)} = 0$; ma allora è $\rho_{(4)} = 0$. Una curva Γ di M^n la cui tangente ha ovunque direzione asintotica si dice **curva asintotica**, o semplicemente **asintotica** (sost.).

Ciò stabilito, tornando al generico arco Γ di versore tangente **t**, poniamo:

(24) $\mathbf{\Omega} =: d_s\mathbf{n} + \kappa_\Gamma\mathbf{t} = d_s\mathbf{n} - d_s\mathbf{n}\cdot\mathbf{t}\mathbf{t}$.

Si verifica subito che il vettore $\mathbf{\Omega}$ è ortogonale sia a **n** (quindi è tangente a M^n) che a **t**; inoltre $d_s\mathbf{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{\Omega} = 0$, cioè $\mathbf{\Omega} \neq 0 \Rightarrow d_s\mathbf{n} \neq 0$. In questo caso $\mathbf{\Omega} \neq 0$ la (24) può scriversi:

(24bis) $d_s\mathbf{n} = -\kappa_\Gamma\mathbf{t} + \tau_\Gamma\boldsymbol{\omega}$,

dove $\boldsymbol{\omega}$, versore con la direzione di $\mathbf{\Omega}$, può sempre orientarsi in modo che $\tau_\Gamma > 0$. Questo scalare positivo τ_Γ, dimensionalmente omogeneo a κ_Γ, si dice **torsione di** M^n **secondo l'arco** Γ. $\mathbf{\Omega}$ è invece uguale a zero sse Γ ha direzione tangente **p** ($|\mathbf{p}| = 1$) tale che

[13] Ciò avviene ad esempio se Γ è sezione normale di una n-sfera di raggio R (> 0). È allora $d_s\mathbf{n} = -\,\mathbf{t}/R$ se **n** è orientato come la normale principale, cioè verso l'interno della sfera, e quindi $\kappa_\Gamma = 1/R$, indipendentemente dalla direzione di **t**. In forza della (21), la forma Q_h è definita positiva, e non esistono asintotiche, come è intuitivamente ben chiaro se n = 2.

(25) $p^i(\mathbf{n}_{/i} + \kappa(\mathbf{p})\mathbf{x}_{/i}) \equiv d_s\mathbf{n} + \kappa(\mathbf{p})\mathbf{p} = 0$

ove κ_Γ è stata scritta come $\kappa(\mathbf{p})$, e s è la lunghezza lungo Γ orientata come **p**. Se una tale direzione tangente **p** esiste, essa si dice **direzione principale**, e la corrispondente curvatura $\kappa(\mathbf{p})$ **curvatura principale** di M^n (ciò spiega la scelta della lettera **p** per la direzione principale). La curvatura principale $\kappa(\mathbf{p})$ è dispari rispetto all'orientamento di **n**, e in particolare è nulla sse $d_s\mathbf{n} = 0$; se invece $d_s\mathbf{n} \neq 0$, $d_s\mathbf{n}$ e **p** devono essere paralleli per la (25), e $\kappa(\mathbf{p}) = -(\mathbf{p},d_s\mathbf{n})$. La (25) è nota come **equazione di Rodriguez** (Olindo, 1794-1851); se vale lungo tutto l'arco Γ, l'arco stesso si dice **arco principale**, o **linea di curvatura** ("curva di curvatura" suonerebbe male, ma la locuzione sarebbe legittima) di M^n.

