

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-81/35(R)
19 Giugno 1981

G.P. Capitani e A.R. Reolon: STUDIO DI UNO SPETTROMETRO
MAGNETICO PER IL LABORATORIO LEALE

LNF-81/35(R)
19 Giugno 1981

G.P. Capitani e A.R. Reolon: STUDIO DI UNO SPETTROMETRO MAGNETICO PER IL LABORATORIO LEALE

1. - PREMESSA

In questo rapporto viene descritto il progetto di uno spettrometro magnetico da utilizzarsi presso il fascio di γ monocromatici del Laboratorio LEALE.

Il progetto è stato sviluppato tenendo conto della necessità di utilizzare esclusivamente materiale magnetico reperibile all'interno dei Laboratori Nazionali di Frascati, e ripromettendosi di ottenere le seguenti caratteristiche principali:

- un angolo solido possibilmente elevato, maggiore comunque di 10 mster;
- una buona accettazione in momento (almeno $\pm 10\%$) fino a momenti di 550 MeV/c;
- una risoluzione non eccessivamente spinta (0,5% , 1%), ma ottenuta con notevoli dimensioni del bersaglio (dell'ordine di qualche cm).

In un prossimo rapporto⁽¹⁾ verranno riportate le misure magnetiche e le caratteristiche calcolate a partire da dette misure.

2. - SCELTA DEL TIPO DI CONFIGURAZIONE MAGNETICA

La scelta dell'elemento principale dello spettrometro è caduta obbligatoriamente - date le condizioni predette - sul vecchio e glorioso magnete, già utilizzato in passato dal Gruppo (e,e'p), le cui caratteristiche principali sono riassunte nella Tabella I.

Parimenti obbligatorio è il modo di utilizzo, già indicato a suo tempo da G. Cortellessa⁽²⁾, nel quale la focalizzazione è praticamente dovuta interamente al campo disperso di bordo. Come è noto congiuntamente a questo tipo di focalizzazione nel piano di deflessione vi è un forte allargamento nel piano verticale che costringe ad utilizzare rivelatori di grande dimensione e che in pratica è la principale causa di riduzione dell'angolo solido.

Per correggere questo allargamento è possibile impiegare - secondo un'antica idea di H.A. Enge⁽³⁾ - un quadrupolo foccheggiante nel piano verticale da collocarsi fra il punto bersaglio ed il magnete principale. La

TABELLA I

Caratteristiche principali del magnete

Poli piani e paralleli	(40 x 90) cm ²
Gap	14 cm
Potenza assorbita	120 kW
Portata acqua raffreddamento	1 litro/sec
Pressione massima raffreddamento	12 atm
Spire bobina	180
Peso totale	15 t
Induzione massima	14.000 Gauss
Collegamento delle due bobine	in serie

fattibilità di ciò è già stata saggiata con calcoli matriciali al I° ordine da B. Braus e G. Ricco⁽⁴⁾.

Le caratteristiche del quadrupolo che si intende utilizzare sono riportate nella Tabella II.

TABELLA II

Caratteristiche principali del quadrupolo

Diametro gola	16 cm
Lunghezza geometrica	33 cm
Lunghezza magnetica	39.6 cm
Pendenza iniziale del gradiente (Gauss/cm/Amp)	1.98

Il progetto dello spettrometro si è articolato in tre fasi:

- calcoli matriciali al I° ordine;
- calcoli matriciali al II° ordine;
- verifica delle proprietà trovate con i calcoli matriciali e ricerca di migliori condizioni, mediante l'effettivo calcolo di traiettorie (ray-tracing).

3. - CALCOLI AL I° ORDINE

I calcoli al primo ordine sono stati ripetuti essenzialmente per due tipi di motivazioni:

- a) partire da condizioni iniziali più simili a quelle utilizzate dal gruppo (e,e'p) che erano state trovate con l'impiego della tecnica del filo;
- b) utilizzare un differente programma di calcolo nel quale il numero di condizioni non sia determinato dal numero di parametri liberi, nel quale sia possibile imporre un tipo di condizione da noi considerata più "realistica" ed avere a disposizione una più ampia scelta di parametri liberi.

Per avere tutto ciò si è impiegato il più che noto programma di minimizzazione MINUIT con una opportuna FCN per il calcolo degli elementi di matrice; la condizione di minimo introdotta nella subroutine FCN è una

condizione sul quadrato del "potere risolutivo" r del sistema dato mediante gli elementi di matrice al I° ordine così definito:

$$r = \frac{|(x/x_o)| x_{oM} + |(x/\theta_o)| \theta_{oM}}{(x/\delta)} \quad (1)$$

Il significato dei simboli utilizzati resta ben definito dalla seguente usuale relazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x/x_o) & (x/\theta_o) & (x/\delta) \\ (\theta/x_o) & (\theta/\theta_o) & (\theta/\delta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ \theta_o \\ \delta \end{pmatrix} \quad (2)$$

aggiungendo che x_{oM} e θ_{oM} sono da intendersi rispettivamente come il valore massimo per x_o e per θ_o .

I parametri liberi possono essere, in linea di principio, tutte le grandezze che intervengono nel calcolo degli elementi di matrice, purchè siano rispettate certe compatibilità essenzialmente di carattere geometrico. Il miglior risultato ottenuto fornisce $r=0,70\%$ con un bersaglio del diametro di 3 cm e $r=0,47\%$ con un bersaglio di 2 cm ($x_{oM}=1,5$ e 1 cm rispettivamente, e $\theta_{oM}=0,06$ rad). La semidimensione verticale sul piano di rivelazione è di 14 cm e l'angolo solido - stimato assi approssimativamente assumendo come angolo di accettazione verticale quello determinato dalla gola del quadrupolo a metà quadrupolo e come angolo di accettazione orizzontale i 2/3 di quello verticale - è di 17 mster.

La configurazione geometrica risultante ed il valore dei parametri in gioco sono riportati nella Fig. 1 e nella Tabella III. Il significato dei simboli usati nella Tabella III è il seguente: l_1 indica la distanza del bersaglio dal

TABELLA III

Valori finali dei parametri ottimizzati con i calcoli matriciali del I° ordine.

$l_1 = 0.061$ m	$\beta_1 = -6.3^\circ$
$l_2 = 0.072$ m	$\alpha = 32.650^\circ$
$P_o = 450$ MeV/c	$\varrho = 1.21$ m
$P_{max} = 550$ MeV/c	$\beta_2 = \alpha - \beta_1 - 90^\circ = -51.06^\circ$
$l_1 = 0.70$ m	$l_3 = 1.29$ m
$l_q = 0.396$ m	$a = 0.262$ m
$k_q = 2.28$ m ⁻¹	$b = 0.630$ m
$l_2 = 0.49$ m	

bordo magnetico del quadrupolo, l_q e k_q indicano rispettivamente la lunghezza magnetica e la "strength" del quadrupolo, l_2 è la distanza tra i bordi magnetici del quadrupolo e del magnete mentre l_3 è la distanza del rivelatore dal bordo magnetico del magnete; il raggio di curvatura della traiettoria centrale di impulso $p_o=450$ MeV/c è stato indicato con ϱ ed è stato introdotto come parametro libero; gli angoli β_1 , β_2 e α indicano rispettivamente l'angolo di ingresso, di uscita e l'angolo di deflessione della traiettoria centrale nel magnete; i parametri a e b descrivono la posizione della traiettoria centrale (vedi Fig. 1) mentre l_1 e l_2 indicano la distanza dei bordi magnetici rispetto a quelli geometrici.

