

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-78/31(R)
7 Luglio 1978

V. Lucherini, E. De Sanctis e P. Di Giacomo: CALCOLO DELLE
CARATTERISTICHE DEL FASCIO DI FOTONI DEL LEALE.

V. Lucherini, E. De Sanctis e P. Di Giacomo: CALCOLO DELLE CARATTERISTICHE DEL FASCIO DI FOTONI DEL LEALE.

INTRODUZIONE

Come è noto presso il Laboratorio LEALE è stato realizzato un fascio monocromatico di fotoni, di energia variabile tra 80 MeV e 300 MeV, prodotti per annichilazione in volo di positroni su un bersaglio di idrogeno liquido.

Una descrizione del sistema di trasporto dei positroni, di alcune caratteristiche previste per il fascio monocromatico di fotoni, e delle misure preliminari sullo spettro d'energia di questi ultimi, è riportata in dettaglio altrove (1, 2, 3).

In questa nota descriveremo in modo più completo le caratteristiche previste per tale fascio, calcolate, per mezzo di apposito programma, in varie condizioni (energia dei positroni, collimazione dei fotoni, spessore del bersaglio di annichilazione), tenendo conto dei vari effetti che contribuiscono a far deviare lo spettro dei fotoni dalla sua forma ideale (perdite di energia e scattering multiplo dei positroni nel bersaglio di annichilazione, distribuzione energetica e divergenza angolare del fascio di positroni).

Per il calcolo si è utilizzato migliorandolo in alcuni punti un programma messo a punto da Mancini et al. (4).

Nel I Capitolo riportiamo le sezioni d'urto dei processi coinvolti nel passaggio di positroni energetici nella materia, discutendo brevemente le caratteristiche di ciascuno di essi. Le distribuzioni delle perdite di energia e degli angoli di scattering multiplo dei positroni nel bersaglio di annichilazione sono trattate, rispettivamente, nel II e III Capitolo. Nel IV Capitolo sono date le espressioni finali che il programma usa per calcolare lo spettro dei fotoni, includenti l'effetto di tutti i processi sopra citati. I risultati dei calcoli sono infine presentati nel V Capitolo.

Gran parte del materiale di questa nota è basato sul lavoro di Tesi di Laurea svolto da uno di noi (5).

1. - SEZIONI D'URTO DEI PROCESSI DI ANNICHILAZIONE E DI BREMSSTRAHLUNG.

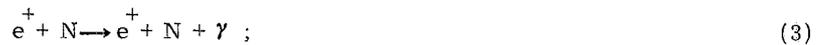
I processi di cui occorre tener conto sono:

a) per l'annichilazione.



la reazione (1) è quella che permette di ottenere fotoni con energia ben definita ^(x), a causa della relazione univoca tra angolo ed energia del fotone.

b) per la bremsstrahlung:



le reazioni (2) e (3) producono un indesiderato fondo di fotoni con energia continua, da 0 fino all'energia cinetica del positrone: $T_+ = E_+ - mc^2$, per qualunque angolo di emissione del fotone.

Discuteremo ora della sezione d'urto dei singoli processi indicati.

1.1 - Annichilazione $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$.

La sezione d'urto differenziale nell'energia del fotone per il processo (1), valida per annichilazione di positroni ultrarelativistici ($\beta_+ \simeq 1$) su elettroni in quiete, si può scrivere ⁽⁷⁾:

$$\frac{d\sigma}{dK} = 2\pi r_0^2 \frac{1}{K_0^2} \left[\frac{K_0}{1 + 2(K_0 - K)} - \frac{1 + 4(K_0 - K)}{1 + 2(K_0 - K)^2} \right], \quad (4)$$

dove:

$$K = \frac{E_\gamma}{mc^2} : \text{energia del fotone in unità } mc^2 ;$$

$$r_0 : \text{raggio classico dell'elettrone;}$$

$$K_0 = \left[1 - \left(\frac{\gamma_+ - 1}{\gamma_+ + 1} \right)^{1/2} \right]^{-1} : \text{massima energia del fotone (in unità } mc^2), \text{ prodotta da un positrone di energia totale } \gamma_+ = E_+ / mc^2. \quad (7)$$