Sostituendo le equazioni di Weingarten nell'equazione di Rodriguez, otteniamo:

(26) $0 = p^i\mathbf{n}_{/i} + \kappa(\mathbf{p})\mathbf{p} = -p^i\mathbf{f}^j h_{ij} + \kappa(\mathbf{p})\mathbf{f}^j p_j \Rightarrow (h_{ij} - \kappa(\mathbf{p})g_{ij})p^j = 0;$

vale a dire, le direzioni principali sono gli n autovettori (o combinazioni lineari di k tali autovettori appartenenti allo stesso autovalore $\kappa(\mathbf{p})$ se questo ha molteplicità $k > 1$), e le corrispondenti curvature principali gli n autovalori (non necessariamente distinti) del 2° tensore fondamentale rispetto al 1°, secondo quanto espresso dall'ultima (26). Esistono dunque n direzioni principali; e ancora per quanto abbiamo visto nella Sez. 3.2, esistono n direzioni principali mutuamente ortogonali che abbracciano il n-piano tangente $\Pi_n \equiv \Pi$, che sono valori di stazionarietà per la forma quadratica $\mathcal{Q}_h$ associata a $h_{(2)}$. Il loro insieme, che è una base ortonormale di Π, è *unicamente* determinato sse gli n autovalori della (26) sono tutti distinti.

Sia ora **Q** un punto generico di Π, tangente a M^n in **O** e distinto da **O**, e si consideri l'equazione omogenea di 2° grado in **Q**:

(27) $h_{ik}(\mathbf{OQ})^i(\mathbf{OQ})^k = \text{cost} \neq 0.$

È chiaro che i soli valori di interesse di cost (che ha dimensione di lunghezza^{-1}) sono +1 o alternativamente −1. Per una di queste due scelte di cost, la (27) individua una (n−1)-quadrica di Π centrata in **O**, che si dice (n−1)-**quadrica indicatrice** o **di Dupin** (C. Dupin, 1784-1873). Naturalmente non è detto che, per la data scelta del detto segno dinnanzi a 1, **Q** esista sempre al variare della direzione di **OQ** attorno a **O** (potrebbe anche non esistere mai). Si può modificare formalmente la (27) scrivendo **OQ** come $r_\mathbf{q}\mathbf{q}$ con **q** unitario: allora la (27) diventa:

(27bis) $(r_\mathbf{q})^2\mathcal{Q}_h(\mathbf{q}) \equiv (r_\mathbf{q})^2\kappa(\mathbf{q}) = \mathcal{I},$

dove $\mathcal{I}$ ha uno dei due valori +1 o −1. Questa mostra che $r_\mathbf{q}$ è reale $\neq 0$ sse $\kappa(\mathbf{q})\mathcal{I} > 0$ (diremo allora convenzionalmente che "**q** è reale") ed immaginario $\neq 0$ sse $\kappa(\mathbf{q})\mathcal{I} < 0$ ("**q** è immaginario"). Il caso $\kappa(\mathbf{q}) = 0$ è degenere, e infatti le corrispondenti direzioni **q** sono allora asintotiche. In definitiva la generica **q** di Π è reale, o immaginaria, o asintotica. Invertendo il segno di $\mathcal{I}$, le direzioni reali diventano immaginarie e viceversa, mentre quelle asintotiche restano tali. Poiché come sappiamo $\mathcal{Q}_h(\mathbf{q})$ è stazionaria attorno a $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$ principale, anche $r_\mathbf{p}$ (reale o immaginario che sia) lo è; se dunque $\kappa(\mathbf{p}) \neq 0$ e $r_\mathbf{p}$ è reale, esso uguaglia la lunghezza del semiasse dell'indicatrice nella direzione $\mathbf{p}$, lunghezza il cui quadrato è uguale a $\mathcal{I}/\kappa(\mathbf{p})$, per ipotesi > 0. Questo giustifica il nome di "indicatrice" che si dà alla (n−1)-quadrica di Dupin. Va da sé che non possono esistere direzioni principali che siano anche asintotiche sse $\det\{h_{ik}\} \neq 0$; mentre ne esistono $n - r$ se r è il rango di $\{h_{ik}\}$. Un caso molto particolare è quello in cui $h_{ik} = \lambda g_{ik}$ con $\lambda > 0$: vi è allora un unico autovalore (positivo) λ dell'equazione caratteristica, e facendo $\mathcal{I} = 1$ si trova che l'indicatrice è l'(n−1)-sfera di raggio $\lambda^{-1/2}$ nell'unità di lunghezza in cui $(r_\mathbf{q})^2\lambda = 1$ (si tenga presente che $r_\mathbf{q}$ *non* dipende in questo caso da $\mathbf{q}$**).**

