

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-82/73(R)
8 Ottobre 1982

B. Spataro e F. Tazzioli: DETERMINAZIONE DELLE TRAIETTORIE DEGLI ELETTRONI EMESSI DALLA SUPERFICIE DI UNA CAVITA' NEL MODO TM_{010} A 3 GHz.

B. Spataro e F. Tazzioli: DETERMINAZIONE DELLE TRAIETTORIE DEGLI ELETTRONI EMESSI DALLA SUPERFICIE DI UNA CAVITA' NEL MODO TM_{010} A 3 GHz.

1. - INTRODUZIONE

Nelle cavità risonanti impiegate per l'accelerazione o l'impacchettamento delle particelle possono aver luogo i noti fenomeni di scarica^(1, 2, 3) che si dividono sostanzialmente in due tipi. Quello di emissione per elevato campo elettrico e quello di scarica risonante. Tali fenomeni influiscono notevolmente sul comportamento delle cavità, limitandone il campo utile di tensione.

La previsione teorica esatta delle zone dove è più probabile il verificarsi di tali scariche e quella dei relativi livelli di tensione è quasi impossibile perchè tali fenomeni dipendono da una pluralità di fattori, alcuni dei quali non esattamente conoscibili, quali ad esempio il coefficiente di emissione secondaria degli elettroni da una superficie reale.

Tuttavia è stato fatto negli ultimi anni uno sforzo considerevole⁽⁴⁻⁷⁾ per avvicinarsi il più possibile alla comprensione fisica di tali fenomeni per conseguire almeno una guida alla impostazione di esperienze con l'aiuto delle quali arrivare ai criteri di progetto che permettono di realizzare delle cavità il più possibile esenti da scariche di questo genere.

In questo lavoro ci proponiamo, sulla falsariga di altri Centri di ricerca, di mettere a punto metodi di indagine dei fenomeni di scarica suddetti. A tal proposito il primo problema da affrontare è la risoluzione delle equazioni del moto di una particella in campi elettrici e magnetici incrociati ad alta frequenza. La soluzione di tali equazioni richiede l'uso del calcolatore salvo il caso più semplice di superfici piane, parallele e indefinite. Per ricavare le traiettorie in una cavità di forma generica è anche necessario determinare il campo elettromagnetico in essa.

Per questo sono già stati sviluppati in altri Laboratori dei programmi (LALA, SUPER-FISH).

Ci proponiamo di usare il LALA in un secondo tempo. Qui ci limiteremo, per ora, ad analizzare una cavità di forma semplice, in cui i campi sono noti, che tuttavia riveste notevole interesse pratico. Questa è la cavità cilindrica nel modo TM_{010} .

Per impostare l'equazione è necessaria una conoscenza dei parametri in gioco, perciò è opportuna una descrizione sommaria dei fenomeni di scarica in questione, rinviando per maggiori dettagli alla bibliografia.

2. - CARATTERISTICHE DEI FENOMENI DI SCARICA

2.1. - Scarica da emissione per effetto di campo.

La corrente di emissione superficiale per effetto di elevati campi elettrici ha origine nelle zone della superficie dove il campo elettrico è massimo e, per campi con andamento temporale del tipo $E_0 \sin t$ le particelle vengono emesse sulla cresta dell'onda, cioè in angolo di fase intorno a 90° .

L'energia di emissione dell'elettrone è concentrata intorno al valore delle barriere di potenziale, cioè qualche eV (2-5 eV per i metalli puri). La traiettoria, nel caso di emissione per effetto di campo non deve soddisfare a particolari requisiti spazio-temporali ed interessa soltanto conoscere il punto e l'energia di arrivo in funzione del punto di partenza.

2.2. - Scarica risonante o multipacting.

La scarica risonante, che può avvenire in zona di campo elettrico debole, è di due tipi: scarica tra due punti situati generalmente su superfici diverse e scarica con partenza e ritorno nel medesimo punto.

Nel primo caso un elettrone emesso dal primo punto deve arrivare al secondo dopo un numero dispari di semiperiodi della radiofrequenza ed estrarre almeno un elettrone secondario. Il coefficiente di emissione secondario è ≥ 1 , se l'energia primaria è compresa tra circa 150 eV e 1500 eV (per il rame) come indicato in Fig. 1. Tale secondario, se si trova in una situazione geometrica e di campo elettromagnetico simmetrica rispetto alla precedente, ritorna al punto di partenza e dà origine ad una valanga.

