

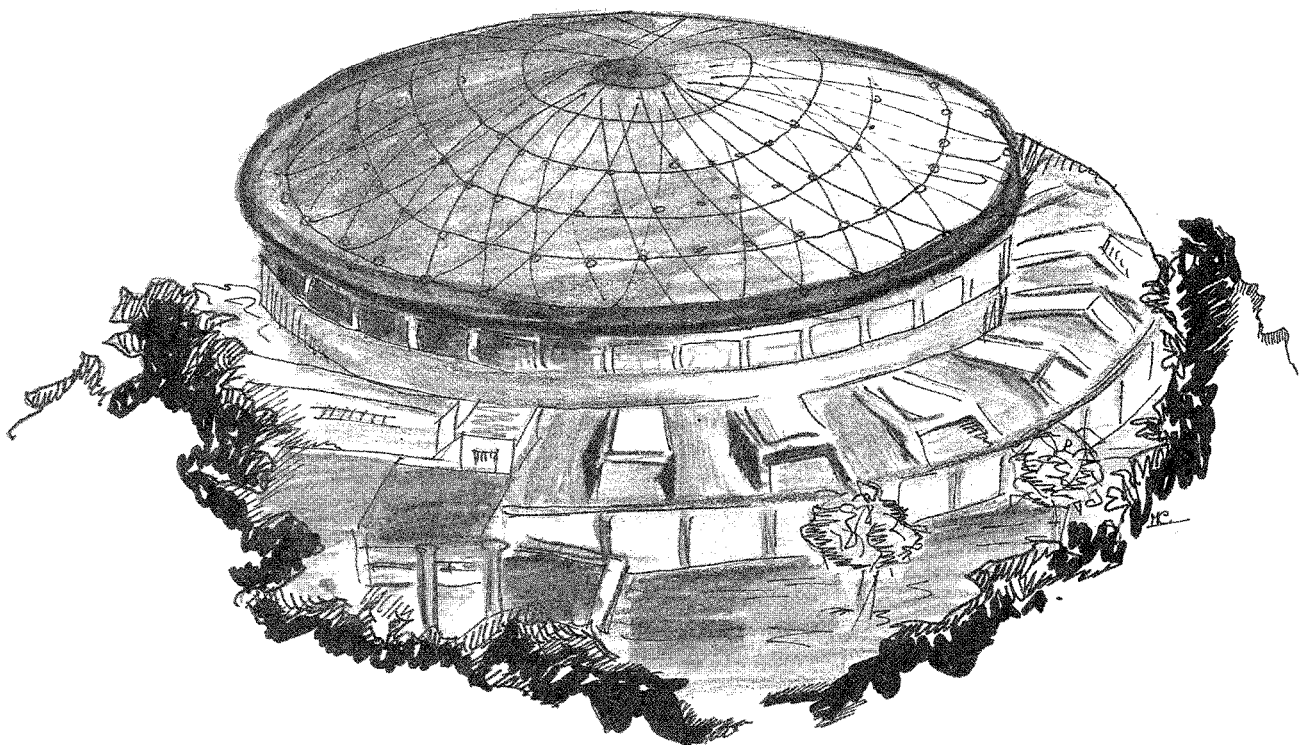


Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-89/051(R)
4 Settembre 1989

S. Bartalucci, M. Bassetti, L. Palumbo:

**STUDIO DELLA DINAMICA DI UNA PARTICELLA RELATIVISTICA IN
UNA CAVITA' CON CAMPO ACCELERANTE CON DISTRIBUZIONE
RETTANGOLARE O SINUSOIDALE**



**STUDIO DELLA DINAMICA DI UNA PARTICELLA RELATIVISTICA IN UNA
CAVITA' CON CAMPO ACCELERANTE CON DISTRIBUZIONE
RETTANGOLARE O SINUSOIDALE**

S. Bartalucci, M. Bassetti
INFN Laboratori Nazionali di Frascati, P.O. BOX 13, 00044 FRASCATI, (Italy)

L. Palumbo
Dip. di Energetica, Univ. La Sapienza, 00100 - Roma (Italy)
e INFN Laboratori Nazionali di Frascati, P.O. BOX 13, 00044 FRASCATI, (Italy)

1. - INTRODUZIONE

Una cavità acceleratrice composta da N celle accoppiate è caratterizzata da N modi normali di oscillazione, con frequenze leggermente diverse ma tutte prossime alla frequenza fondamentale della cella singola. I vari modi sono distinti dalla differenza di fase tra due celle contigue $\Delta\phi = i\pi/N$ dove $i = 1, N$ è l'indice del modo. Il modo corrispondente ad una differenza di fase $\Delta\phi = \pi$ fornisce la più elevata impedenza di shunt ed è perciò maggiormente usato nelle cavità acceleratrici ad onda stazionaria.

Lo studio della dinamica di una particella carica accelerata attraverso la cavità richiede la conoscenza dei campi e.m. in prossimità dell'asse della struttura. In generale la distribuzione spaziale del campo è tale che lo studio della dinamica può essere affrontato solo con metodi numerici. Tuttavia vi sono dei casi in cui è possibile ed interessante ricavare una soluzione analitica approssimata delle equazioni del moto. Ciò è possibile in condizioni asintotiche, cioè quando la particella viaggia con una velocità prossima a quella della luce, ed è iniettata nella cavità con una energia molto maggiore del guadagno di energia per cella.

In questa nota ricaveremo la soluzione asintotica delle equazioni del moto per due casi ideali in cui il campo elettrico longitudinale sull'asse è descritto da una funzione rettangolare e sinusoidale. La distribuzione rettangolare corrisponde al modo TM_{010} eccitato in una cavità cilindrica (pill-box) ed approssima il campo reale di una cavità dove due celle contigue non sono

accoppiate attraverso l'iride assiale (apertura molto piccola) ma attraverso cavittine esterne⁽¹⁾. La configurazione sinusoidale invece rappresenta la prima armonica spaziale del campo e descrive con buona approssimazione il campo reale quando le armoniche superiori dello sviluppo in serie sono trascurabili⁽²⁾.

2. - CAMPO E_z CON DISTRIBUZIONE RETTANGOLARE

2.1 - Campi elettromagnetici ed equazioni del moto

In Fig.1 mostriamo il campo elettrico longitudinale E_z in una struttura acceleratrice composta da quattro celle tipo pill-box eccitate nel modo fondamentale TM_{010} e sfasate di π .

