



**Sulla geometria dei monocromatori per raggi X a doppia riflessione**

E. Bernieri  
INFN - Laboratori Nazionali di Frascati, P.O. Box 13, 00044 Frascati (Italy)

**Introduzione**

Negli apparati sperimentali che utilizzano la radiazione di sincrotrone nella regione dei raggi X, é molto diffuso l'uso di monocromatori a doppia riflessione in quanto cio' semplifica la geometria del sistema, causando, al piu', solo una piccola variazione di quota del fascio uscente, in funzione della variazione dell'angolo di incidenza.

In questi monocromatori la selezione della lunghezza d'onda avviene mediante la riflessione alla Bragg da parte di due cristalli, o anche di un solo cristallo in cui sono state ricavate due superfici riflettenti tramite un taglio ad "U" (configurazione "channel-cut").

Nel caso di cristalli indipendenti, la geometria del monocromatore viene in alcuni casi variata, in funzione dell'angolo di incidenza, per mantenere costante la quota del fascio in uscita (fixed exit beam).

Quando si usa la configurazione a channel-cut o due cristalli indipendenti, ma a geometria fissa, i parametri geometrici del monocromatore devono essere invece scelti in maniera tale da consentire di lavorare in tutto l'intervallo angolare prefissato.

In tal caso, fissati l'angolo minimo  $\theta_m$  e massimo  $\theta_M$  e l'altezza  $h$  del fascio, é necessario determinare i valori opportuni della lunghezza delle facce, della loro separazione e sovrapposizione delle facce stesse e la posizione dell'asse di rotazione di tutto il sistema.

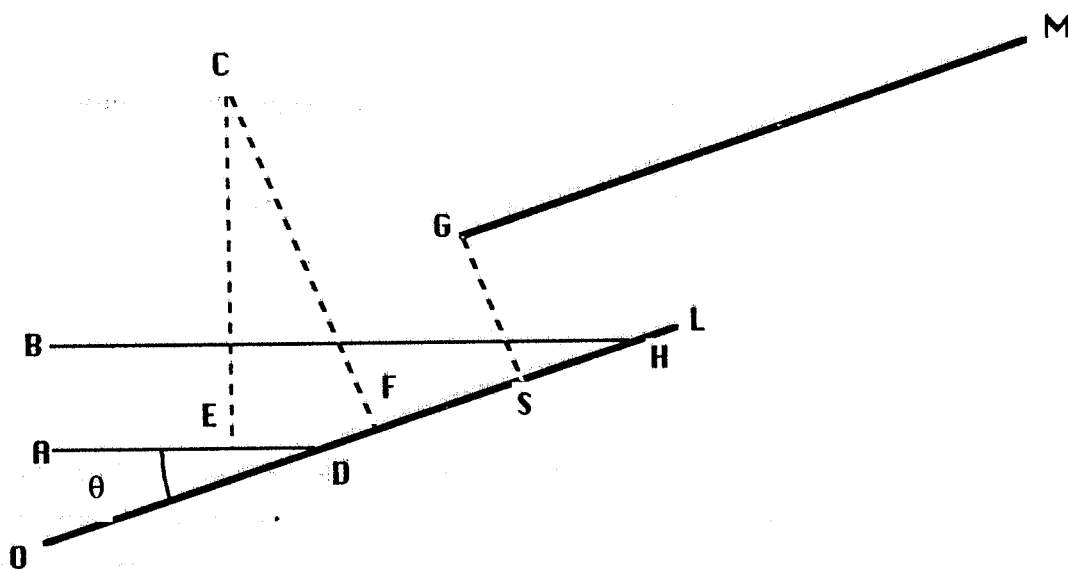
Per quanto il problema geometrico sia relativamente semplice, esso non risulta essere mai stato affrontato in maniera sistematica. Per questa ragione, e al fine di fornire delle espressioni che

evitino di ripetere ogni volta noiosi calcoli geometrici, in questo lavoro vengono presentate le relazioni che legano i principali parametri geometrici di un monocromatore a doppia riflessione e che consentono di calcolare i valori piu' convenienti di detti parametri in funzione dell'intervallo angolare e dell'altezza del fascio.