Se la direzione tangente ν di una sezione normale di M^n è anche direzione principale $\mathbf{p}$, ci si aspetta che la 1ª curvatura (assoluta) di quella sezione normale coincida con il modulo della corrispondente curvatura principale. Ciò è ovvio per n = 2. In effetti, dalla $\mathbf{t}_2 = \pm\mathbf{n}$ e dalla (5.3.2, 11_2) si ha, se s è la lunghezza lungo la sezione normale orientata come $\mathbf{p}$, $-d_s\nu \pm \kappa_1\mathbf{n} = 0$. Ma per ipotesi, (eq. (25)) è $d_s\mathbf{n} + \kappa(\mathbf{p})\nu = 0$; moltiplicando internamente la prima di queste per $\mathbf{n}$ e la seconda per $-\nu$, e sommando, si trova $\kappa(\mathbf{p}) = \pm\kappa_1$, ossia $|\kappa(\mathbf{p})| = \kappa_1$, qed.

La somma delle curvature principali (non necessariamente distinte) uguaglia l'invariante lineare di $h_{(2)}$; cioè, se $\kappa(\mathbf{p}_\iota)$ è l'ι-ma curvatura principale (in un ordine qualunque),

(28) $\quad \sum_\iota \kappa(\mathbf{p}_\iota) = g^{ik}h_{ik}.$

Diviso per n, questo scalare si dirà **curvatura principale media di** M^n, e si denoterà con H. Si noti che nella (28) le curvature principali risultano positive se i relativi centri di curvatura giacciono sulla normale a M^n prescelta per la definizione (3.5.3, 6) di $h_{(2)}$. Ad esempio nel caso della sfera di raggio R occorrerà orientare tale normale verso l'interno per avere H = +1/R. Inoltre, secondo la (3.2.6, 5) la somma dei prodotti di *coppie* di curvature principali di diverso indice ι è espressa da

(29) $\quad 2\sum_{\iota<\iota'} \kappa(\mathbf{p}_\iota)\kappa(\mathbf{p}_{\iota'}) = g^{ik}g^{jh}(h_{ik}h_{jh} - h_{ih}h_{jk}) = -g^{ik}g^{jh}\rho_{ijhk} = -\rho,$

ρ essendo l'invariante scalare di curvatura. Se n = 2, la somma a 1° membro della (29) consta di un solo addendo, e si conclude che

(29bis) $\kappa(\mathbf{p}_1)\kappa(\mathbf{p}_2) = g^{-1}\rho_{1212} = h/g = K,$

in accordo con quanto già sappiamo. La (29) può pertanto considerarsi come una generalizzazione (n>2)-dimensionale del Theorema egregium. Essa dice anche che

(29ter) $\quad -\rho = n(n-1)\mathcal{M},$

ove $\mathcal{M}$ denota il valor medio di $\kappa(\mathbf{p}_\iota)\kappa(\mathbf{p}_{\iota'})$ ($\iota'>\iota$) (ci sono n(n−1)/2 addendi nella somma a 1° membro della (29)). In particolare per n = 2, $\mathcal{M}$ = K. Per una n-sfera di raggio R, ove come già osservato $\mathbf{n}_{/i} = -\,\mathbf{f}_i/R$ per $\mathbf{n}$ orientata verso l'interno della n-sfera, risulta $h_{ik} = -\,(\mathbf{n}_{/i},\mathbf{f}_{/k}) = g_{ik}/R$, e dunque $\rho_{ikjh} = (g_{ij}g_{kh} - g_{ih}g_{jk})R^{-2}$, cioè $-\,\rho = n(n-1)R^{-2}$. Confrontando quest'ultima con la (29ter), si conclude che per tale n-sfera $\mathcal{M} = R^{-2}$. Quanto alla (28), essa dà $H = R^{-1}$.