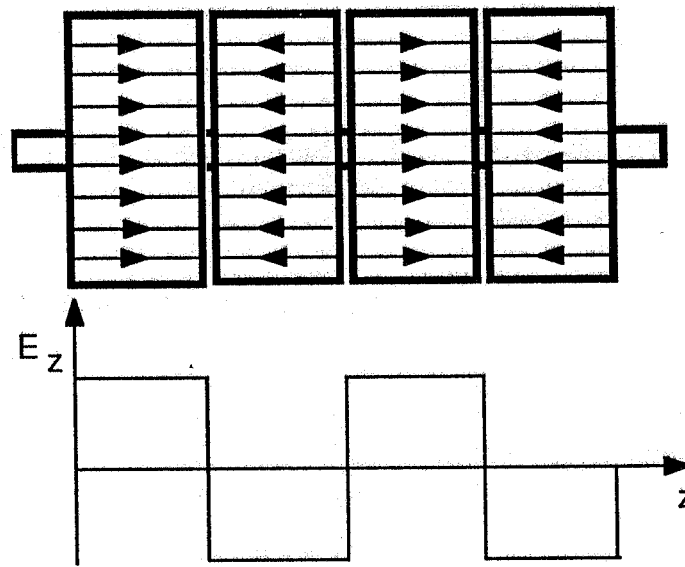


FIG. 1 - Schema di quattro celle risonanti nel modo $TM_{010} - \pi$, e campo sull'asse.

Siano z , r e ϕ le usuali coordinate cilindriche, b il raggio e $\lambda/2$ la lunghezza della cella. Le componenti non nulle del campo elettromagnetico sono:

$$E_z = E_0 J_0(\kappa r) \sin(\omega t) \quad (2.1)$$

$$B_\phi = \frac{E_0}{c} J_1(\kappa r) \cos(\omega t) \quad (2.2)$$

con $\kappa = 2\pi/\lambda = \omega/c$ tale che $\kappa b = v_{01} \approx 2.4$, primo zero della funzione di Bessel $J_0(x)$.

Le due equazioni del moto longitudinale e radiale sono:

$$\frac{d}{dt}(m_0 \gamma v_z) = e E_z$$

$$\frac{d}{dt}(m_0 \gamma v_r) = -e v_z B_\phi \quad (2.3)$$

Nell'intorno della traiettoria centrale l'argomento delle funzioni di Bessel e' piccolo e si può assumere:

$$J_0(\kappa r) \approx 1 \quad (2.4)$$

$$J_1(\kappa r) \approx \kappa r / 2 \quad (2.5)$$

Scegliamo per origine dei tempi ($t=0$) l'istante in cui la particella entra nella cavità ($z=0$) e supponiamo di essere in regime relativistico con:

$$\begin{aligned} v_z &\approx c \\ v_r &\approx cr' \end{aligned} \quad (2.6)$$

In tale ipotesi, poiché risulta

$$\kappa z \approx \omega t \quad (2.7)$$

i campi che agiscono sulla particella diventano funzioni di z ed r soltanto. Sostituendo le espressioni dei campi e $v_r = c dr/dz$, possiamo scrivere le due equazioni della dinamica rispetto a z :

$$\begin{aligned} m_0 c^2 \frac{d\gamma(z)}{dz} &= eE_0 \sin(\kappa z) \\ m_0 c^2 \frac{d}{dz} \left[\gamma(z) \frac{dr}{dz} \right] &= -eE_0 \frac{\kappa r}{2} \cos(\kappa z) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Integrando l'equazione per il moto longitudinale rispetto alla variabile z :

$$\gamma(z) = \gamma(0) + \frac{eE_0 [1 - \cos(\kappa z)]}{\kappa m_0 c^2} \quad (2.9)$$

ovvero, per l'energia $\mathcal{E}(z)$ in una cella:

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}(0) + \frac{eE_0 [1 - \cos(\kappa z)]}{\kappa} \quad (2.10)$$

Il guadagno medio in una cella lunga $\lambda/2$ è:

$$g = \frac{2 \Delta \mathcal{E}}{\lambda} = \frac{2eE_0}{\pi} \quad (2.11)$$

L'equazione 2.10) è rappresentata in Fig. 2 per una particella iniettata con energia iniziale pari a 1.5 MeV in una cavità composta da quattro celle con guadagno medio di 5 MeV/m.

Introducendo la 2.9) nella seconda delle 2.8) si ottiene l'equazione del moto radiale:

$$r''(z) + \frac{eE_0 \sin(\kappa z)}{\mathcal{E}(z)} r'(z) + \frac{\kappa eE_0 \cos(\kappa z)}{2 \mathcal{E}(z)} r(z) = 0 \quad (2.12)$$

Nelle equazioni precedenti abbiamo utilizzato r' come variabile associata ad r , come d'uso nella letteratura di Fisica degli Acceleratori. In questo caso r' è smorzata a causa

dell'accelerazione dovuta al campo elettrico longitudinale. Tuttavia altre scelte sono possibili e possono risultare più comode per lo sviluppo numerico e analitico del calcolo. Ad esempio può risultare utile scrivere le equazioni della dinamica per le variabili associate r e p_r (impulso trasverso) perchè l'impulso trasverso rimane inalterato durante la fase di accelerazione. Una discussione dettagliata sulle possibili scelte è presentata in Appendice I.

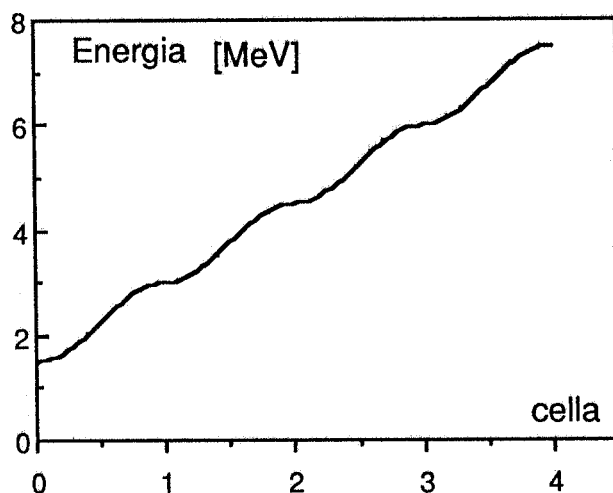


FIG. 2 - Variazione dell'energia di un elettrone da 1.5 MeV iniettato all'interno di una cavità con campo rettangolare e guadagno 5 MeV/m

2.2 - Matrice di trasferimento del tratto infinitesimo

Sia per l'impostazione del calcolo numerico che di quello analitico e' utile scrivere la trasformazione subita dalle due variabili r ed r' a seguito di una variazione infinitesima Δz .