## 1. - Condizioni geometriche

La Fig. 1 mostra la geometria del sistema e le grandezze utilizzate nei calcoli.

L'analisi é perfettamente simmetrica se si considera il fascio incidente da destra e se si invertono la parte alta e bassa del fascio.



Altezza del fascio:  $AB = h$

Coordinata del punto di incidenza della parte inferiore del fascio sulla prima faccia:  $OD = x_0$

Coordinata del punto di incidenza della parte superiore del fascio sulla prima faccia:  $OH = x_1$

Coordinata della proiezione del centro di rotazione sulla prima faccia:  $OF = x_c$

Distanza tra il centro di rotazione e la quota della parte inferiore del fascio:  $CE = b$

Distanza tra il centro di rotazione e la prima faccia:  $CF = d$

Coordinata della proiezione dell'inizio della seconda faccia sulla prima:  $OS = x_s$

Distanza tra le facce:  $GS = g$

Lunghezza della prima faccia:  $OL = l_1$

Lunghezza della seconda faccia:  $GM = l_2$

Angolo di Bragg:  $0 < \theta < \pi/2$

FIG. 1 - Geometria del sistema e definizione delle grandezze usate nel testo.

Le condizioni imposte al sistema e che devono risultare soddisfatte in tutto l'intervallo angolare  $\Delta\theta = \theta_M - \theta_m$  sono le seguenti:

1. Il fascio deve sempre intercettare la prima faccia:

$$x_0 \geq 0$$

(1)

$$x_1 = x_0 + h/\sin\theta \leq l_1 \quad (2)$$

2. La parte alta del fascio non deve intercettare il bordo della seconda faccia, pertanto deve essere:

$$g \geq (x_1 - x_s) \operatorname{tg}\theta \quad (3)$$

3. La parte bassa del fascio deve intercettare la seconda faccia dopo la prima riflessione, cio' si esprime nella condizione:

$$g \geq (x_s - x_0) \operatorname{tg}\theta \quad (4)$$

4. La parte bassa del fascio non deve intercettare nuovamente la prima faccia dopo la seconda riflessione:

$$x_0 + 2g/\operatorname{tg}\theta \geq l_1 \quad (5)$$

Un'ultima condizione, che minimizza e individua la lunghezza della prima faccia é:

$$l_1 \sin\theta_m = h \quad (6)$$

## 2. - Sviluppo dei calcoli e risultati

La posizione di  $x_0$  in funzione dell'angolo di Bragg e della posizione del centro di rotazione  $C$  é data da:

$$x_0 = x_c + d/\operatorname{tg}\theta - b/\sin\theta \quad (7)$$

Dalle (1), (2) e (6) si ottiene:

$$x_0(\theta_m) = 0 \quad (8)$$

che inserita nella (7) fornisce la relazione:

$$x_c = b/\sin\theta_m - d/\operatorname{tg}\theta_m \quad (9)$$

E' facile dimostrare che, dalle (1) e (2), per  $0 < \theta < \pi/2$ , si ricava:

$$x_c \sin\theta + d \cos\theta - b \geq 0 \quad (10)$$

$$(x_c - l_1) \sin\theta + d \cos\theta - b + h \leq 0 \quad (11)$$

da cui, utilizzando la (9), si ottiene:

$$d\gamma \leq b \leq d\gamma + h \quad (12)$$

con  $\gamma = (\cos\theta - \beta \sin\theta)/(1 - \alpha \sin\theta)$ , dove  $\alpha = 1/\sin\theta_m$  e  $\beta = 1/\operatorname{tg}\theta_m$ .