La posizione dei bordi magnetici è stata determinata mediante un semplice procedimento geometrico, basato su di una traiettoria calcolata con un programma di ray-tracing al quale è stata fornita una mappa del magnete già misurata per precedenti impieghi del magnete ed implementata opportunamente. Il procedimento consiste nel

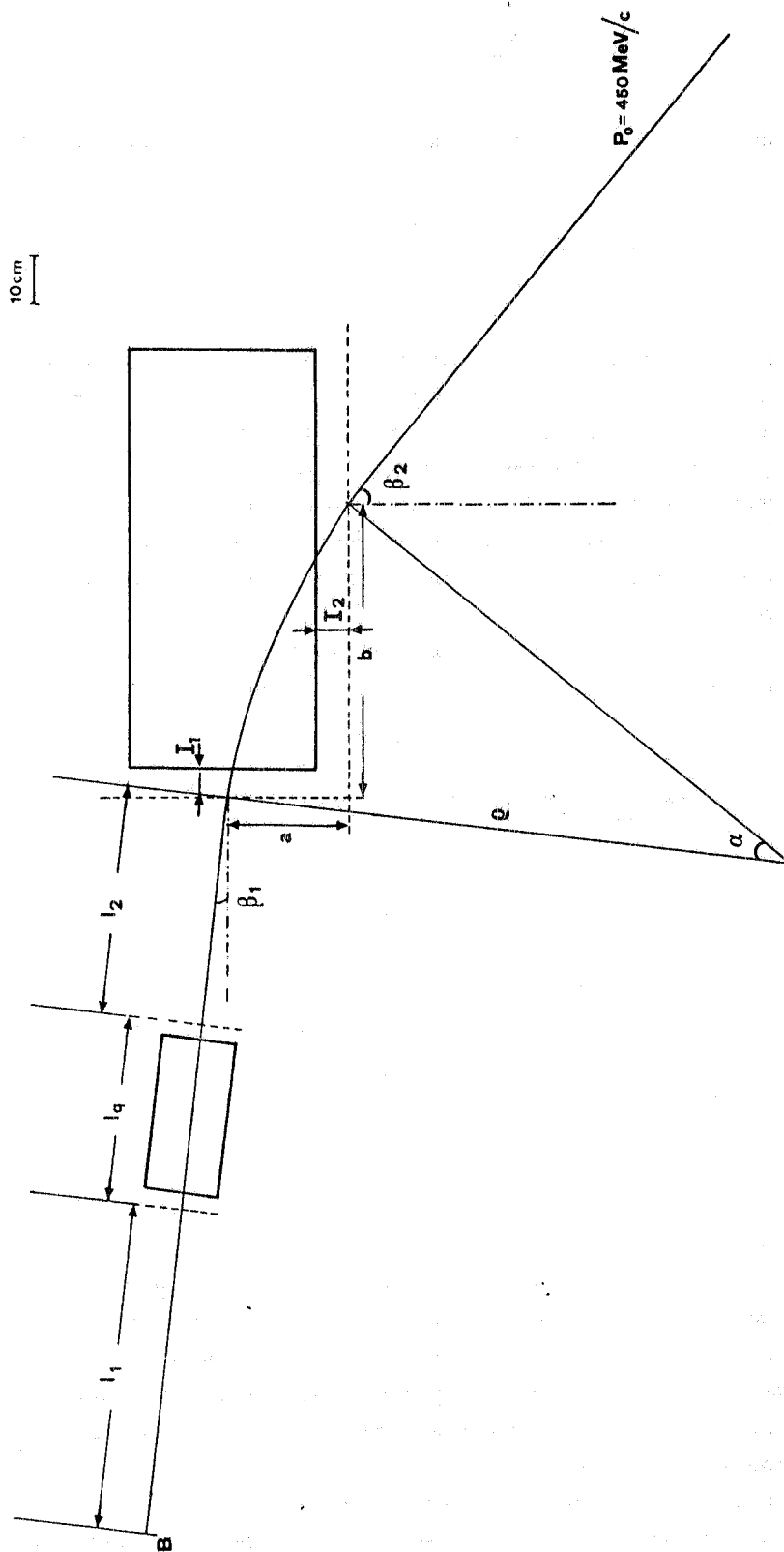


FIG. 1 - Configurazione geometrica dello spettrometro. Il valore dei parametri per i calcoli matriciali all'1° ordine sono riportati in Tabella III.

tracciare le tangenti alla traiettoria nei tratti rettilinei all'ingresso e all'uscita dal magnete; dal punto di intersezione delle due tangenti si traccia poi la bisettrice sulla quale si stacca un segmento di lunghezza uguale al raggio di curvatura ϱ , determinando così un punto centrale da cui si fanno partire le normali alle due tangenti. I due punti di intersezione tra normali e tangenti determinano la posizione dei bordi magnetici.

4. - CALCOLI AL II° ORDINE

I calcoli al II° ordine sono stati eseguiti sulla falsariga di quelli al I° ordine introducendo nella subroutine FCN gli elementi di matrice al II° ordine; in particolare in seguito a ciò viene introdotto un nuovo parametro libero: la curvatura del bordo di ingresso del polo, parametro fondamentale nella ottimizzazione delle caratteristiche cercate.

Come condizione di minimo è stata impiegata inizialmente la naturale estensione della (1) al II° ordine:

$$r = \left[\left| \frac{x}{x_0} \right| x_{oM} + \left| \frac{x}{\theta_0} \right| \theta_{oM} + \left| \frac{x}{x_0^2} \right| x_{oM}^2 + \left| \frac{x}{x_0 \theta_0} \right| x_{oM} \theta_{oM} + \left| \frac{x}{\theta_0^2} \right| \theta_{oM}^2 + \left| \frac{x}{y_0^2} \right| y_{oM}^2 + \left| \frac{x}{y_0 \phi_0} \right| y_{oM} \phi_{oM} + \left| \frac{x}{\phi_0^2} \right| \phi_{oM}^2 \right] / \left| \frac{x}{\delta} \right| \quad (3)$$

dove ϕ indica la divergenza angolare delle particelle nel piano verticale e ϕ_{oM} è il suo valore massimo.

In seguito, per non fare esplodere la dimensione verticale sul piano di rivelazione, si è usata una combinazione della condizione (3) con la dimensione verticale d definita da:

$$d = \left| \frac{y}{y_0} \right| y_{oM} + \left| \frac{y}{\phi_0} \right| \phi_{oM} \quad (4)$$

In definitiva la condizione di minimo F usata è stata del tipo:

$$F = r^2 + p d^2, \quad (5)$$

ove p è un opportuno peso.

Come condizioni iniziali per la minimizzazione al II° ordine sono stati utilizzati i parametri ottenuti con i calcoli al I° ordine.

Sfruttando i risultati così ottenuti è stato poi effettuato un ulteriore calcolo al II° ordine in modo "più" realistico nel senso che la condizione di minimo non è stata più data attraverso gli elementi di matrice del sistema (cfr. (3), (4) e (5)) ma attraverso un certo numero N di "vettori-traiettoria" tipici delle condizioni di impiego previste per lo spettrometro. Sottolineamo che in questo modo si può introdurre la dimensione finita del bersaglio.