Detto τ il tempo di transito da un punto all'altro, la condizione di risonanza si scrive:

$$\omega \tau = (2n+1)\pi \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

I successivi valori di n corrispondono a vari livelli di scarica.

Nel secondo caso un elettrone emesso da un punto ritorna al medesimo dopo un numero intero di periodi e se l'energia di impatto è compresa nella fascia suddetta dà origine ad una valanga. Si ha in

questo caso:

$$\omega\tau = 2n\pi.$$

Gli elettroni che danno origine alle scariche risonanti vengono emessi con fasi temporali intorno a 0° . Gli elettroni secondari sono emessi per la maggior parte con energie poco discoste da un valore medio che supponiamo pari a 5 eV (Fig. 2).

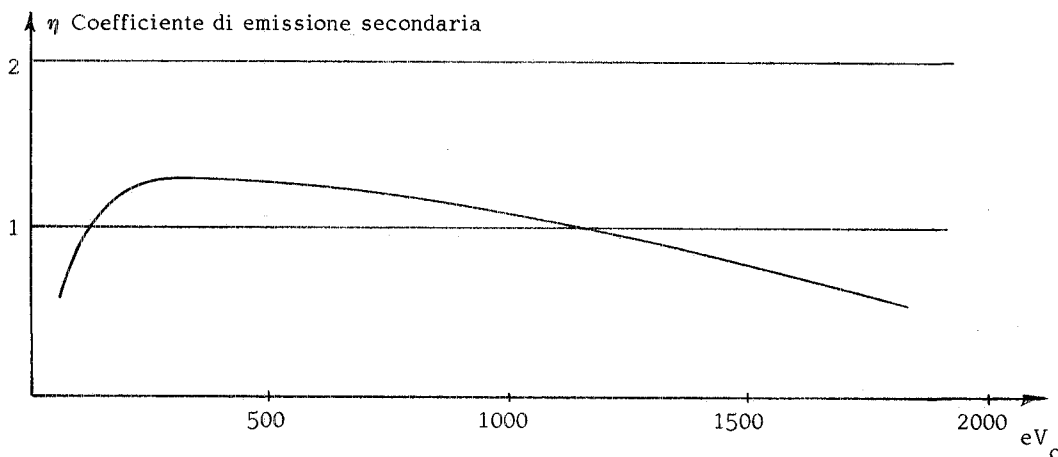


FIG. 1 - Coefficiente d'emissione secondaria in funzione dell'energia dei primari. Valido per il Rame.

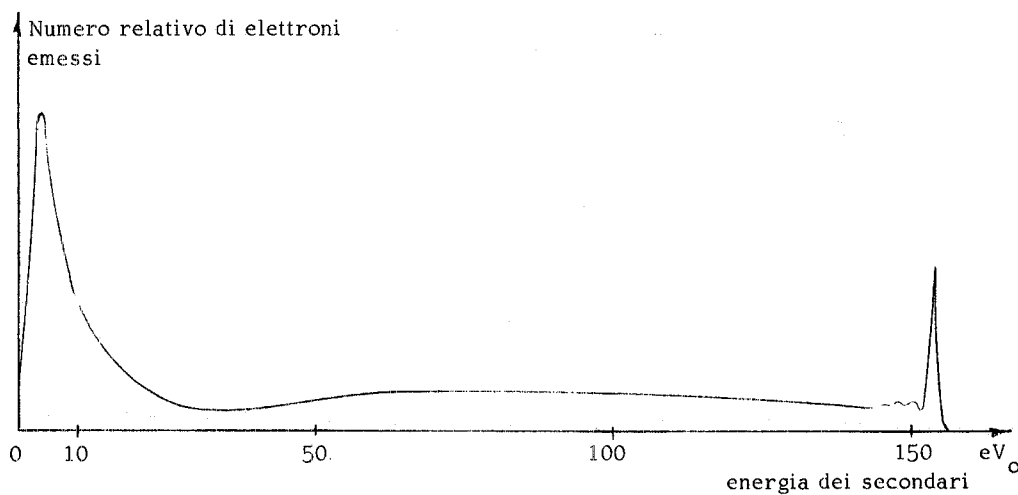


FIG. 2 - Numero relativo di secondari per una energia primaria = 155 eV. Valido per il Rame.