In generale, chiamando \mathbf{R} il vettore associato alle due variabili dipendenti r ed r' , e z quella indipendente, possiamo scrivere :

$$\mathbf{R}(z+\Delta z) = \mathbf{R}(z) + \mathbf{R}'(z)\Delta z \quad (2.13)$$

che nel nostro caso diventa:

$$\begin{aligned} r(z + \Delta z) &= r(z) + r'(z) \Delta z \\ r'(z + \Delta z) &= r''(z) \Delta z + r'(z) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dalla 2.12), ponendo:

$$N(z) = \frac{\pi \mathcal{E}(z)}{\lambda e E_0} = \frac{2 \mathcal{E}(z)}{\lambda g} \quad (2.15)$$

che rappresenta un numero (reale) di celle equivalenti ricaviamo :

$$r'' = - \frac{\kappa}{2N(z)} \left[\sin(\kappa z) r'(z) + \frac{\kappa}{2} \cos(\kappa z) r(z) \right] \quad (2.16)$$

e quindi al posto delle (2.14) otteniamo:

$$\begin{aligned} r(z+\Delta z) &= r(z) + \Delta z r'(z) \\ r'(z+\Delta z) &= -\left(\frac{\kappa^2 \cos(\kappa z) \Delta z}{4N(z)}\right)r(z) + \left(1 - \frac{\kappa \sin(\kappa z) \Delta z}{2N(z)}\right)r'(z) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Le trasformazioni infinitesime (2.17) possono essere scritte sotto forma matriciale :

$$\mathbf{R}(z+\Delta z) = \mathbf{M}(z, \Delta z) \mathbf{R}(z) \quad (2.18)$$

con

$$\mathbf{M}(z, \Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta z \\ -\frac{\kappa^2 \cos(\kappa z) \Delta z}{4N(z)} & 1 - \frac{\kappa \sin(\kappa z) \Delta z}{2N(z)} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice di trasferimento (2.19) è il punto di partenza sia per il calcolo numerico che per lo sviluppo analitico.

In Appendice A calcoliamo la matrice \mathbf{M} per altre due coppie di variabili associate.

2.3 - Confronto tra i risultati del metodo numerico e le espressioni analitiche per la distribuzione rettangolare.

Sebbene l'equazione del moto (2.12) non sia direttamente integrabile, la matrice di trasferimento in funzione di una generica posizione z all'interno della cella può essere ricavata utilizzando il metodo perturbativo descritto in⁽³⁾. Otteniamo in tal modo una soluzione approssimata che vale nel caso asintotico, ovvero quando l'energia della particella è sufficientemente elevata, rispetto al guadagno per cella, da poterla considerare costante. I dettagli del calcolo analitico sono presentati in Appendice B.

La matrice di trasferimento risulta:

$$\mathbf{M}\left(z = n\frac{\lambda}{2}\right) = \begin{pmatrix} (\cos \theta + \eta \sin \theta) & \frac{\mathcal{E}_0}{g} \xi \sin \theta \\ -\frac{g}{\mathcal{E}(z)} \frac{1 + \eta^2}{\xi} \sin \theta & \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}(z)} (\cos \theta - \eta \sin \theta) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

dove

$$\theta = \chi \ln \left[\frac{\mathcal{E}(z)}{\mathcal{E}_0} \right], \quad \chi = \frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1}}{2}$$

$$\eta = -\sqrt{\frac{8}{\pi^2 - 8}} \quad \xi = \frac{2}{\sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1}} \quad (2.21)$$

La matrice 2.20) permette di ricavare la traiettoria della particella di energia iniziale \mathcal{E}_0 solo alla fine di ogni cella.

Per il calcolo numerico della traiettoria si potrebbe propagare direttamente la matrice 2.19). Tuttavia, per avere un maggior controllo dei risultati forniti dal programma di calcolo, abbiamo preferito fattorizzare la matrice relativa al tratto Δz in una matrice diagonale $\mathbf{D}(z, \Delta z)$ e in una matrice di focheggiamento $\mathbf{F}(z, \Delta z)$. I dettagli di tale procedura di calcolo sono riportati in Appendice C.

Allo scopo di verificare i limiti di applicabilità della matrice 2.20), abbiamo effettuato un confronto con i risultati numerici. A tal fine abbiamo confrontato le espressioni dei parametri η , χ e ξ con i loro valori ricavati dal calcolo numerico. In Fig. 3 mostriamo l'andamento del rapporto tra valore numerico ed analitico dei tre parametri al variare del rapporto tra energia iniziale e guadagno di energia per cella. Dalla figura si evince che il regime asintotico è raggiunto per valori di $\mathcal{E}_0/\Delta\mathcal{E} > 6$.

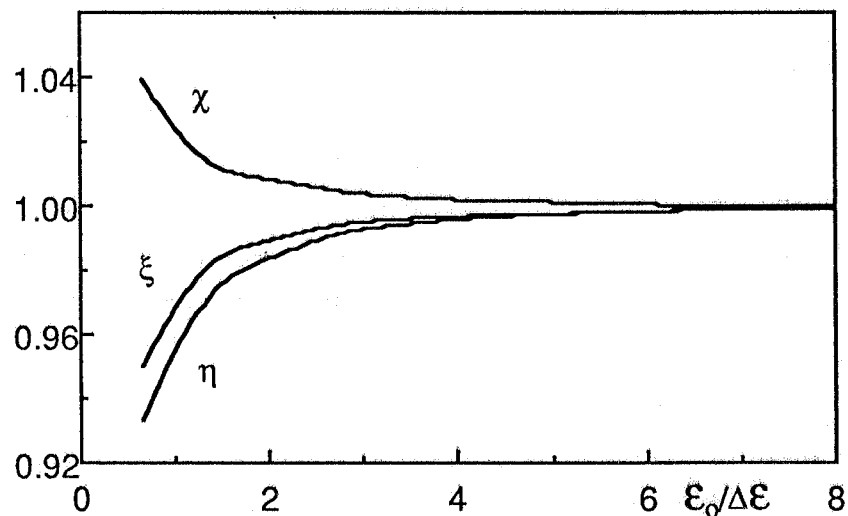


FIG. 3 - Grafico delle variabili η , χ e ξ (valori numerici) normalizzate ai valori analitici asintotici per una cella risonante nel modo TM_{010} .

Abbiamo inoltre confrontato le traiettorie nel caso di una particella con energia iniziale di 1.5 MeV iniettata in una cavità da 500 MHz composta da 4 celle con guadagno di 5 MeV per metro. In Figs. 4 e 5 riportiamo l'andamento di r ed r' , con condizioni iniziali $r(0) = 1$, $r'(0) = 0$, calcolate numericamente (linea continua) ed applicando la matrice 2.20) anche all'interno della cavità (linea tratteggiata). Accanto alle traiettorie sono riportati gli errori percentuali.