Per ciascun vettore-traiettoria $V_0^{(*)}$ viene calcolato il vettore finale $V^{(*)}$, e la risoluzione media viene quindi definita come:

$$r = \sum_{k=1}^N \left[\left| \frac{x}{x_0} \right| x_k + \left| \frac{x}{\theta_0} \right| \theta_k + \left| \frac{x}{x_0^2} \right| x_k^2 + \left| \frac{x}{x_0 \theta_0} \right| x_k \theta_k + \left| \frac{x}{\theta_0^2} \right| \theta_k^2 + \left| \frac{x}{y_0^2} \right| y_k^2 + \left| \frac{x}{y_0 \phi_0} \right| y_k \phi_k + \left| \frac{x}{\phi_0^2} \right| \phi_k^2 \right] / \left[\left| \frac{x}{\delta} \right| + \left| \frac{x}{\delta^2} \right| \right] \cdot N \quad (6)$$

$$(*) V_0 \equiv (x_0, \theta_0, x_0^2, x_0 \theta_0, \theta_0^2, y_0^2, y_0 \phi_0, \phi_0^2)$$

$$V \equiv (x, \theta, x^2, x \theta, \theta^2, y^2, y \phi, \phi^2)$$

Nella condizione di minimo F viene comunque inserita ancora una condizione sulle dimensioni verticali, in modo che la condizione di minimo utilizzata è:

$$F = (r^2) + p \left[\left| (y/y_o) \right| y_{oM} + \left| (y/\theta_o) \right| \theta_{oM} \right]^2. \quad (7)$$

Il miglior risultato ottenuto dà una risoluzione r come definita dalla (6) dello 0.50% per un bersaglio di 3 cm di diametro (0.32% per un bersaglio di 2 cm di diametro), una semidimensione verticale sul piano di rivelazione di 8 cm.

Nella Tabella IV sono riportati i parametri relativi ai calcoli al II° ordine; il valore della curvatura del bordo di ingresso del polo è indicata dal parametro C_1 .

TABELLA IV

Valori finali dei parametri ottimizzati con i calcoli matriciali al II° ordine "realistici".

l_1	= 0.061 m	β_1	= -6.46°
l_2	= 0.072 m	a	= 37.66°
P_o	= 450 MeV/c	β_2	= -45.88°
P_{max}	= 550 MeV/c	ϱ	= 1.207 m
l_1	= 0.70 m	l_3	= 1.716 m
l_q	= 0.396 m	a	= 0.333 m
k_q	= 2.178 m ⁻¹	b	= 0.705 m
l_2	= 0.267 m	c_1	= -2.681

5. - RAY-TRACING

I risultati ottenuti con i calcoli al II° ordine "realistici" sono serviti ancora una volta come punto di partenza per uno sviluppo ulteriore del progetto dello spettrometro. L'ultimo grado di raffinamento è stato effettuato valutando le caratteristiche dello spettrometro a partire da traiettorie calcolate risolvendo numericamente le equazioni differenziali del moto di una particella carica in un campo magnetico (ray-tracing). Nelle Figure 2 e 2a sono mostrati, a titolo di esempio, i grafici di alcune traiettorie calcolate con i dati ottenuti dal II° ordine. Come si può immediatamente vedere la situazione non riproduce quella dell'ottica matriciale: la risoluzione è certamente peggiore.

La mappa del campo magnetico utilizzata era già nota⁽⁵⁻⁶⁾ e le zone marginali dove non era già stata misurata sono state riempite - ove possibile - mediante operazioni di riflessione su assi di simmetria, e altrimenti, mediante interpolazioni ed estrapolazioni. Come mappa del quadrupolo è stata utilizzata una mappa "ideale" calcolata per la lunghezza magnetica effettiva misurata l_q , riportata in Tabella IV. Le variazioni del campo magnetico dovute alla introduzione di un bordo di entrata con curvatura non sono state misurate, ma semplicemente valutate traslando il campo magnetico di quanto viene traslato il bordo geometrico di entrata a causa della curvatura.

Anche qui la strategia usata nella ottimizzazione del sistema è stata quella di calcolare e far graficare dal calcolatore un certo numero di traiettorie tipiche e di studiare l'andamento o meglio di valutare la risoluzione media (a partire, almeno in una prima approssimazione, dai grafici stessi delle traiettorie) al variare di un parametro del sistema per volta. È bene notare che affinché la "risoluzione media" risulti ben definita occorre non solo che l'insieme di traiettorie calcolato riempia in maniera rappresentativa lo spazio delle fasi presumibilmente accettato dallo spettrometro, ma che anche il punto di partenza delle traiettorie vari opportunamente all'interno delle dimensioni del bersaglio.