Nel seguito, per semplicità, supporremo che per qualsiasi tipo di traiettoria gli elettroni vengono emessi perpendicolarmente alla superficie e con energia pari a 5 eV.

3. - LE EQUAZIONI DEL MOTO

L'equazione generica del moto di un elettrone in un campo elettromagnetico è:

$$\frac{d}{dt} (m_0 \vec{v}) = e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) . \quad (1)$$

Supponendo γ variabile il primo membro diviene:

$$\frac{d}{dt} (m_0 \gamma \vec{v}) = \vec{v} \frac{d}{dt} (\gamma m_0) + \gamma m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} . \quad (2)$$

In coordinate cilindriche il termine $d\vec{v}/dt$ si può esprimere come (v. bibl. (7), pag. 9):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \left(\frac{dv_r}{dt} - v_\phi \frac{d\phi}{dt} \right) + \phi \left(\frac{dv_\phi}{dt} + v_r \frac{d\phi}{dt} \right) + \vec{z} \frac{dv_z}{dt} . \quad (3)$$

Il secondo membro della (1) è dato dall'espressione:

$$e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = e\vec{r}(E_r + v_\phi B_z - v_z B_\phi) + e\phi(E_\phi + v_z B_r - v_r B_z) + e\vec{z}(E_z + v_r B_\phi - v_\phi B_r) \quad (4)$$

Ponendo $v_r = \dot{r}$, $v_z = \dot{z}$, $v_\phi = r\dot{\phi}$, sostituendo la (4) e la (3) nella (2) e sviluppando si giunge al seguente sistema di equazioni:

$$\ddot{r} \gamma m_0 = e(E_r + \dot{\phi} r B_z - \dot{z} B_\phi) + m_0 r \dot{\phi}^2 - m_0 \dot{\gamma} \dot{r} , \quad (5)$$

$$\ddot{\phi} \gamma m_0 r^2 = e(r E_\phi + r \dot{z} B_r - r r B_z) - r^2 \dot{\phi} \dot{\gamma} m_0 - 2 \gamma m_0 r \dot{r} \dot{\phi} , \quad (6)$$

$$\ddot{z} \gamma m_0 = e(E_z + \dot{r} B_\phi - \dot{\phi} r B_r) - m_0 \dot{\gamma} \dot{z} , \quad (7)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{e}{m_0 c^2} (\dot{r} E_r + r \dot{\phi} E_\phi + \dot{z} E_z) . \quad (8)$$

Se la cavità risuona nel modo TM_{010} e supponendo il moto indipendente dalla coordinata angolare ϕ , si ha:

$$\dot{\gamma} = \frac{e \dot{z}}{m_0 c^2} E_z , \quad (9)$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{\gamma m_0} (E_z + \dot{r} B_\phi - \frac{\dot{z}^2}{c} E_z) , \quad (10)$$

$$\ddot{r} = \frac{e}{\gamma m_0} (-\dot{z} B_\phi - \frac{\dot{r} \dot{z} E_z}{c^2}) . \quad (11)$$

Con l'ipotesi che l'apertura della cavità risonante entro la quale passa il fascio di elettroni sia molto minore della lunghezza d'onda di risonanza della stessa cavità, i campi elettrico e magnetico sono esprimibili con le formule :

$$E_z = I_0(k_c r) E_0 \text{ sen } \varphi , \quad H_\varphi = I_1(k_c r) \frac{E_0}{\eta} \text{ cos } \varphi ,$$

con I_0 la funzione di Bessel di ordine zero, I_1 la funzione di Bessel di ordine 1, $k_c = \omega/c = 2\pi/\lambda$, λ la lunghezza d'onda di risonanza, E_0 campo elettrico massimo sull'asse della cavità, $\eta = 377 \Omega$.

Nella Fig. 3 è indicato l'andamento dei campi suddetti in una sezione longitudinale della cavità.