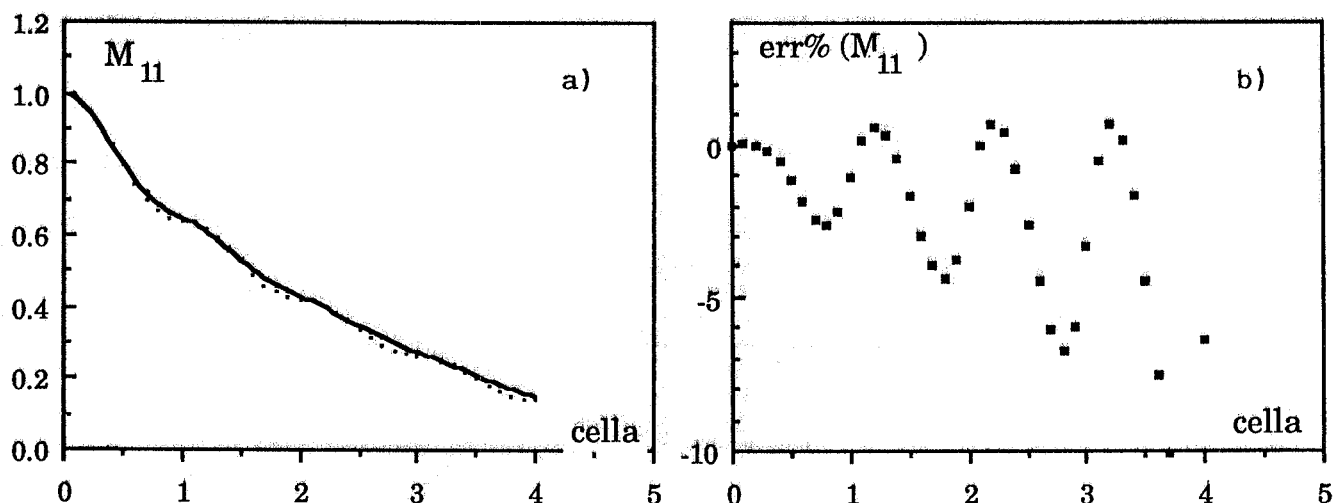


FIG. 4 - Grafico di $r(z)$ ed errore percentuale (Distr. Rettangolare)

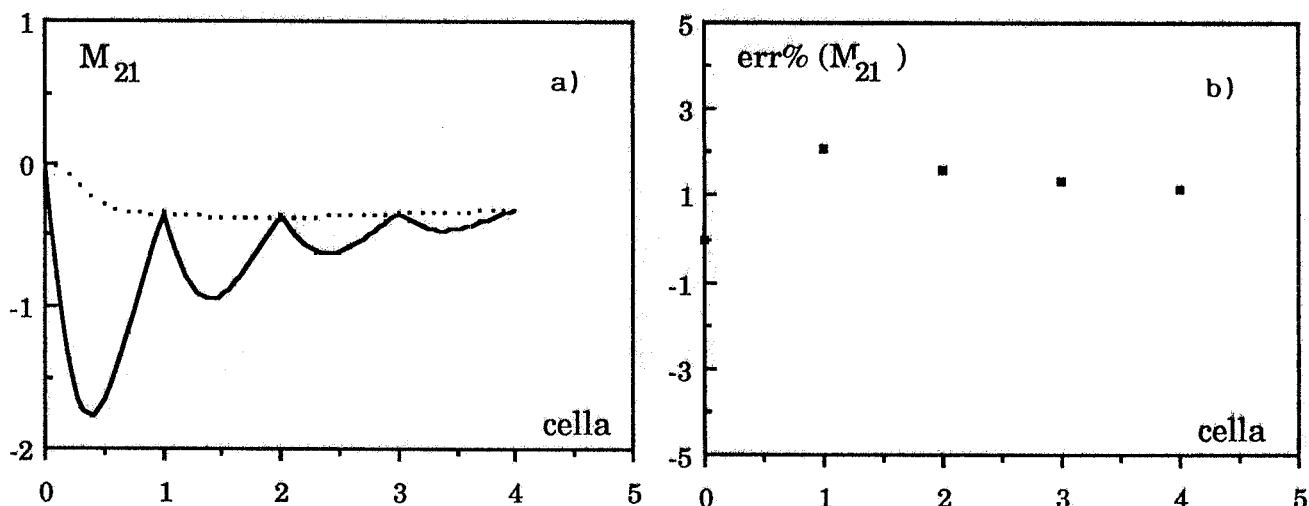


FIG. 5 - Grafico di r' ed errore percentuale (Distr. Rettangolare)

3. CAMPO E_z CON DISTRIBUZIONE SINUSOIDALE

3.1. Campi e.m., equazioni del moto e matrice di trasferimento di un tratto infinitesimo

Espandendo il campo sull'asse in serie di Fourier di armoniche spaziali e nell'ipotesi che la prima armonica sia dominante si ha:

$$E_z(z,t) = A_0 \sin(\kappa z) \sin(\omega t) \quad (3.1)$$

dove $\kappa = 2\pi/\lambda$.

Per traiettorie prossime all'asse z le componenti del campo elettrico radiale e magnetico azimutale sono:

$$\begin{aligned}
 E_r(r,z,t) &= -A_0 \frac{\kappa r}{2} \cos(\kappa z) \sin(\omega t) \\
 B_\phi(r,z,t) &= A_0 \frac{\kappa r}{2c} \sin(\kappa z) \cos(\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

In Fig.6 riportiamo l'andamento spaziale del campo ed il profilo ideale della cavità risonante che genererebbe un campo puramente sinusoidale.

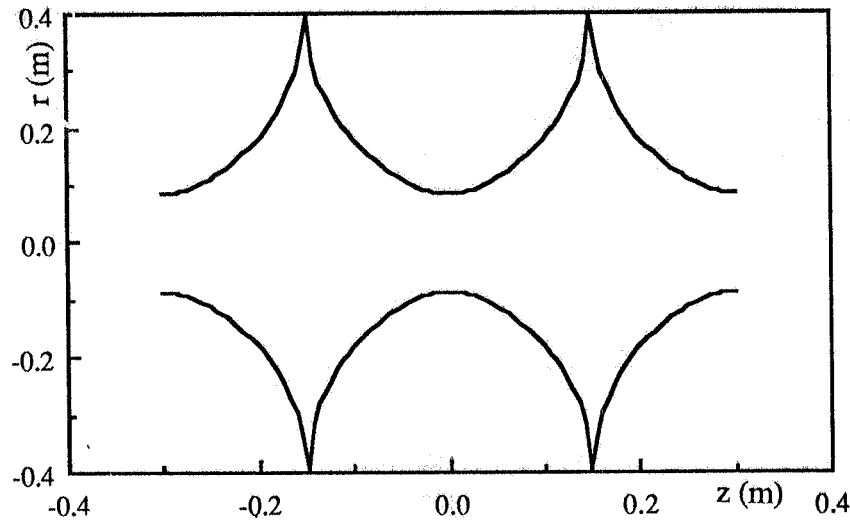


FIG. 6 Profilo ideale di una cavità con campo puramente sinusoidale
 $(r(z) = r_0 \{1 + (2/\kappa r_0)^2 \ln[\cos(\kappa z)]\}^{1/2})$.