Dato che la (1) è una reazione con due corpi nello stato finale, esiste nel riferimento del laboratorio una relazione univoca tra l'energia E_γ del fotone ed il suo angolo d'emissione ϑ_γ (rispetto alla direzione iniziale del positrone).

$$E_\gamma = \frac{mc^2}{1 - \beta_+ \cos \vartheta_\gamma} \quad (5)$$

(x) La reazione di annichilazione in tre fotoni: $e^+ + e^- \rightarrow 3\gamma$ è sfavorita rispetto alla (1) di un fattore $\alpha \simeq 1/137$; mentre la reazione di annichilazione in un fotone $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ risulta trascurabile rispetto alla (1) per bersagli con basso numero atomico Z, ed energie del positrone ultrarelativistiche ⁽⁶⁾.

(+) D'ora in poi i simboli usati verranno definiti solo la prima volta che compariranno, conservando lo stesso significato sino alla fine.

con $\beta = (\gamma_+ - 1)/(\gamma_+ + 1)$ velocità del c. m. del sistema e^+e^- rispetto al laboratorio.

E' perciò possibile, scegliendo l'angolo di raccolta dei fotoni, selezionare l'energia voluta.

L'andamento della (5) è riportato in fig. 1 per alcune energie del positrone incidente.

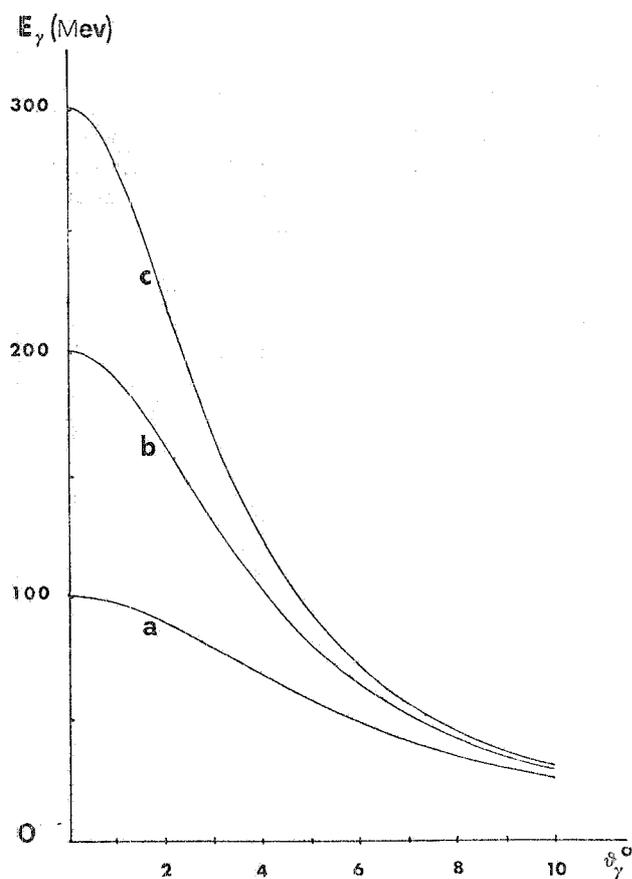


FIG. 1 - Andamento dell'energia del fotone di annichilazione E_γ in funzione del suo angolo d'emissione ϑ_γ rispetto alla direzione del positrone incidente, per tre energie del positrone:

- a) $E_+ = 100$ MeV;
- b) $E_+ = 200$ MeV;
- c) $E_+ = 300$ MeV.