Poiche' la (12) deve essere soddisfatta in tutto l'intervallo angolare  $\Delta\theta$  e dato che per  $\theta = \theta_m$   $0 \leq b \leq h$ , mentre per  $\theta = \theta_M$   $d\gamma(\theta_M) \leq b \leq d\gamma(\theta_M) + h$ , l'angolo massimo utilizzabile, per  $d \neq 0$ , si ottiene dalla relazione:

$$h = \gamma(\theta_M)d \quad (13)$$

e necessariamente deve essere  $b = h$ , ovvero il centro di rotazione si trova alla quota della parte superiore del fascio.

Se invece si impone  $d = 0$ , risulta che non vi é alcuna limitazione sull'angolo massimo utilizzabile e che deve essere  $0 \leq b \leq h$ .

Si puo' pertanto concludere che, per utilizzare l'intervallo angolare piu' ampio possibile é necessario che l'asse di rotazione giaccia sulla prima faccia riflettente ( $d = 0$ ), nel qual caso gli altri due parametri che determinano la posizione dell'asse di rotazione sono dati da:

$$x_c = b/\sin\theta_m, \text{ con } 0 \leq x_c \leq l_1 \quad (14)$$

Prendiamo ora in considerazione la separazione tra le facce  $g$  e la loro sovrapposizione  $l_1-x_s$ . Assumendo  $d = 0$  ed utilizzando le (3), (4) e (7) si ottiene:

$$g \geq x_c \lambda + h/\cos\theta - x_s \text{tg}\theta \quad (15)$$

$$g \geq -x_c \lambda + x_s \text{tg}\theta \quad (16)$$

dove  $\lambda = (1 - \sin\theta_m/\sin\theta)\text{tg}\theta$

La Fig. 2 riporta l'insieme di valori di  $g$  che soddisfano le (15) e (16).

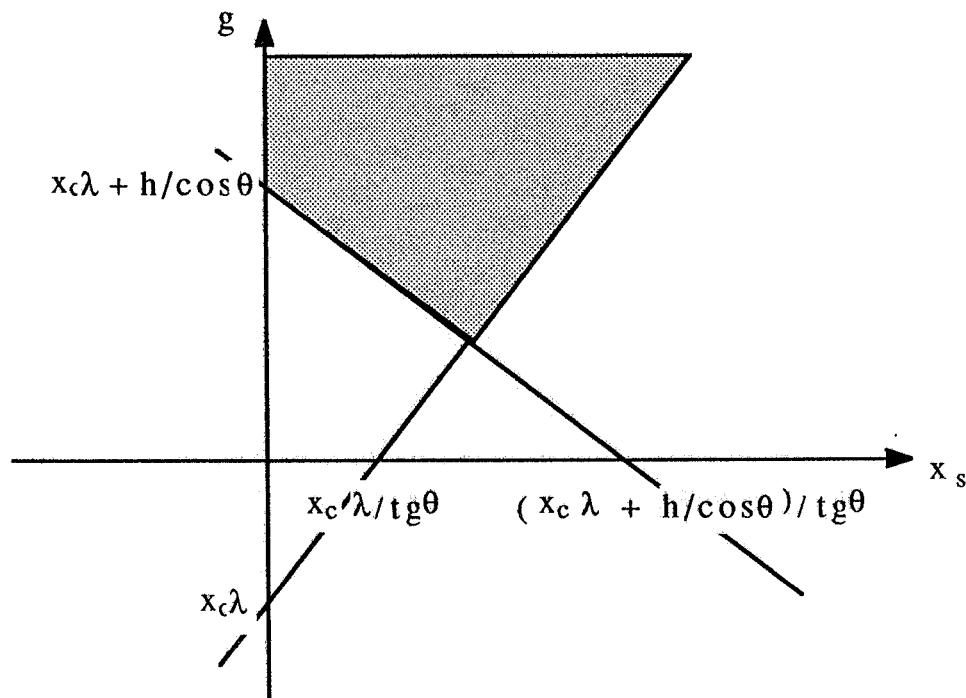


FIG. 2 - L'area punteggiata rappresenta l'insieme di valori accettabili per  $g$ , in accordo con le (15) e (16).