Notiamo la comparsa di un campo elettrico trasverso rispetto al modo TM_{010} in una pill-box. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [m_0 \gamma(z) v_z] &= e E_z(z,t) \\
 \frac{d}{dt} [m_0 \gamma(z) v_r] &= e [E_r(z,t) - v_z B_\phi(z,t)]
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Procedendo in modo del tutto analogo al §2.1, introduciamo le espressioni dei campi ed eliminiamo la dipendenza dal tempo:

$$m_0 c^2 \frac{d}{dz} [\gamma(z)] = e A_0 \sin^2(\kappa z)
 \tag{3.4}$$

$$m_0 c^2 \frac{d}{dz} \left[\gamma(z) \frac{dr}{dz} \right] = e [E_r(z) - c B_\phi(z)] = -e A_0 \kappa r \cos(\kappa z) \sin(\kappa z)
 \tag{3.5}$$

Integriamo l'equazione del moto longitudinale rispetto a z e ricaviamo il guadagno d'energia in una cella:

$$\gamma(z) = \gamma(0) + \frac{e A_0}{2m_0 c^2} \int \left[1 - \cos(2\kappa z) \right] dz = \gamma(0) + \frac{e A_0}{2m_0 c^2} \left[z - \frac{\sin(2\kappa z)}{2\kappa} \right]
 \tag{3.6}$$

e quindi il guadagno medio d'energia per una cella è dato da

$$g = \frac{2\Delta\mathcal{E}}{\lambda} = \frac{2m_0 c^2}{\lambda} \left[\gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \gamma(0) \right] = \frac{eA_0}{2} \quad (3.7)$$

L'andamento dell'energia di una carica con energia iniziale 1.5 MeV accelerata in una cavità composta da 4 celle è riportata in Fig. 7.

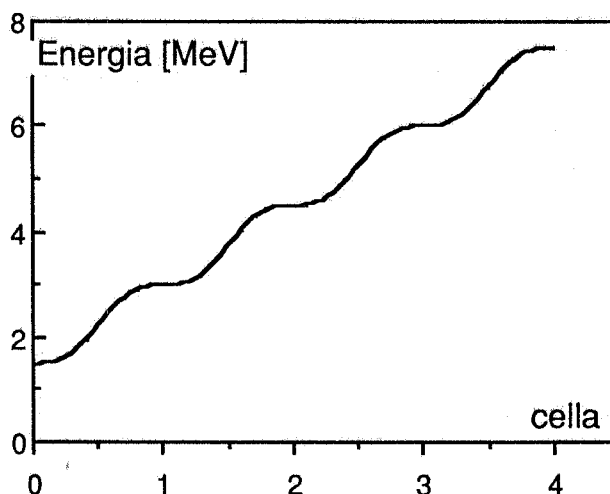


FIG.7 - Variazione dell'energia di un elettrone da 1.5 MeV iniettato all'interno di una cavità con campo sinusoidale e guadagno 5 MeV/m.

L'equazione del moto radiale diviene:

$$r''(z) + \frac{e A_0 [1 - \cos(2\kappa z)]}{2\mathcal{E}(z)} r'(z) + \frac{e A_0 \kappa \sin(2\kappa z)}{2\mathcal{E}(z)} r(z) = 0 \quad (3.8)$$

Possiamo ora ricavare la matrice di trasferimento per la coppia di variabili (r, r') per un tratto infinitesimo Δz . Procedendo analogamente al §2.2 si ha:

$$M(z, \Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta z \\ \frac{-\kappa \sin(2\kappa z) \Delta z}{\pi N(z)} & 1 - \frac{\kappa [1 - \cos(2\kappa z)] \Delta z}{\pi N(z)} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

3.2.- Confronto tra i risultati del metodo numerico e le espressioni analitiche per la distribuzione sinusoidale.

La matrice di trasferimento asintotica per questo caso è già stata calcolata in⁽²⁾ sebbene con un metodo perturbativo diverso. La traiettoria di una carica iniettata con energia iniziale \mathcal{E}_0 all'uscita di ogni cella si ottiene propagando le coordinate iniziali mediante la stessa matrice 2.20) con differenti valori dei parametri:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{8}} ; \quad \eta = -\sqrt{2} ; \quad \xi = \sqrt{8} \quad (3.10)$$

Abbiamo verificato i limiti di validità della soluzione analitica confrontando i valori analitici e numerici dei parametri 3.10) al variare dell'energia iniziale. In Fig. 6 sono riportati i valori del rapporto tra valore numerico ed analitico dei tre parametri al variare del rapporto tra energia iniziale e guadagno di energia per cella.

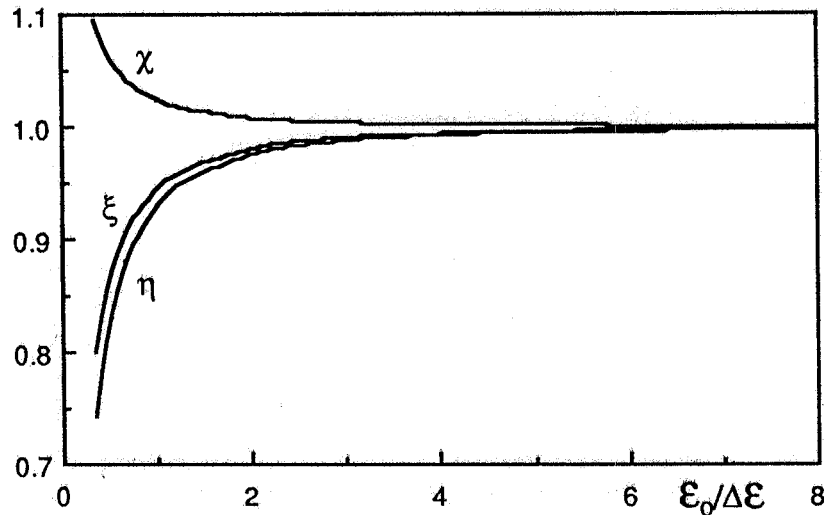


FIG. 8 - Grafico delle variabili η , χ e ξ (valori numerici) normalizzate ai valori analitici asintotici per una cella risonante con campo sinusoidale.