La sezione d'urto di annichilazione, per angoli $\vartheta_\gamma \ll 1$ rad, si può scrivere:

$$\frac{d\sigma_A}{d\Omega} = \frac{r_0^2 mc^2}{2} \frac{C}{\vartheta_\gamma^4 + A\vartheta_\gamma^2 + B}, \quad (6)$$

dove:

$$d\Omega = 2\pi |d \cos \vartheta_\gamma|;$$

$$A = 2 \frac{(1 - \beta_+)}{\beta_+} \frac{[(1 + 3\beta_+)mc^2 + (1 + \beta_+)E_+]}{[(1 + 2\beta_+)mc^2 + (1 + \beta_+)E_+]};$$

$$B = \frac{4mc^2(1 - \beta_+^2)}{\beta_+ [(1 + 2\beta_+)mc^2 + (1 + \beta_+)E_+]};$$

$$C = \frac{B}{mc^2}$$

L'andamento della $\frac{d\sigma_A}{d\Omega}$ è riportato in fig. 2, per alcune condizioni d'interesse.

Come si vede la regione angolare più interessante è quella in avanti, poichè ivi la sezione d'urto ha un massimo che risulta tanto più pronunciato quanto maggiore è l'energia del positrone. Questo andamento fa sì che il numero di fotoni raccolti entro un dato angolo solido risulti massimo proprio in avanti. Infatti l'integrale sull'angolo solido della $d\sigma_A/d\Omega$ per ϑ_γ compreso tra 0 ed un certo angolo massimo d'emissione del fotone $\vartheta_c \ll 1$ rad, vale (5):

$$\sigma_A(0 \div \vartheta_c) = \frac{\pi r_0^2 mc^2}{2} \frac{C}{(A^2 - 4B)^{1/2}} \left[\ln \left(\frac{2\vartheta_c^2 + B - (A^2 - 4B)^{1/2}}{2\vartheta_c^2 + B + (A^2 - 4B)^{1/2}} \right) - \ln \left(\frac{B - (A^2 - 4B)^{1/2}}{B + (A^2 - 4B)^{1/2}} \right) \right] \quad (7)$$

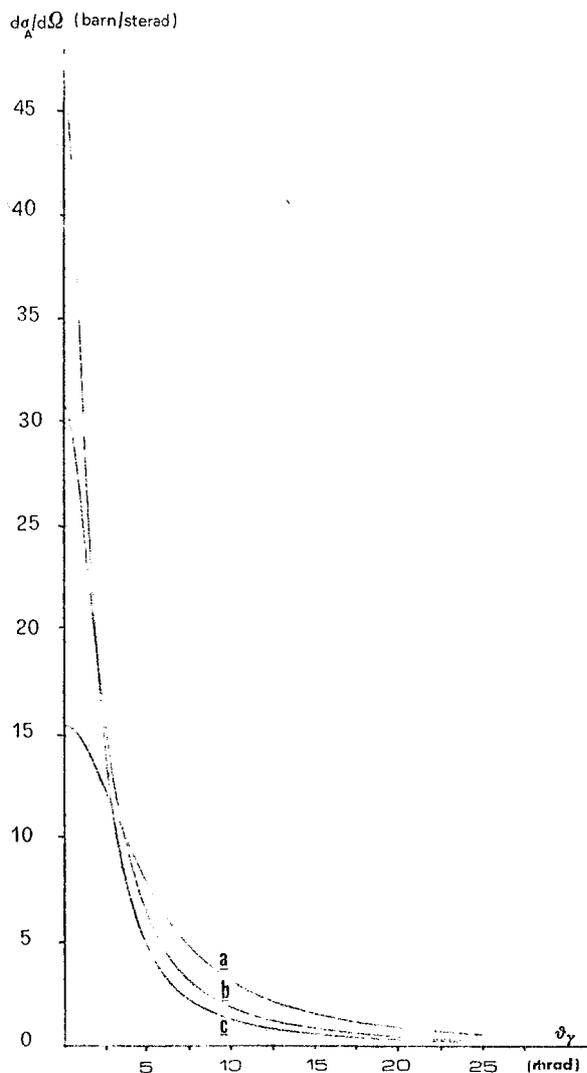


FIG. 2 - Sezione d'urto di annichilazione in volo di positroni differenziale nell'angolo solido d'emissione del fotone, per $\vartheta_\gamma \ll 1$ rad ed alcune energie del positrone incidente:

- a) $E_+ = 100$ MeV; b) $E_+ = 200$ MeV;
- c) $E_+ = 300$ MeV.