Per rendere più agevole lo studio del problema in esame è opportuno sostituire la variabile indipendente t con $\varphi = \omega t$:

$$\varphi = \omega t ;$$

$$d\varphi = \omega dt ;$$

$$d\varphi^2 = \omega^2 dt^2 .$$

Sostituendo nella (9), (10), (11):

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{eE_0}{m_0 c^2} \text{ sen } \varphi \frac{dz}{d\varphi} , \quad (9')$$

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} = \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2 k_c^2} \left[I_0(k_c r) \text{ sen } \varphi + k_c I_1(k_c r) \text{ cos } \varphi \frac{dr}{d\varphi} - k_c^2 I_0(k_c r) \text{ sen } \varphi \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2 \right] , \quad (10')$$

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{eE_0}{\gamma m_0 c^2 k_c^2} \left[-k_c I_1(k_c r) \text{ cos } \varphi \frac{dz}{d\varphi} - k_c^2 I_0(k_c r) \text{ sen } \varphi \frac{dr}{d\varphi} \frac{dz}{d\varphi} \right] . \quad (11')$$

Queste sono le equazioni basilari che, una volta fissate le condizioni iniziali e i valori dei campi, permettono di calcolare la traiettoria di un elettrone emesso dalla superficie. E' da notare che si tratta di equazioni non lineari.

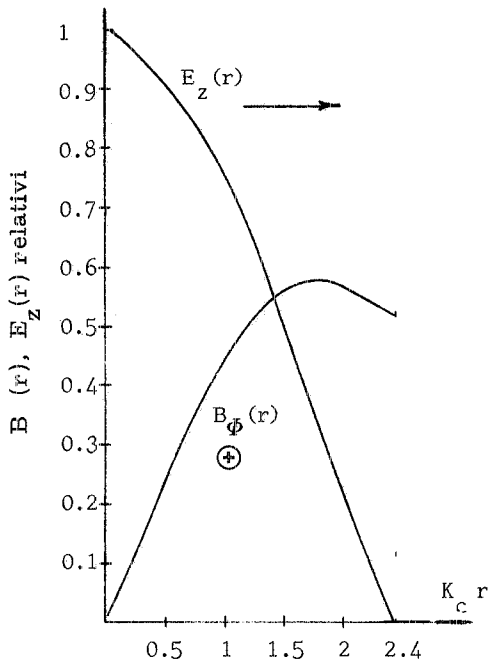


FIG. 3

4. - ALCUNI RISULTATI

L'equazioni (9'), (10'), (11') sono state integrate numericamente per determinare la traiettoria ed inoltre l'energia e la fase di arrivo di un elettrone tra due punti situati su superfici perpendicolari alla direzione del campo elettrico. E' stato fatto riferimento ad una cavità cilindrica risonante nel modo TM_{010} a 3 GHz, avente raggio 40 mm e lunghezza assiale 18 mm. E' infatti in progetto un modello di queste dimensioni che ci permetterà di fare esperienze sui fenomeni di scarica in questione.

L'integrazione numerica è stata eseguita mantenendo costante l'energia iniziale a 5 eV, per campi elettrici compresi tra 1 MV/m e 7 MV/m, e per diversi valori delle condizioni iniziali: angoli di fase compresi tra -40° e $+20^\circ$, valori iniziali della coordinata radiale compresi tra 1 mm e 30 mm.

Per individuare le traiettorie risonanti conviene registrare le coordinate di arrivo per angoli di fase di arrivo corrispondenti a multipli interi del semiperiodo. Tra queste coordinate verranno selezionate quelle corrispondenti al contorno della cavità in esame; nel nostro caso $z = 18$ mm.

Nella Fig. 4 è indicata una tipica traiettoria entro il contorno della cavità.

