

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-88/13(R)

2 Marzo 1988

A. Marcelli, A. Savoia, F. Sgamma:

SPECCHI ELLITTICI DA LASTRE PIANE DI "FLOAT GLASS"

SPECCHI ELLITTICI DA LASTRE PIANE DI "FLOAT GLASS"

A. Marcelli, A. Savoia, F. Sgamma
INFN - Laboratori Nazionali di Frascati, Cas. Postale 13, 00044 Frascati (Italy)

In questo lavoro si sono affrontati due casi particolari del problema generale di far assumere ad uno specchio piano una curvatura ellittica, circolare o parabolica per mezzo di una adeguata sagomatura laterale dello specchio stesso e di un opportuno sistema di vincoli e di sollecitazioni esterne (senza escludere il peso proprio): incastro ad un estremo e forza applicata all'altro oppure appoggi agli estremi e coppie di estremità.

I casi trattati sono quindi due dei nove possibili ed hanno l'obiettivo di verificare l'efficacia della soluzione numerica prima della sua estensione agli altri casi. In particolare si è scelta la curvatura ellittica: per il primo caso la trave è incastrata ad un estremo e caricata all'altro e per il secondo la trave è appoggiata con due coppie di estremità prodotte da due forze applicate esternamente agli appoggi su due prolungamenti della trave stessa.

La Fig. 1 mostra la geometria del problema; è ovviamente arbitraria la posizione dello specchio nel quadrante inferiore sinistro dell'ellisse, di cui si vuole seguire la curvatura: questo non mette in discussione però il metodo di calcolo proposto e, ove necessario, tale metodo è generalizzabile.

I dati del problema sono:

- p_m : distanza tra il punto sorgente F_1 ed il punto M, a metà lunghezza dello specchio;
- q_m : distanza tra il punto immagine F_2 ed il punto M;
- α : angolo di radenza;
- l : lunghezza dello specchio;
- E : modulo di elasticità del materiale di cui è costituito lo specchio;
- p_s : peso specifico del materiale di cui è costituito lo specchio.

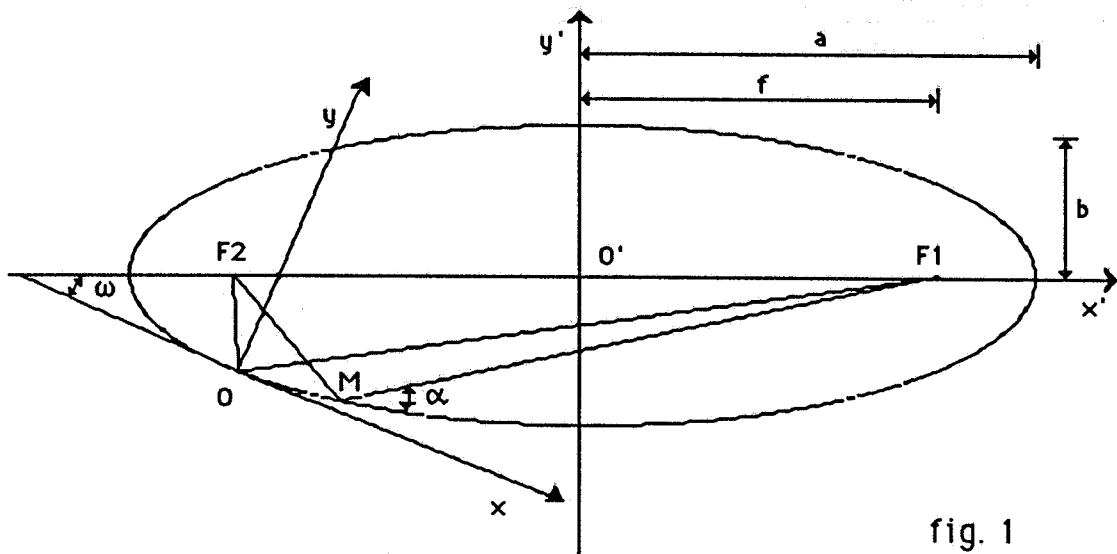


fig. 1

Gli altri parametri in gioco sono lo spessore dello specchio h ; la forza P applicata all'estremo libero nel primo caso o le coppie di estremità M_A e M_B nel secondo; la larghezza $B(s)$ (la sagoma) dello specchio, che è appunto una funzione dell'ascissa curvilinea s . Il metodo proposto fissa h e P o M_A , M_B e ricava la sagoma $B(s)$ corrispondente alla curvatura richiesta: è evidente che per ottimizzare la soluzione sarà necessario variare in modo opportuno sia lo spessore che le forze applicate in passi successivi.