L'andamento della grandezza 6_A è riportato in fig. 3 in funzione dell'energia E_+ del positrone, per alcuni valori dell'angolo massimo ϑ_c .

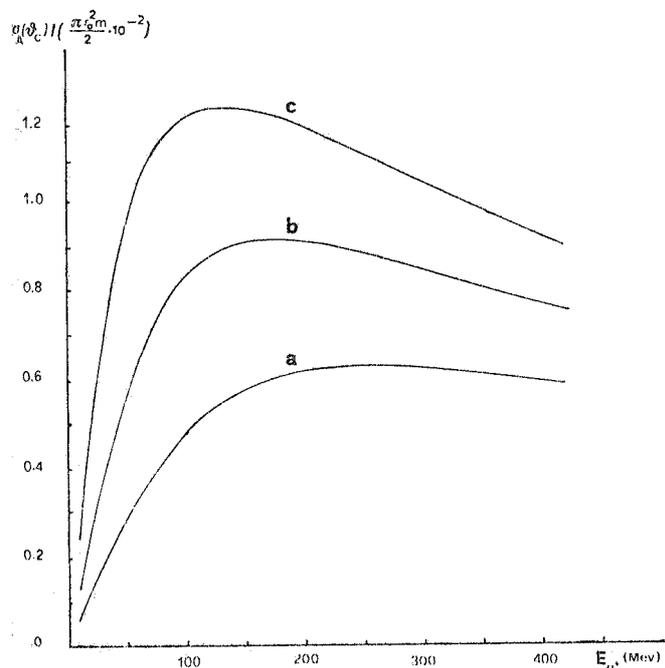


FIG. 3 - Andamento della sezione d'urto di annichilazione integrata sull'angolo solido in avanti, in funzione dell'energia E_{e^+} del positrone incidente, per alcuni valori dell'angolo massimo di raccolta ϑ_c :
 a) $\vartheta_c = 4$ mrad;
 b) $\vartheta_c = 5.82$ mrad;
 c) $\vartheta_c = 8.0$ mrad.

Come può vedersi dalla fig. 3, per le collimazioni di ~ 0.5 mrad, la 6_A (e quindi il numero di fotoni di annichilazione) è massima proprio nell'intervallo di energia dei positroni studiato.

1.2 - Bremsstrahlung

a) Processo $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- + \gamma$.

La sezione d'urto nel laboratorio del processo (2), differenziale nell'energia e nell'angolo solido del fotone emesso, è data (8) (per positroni relativistici):

$$\frac{d^2 6_e}{dKd\Omega} = F \frac{2ar_o^2}{\pi} \frac{\gamma_+^2}{K} \left(\frac{1}{\gamma_+^4 \vartheta_\gamma^4} + \frac{1}{4\gamma_+} \right) (2(2-2y+y^2) \ln(2\gamma_+(y^{-1}-1) - 3+3y-y^2)), \quad (8)$$

dove:

$$Y = \frac{K}{K_{\max}} ;$$

$$K_{\max} = \frac{\gamma_+}{1 + \gamma_+ \vartheta_\gamma^2 / 2} \approx \frac{\gamma_+}{1 + \frac{Z}{2}} : \text{massima energia del fotone (in unità } mc^2 \text{)}.$$

La F è una funzione a scalino, definita come:

$$F = S \left\{ 1 - 0.1 \sin \left[\text{Arcos} \left(\frac{1 - \frac{Z}{2}}{1 + \frac{Z}{2}} \right) \right] \right\};$$

con $S = 1 - y \exp \left[-3 (1 - y)^{1/3} \right]$, che rende nulla la sezione di urto per $y \approx 1$ ($K = K_{\max}$); la F migliora l'accordo con i valori tabulati della sezione d'urto del processo (2) calcolata da S. Swanson con rigorosi procedimenti numerici.