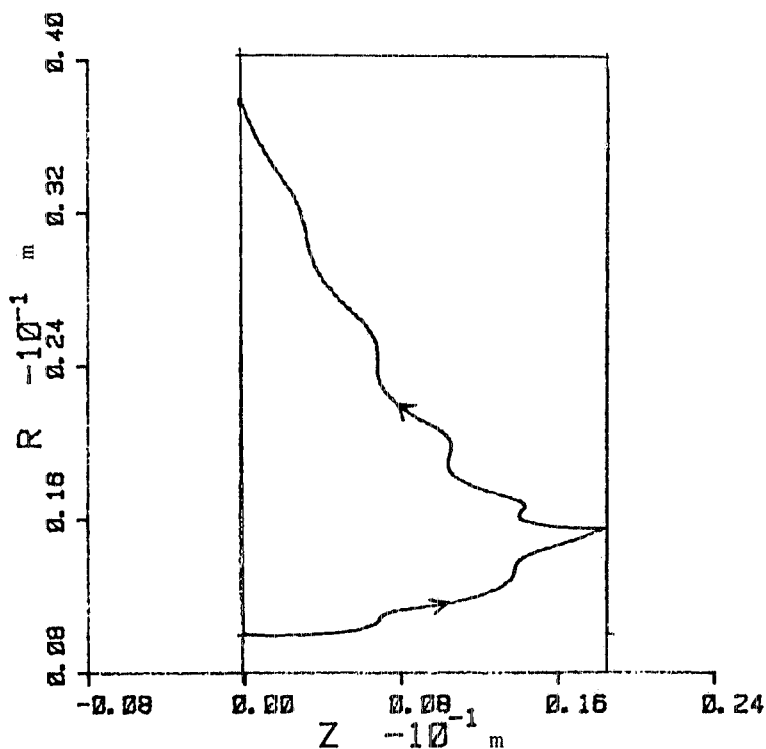


FIG. 4 - Traiettorie tra i piani delimitanti la cavità. $E = 8$ MV/m, $\Phi_1 = 0^\circ$, $R_1 = 10$ mm.

TABELLA I - Traiettorie tra due piani.

Multiplo del ciclo	Raggio iniziale (mm)	Campo elettrico (MV/m)	Distanza percorsa (mm)	Fase iniziale del campo elettrico	Energia finale (eV)
1/2	1	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
3/2	1	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
5/2	1	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
7/2	1	5.8	18	-20°	2300
7/2	1	5.2	18	0°	2250
7/2	1	5.2	18	20°	2150
9/2	1	5.4	18	-40°	1480
9/2	1	4.2	18	-20°	1360
9/2	1	3.8	18	0°	1270
9/2	1	4	18	$+20^\circ$	1240
1/2	5	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
3/2	5	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
5/2	5	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
7/2	5	5.8	18	-20°	2350
7/2	5	5.2	18	0°	2160
7/2	5	5.4	18	$+20^\circ$	2080
9/2	5	5.4	18	-40°	1440
9/2	5	4.8	18	-20°	1420
9/2	5	4	18	0°	1330
9/2	5	4.2	18	$+20^\circ$	1310
1/2	10	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
3/2	10	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
5/2	10	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
7/2	10	6.2	18	-20°	2320
7/2	10	5.6	18	0°	2160
7/2	10	6	18	$+20^\circ$	2110
9/2	10	5.8	18	-40°	1490
9/2	10	4.8	18	-20°	1340
9/2	10	4.4	18	0°	1270
9/2	10	4.4	18	$+20^\circ$	1260
1/2	15	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
3/2	15	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
5/2	15	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
7/2	15	7	18	-20°	2150
7/2	15	6.4	18	0°	2050
7/2	15	6.6	18	$+20^\circ$	2030
9/2	15	6.6	18	-40°	1360
9/2	15	5.4	18	-20°	1310
9/2	15	5	18	0°	1270
9/2	15	5.2	18	$+20^\circ$	1280
1/2	20	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
3/2	20	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
5/2	20	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
7/2	20	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
9/2	20	6.4	18	-20°	1220
9/2	20	5.8	18	0°	1150
9/2	20	6.2	18	$+20^\circ$	1220
1/2	30	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
3/2	30	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
5/2	30	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
7/2	30	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--
9/2	30	$1 \leq E \leq 7$	inferiore a 18	$-40^\circ, -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ$	--

Verranno ulteriormente selezionate le traiettorie che presentano un'energia finale cui corrisponde un coefficiente di emissione secondario superiore all'unità.

Si può ricavare una tabella come la Tabella I dalla quale risulta che per tempi di transito di 7 e 9 semiperiodi esistono delle fasce di tensione cui corrispondono traiettorie quasi risonanti. Tali fasce si restringono al crescere del raggio iniziale per scomparire al di sopra di un certo raggio.

Abbiamo usato la denominazione "quasi risonante" perchè le traiettorie non terminano rigorosamente nello stesso raggio iniziale.

Un'analoga Tabella II può essere fatta per individuare eventuali traiettorie risonanti ad un sol punto o traiettorie miste.

TABELLA II - Traiettorie con ritorno sullo stesso piano.