Il primo passo verso la soluzione è quello di calcolare i parametri dell'ellisse noti i parametri della riflessione p_m , q_m , α ; è facile verificare, con le notazioni di Fig.1, che:

- 1) $2 \cdot f = [p_m^2 + q_m^2 - 2 \cdot p_m \cdot q_m \cdot \cos(\pi - 2 \cdot \alpha)]^{1/2}$
- 2) $b = \{ [(p_m + q_m) / 2]^2 - f^2 \}^{1/2}$
- 3) $\alpha = (p_m + q_m) / 2$

Nel sistema di riferimento x', y' , coincidente con gli assi dell'ellisse, le coordinate del punto M si ricavano dopo aver scritto l'espressione dell'angolo $\widehat{MF_2F_1}$:

- 4) $\widehat{MF_2F_1} = \arccos [(q_m^2 + 4 \cdot f^2 - p_m^2) / (4 \cdot q_m \cdot f)]$
- 5) $y'(M) = -q_m \cdot \text{sen}(\widehat{MF_2F_1})$
- 6) $x'(M) = - [f - q_m \cdot \cos(\widehat{MF_2F_1})]$

Per le coordinate del punto O , estremo dello specchio distante $l/2$ lungo l'ellisse da M , si

esegue un calcolo numerico che a partire da M e con incrementi ds dell'ascissa curvilinea, sufficientemente piccoli, determina l'ascissa x' di ogni punto in funzione della derivata dell'equazione dell'ellisse (nel sistema di riferimento x', y') nel punto precedente:

$$7) \quad y' = \pm b \left(1 - x'^2 / a^2 \right)^{1/2} \quad \text{equazione dell'ellisse}$$

$$8) \quad D(P_n) = \frac{dy'}{dx'}(P_n) = \frac{b \cdot x'(P_n)}{a^2 \left[1 - x'(P_n)^2 / a^2 \right]^{1/2}} \quad \text{derivata in P}$$

$$9) \quad dx' = \frac{ds}{\left\{ 1 + [D(P_n)]^2 \right\}^{1/2}} \quad \text{incremento in x'}$$

$$10) \quad x'(P_{n+1}) = x'(P_n) - dx \quad \text{ascissa del punto successivo}$$

Quando $(n \cdot ds) = l/2$ si assume $x'(O) = x'(P_n)$.

Si possono quindi scrivere le espressioni dei parametri che legano i due sistemi di riferimento considerati:

$$11) \quad \omega = - \operatorname{arctg} \frac{b \cdot x'(O)}{a^2 \left\{ 1 - [x'(O) / a]^2 \right\}^{1/2}}$$

$$12) \quad x(O') = - [x'(O) \cdot \cos\omega - y'(O) \cdot \operatorname{sen}\omega]$$

$$13) \quad y(O') = - [x'(O) \cdot \operatorname{sen}\omega + y'(O) \cdot \cos\omega]$$

che permettono di utilizzare le relazioni tra le coordinate nei due sistemi di un generico punto:

$$14) \quad x = x(O') + x' \cdot \cos\omega - y' \cdot \operatorname{sen}\omega$$

$$15) \quad y = y(O') + x' \cdot \operatorname{sen}\omega + y' \cdot \cos\omega$$

Noto il raggio di curvatura dell'ellisse nel generico punto x', y', la cui espressione è:

$$16) \quad R_{\text{ellisse}} = a^2 \cdot b^2 \left[\left(x'^2 / a^4 \right) + \left(y'^2 / b^4 \right) \right]^{3/2}$$

è possibile confrontarlo con quello dello specchio nel punto con la stessa ascissa curvilinea a partire

da O e la cui espressione, in funzione del modulo di elasticità (E), del momento di inerzia della sezione (J) e del momento flettente (M), è:

$$17) R_{\text{specchio}} = \frac{E \cdot J(s)}{M(s)}$$

e quindi determinare il momento d'inerzia della sezione dello specchio in s in modo che coincidano i due raggi di curvatura. Noto J(s) è poi possibile ricavare la larghezza B(s) dello specchio:

$$18) B(s) = \frac{12 \cdot J(s)}{h^3}$$

Per quanto riguarda l'espressione del momento M(s) è necessario considerare approssimazioni successive del peso q(s) dello specchio, che è presente nell'assetto considerato e il cui contributo potrebbe non essere trascurabile.