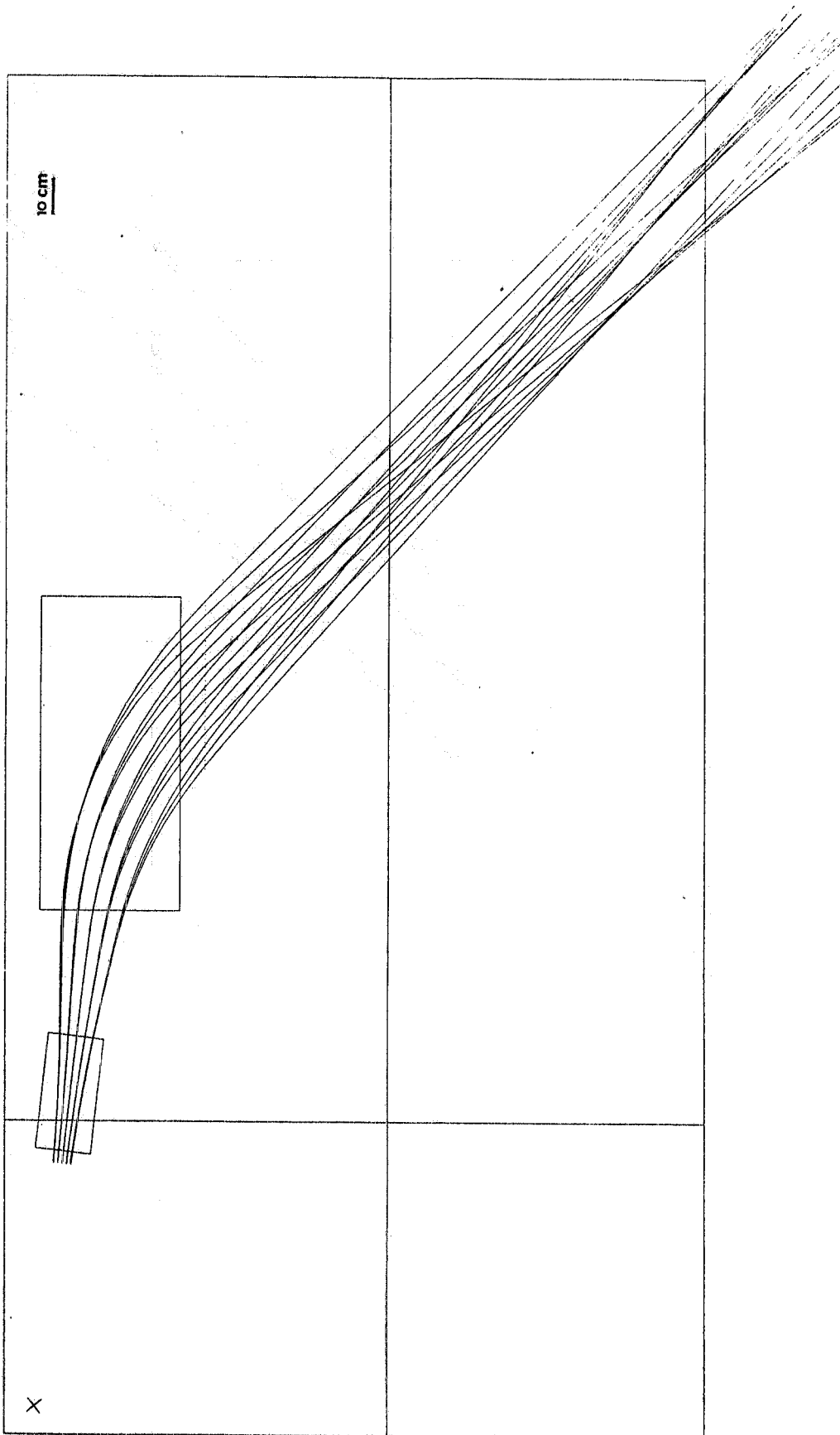


FIG. 2 - Ray-tracing effettuato con i parametri riportati nella Tabella IV, relativi ai calcoli al II° ordine. I valori dell'impulso sono rispettivamente $p=400, 450, 500$ MeV/c e per ciascun valore di p l'angolo θ varia a passi costanti di 18 mrad da -36 mrad a $+36$ mrad; l'angolo \emptyset è costantemente nullo. Il bersaglio è stato considerato puntiforme.

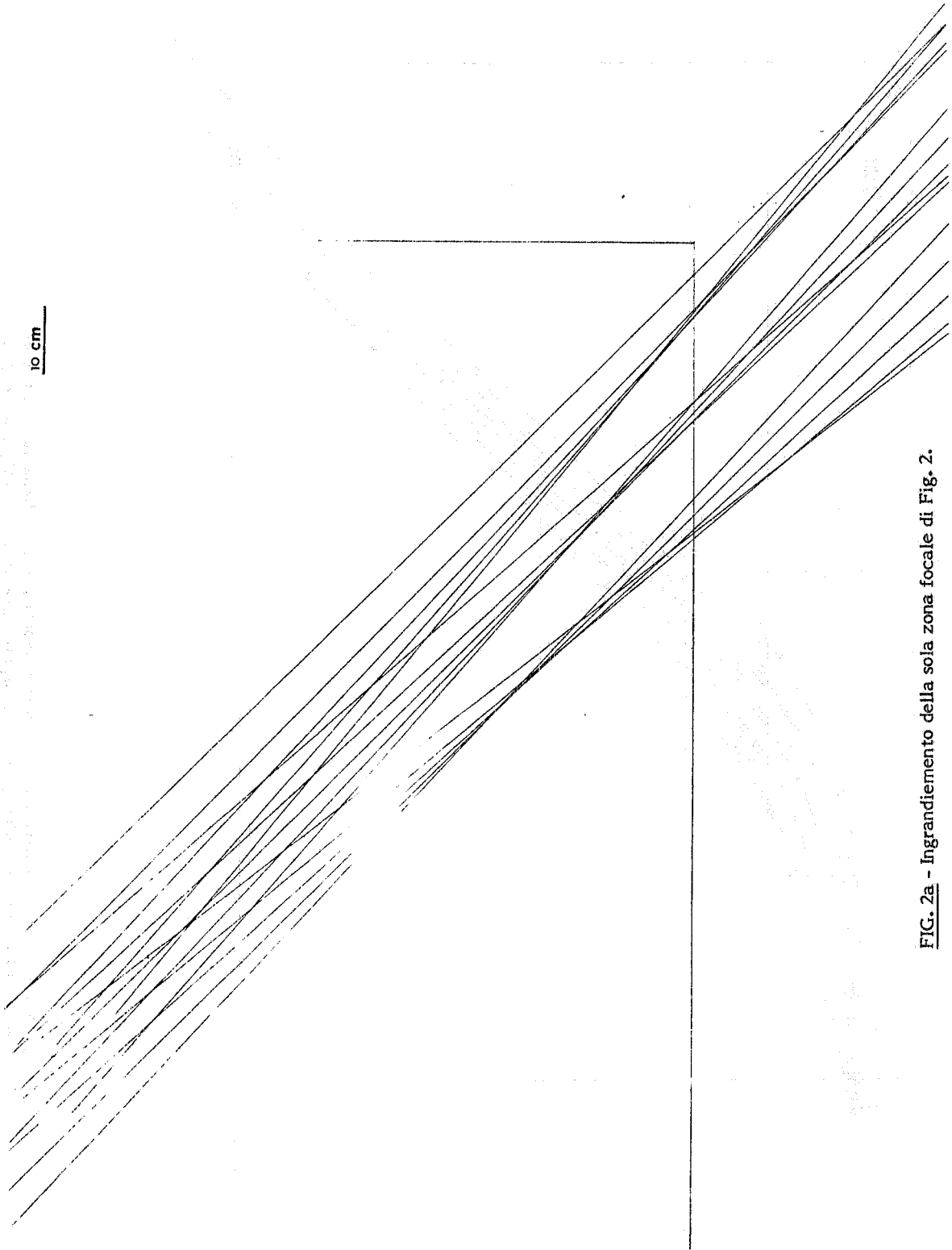


FIG. 2a - Ingrandimento della sola zona focale di Fig. 2.

Gli aspetti più tipici che si sono rivelati nel corso della ricerca parametrica sono i seguenti:

- La risoluzione ottenibile è limitata essenzialmente dalle dimensioni del bersaglio. Con un bersaglio puntiforme si sono infatti trovate delle condizioni con una risoluzione migliore di 0.5% (vedi Figg. 3, 3a e Tabella V).

TABELLA V

Valori finali dei parametri ottimizzati con il ray-tracing.

I_1	= 0.061 m	β_1	= -8.5°
I_2	= 0.072 m	α	= 35.5°
P_0	= 450 MeV/c	β_2	= -46°
P_{max}	= 550 MeV/c	q	= 1.207 m
l_1	= 0.600 m	l_3	= 1.8 m
l_q	= 0.396 m	a	= 0.3 m
k_q	= 2.150 m^{-1}	b	= 0.65 m
l_2	= 0.260 m	c_1	= -6.0

- L'angolo solido è limitato in verticale - comunque - solo dai bordi geometrici degli elementi magnetici del sistema, mentre in orizzontale viene ad essere limitato dalla scelta che si fa sulla peggiore risoluzione accettabile.

- Le proprietà focali sono determinate entro una risoluzione di qualche 1/10000 dalle traiettorie sul piano mediano (vedi Figg. 4 e 4a).

- L'angolo solido dipende in modo non semplice sia da p che da θ . Prima di utilizzare lo spettrometro per prendere dei dati sarà necessario studiare un sistema di diaframmi opportuno che semplifichi poi l'analisi dei dati raccolti.

- Malgrado lo sforzo fatto per fare dei calcoli matriciali "realistici" i parametri migliori ottenuti con il ray-tracing sono alquanto diversi (vedi Tabella IV - Fig. 2 e Tabella V - Fig. 3).

6. - MONTECARLO

Come si vede in questo tipo di ricerca parametrica "visiva" (sulla base cioè dei grafici delle traiettorie) non si è introdotta la dimensione finita del bersaglio. Per far ciò e per valutare quindi la risoluzione e l'angolo nelle condizioni prevedibili di impiego si è operato nel seguente modo.