In generale é utile minimizzare la separazione  $g$  tra le facce in quanto cio' minimizza la variazione in quota del fascio di uscita, che é data da:

$$\Delta z = -2g \sin\theta \Delta\theta. \quad (17)$$

Dalla Fig. 2 si vede che  $g$  ha un minimo per

$$x_s = h/2 \sin\theta + x_c \lambda \quad (18)$$

dove assume il valore

$$g = h/2 \cos\theta. \quad (19)$$

Un'altra condizione che é necessario soddisfare é la (5), inserendo nella quale il valore di  $g$  dato dalla (19) si ottiene:

$$h/2 \cos\theta \geq l_1 \tan\theta/2 - x_c \lambda/2 \quad (20)$$

da cui si ricava  $x_c \geq l_1$ .

Poiche', in accordo con la (14), deve essere anche  $0 \leq x_c \leq l_1$ , la (20) é soddisfatta solo per  $x_c = l_1$ , che, come si vede dalla (18), corrisponde anche alla condizione di minima sovrapposizione delle facce, ovvero di massimo valore di  $x_s$  dato da:

$$x_s = l_1 - h/2 \sin\theta. \quad (21)$$

In conclusione la separazione e la sovrapposizione minime delle facce si ottengono con l'asse di rotazione posto al termine della prima faccia riflettente ( $d = 0$ ,  $b = h$  e  $x_c = l_1$ ).

Poiche' le condizioni imposte devono essere soddisfatte in tutto l'intervallo angolare, il valore di  $g$  va determinato in funzione dell'angolo massimo  $\theta_M$ , in quanto dalla (19) si vede che:

$$g(\theta_M) \geq g(\theta) \quad \forall \theta \in \Delta\theta$$

e il valore di  $x_s$  va determinato allo stesso angolo.

Se invece si vuole la massima sovrapposizione delle facce (minimo valore di  $x_s$ ) é necessario che  $x_c = 0$ , nel qual caso

$$x_s = h/2 \sin\theta \quad (22)$$

e deve essere

$$g \geq l_1 \operatorname{tg} \theta / 2. \quad (23)$$

che é un valore maggiore rispetto a quello dato dalla (19).

Ovviamente, anche questi valori vanno calcolati all'angolo massimo di lavoro.

L'ultima grandezza da determinare é la lunghezza  $l_2$  della seconda faccia riflettente.

Il valore minimo di  $l_2$  si ottiene nella situazione di minimo valore di  $g$  e massimo valore di  $x_s$ , ed é dato da:

$$l_2 = l_1 + g / \operatorname{tg} \theta_m - x_s. \quad (24)$$

### 3. - CONCLUSIONI

L'analisi precedente mostra come l'asse di rotazione posto alla fine della prima faccia riflettente ed alla quota della parte alta del fascio, é nella posizione piu' conveniente, al fine di massimizzare l'intervallo angolare e minimizzare la separazione tra le facce e la lunghezza della seconda faccia.

Le espressioni che forniscono i valori di  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $g$  ed  $x_s$  in funzione di  $\theta_m$  e  $\theta_M$  e dell'altezza del fascio  $h$ , per tale posizione dell'asse di rotazione, sono qui riportate per utilita' pratica:

$$l_1 = h / \sin \theta_m$$

$$l_2 = l_1 + g / \operatorname{tg} \theta_m - x_s$$

$$g = h / 2 \cos \theta_M$$

$$x_s = l_1 - h / 2 \sin \theta_M$$

Ovviamente, tramite le altre espressioni ricavate, é possibile individuare i parametri geometrici del sistema ed i limiti sull'intervallo angolare utilizzabile per ogni posizione dell'asse di rotazione.