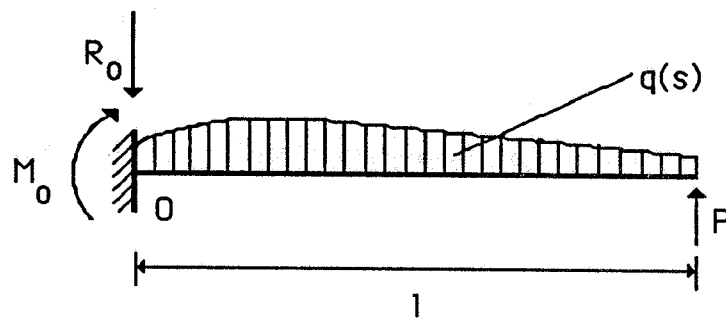


fig. 2

La Fig. 2 mostra lo specchio, schematizzato con il suo asse neutro, nel primo caso con l'estremo di sinistra incastrato, la forza P all'estremo libero ed il carico lineare q(s) (il cui andamento in funzione di s è ipotetico) dovuto al peso; nell'estremo incastrato O sono rappresentate le reazioni di incastro R_O ed M_O , che valgono:

$$19) M_O = P \cdot l - \int_0^l q(s) \cdot s \cdot ds$$

$$20) R_O = P - \int_0^l q(s) \cdot ds$$

La Fig. 3 mostra lo specchio nel secondo caso:
dove:

$$21) R_{PA} = \left\{ \left[P_A \cdot (a + l) - P_B \cdot b \right] / l \right\} - \int_0^l \left[(l - s) / l \right] q(s) ds$$

$$21) R_{PB} = \left\{ \left[-P_A \cdot a + P_B \cdot (b+1) \right] / I \right\} - \int_0^{\ell} (s/I) q(s) ds$$

che ai fini dell'espressione del momento flettente nel tratto AB è schematizzabile come in Fig. 4:

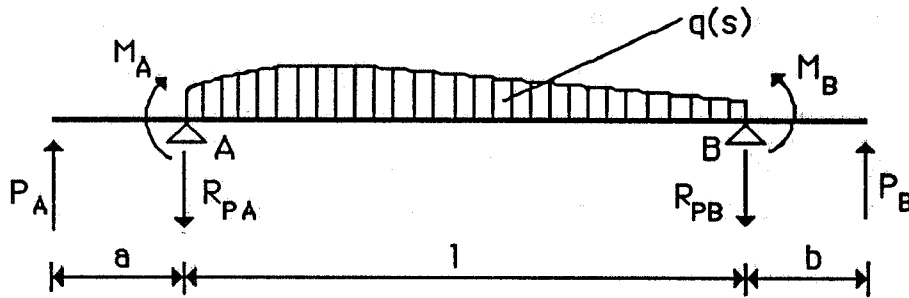


fig. 3

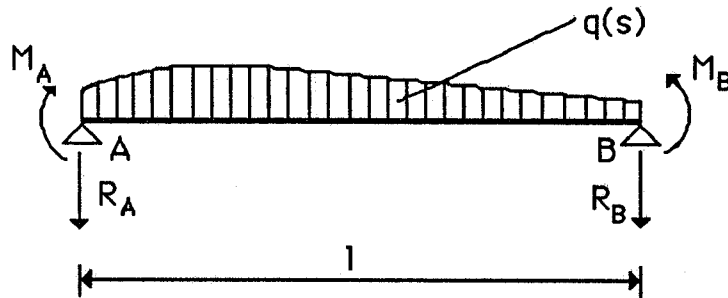


fig. 4

dove:

$$23) R_A = R_{PA} - P_A = \left[(P_A \cdot a - P_B \cdot b) / I \right] - \int_0^{\ell} [(1-s)/I] \cdot q(s) ds$$

$$24) R_B = R_{PB} - P_B = \left[(P_B \cdot b - P_A \cdot a) / I \right] - \int_0^{\ell} (s/I) \cdot q(s) ds$$

$$25) M_A = P_A \cdot a$$

$$26) M_B = P_B \cdot b$$

L'espressione del momento flettente nel primo caso è:

$$27) M(s) = M_O - R_O \cdot s - \int_0^s q(t) \cdot (s - t) dt$$

mentre nel secondo caso vale la stessa espressione ponendo $M_O=M_A$ ed $R_O=R_A$.