Al variare prima del parametro C_1 , poi - per il miglior valore del parametro C_1 - al variare del parametro a , si sono calcolate un certo numero di traiettorie significative (del tipo di Fig. 3) per poter trovare con un "best fit" l'equazione della linea focale, ed un andamento "teorico" dell'energia nella linea focale. Quindi per ciascuna situazione si sono calcolate N (~ 1000) traiettorie estraendo a caso per ciascuna l'energia, gli angoli θ_0 e ϕ_0 e la posizione all'interno del bersaglio (non uniformemente, ma secondo una distribuzione conica, per approssimare in modo semplice una distribuzione di intensità di un fascio). Si è calcolata quindi la "risoluzione media" come definita dalla:

$$R = \sqrt{\frac{N}{\sum_1^N} \left(\frac{\Delta E_i}{E_i} \right)^2} / N$$

in base alle differenze ΔE_i fra le energie estratte e le energie E_i "ricostruite" sulla linea focale.

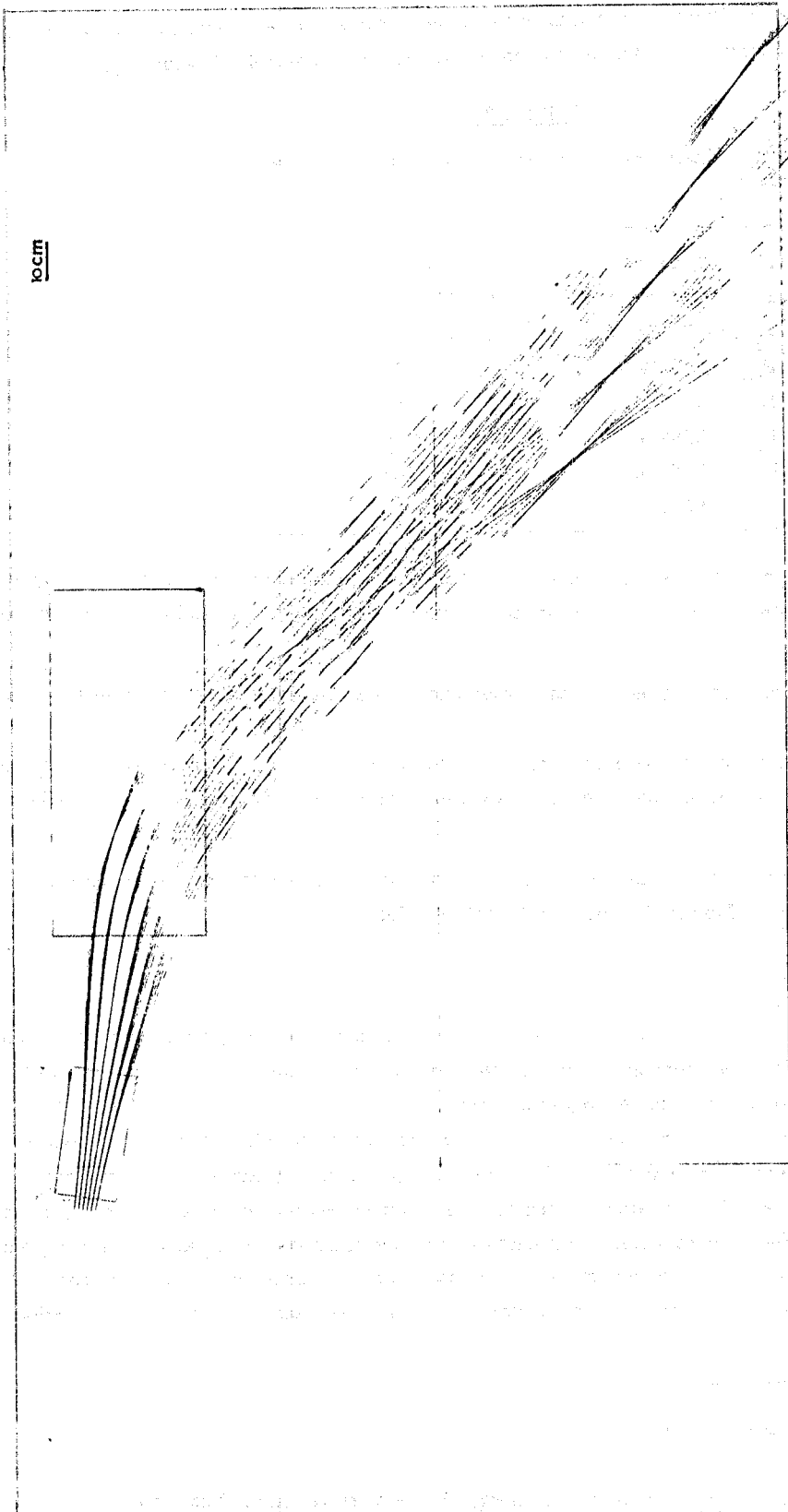


FIG. 3 - Risultati ottenuti con i parametri riportati nella Tabella V. I valori dell'impulso sono $P=350, 400, 450, 500$ e 550 MeV/c. L'angolo $\theta = (-54+36)$ mrad, $\phi = 0$ mrad. Bersaglio puntiforme.



FIG. 3a - Ingrandimento della sola zona focale di Fig. 3.