Per questo processo l'angolo più interessante di emissione del fotone nel laboratorio, ϑ_{γ}^1 , è quello corrispondente a $\vartheta_{\text{c.m.}} = 90^\circ$ nel centro di massa del sistema iniziale $e^+ e^-$, a causa della simmetria rispetto a 90° , nel c. m., del processo (2), dovuta a simmetria sotto coniugazione di carica.

Si ricava facilmente che:

$$\vartheta_{\gamma}^1 \approx \left(\frac{2}{\gamma_+} \right)^{1/2} \quad (9)$$

Per $\vartheta_{\gamma} > \vartheta_{\gamma}^1$ il processo (2) domina sul processo (3), mentre per $\vartheta_{\gamma} < \vartheta_{\gamma}^1$ i processi (2) e (3) sono identici entro qualche per cento.

In fig. 4 è mostrato l'andamento della (8) in funzione dell'energia E_{γ} del fotone emesso, per varie energie E_+ del positrone incidente ed alcuni valori dell'angolo ϑ_{γ} .

b) Processo $e^+ + N \rightarrow e^+ + N + \gamma$

In prima approssimazione di Born, la sezione d'urto per questo processo è uguale a quelle di bremsstrahlung di elettrone su nucleo (8). Per essa Schiff (9) dà una sezione d'urto nel laboratorio (per elettroni incidenti relativistici) differenziale nell'energia e nell'angolo solido del fotone emesso, che tiene conto dello schermo degli elettroni atomici per mezzo di un appropriato potenziale e del campo coulombiano del nucleo; la sua espressione è:

$$\frac{d^2 \sigma_N(Z)}{dK d\Omega} = Z^2 \frac{2\alpha r_0^2}{\pi} \frac{1}{K} \gamma_+^2 \left\{ \frac{16 \ell (1-\eta)}{(1+\ell)^4} - \frac{(2-\eta)^2}{(1+\ell)^2} + \right. \\ \left. + \left[\frac{2-2\eta+\eta^2}{(1+\ell)^2} - \frac{4 \ell (1-\eta)}{(1+\ell)^4} \right] \ln \left[\frac{2\gamma_+ (\eta^{-1} - 1)}{1+s^2} \right]^2 \right\} \quad (10)$$

dove Z = carica del nucleo;

$$\eta = \frac{K}{\gamma_+} \quad ; \quad 1 = \gamma_+^2 \vartheta_{\gamma}^2 ; \\ = \frac{2\gamma_+ (\eta^{-1} - 1) Z^{1/3}}{C (\ell + 1)} = \text{termine di schermo, } C = 111.$$

Questa formula è molto accurata per $\vartheta_{\gamma} \ll 1$ rad, e $K < K_{\max}$, dove ora $K_{\max} = \gamma_+ + 1$. Conviene notare che la conoscenza molto precisa della sezione d'urto di bremsstrahlung per K vicino a K_{\max} non è necessaria, in quanto in questa regione predomina il contributo dei fotoni di annichilazione.