Un altro tipo, forse più significativo, di generalizzazione del Theorema egregium trae spunto dall'ultimo teorema della S.sez 3.2.6. Sulla sua base, si ha subito:

(30) $\quad \prod_{\iota=1}^{n} \kappa(\mathbf{p}_\iota) = h/g.$

La n-curvatura a 1° membro (dimensionalmente, una lunghezza^{-n}) si dice tradizionalmente **curvatura totale** e si denota K_{tot}. Per $n = 2$, essa coincide con la curvatura gaussiana K, ed è questa la ragione per cui K si dice anche curvatura totale.

Veniamo adesso ad una significativa caratterizzazione delle curve asintotiche per $n = 2$. Secondo le ipotesi fatte, M^2 è di classe C^3; ma ciò non impedisce di ricercare possibili sue curve $\mathcal{P}$ attraverso le quali il tensore derivato di $h_{(2)}$ *potrebbe* avere delle discontinuità di 1ª specie (cioè, fare dei salti) compatibilmente con la prescritta metrica di M^2 (di CdC 2). Intuitivamente, ciò significa che lungo le curve $\mathcal{P}$, che diremo **curve di piegabilità** ($\mathcal{P}$ come "piegare"), M^2 *potrebbe essere piegato* (localmente) *senza modificarne la metrica*. Si tratta di un tipico problema di Analisi Caratteristica per il sistema delle equazioni cui soddisfano le h_{ik}: lungo le curve caratteristiche, nel nostro caso lungo le $\mathcal{P}$, non è risolubile unicamente il problema di Cauchy. Le equazioni per le h_{ik} sono le due (10), differenziali lineari del 1° ordine, e l'equazione di Gauss $h = Kg$, che è invece un vincolo finito, bilineare nelle h_{ik}. Sia $S(q^1,q^2) = \text{cost}$ l'equazione delle curve $\mathcal{P}$, sotto la condizione di non-degenerazione $\nabla S \neq 0$; quindi, ad esempio, sotto $S_{/1} \neq 0$. Come è consueto in casi del genere, conviene trasformare il vincolo finito (equazione di Gauss) in un'equazione differenziale (quasilineare del 1° ordine) prendendone la derivata covariante $_{/1}$:

(31) $\quad h_{11}h_{22/1} - 2h_{12}h_{12/1} + h_{22}h_{11/1} = (gK)_{/1}.$

Come insegna l'Analisi Caratteristica, i possibili salti delle $h_{ik/r}$, $\Delta h_{ik/r}$, devono soddisfare le cosiddette "condizioni di compatibilità" (che riflettono la continuità delle derivate delle h_{ik} *tangenziali* alla curva $\mathcal{P}$), cioè le $\Delta h_{ik/r} = \mu_{ik}S_{/r}$, dove le μ_{ik} sono componenti di un 2-tensore simmetrico arbitrario, uguale a zero sse non ci sono salti. Prendendo i salti Δ delle (10) e della (31) attraverso la curva $\mathcal{P}$, tenendo conto del fatto che i salti del 2° membro della (31) sono per ipotesi nulli, e facendo uso delle condizioni di compatibilità, si trova il sistema di equazioni lineari omogenee nelle μ_{ik}:

(32_1) $\quad S_{/2}\mu_{11} - S_{/1}\mu_{12} = 0,$

(32_2) $\quad S_{/1}\mu_{22} - S_{/2}\mu_{12} = 0,$

(32_3) $\quad S_{/1}h_{22}\mu_{11} - 2S_{/1}h_{12}\mu_{12} + S_{/1}h_{11}\mu_{22} = 0,$

dove le ($32_{1,2}$) conseguono dalle (10), e la (32_3) dalla (31). La piegabilità di M^2 lungo le curve S = cost equivale dunque all'esistenza di soluzioni non banali del sistema (32) nelle μ, cioè all'annullarsi del corrispondente determinante. Tenuto conto della $S_{/2}/S_{/1} = -\, dq^1/dq^2|_{S=cost} = -\, t^1/t^2$ (ove **t** è il versore tangente a S = cost, e t^2 è $\neq 0$ sse $S_{/1} \neq 0$), si ottiene $h_{ik}t^it^k = 0$, che è l'equazione delle curve asintotiche. In conclusione, le curve asintotiche sono curve di piegabilità (locale), "caratteristiche" (nel senso tecnico standard del termine) del sistema delle equazioni di Peterson-Codazzi e di Gauss.