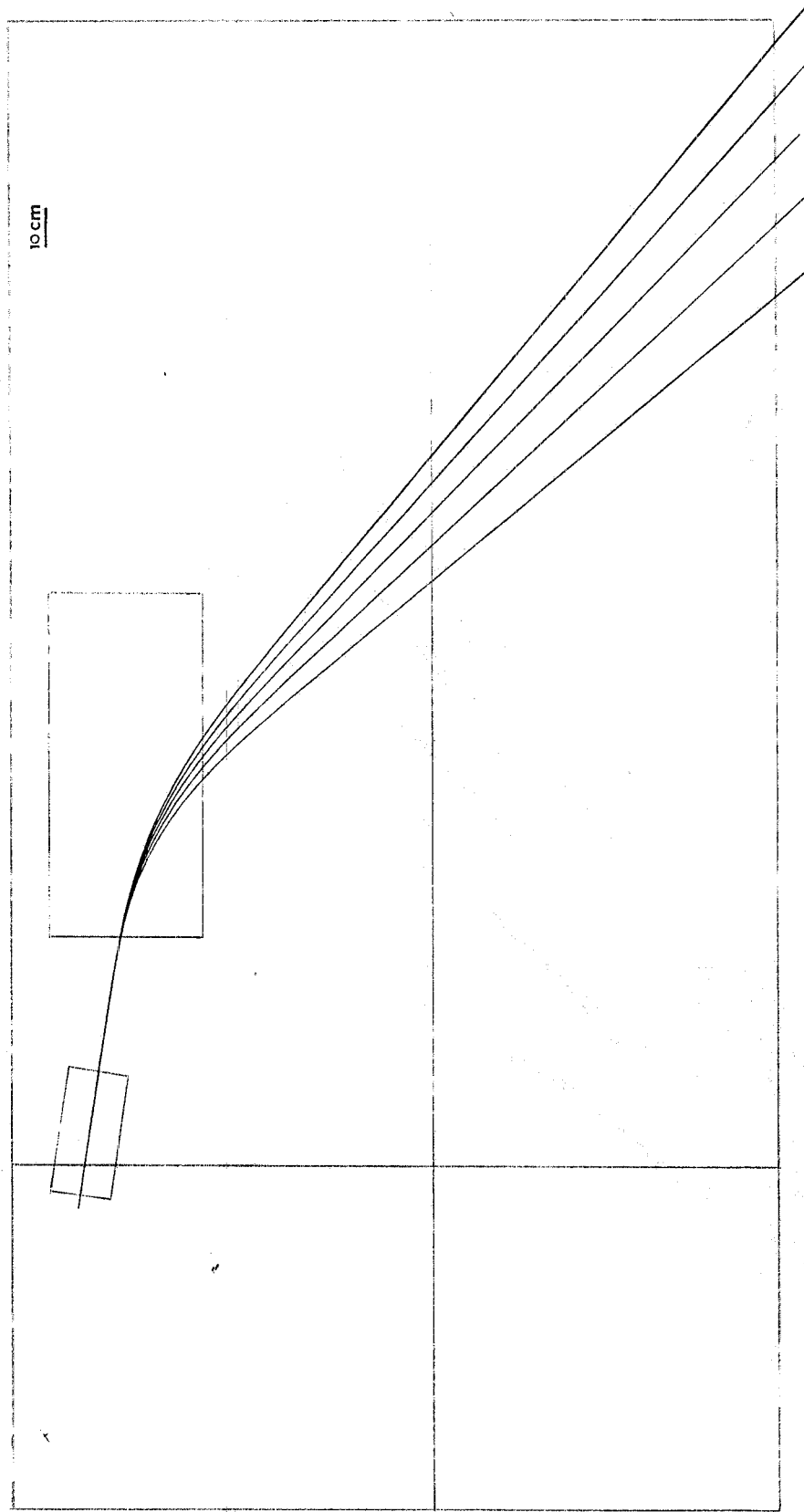


FIG. 4 - Risultati ottenuti con gli stessi parametri (Tabella V) e gli stessi valori dell'impulso di FIG. 3. $\theta=0$ mrad, ϕ varia a passi costanti di 36 mrad da -72 a $+72$ mrad. Bersaglio non puntiforme ($x=y=0$, $z=0$, $r=1.5$ cm).

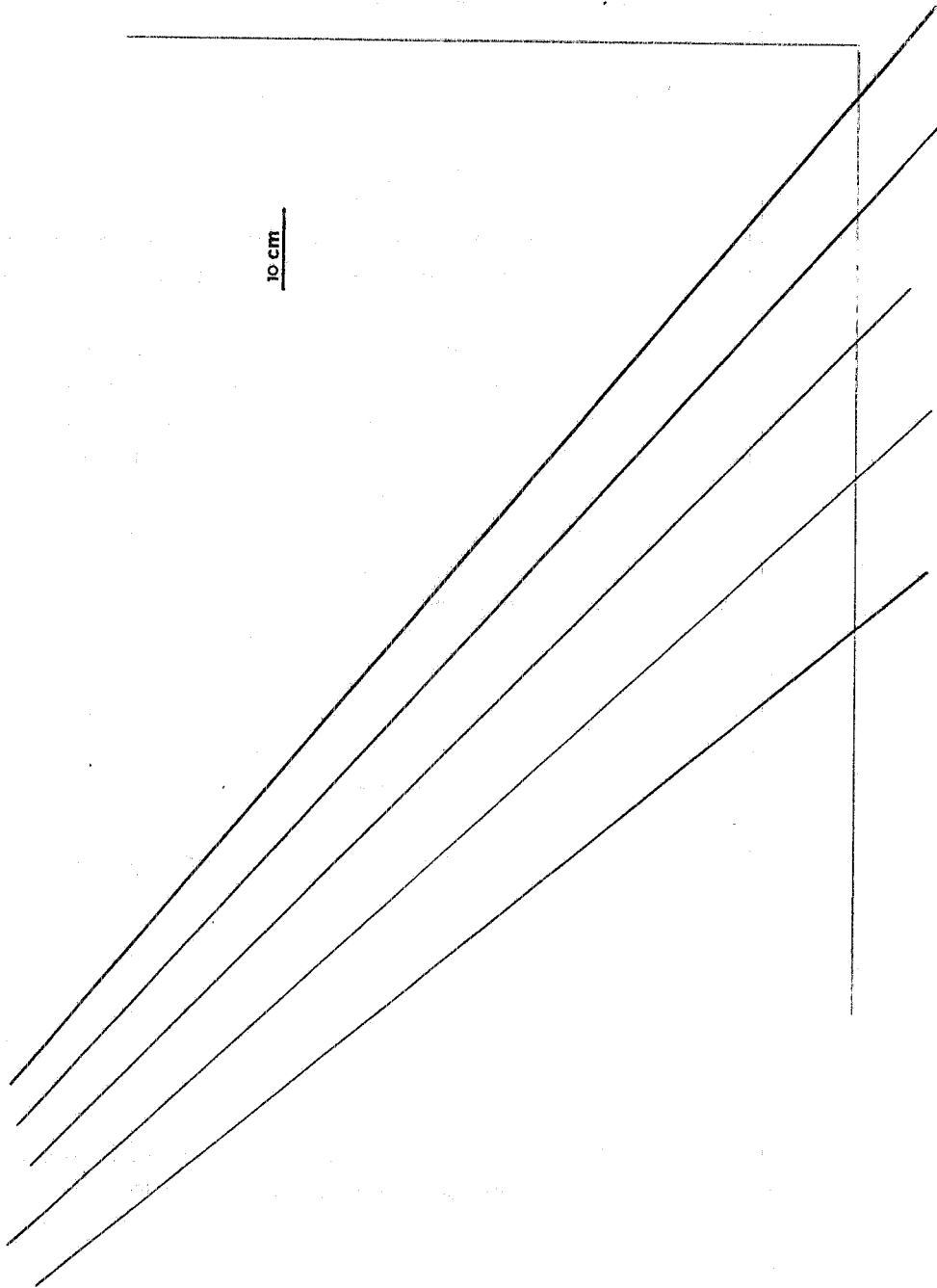


FIG. 4a - Ingrandimento della sola zona focale di Fig. 4.

I risultati riportati nelle Figure 5 e 6 e nella Tabella VI sono relativi a calcoli effettuati con un bersaglio del diametro di 3 cm, estraendo l'impulso iniziale fra 350 e 550 MeV/c (con $\Delta p/p=44\%$). Come si vede i valori di a e

TABELLA VI

Valori finali dei parametri ottimizzati o calcolati con estrazione di traiettorie.

a	= 0.30 m	R	= 0.8%
c_1	= -6.0	$\Delta p/p$	= 44%
$\Delta\Omega$	= 15.4 mstr	\emptyset Bersaglio	= 3 cm

C_1 che minimizzano la risoluzione R trovati in questo modo sono esattamente uguali a quelli trovati (Tabella V) esaminando i grafici di un certo numero di traiettorie tipiche, il che dà una indicazione positiva sulla validità di quel modo di procedere.

L'estrazione degli angoli θ e \emptyset ha fornito come ulteriore risultato il valore dell'angolo solido accettato, definito come il rapporto fra il numero di traiettorie che nel calcolo superano tutti i tests geometrici ed il numero di traiettorie estratte, moltiplicato per l'angolo solido (sicuramente più grande di quello reale) entro il quale vengono estratte le traiettorie. Il valore riportato in Tabella VI è relativo ai vincoli geometrici i più grandi possibili, definiti cioè dalla gola del quadrupolo e dalla gap del magnete.

Nella Figura 7 viene mostrato l'andamento dell'angolo solido calcolato in funzione del quadrato (in cm^2) del raggio del collimatore cilindrico supposto all'interno della gola del quadrupolo.

L'angolo solido è calcolato per $p=450$ MeV/c e per un bersaglio puntiforme. Al variare di p e del diametro del bersaglio - nei limiti di utilizzo pensati - si hanno variazioni dell'ordine dell'1 o 2% difficili a valutarsi con precisione se non con un numero enorme di estrazioni.