Raggio iniziale (mm)	Fase iniziale	Energia finale (eV)	Variazione di fase
1	110°	1909	235°
5	94°	58	343°
5	95°	288	325°
5	100°	1188	284°
5	110°	1827	235°
5	130°	1189	163°
10	95°	211	330°
10	96°	400	318°
10	98°	740	303°
10	100°	1019	286°
10	110°	1604	237°
15	95°	106	346°
15	98°	524	303°
15	100°	765	291°
15	110°	1261	239°
20	97°	212	324°
20	98°	288	314°
20	100°	466	296°
20	110°	870	243°
25	98°	85	338°
25	100°	198	311°
25	110°	494	250°
30	110°	192	262°
30	115°	225	240°

Nelle Figg. 4, 5 e 6 sono tracciate alcune traiettorie tra due piani. Si noti che il punto di ritorno è spostato nel verso dei raggi crescenti e che tale spostamento aumenta col cre-

scere del raggio di partenza cioè cresce col gradiente di campo elettrico.

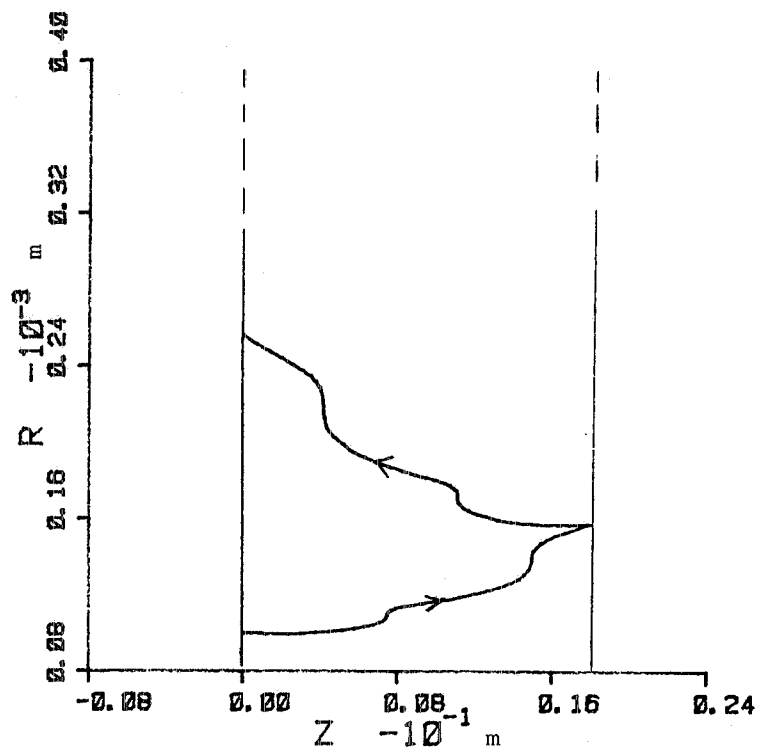


FIG. 5 - Traiettoria parassiale. $E = 8$ MV/m, $\Phi_i = 0^\circ$, multiplo del periodo = $5/2$, $R_i = 0,1$ mm. Energia finale = 4280 eV.

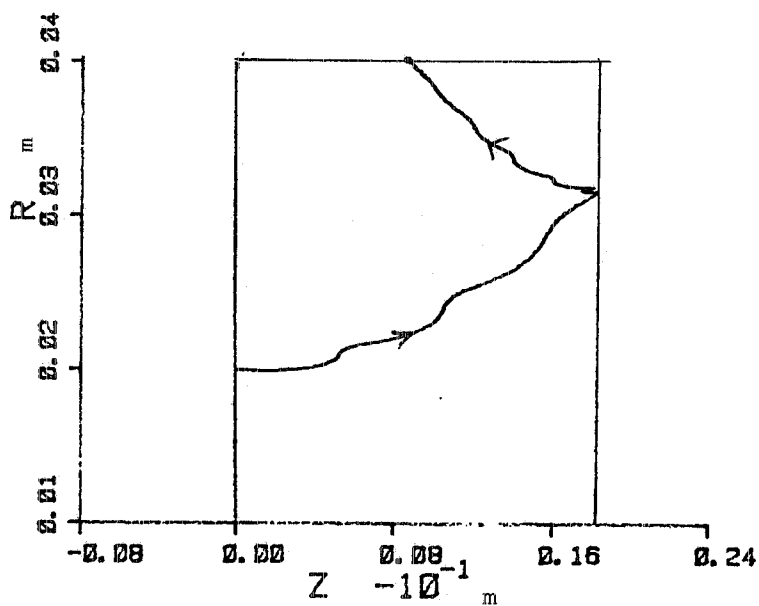


FIG. 6 - Traiettoria che termina sul cilindro esterno. $E = 8$ MV/m, $\Phi_i = 0^\circ$, $R_i = 20$ mm.