Per la presenza nelle 19), 20), 23), 24), 27) di $q(s)$ che dipende da $B(s)$, non noto ovviamente prima del calcolo, solo dopo un primo ciclo, quando si è definita una prima sagoma dello specchio senza l'azione del peso, si introduce la funzione $q(s)$ conseguente alla $B(s)$ trovata e si calcola quindi una sagoma ulteriore. Questo ciclo viene ripetuto tante volte quante servono perchè la differenza tra due sagome successive sia inferiore ad una quantità assegnata e sufficientemente piccola.

Nota la sagoma dello specchio è ora possibile calcolarne punto per punto la deformazione che, utilizzando il principio dei lavori virtuali (vedi per es. Memo M-47 della D.T.), nel primo caso risulta:

$$28) \delta(s) = (1/E) \{ s \cdot \int_0^s [M(x)/J(x)] dx - \int_0^s [M(x) \cdot x / J(x)] dx \}$$

e nel secondo:

$$29) \delta(s) = (1/E) \{ [(1-s)/1] \int_0^s [M(x) \cdot x / J(x)] dx + \\ + \int_s^L (s - s \cdot x / 1) [M(x) / J(x)] dx \}$$

Il programma richiede la definizione di un passo ds , di cui si incrementa l'ascissa curvilinea, per determinare i vari punti in cui si effettua il calcolo: da un confronto finale tra la deformazione effettiva e quella necessaria si può stabilire se ds è sufficientemente piccolo da garantire la precisione richiesta.

Il programma è stato utilizzato per il calcolo di alcune sagome di specchi piani. Le Figure mostrano alcuni risultati ottenuti utilizzando l'output su laser del file FOR077.DAT del programma. Lo stesso programma, lavorando in interattivo, può produrre grafici su TEKTRONIX.

L'applicazione brevemente descritta nella nota è legata alla realizzazione di una nuova linea di luce di sincrotrone ad alto flusso (CALF) in fase di allestimento nei nostri laboratori (vedasi Rapporto di Attività LNF 1987). La geometria di questa richiede l'utilizzazione di una serie di specchi di opportune dimensioni e con curvatura ellittica da porre sul percorso della luce in modo da deflettere la radiazione di 12° nel piano dell'orbita e di 16° in verticale, focalizzandola.

Sulla base delle caratteristiche generali dei tre specchi di CALF, utilizzando il programma di calcolo abbiamo ottenuto due differenti sagome, considerando le due differenti ipotesi di vincoli e sollecitazioni esterne: caso a) con incastro ad un estremo e forza applicata all'altro e caso b) con appoggi agli estremi e coppie di estremità.

Nelle Figure 5, 6 e 7 sono riportate le sagome per gli stessi specchi ottenute per il secondo

caso (caso b). Nelle Figure 8, 9 e 10 sono riportate le sagome e i parametri per i tre specchi denominati M1, M2 e M3 ottenute nel caso di calcolo con incastro a mensola (caso a).

Come si puo' facilmente osservare dalle figure, il caso a) fornisce profili sempre triangolari, mentre il caso b) consente di ottenere profili di forma quasi rettangolare.

Ammettendo una precisione sulla sagoma dell'ordine di 0.5 mm il programma fornisce una stima della differenza tra la deformata reale e l'ellisse che in entrambi i calcoli e' dell'ordine di $1\mu\text{m}$. Una versione opportunamente modificata del programma ha consentito di stimare la precisione meccanica richiesta sui valori dei momenti applicati e quindi in particolare della precisione sui valori delle forze applicate. Nel caso illustrato, in cui si vogliono piegare specchi piani sagomati di vetro "FLOAT GLASS" * questa e' dell'ordine dell' $1^{\circ}/\infty$. Sempre in questo caso, nell'ipotesi di appoggi agli estremi e coppie di estremita' (caso b) i risultati ottenuti dimostrano che un errore sulla lavorazione della sagoma dell'ordine dell' 1% puo' essere sufficientemente compensato con una diversa distribuzione delle coppie di estremita'. Questi risultati sono estremamente importanti sia per definire la precisione della lavorazione sul profilo del vetro, che per la progettazione del sistema meccanico di piegatura degli specchi piani, in quanto dimostrano tra l'altro la necessita' di adottare movimenti indipendenti per le coppie nel caso b).