Anche in questo caso abbiamo effettuato un confronto tra le traiettorie calcolate numericamente e quelle analitiche per un elettrone iniettato con condizioni iniziali $r(0) = 1$, $r'(0) = 0$, estendendo l'uso della matrice anche all'interno della cavità come mostrato in Figs. 9 e 10.

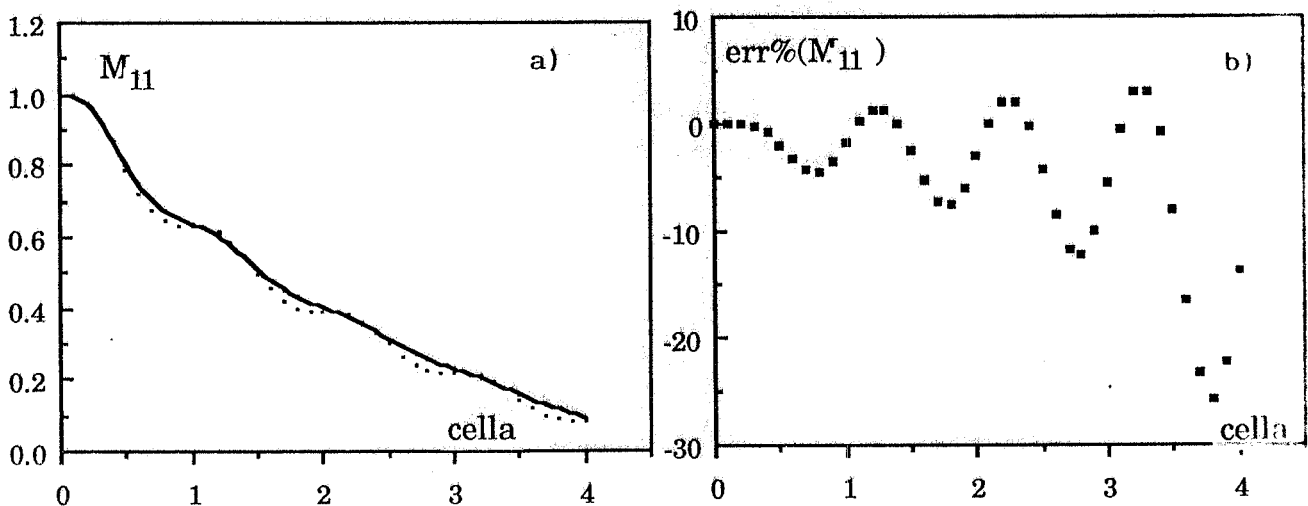


FIG. 9 - Grafico di $r(z)$ ed errore percentuale (Distr. Sinusoidale)

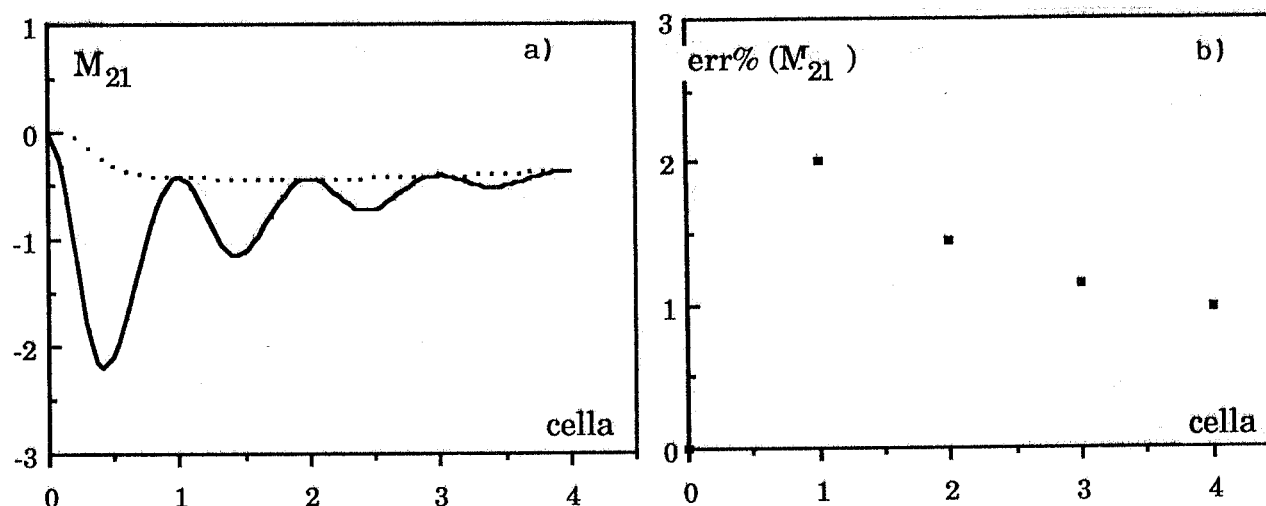


FIG. 10 - Grafico di $r'(z)$ ed errore percentuale (Distr. Sinusoidale)

Conclusioni

In questa nota abbiamo analizzato la dinamica di una particella carica che attraversa delle cavità acceleratrici ideali. Abbiamo ricavato, mediante una tecnica perturbativa, la matrice di trasferimento necessaria alla propagazione delle coordinate trasverse nel caso asintotico, ovvero quando l'energia iniziale della particella è molto maggiore del guadagno di energia per cella. Abbiamo quindi verificato i limiti di validità delle espressioni asintotiche riportando l'errore percentuale dei parametri rilevanti al variare del rapporto tra l'energia iniziale \mathcal{E}_0 e il guadagno di energia per cella $\Delta\mathcal{E}$. L'errore commesso sul calcolo della traiettoria è dell'ordine di qualche per cento quando \mathcal{E}_0 e $\Delta\mathcal{E}$ sono confrontabili.

Infine occorre ricordare che la matrice asintotica è stata ricavata per una particella che viaggia alla velocità della luce. Per basse energie, calcoli più accurati devono tenere in conto la variazione della velocità durante l'accelerazione.

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano F.Tazzioli, B.Spataro e R.Boni per le discussioni e chiarimenti sui modi liberi di una cavità multicelle.

Bibliografia

- [1] P.B. Wilson, Proceedings of the 1981 Summer School on High Energy Accelerators, AIP Conference Proceedings No. 87, 1982.
- [2] E.E. Chambers, Proceedings of the 1968 Summer Study on Superconducting Devices and Accelerators, BNL Report 50155, 1968.
- [3] G. Sacerdoti, LNF Report 62/26, 1962.

APPENDICE A: Variabili Associate Alternative e Matrici di Trasferimento del Tratto Infinitesimo.