Accanto al 2° 2-tensore fondamentale $h_{(2)}$ di M^n è anche opportuno introdurre il suo quadrato (o prodotto contratto, anch'esso simmetrico), diciamo $k_{(2)}$, dato in componenti da

(33) $\quad k_{ih} = h_{ij}h^j{}_h$,

e comunemente detto **3° tensore fondamentale** di M^n. Usando le equazioni di Weingarten, si verifica subito che

(34) $\quad (\mathbf{n}_{/i},\mathbf{n}_{/j}) = g^{pq}h_{pi}h_{qj} = k_{ij}$:

per cui, riferendoci al solito arco Γ di versore tangente $\pm$**t** (il verso non ha importanza), mediante la (24bis) e la $d_s = {}_{/i}t^i$ troviamo:

(35) $\quad (d_s\mathbf{n},d_s\mathbf{n}) = \kappa_\Gamma{}^2 + \tau_\Gamma{}^2 = k_{ij}t^it^j$.

Come sappiamo, $h_{(2)}$ e $k_{(2)}$ hanno in comune gli autovettori, e gli autovalori del secondo sono i quadrati di quelli del primo. Se quindi **p** è un versore principale appartenente all'autovalore $\kappa(\mathbf{p})$ di $h_{(2)}$, e allo stesso tempo viene considerato come versore tangente dell'arco Γ di versore **p**, da una parte $k_{ij}p^ip^j = \kappa^2(\mathbf{p})$ (perché $(k_{ik} - \kappa^2(\mathbf{p})g_{ik})p^k = 0$), e dall'altra $k_{ij}p^ip^j = \kappa_\Gamma{}^2 + \tau_\Gamma{}^2$. Poiché $\kappa^2(\mathbf{p})$ e $\kappa_\Gamma{}^2$ sono ormai la stessa cosa, si ha $\tau_\Gamma{}^2 = 0$, come deve essere in base alla definizione di direzione principale.

Il 2-tensore simmetrico $\rho_{(2)}$ si esprime immediatamente in termini di $k_{(2)}$ e $h_{(2)}$ secondo la

(36) $\quad \rho_{ik} = k_{ik} - h_{ik}h_j{}^j$;

per cui, se **u** è un arbitrario versore di Π,

(37) $\quad \rho_{ik}u^iu^k = (k_{ik} - h_{ik}h_j{}^j)u^iu^k$,

indipendentemente, come è ovvio, dall'orientamento di **u**.

L'opposto dello scalare a 1° membro della (37), che ha dimensione lunghezza^{-2}, si dice **2-curvatura di Ricci**, **nella direzione u**, **di** M^n, e sarà denotata $\kappa^*(\mathbf{u})$. Scriveremo pertanto:

(38) $\quad \kappa^*(\mathbf{u}) = -\,\rho_{ik}u^iu^k$.

Se in particolare **u** coincide con una direzione principale **p**, si ottiene la 2-curvatura di Ricci in quella direzione in funzione della curvatura nella stessa direzione e la curvatura principale media secondo la:

(39) $\kappa^*(\mathbf{p}) = \kappa(\mathbf{p})(nH - \kappa(\mathbf{p}))$;

e quindi, se in particolare le curvature principali sono tutte uguali ad un'unica κ,

(39bis) $\kappa^*(\mathbf{p}) = (n-1)\kappa^2$.

In questo caso anche le 2-curvature di Ricci principali sono uguali.