* I cristalli "FLOAT GLASS" sono vetri di produzione industriale ottenuti per colata diretta su stagno fuso, in una atmosfera inerte.

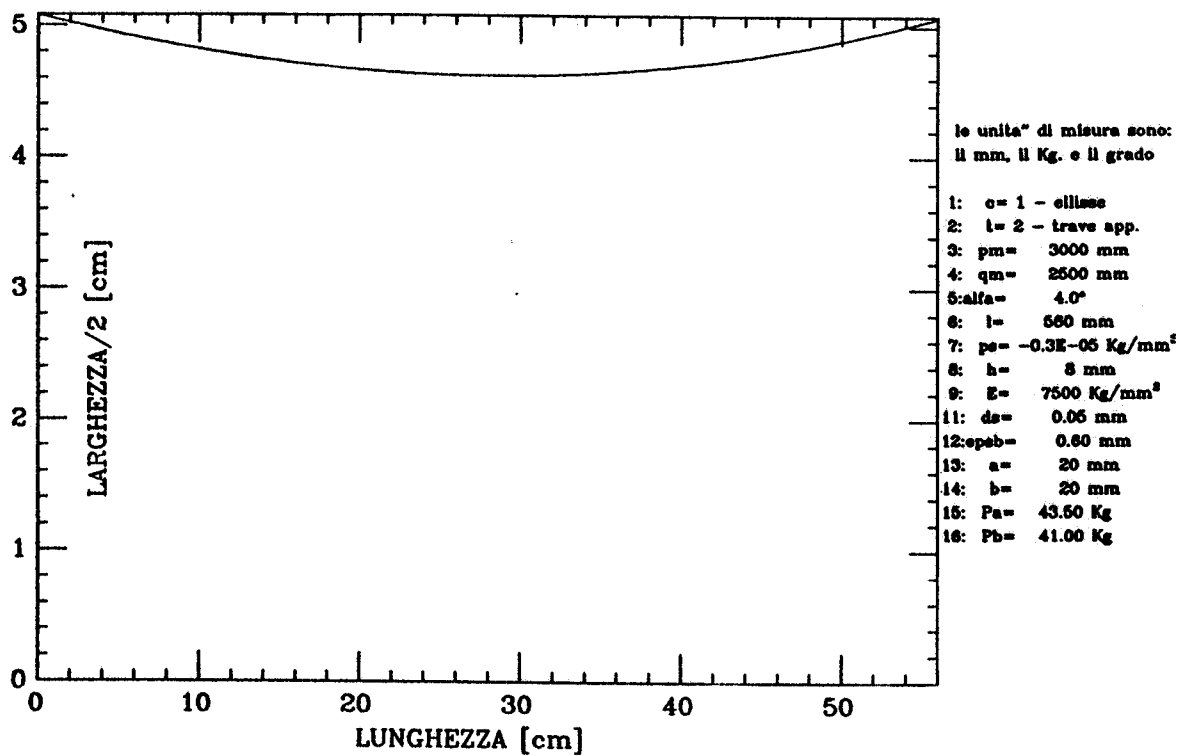


FIG. 5

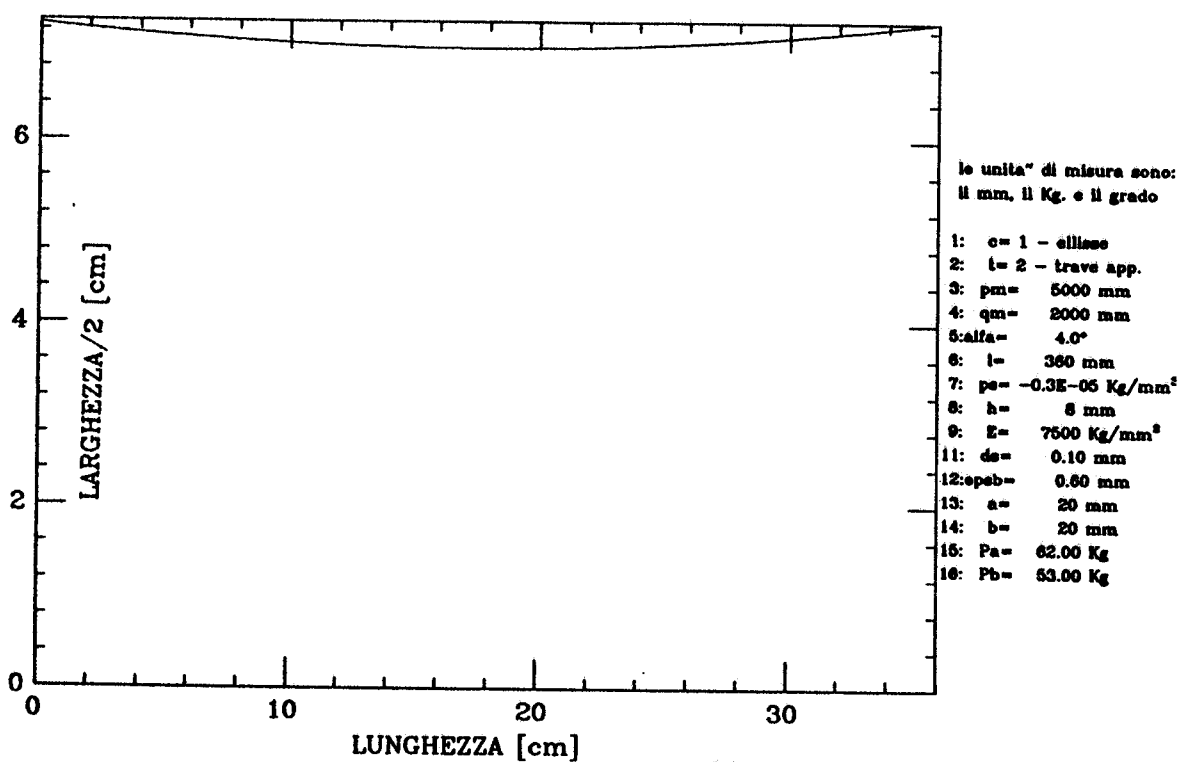