Nelle equazioni del moto (2.12) e (3.8) abbiamo utilizzato r' come variabile associata ad r , come d'uso nella letteratura di Fisica degli Acceleratori . In questo caso, che chiameremo **caso A**, r' è smorzata a causa dell'accelerazione dovuta al campo elettrico longitudinale. Tuttavia altre scelte possono risultare più comode per lo sviluppo numerico e analitico del calcolo.

Un'altra scelta possibile è quella adottata in ⁽²⁾ dove viene considerato l'impulso trasverso p_r (**caso B**):

$$p_r = m_0 \gamma v_r = m_0 c \gamma r' = p r' \quad (\text{A.1})$$

dove p è l'impulso totale della particella.

Notiamo che per le variabili (r, p_r) , invece di una equazione differenziale del 2° ordine, abbiamo due equazioni differenziali del 1° ordine.

Per il caso di **distribuzione rettangolare** si ha:

$$r' = \frac{p_r}{p} \quad (\text{A.2})$$

$$p_r' = -\frac{e\kappa r E_0}{2c} \cos(\kappa z) \quad (\text{A.3})$$

Da un punto di vista fisico non vi è smorzamento per la coppia di variabili (r, p_r) perchè esse non vengono influenzate dall'aumento dell'impulso longitudinale durante la fase di accelerazione. La coppia di variabili (r, p_r) è la più rigorosa per lo studio della dinamica trasversa in presenza di smorzamento.

Una terza interessante possibilità (**caso C**) deriva da una lettura diversa delle due equazioni (A.2) e A.3). Infatti moltiplicando la seconda per il momento totale p otteniamo:

$$p_r = \frac{r'}{1/p} = \frac{dr}{dz/p} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{p_r'}{(1/p)} = \frac{dp_r}{(dz/p)} = \frac{d^2 p_r}{(dz/p)^2} - \frac{epE_0 \kappa r}{2c} \cos(\kappa z) \quad (\text{A.5})$$

E' ora evidente che introducendo la variabile " μ " definita da :

$$d\mu = \frac{dz}{p} \quad (\text{A.6})$$

l'equazione A.5) diventa:

$$r''(\mu) + \left(\frac{pg}{2c}\right)^2 N[z(\mu)] \cos[\kappa z(\mu)] r(\mu) = 0 \quad (\text{A.7})$$

dove :

$$N[z(\mu)] = \frac{2cp[z(\mu)]}{g\lambda} \quad (\text{A.8})$$

rappresenta il numero di celle equivalenti (non necessariamente intero) corrispondente all'energia posseduta dalla particella all'ascissa "z". Nell'equazione (A.7) gli apici indicano differenziazione rispetto a μ .

Notiamo che in questa equazione differenziale il termine di smorzamento è scomparso, nonostante che la variabile associata sia ancora r' . Ciò è dovuto al fatto che al variare di "z" la nuova variabile indipendente μ si contrae della stessa misura di cui aumenta l'impulso longitudinale.

Le tre possibilità considerate sono ugualmente valide ed interessanti e, dato il diverso significato fisico che si può loro attribuire, sono tutte utilizzate in letteratura. Noi svilupperemo i tre casi in parallelo fino alle espressioni utili per il calcolo numerico in modo da rendere agevole il passaggio da una coppia di variabili all'altra.

Sia per l'impostazione del calcolo numerico, che per lo sviluppo del calcolo analitico, e' utile scrivere la trasformazione subita dalle due variabili dipendenti scelte a seguito di una variazione infinitesima della variabile indipendente.

Abbiamo già visto nei § 2.2 e 3.1 che per uno spostamento infinitesimo possiamo scrivere il vettore $\mathbf{R}(s)$ associato alle due variabili dipendenti mediante uno sviluppo al primo ordine

$$\mathbf{R}(s + \Delta s) = \mathbf{R}(s) + \mathbf{R}'(s)\Delta s \quad (\text{A.9})$$

che consente di esprimere la trasformazione matriciale:

$$\mathbf{R}(s+\Delta s) = \mathbf{M}(s, \Delta s) \mathbf{R}(s) \quad (\text{A.10})$$

Per generalità abbiamo considerato la variabile indipendente s .

Per il caso A la trasformazione matriciale è stata ricavata nel § 2.2.

Sfruttando le equazioni del moto (A.4) e (A.5) otteniamo facilmente le espressioni (A.9) ed (A.10) per gli altri due casi:

Distr. rettangolare - caso B:

$$\begin{aligned} r(z+\Delta z) &= r(z) + \frac{\Delta z}{p(z)} p_r(z) \\ p_r(z+\Delta z) &= -\left(\frac{pg}{2c}\right)^2 N(z) \cos(\kappa z) \frac{\Delta z}{p(z)} r(z) + p_r(z) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

che possono essere espresse direttamente in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} r(z+\Delta z) \\ p_r(z+\Delta z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta z}{p(z)} \\ -\left(\frac{pg}{2c}\right)^2 N(z) \cos(\kappa z) \frac{\Delta z}{p(z)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(z) \\ p_r(z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Distr. rettangolare - caso C:

$$r(\mu+\Delta\mu) = r(\mu) + \Delta\mu r'(\mu)$$

$$r'(\mu+\Delta\mu) = -\left(\frac{pg}{2c}\right)^2 N[z(\mu)] \cos[\kappa z(\mu)] \Delta\mu r(\mu) + r'(\mu) \quad (\text{A.13})$$

che in forma matriciale diventano:

$$\begin{pmatrix} r(\mu+\Delta\mu) \\ r'(\mu+\Delta\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\mu \\ -\left(\frac{pg}{2c}\right)^2 N[z(\mu)] \cos[\kappa z(\mu)] \Delta\mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(\mu) \\ r'(\mu) \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Per la distribuzione sinusoidale si ottengono le matrici per i casi B e C procedendo analogamente. Per il caso B otteniamo:

Distr. sinusoidale - caso B:

$$\begin{pmatrix} r(z+\Delta z) \\ p_r(z+\Delta z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta z}{p(z)} \\ -\pi\left(\frac{g}{c}\right)^2 N(z) \sin(2\kappa z) \frac{\Delta z}{p(z)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(z) \\ p_r(z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

APPENDICE B: Metodo Analitico.

A partire dalla matrice di trasferimento del tratto infinitesimo, eq. (2.19) e (3.9) per la coppia di variabili (r,r') e dalle equazioni (A.12) e (A.15) per la coppia di variabili (r,pr) , è possibile ricavare la matrice totale mediante moltiplicazione successiva delle matrici elementari:

$$\mathbf{M}(z) = \prod_i \mathbf{M}(z_i, \Delta z_i) \quad (\text{B.1})$$

Una valutazione approssimata della produttoria si ottiene applicando il metodo descritto in (3). Per semplicità di calcolo abbiamo applicato la procedura di calcolo alle matrici (A.12) ed (A.15) relative ad (r,pr) essendo semplice il passaggio da una coppia di variabili all'altra.