3.5.4) CASO DELLE VARIETÀ, $2 \le n < m-1$

Veniamo finalmente al punto (iii) del nostro programma (v S.sez. 3.5.1), cioè al caso $2 \le n < < m-1$, quando lo spazio tangente Π di M^n non è più individuato da un'*unica* direzione (dello spazio sommergente R^m) ad esso normale. Cade con ciò sia la possibilità di introdurre un 2° tensore fondamentale di M^n attraverso la (3.5.3, 6), sia quella di definire curve di M^n come sue sezioni "normali" (cioè sezioni con un piano bidimensionale contenente la direzione normale). Restano tuttavia aperte due opzioni, come vedremo collegate tra loro, per definire ragionevoli "curvature" di M^n. La prima di esse si richiama alla 2-curvatura di Ricci $\kappa^*(\mathbf{u})$, che come è evidente dalla (3.5.3, 38) non ha bisogno che M^n sia una ipersuperficie di R^m (cioè che $m = n + 1$) per essere introdotta. Non solo, ma la $\kappa^*(\mathbf{u})$ non necessita nemmeno del fatto che M^n sia *immerso* in uno spazio piatto qualchessia, euclideo o pseudoeuclideo. Infatti essa è completamente definita *se su* M^n *è dato un campo 2-tensoriale simmetrico non singolare definito-positivo da usare come 1° tensore fondamentale*. La 2-curvatura di Ricci apre dunque la prospettiva di definire una ragionevole accezione di 2-curvatura in varietà riemanniane (nel senso proposto dallo stesso Riemann, cioè non necessariamente immerse) di cui tratteremo più avanti, o addirittura pseudoriemanniane.

La seconda opzione è limitata alle varietà riemanniane: si tratta di considerare *altri* convenienti "invarianti di curvatura" (tipicamente di dimensione lunghezza^{-2}, come κ*) a partire da $\rho_{(4)}$. Un'idea naturale è quella di contrarre $\rho_{(4)}$ *due* volte con lo stesso bivettore **uv**, dove **u** e **v** sono vettori *linearmente indipendenti* di Π, ottenendo così uno scalare del tipo $\rho_{ijkh}u^iv^ju^kv^h$, indipendente dall'orientamento sia di **u** che di **v** ed evidentemente simmetrico in **u** e **v**. Il risultato non cambia se a u^iv^j e u^kv^h si sostituiscono le loro parti antisimmetriche, cioè i 2-tensori antisimmetrici semplici associati alla coppia ordinata $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ (o equivalentemente $\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$), passando così allo scalare $\rho_{ijkh}u^{[i}v^{j]}u^{[k}v^{h]}$ (ove [ ] ha il solito significato di antisimmetrizzatore). Il solo problema è ora quello di convenientemente "normalizzare" lo scalare così ottenuto, ciò che si ottiene dividendolo per il quadrato di una "norma" del 2-tensore antisimmetrico semplice, o bivettore, [**uv**]. Questa norma è l'area (assoluta) del parallelogramma di lati adiacenti **u** e **v**, cioè $|u||v||\sin\theta|$ se $0 < \theta < \pi$ è l'angolo tra quei lati. Quindi il richiesto quadrato è:

(1) $\quad 0 < (|u||v||\sin\theta|)^2 = |u|^2|v|^2 - (\mathbf{u},\mathbf{v})^2 = (g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})u^{[i}v^{j]}u^{[k}v^{h]}$.

Con questa normalizzazione otteniamo un genuino invariante "intrinseco", di dimensione lunghezza^{-2} (se come al solito le g_{ik} sono supposte adimensionali), diciamo

(2) $\quad K(\mathbf{u},\mathbf{v}) =: \rho_{ijkh}u^{[i}v^{j]}u^{[k}v^{h]} /((g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})u^{[i}v^{j]}u^{[k}v^{h]}) \equiv K(\mathbf{v},\mathbf{u})$.