FIG. 6

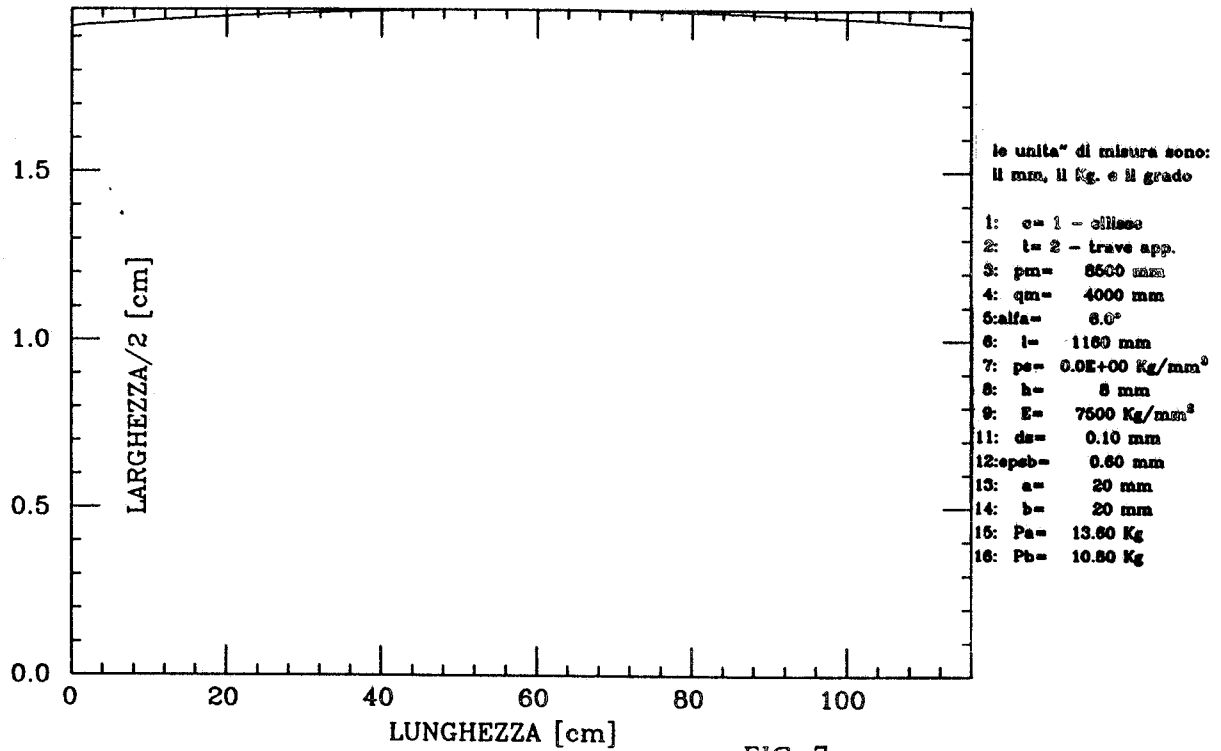


FIG. 7

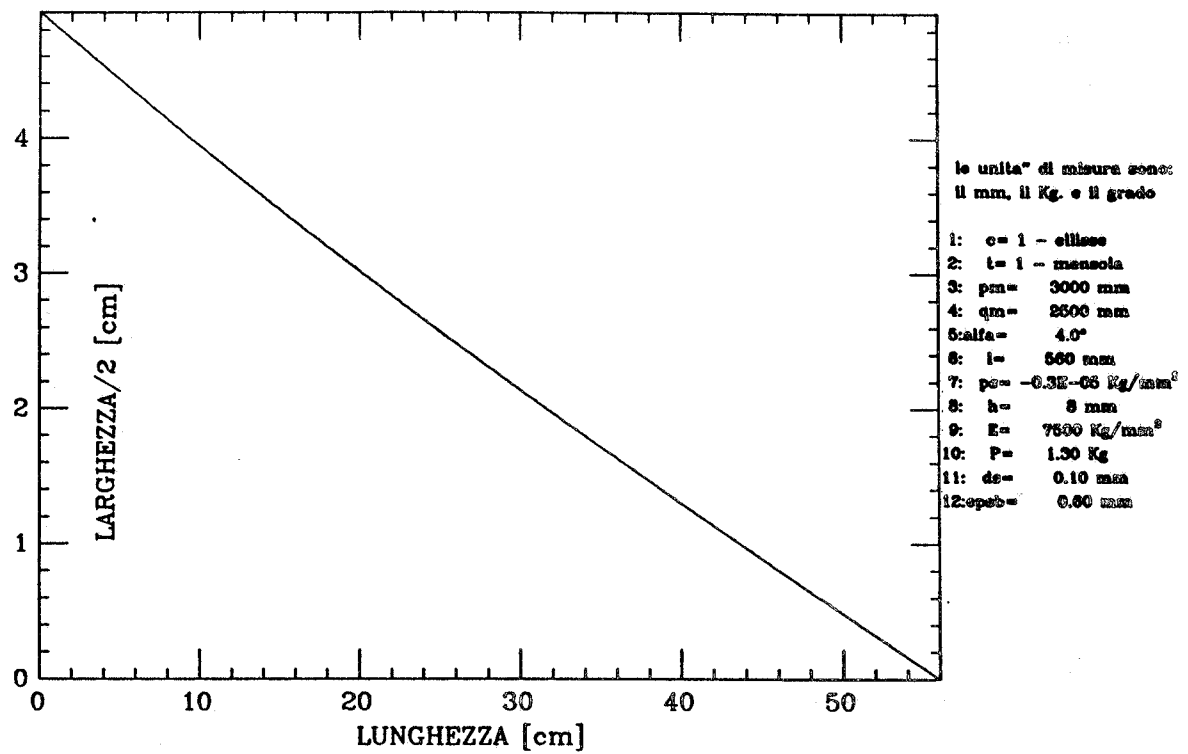