Anche qui svilupperemo il metodo esclusivamente per il caso a distribuzione rettangolare.

Con riferimento alla matrice (A.12) ponendo:

$$h = -\left(\frac{\pi g}{2c}\right)^2 N(z) \quad ; \quad \Delta s = \frac{\Delta z}{p(z)} \quad ; \quad f(s) = -h \cos(\kappa z) \quad (\text{B.2})$$

riscriviamo la matrice come segue:

$$\mathbf{M}(s, \Delta s) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta s \\ f(s) \Delta s & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \Delta s \mathbf{T}(s) \quad (\text{B.3})$$

dove

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f(s) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Sostituendo B.4) in B.1) e sviluppando i vari termini della produttoria si ha:

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{I} + \int_0^s \mathbf{T}(s_1) ds_1 + \int_0^s \mathbf{T}(s_1) ds_1 \int_0^{s_1} \mathbf{T}(s_2) ds_2 + \dots \quad (\text{B.5})$$

Sviluppando gli integrali B.5) si ottengono i vari termini della matrice sotto forma di una sommatoria:

$$M_{ij}(s) = \sum m_{ij}^n(s) \quad (\text{B.6})$$

Al primo ordine risulta:

$$\begin{aligned} m_{11}^1(s) &= 0 & m_{12}^1(s) &= \int_0^s ds \\ m_{21}^1(s) &= \int_0^s f(s) ds & m_{22}^1(s) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Per i termini successivi valgono le seguenti regole di ricorrenza:

$$\begin{aligned}
 m_{11}^{2(n+1)}(s) &= \int_0^s m_{21}^{2n+1}(s) ds & m_{21}^{2n+1}(s) &= \int_0^s f(s) m_{11}^{2n}(s) ds \\
 m_{12}^{2n+1}(s) &= \int_0^s m_{22}^{2n}(s) ds & m_{22}^{2(n+1)}(s) &= \int_0^s f(s) m_{12}^{2n+1}(s) ds
 \end{aligned}
 \tag{B.8}$$

Con questa procedura si possono ricavare in linea di principio tutti i termini dell'espansione (B.6) in qualsiasi punto della cavità. Tuttavia le espressioni si semplificano se siamo interessati solo ai punti all'uscita di ogni cella. Inoltre nel caso asintotico gli integrali riguardano solo semplici funzioni trigonometriche. Notando infine nella (B.2) che h è un parametro molto piccolo, è sufficiente fermarsi ai primi termini della sommatoria (B.6) intesa come sviluppo in serie di potenze di h .

APPENDICE C: Metodo Numerico.

Per il calcolo numerico della traiettoria si può propagare la matrice (2.19) e (3.9). Tuttavia, per avere un maggior controllo dei risultati forniti dal programma di calcolo, abbiamo preferito fattorizzare la matrice relativa al tratto Δz in una matrice diagonale $\mathbf{D}(z, \Delta z)$ e in una matrice di focheggiamento $\mathbf{F}(z, \Delta z)$.

Per la distribuzione rettangolare abbiamo:

$$\mathbf{D}(z, \Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\kappa \sin(\kappa z) \Delta z}{2N(z)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{F}(z, \Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta z \\ \frac{-\kappa^2 \cos(\kappa z) \Delta z}{4N(z)} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Il prodotto $\mathbf{D}(z, \Delta z) \mathbf{F}(z, \Delta z)$ riproduce la matrice $\mathbf{M}(z, \Delta z)$ a meno di infinitesimi del secondo ordine in Δz .

La matrice di propagazione totale (o parziale) viene ottenuta per successive moltiplicazioni delle matrici elementari relative a ciascun tratto.

$$\mathbf{M}(z) = \prod_i \mathbf{D}(z_i, \Delta z_i) \mathbf{F}(z_i, \Delta z_i) \quad (\text{C.3})$$

Nel calcolo numerico della traiettoria abbiamo adottato i seguenti criteri:

- La funzione che descrive la forza trasversa focheggiante viene approssimata da una funzione costante a tratti. In ciascun tratto il valore della forza viene assunto uguale a quello al centro del tratto considerato.
- La matrice $\mathbf{F}(z, \Delta z)$, che non ha determinante unitario a meno di termini del secondo ordine in Δz , viene sostituita da una matrice quadrupolare a determinante esattamente unitario che chiameremo $\mathbf{F}_Q(z, \Delta z)$ (anche questa sostituzione non è necessaria, ma molto utile per il controllo dei risultati numerici). I due parametri che la determinano sono fissati dal confronto con la matrice del quadrupolo sviluppata al primo ordine.

Poiche per un quadrupolo di lunghezza infinitesima risulta:

$$\mathbf{F}_Q(z, \Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta z \\ -k^2 \Delta z & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

dall'equazione C.2) otteniamo

$$k(z) = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\cos(\kappa z)}{N(z)}} \quad (\text{C.5})$$

Procedendo analogamente con la matrice (3.9) relativa alla **distribuzione sinusoidale** otteniamo:

$$D(z, \Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\kappa [1 - \cos(2\kappa z)] \Delta z}{\pi N(z)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$F(z, \Delta z) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta z \\ -\frac{\kappa \sin(2\kappa z) \Delta z}{\pi N(z)} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Anche in questo caso la matrice di foceggiamento $F(z, \Delta z)$ viene approssimata con la matrice di quadrupolo $F_Q(z, \Delta z)$ definita da (C.4) con costante di foceggiamento pari a:

$$k(z) = \kappa \sqrt{\frac{\sin(2\kappa z)}{\pi N(z)}} \quad (\text{C.8})$$

Notiamo infine che volendo applicare questa procedura di calcolo anche alle matrici (A.12) e (A.15), in cui è assente il termine di smorzamento, possiamo direttamente approssimarle con la matrice di quadrupolo infinitesima che in generale diventa:

$$F_Q(s, \Delta s) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta s \\ -k^2 \Delta s & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

dove Δs e la costante di foceggiamento $k(s)$ sono definite come:

Distribuzione rettangolare - caso B:

$$\Delta s = \frac{\Delta z}{p(z)} \quad (\text{C.10})$$

$$k(z) = \left(\frac{\pi g}{2c} \right) \sqrt{N(z) \cos(\kappa z)}$$

Distribuzione sinusoidale - caso B

$$\Delta s = \frac{\Delta z}{p(z)} \quad (\text{C.11})$$

$$k(z) = \left(\frac{g}{c} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2} N(z) \cos(\kappa z)}$$