Questo si riduce al solo numeratore se **u** e **v** sono unitari e ortogonali, cioè se (il quadrato del)la norma del bivettore [**uv**] vale 1. [14] La 2-curvatura definita dalla (2), che si dice **curvatura sezionale rispetto al piano di u e v**, si presta ad essere esportata su una generica varietà riemanniana; ma tuttavia non pseudoriemanniana, perché su quest'ultima non sarebbe in generale assicurata la diversità da zero del denominatore a 2° membro della (2). L'attributo "sezionale" ha un chiaro significato, perché la curvatura definita dalla (1) si riferisce alla *sezione* di Π con il 2-piano di **u** e **v**.

Se $\{\mathbf{f}_{(\alpha)}\}_{\alpha=1\div n}$ è una base ortonormale di Π, potremo dunque scrivere, con notazione autoevidente,

(3) $\quad K(\alpha,\alpha') =: \rho_{ijkh}\, f_{(\alpha)}{}^{[i} f_{(\alpha')}{}^{j]} f_{(\alpha)}{}^{[k} f_{(\alpha')}{}^{h]} \equiv K(\alpha',\alpha)$,

in cui α e α' sono indici compresi tra 1 e n, e $K(\alpha,\alpha) \equiv 0\ \forall\alpha$. La n×n-matrice $\{K(\alpha,\alpha')\}$, simmetrica e a diagonale principale nulla, si dice **matrice delle 2-curvature sezionali** (relativa alla base ortonormale $\{\mathbf{f}_.\}_{1\div n}$ di M^n). Da essa si può riottenere la 2-curvatura sezionale $K(\mathbf{u},\mathbf{v})$ definita dalla (2). Basta esprimere **u** come $\Sigma_\alpha \mathbf{f}_{(\alpha)}u^\alpha$ (e similmente per **v**), per avere, mediante facili passaggi,

(4) $\quad K(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{\alpha\neq\alpha'} K(\alpha,\alpha')\{u^\alpha u^\alpha v^{\alpha'}v^{\alpha'} - u^\alpha v^\alpha u^{\alpha'}v^{\alpha'}\}/\sum_{\alpha\neq\alpha'}\{u^\alpha u^\alpha v^{\alpha'}v^{\alpha'} - u^\alpha v^\alpha u^{\alpha'}v^{\alpha'}\}$;

vale a dire, la richiesta 2-curvatura è la media pesata, con i pesi riportati tra le { }, degli elementi $K(\alpha,\alpha')$.

La matrice $\{K(\alpha,\alpha')\}$, qui ricavata mediante una ragionevole euristica, risulta di fatto legata in modo semplice e significativo alla 2-curvatura di Ricci nella direzione di un elemento della base ortonormale $\{\mathbf{f}_.\}$. Denotiamo con $K(\alpha)$ la somma degli elementi della riga α–ma di $\{K(\alpha,\alpha')\}$. Ricordando le (3.5.3, 38), risulta:

(5) $\quad K(\alpha) = \sum_{\alpha'\neq\alpha} K(\alpha,\alpha') = \rho_{ijkh}\, f_{(\alpha)}{}^i f_{(\alpha)}{}^k \sum_{\alpha'} f_{(\alpha')}{}^j f_{(\alpha')}{}^h =. -\rho_{ik}\, f_{(\alpha)}{}^i f_{(\alpha)}{}^k = \kappa^*(\mathbf{f}_{(\alpha)})$.

Tradotto in parole: la somma delle 2-curvature sezionali relative agli $n(n-1)/2$ piani coordinati di una base ortonormale di Π, contenenti un elemento fisso $\mathbf{f}_{(\alpha)}$ della base, uguaglia la 2-curvatura di Ricci nella direzione di quell'elemento.

[14] Se **u*** e **v*** sono altri due vettori l.i. che abbracciano lo stesso piano di **u** e **v**, ossia sono trasformati lineari non-singolari dei primi, si verifica subito che, sostituendoli nella (1) al posto di **u** e rispettivamente **v**, numeratore e denominatore vengono moltiplicati per il quadrato del determinante della trasformazione. Ciò è come dire che K dipende soltanto dal piano in questione.