In realtà per la configurazione dei campi del modo TM_{010} esiste una sola traiettoria risonante che coincide con l'asse della cavità dove il campo magnetico è nullo. Le traiettorie che partono discoste dall'asse derivano verso la superficie cilindrica che delimita la cavità per effetto del campo magnetico, con velocità di deriva crescente con il raggio.

E' necessaria la presenza di un campo elettrico radiale per dar luogo ad altre traiettorie risonanti distinte dall'asse. Tale campo nasce quando vengono praticati i fori sull'asse, che sono d'altronde necessari per utilizzare la cavità.

Nella Fig. 7 è indicata una possibile traiettoria conseguente a emissione per effetto di campo, con ritorno della particella sulla superficie di emissione senza intercettare la faccia opposta.

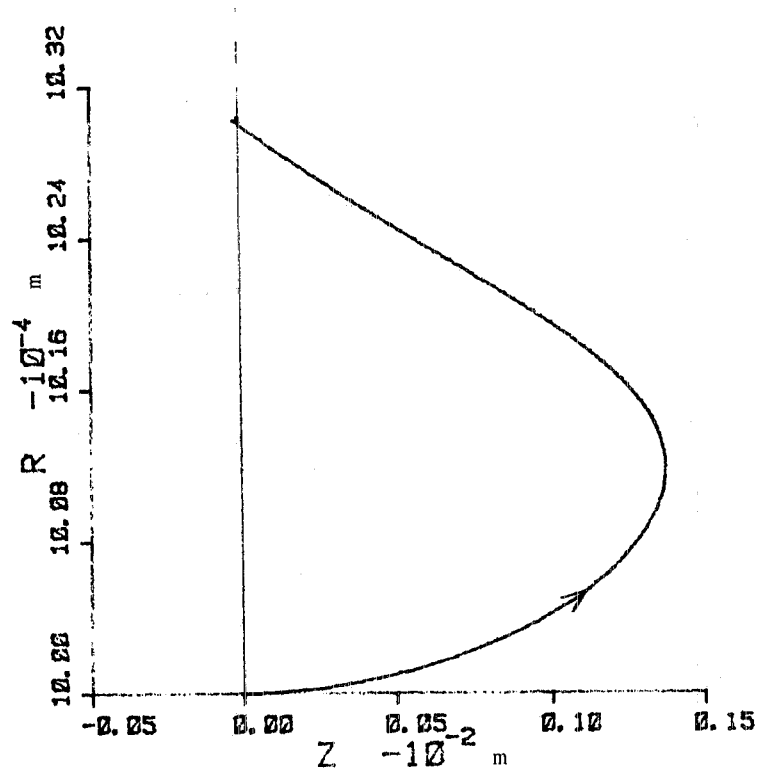


FIG. 7 - Traiettoria con ritorno sullo stesso piano. $E = 8 \text{ MV/m}$, $R_i = 10 \text{ mm}$, $\Phi_i = 110^\circ$, $\Phi_f = \Phi_i + 235^\circ$, $E_f = 1909 \text{ eV}$.

Tali traiettorie, se terminano sul punto d'inizio di una traiettoria del tipo risonante, possono dar luogo a forti correnti di carico elettronico⁽⁵⁾.

Abbiamo citato questi esempi per sottolineare l'utilità della conoscenza delle traiettorie per studiare i fenomeni di scarica in questione.

BIBLIOGRAFIA

- (1) - A. I. Hatch, Nuclear Instr. and Meth. 41, 261 (1966).
- (2) - J. P. Budliger, Nuclear Instr. and Meth. 61, 253 (1968).
- (3) - J. Halbritter, Particle Accelerators 3, 163 (1972).
- (4) - U. Klein and D. Proch, Multipacting in Superconducting RF Structures , Wuppertal Report WU B 78-34 (1978).
- (5) - J. Halbritter, On Electron Loading in TM_{010} Mode Cavities, Karlsruhe Report No. 303/78 (1978).
- (6) - J. Halbritter, Karlsruhe Report KFK 3/78-1 (1978).
- (7) - S.Y. Liao, Microwave Devices and Circuits (Prentice Hall, 1980).
- (8) - V. I. Vanmuyse, J. L. Vermaeghe and J. Turf, Nuovo Cimento 10, 721 (1958).
- (9) - A. J. Match and B. Williams, J. Appl. Phys. 25, No. 4 (1954).