Nella Fig. 8 è mostrato l'andamento della risoluzione R(FWHM) in percento in funzione dell'angolo solido accettato, calcolato per un impulso $p=450$ MeV/c e per un bersaglio puntiforme.

Nella Figura 9 sono mostrati rispettivamente per tre valori dell'angolo solido accettato gli andamenti di R in funzione del diametro D del bersaglio.

Nella Figura 10 infine è mostrato l'andamento della risoluzione lungo la linea focale per un angolo solido $\Omega=13$ msterad e per un bersaglio puntiforme.

RIFERIMENTI

- (1) L. Astegano, G.P. Capitani, S. Gentile, E. Polli e A.R. Reolon, Rapporti LNF (in corso di stesura).
- (2) Cfr. Per esempio, G. Campos Verniti et al., Istituto Superiore di Sanità, Rapporto ISS P 75/3 (1975).
- (3) H.A. Enge, Rev. Sci. Instrum., 29, 885 (1959).
- (4) S. Braus e G. Ricco, Rapporto Frascati LNF 77/15 (1977).
- (5) A. Calicchia et al., Istituto Superiore di Sanità, Rapporto ISS T 74/13 (1974).
- (6) S. Pasquini e A.R. Reolon, Rapporto Frascati LNF-77/34 (1977).

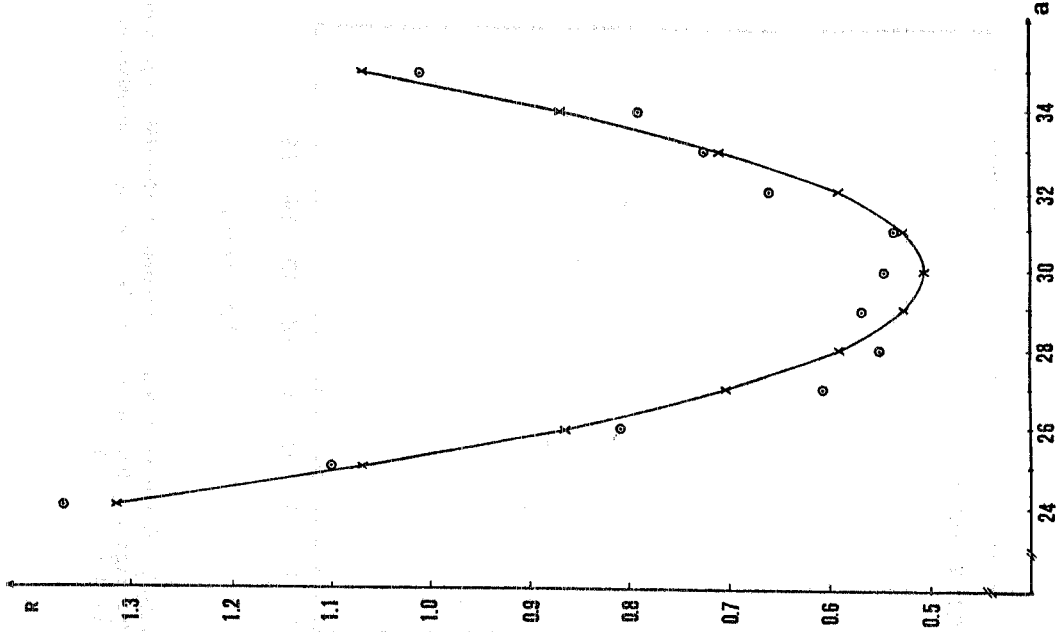


FIG. 6 - Andamento della risoluzione R al variare del parametro a (posizione della traiettoria centrale vedi Fig. 1). Il significato dei simboli è lo stesso di Fig. 5.

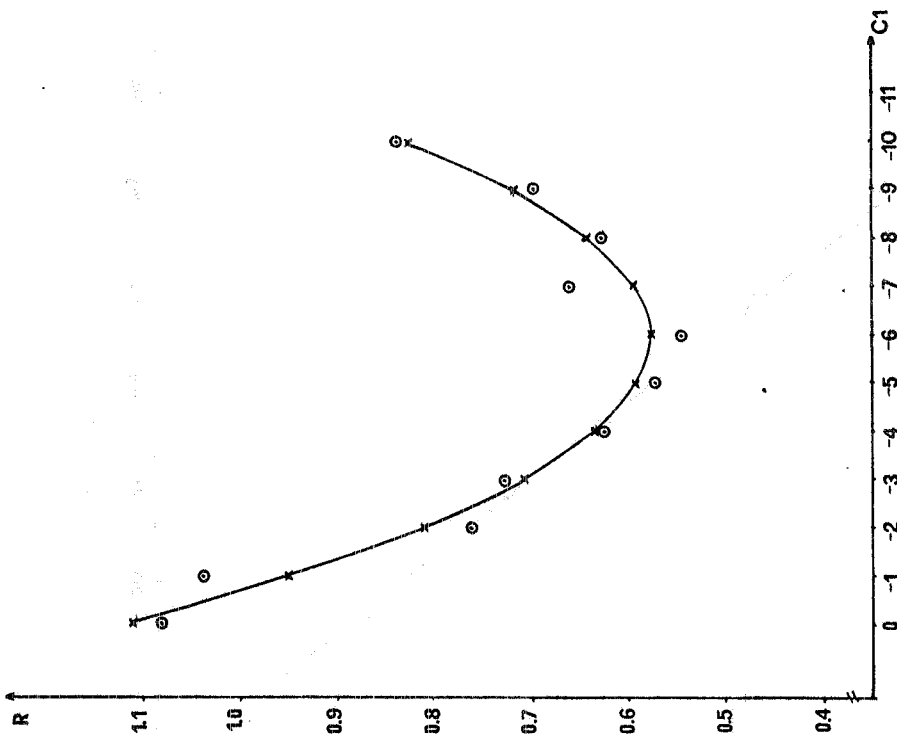


FIG. 5 - Andamento della risoluzione R al variare del parametro C1 (curvatura del bordo di ingresso del polo) I risultati del montecarlo sono indicati con il simbolo \odot e i risultati del fit con simbolo x.