Come abbiamo già osservato, la (3.5.3, 39) vale per qualunque $2 \le n < m$. Ponendo in essa $n = 2$, otteniamo:

(6) $$\kappa^*(\mathbf{p}_1) = (\kappa(\mathbf{p}_1) + \kappa(\mathbf{p}_2))\kappa(\mathbf{p}_1) - \kappa^2(\mathbf{p}_1) \equiv \kappa(\mathbf{p}_2)\kappa(\mathbf{p}_1) =$$
$$= K = \kappa(\mathbf{p}_1)\kappa(\mathbf{p}_2) \equiv (\kappa(\mathbf{p}_2) + \kappa(\mathbf{p}_1))\kappa(\mathbf{p}_2) - \kappa^2(\mathbf{p}_2) = \kappa^*(\mathbf{p}_2);$$

cioè, le 2-curvature di Ricci nelle due direzioni principali sono uguali tra loro e alla curvatura gaussiana K. Inoltre, per $n = 2$ la (5) dà:

(7) $$\kappa^*(\mathbf{f}_{(1)}) = K(1) = K(1,2) = K(2,1) = K(2) = \kappa^*(\mathbf{f}_{(2)});$$

cioè le 2-curvature di Ricci lungo due *qualsiasi* direzioni ortogonali sono uguali. È questo un segnale anche più forte del precedente per indurci a valutare direttamente la 2-curvatura di Ricci in una *qualsiasi* direzione **t** di Π. Come si accerta facilmente, il 2-tensore di Ricci per $n = 2$ è $\rho_{ik} = \rho_{ijhk}g^{jh} = -\rho_{1212}\, g_{ik}/g = \rho g_{ik}/2 = -Kg_{ik}$; [15] e quindi, per la (3.5.3, 38), $\kappa^*(\mathbf{t}) = -\rho_{ik}t^it^k = Kg_{ik}t^it^k = K$, *indipendente* da **t**. Questa importante circostanza poteva essere accertata subito dopo aver introdotto le 2-curvature di Ricci attraverso la (3.5.3, 38), e spiega il carattere a prima vista inatteso di quanto affermano la (6) e (ancor più) la (7).

Concludiamo citando l'uso (ben noto anche a livello elementare) di dire "ellittici" i punti di M^2 (immersa in R^3) ove $K > 0$, "iperbolici" (o "a sella") quelli ove $K < 0$ e "parabolici" quelli ove $K = 0$. Il senso di queste denominazioni si spiega facilmente, perché la sezione locale di M^2 con un piano parallelo al suo piano tangente e da questo *poco* discosto (e dalla parte conveniente nel caso ellittico), è al 1° ordine un'ellisse, rispettivamente un'iperbole e rispettivamente una parabola. In particolare i punti parabolici giocano un ruolo in certo senso analogo, su una superficie immersa in R^3, a quello dei punti di flesso su una curva. (Una simile classificazione dei punti di una superficie ($n\ge2$)-dim immersa in R^{n+1} sarà data nella S.sez. 8.1.1.) Come sappiamo, infine (cfr. 3.4.2, (T1)), l'aperto considerato di M^2 (immersa in R^3), supposto semplicemente connesso, è un aperto di piano sse su di esso è identicamente $K \equiv 0$.

[15] In particolare, per una 2-superficie immersa in E_3 è $\rho_{1212} = h$, e $\rho_{ijhk} = h\Upsilon_{ij}\Upsilon_{hk}$: quindi $\rho_{ik} = \rho_{i11k}g^{11} + \rho_{i12k}g^{12} + \rho_{i21k}g^{21} + \rho_{i22k}g^{22}$. Sostituendo i g^{hk} e i ρ_{ijhk} si trova $\rho_{ik} = -g_{ik}h/g$, e quindi, per essere $-h/g = \rho/2 = -K$, il risultato che nel testo è ottenuto *senza* passare attraverso il secondo tensore fondamentale.