FIG. 8

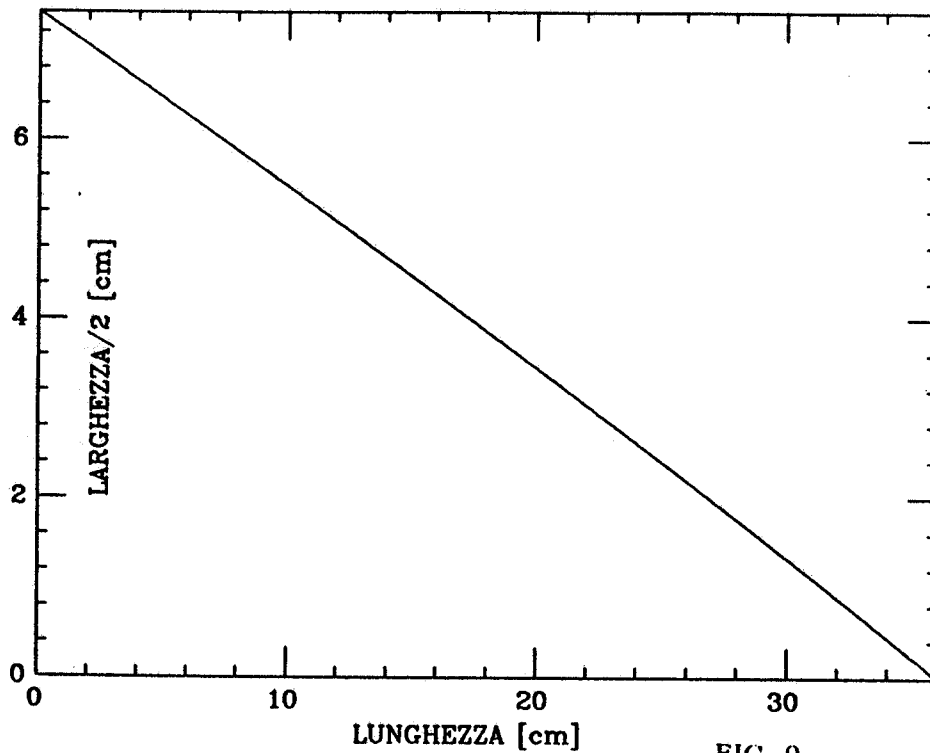


FIG. 9

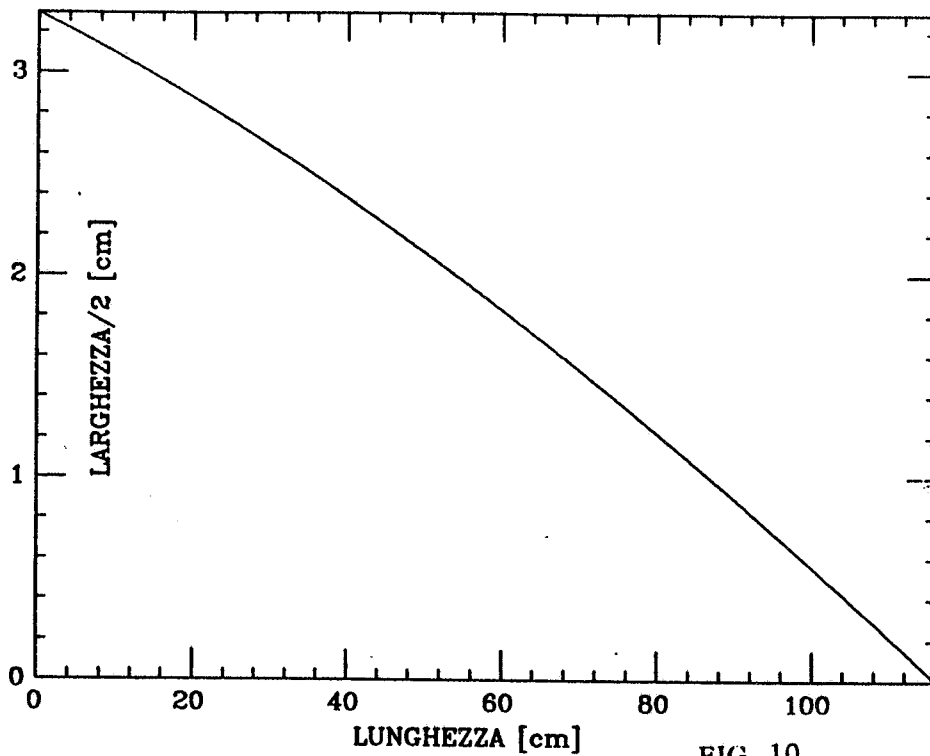


FIG. 10