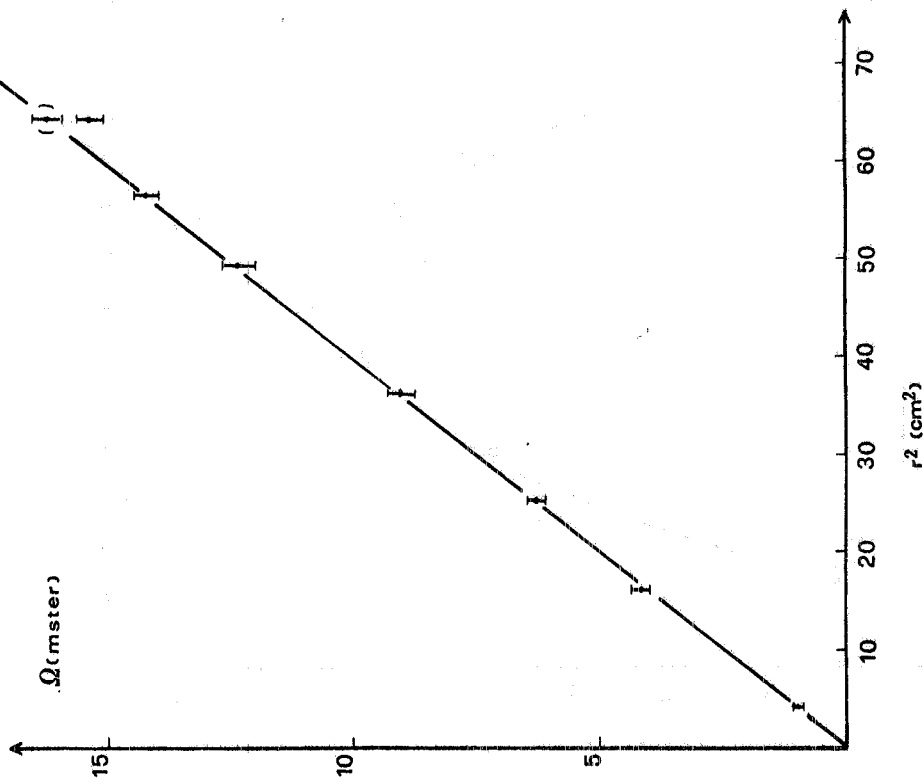


FIG. 7 - Andamento dell'angolo solido accettato Ω , calcolato con il montecarlo, al variare del quadrato del raggio r del collimatore cilindrico posto nella gola del quadrupolo. Bersaglio puntiforme e impulso $p=450$ MeV/c. Il punto tra parentesi a $r=64$ cm è calcolato senza tener conto della gap del magnete.

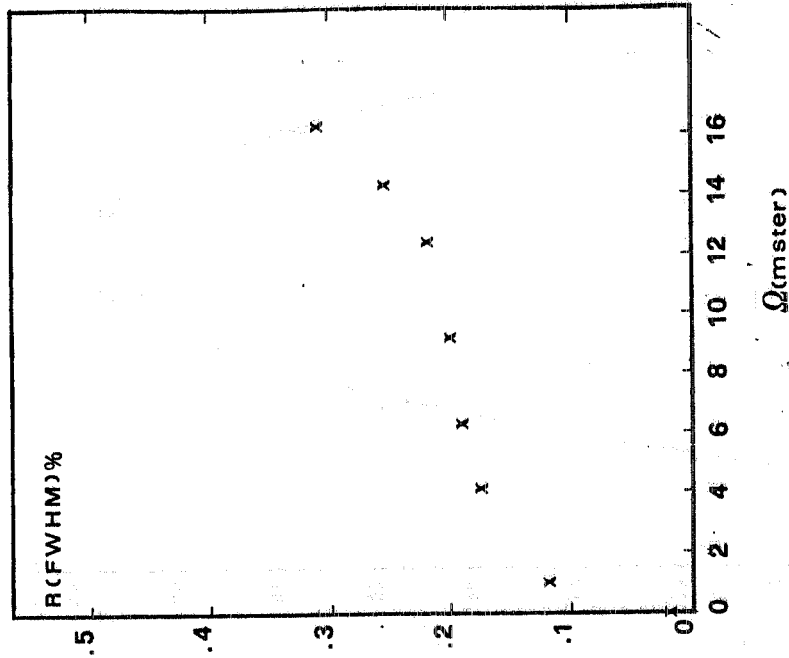


FIG. 8 - Andamento della risoluzione R (FWHM) in funzione dell'angolo solido accettato Ω . Bersaglio puntiforme e impulso $p=450$ MeV/c.

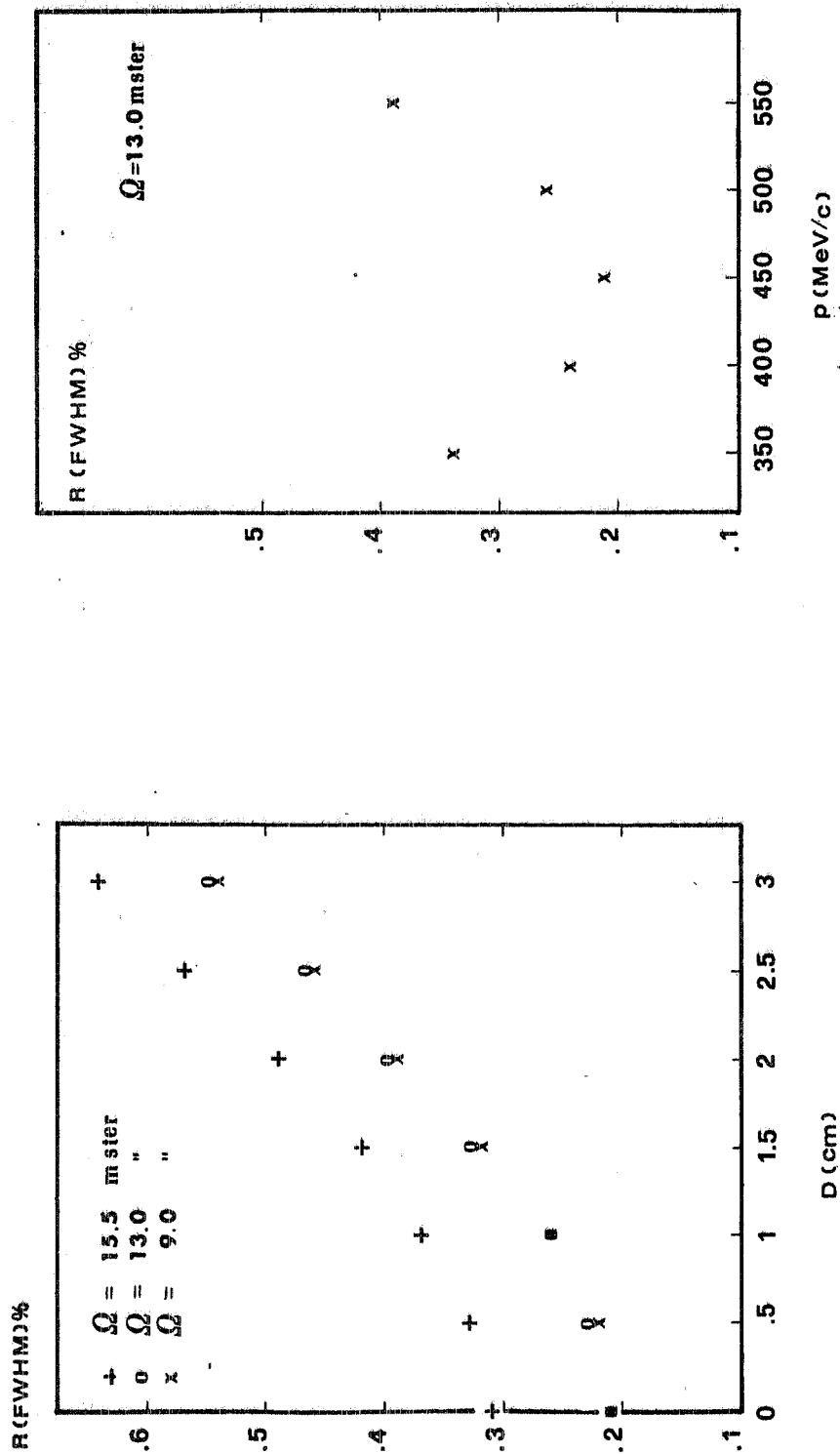


FIG. 9 - Andamento della risoluzione R(FWHM) in funzione del diametro D del bersaglio, per tre valori dell'angolo solido accettato Ω . L'impulso $p=450$ MeV/c.

FIG. 10 - Andamento della risoluzione R(FWHM) al variare dell'impulso P per bersaglio puntiforme e angolo solido di accettazione $\Omega=13.0$ mster.