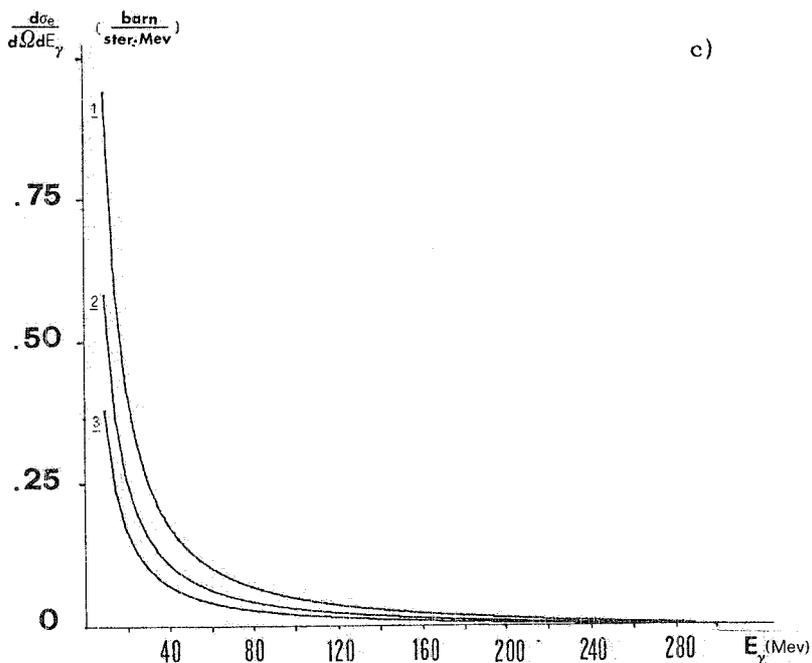
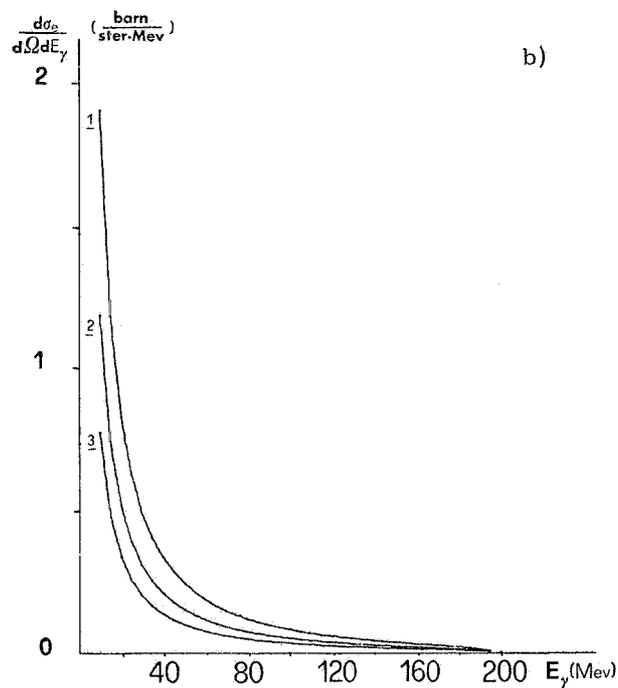
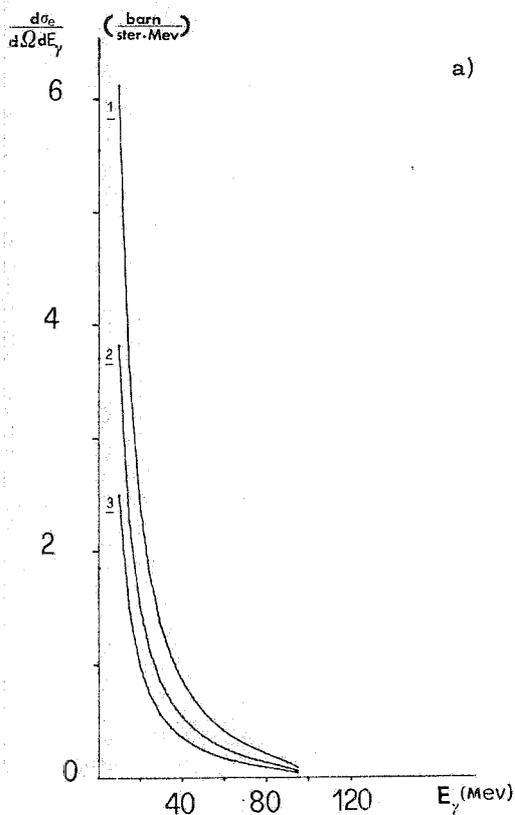


FIG. 4 - Sezione d'urto differenziale di bremsstrahlung di e^+ su elettrone $\frac{d\gamma^2 6_e}{dE_\gamma d\Omega}$ in funzione dell'energia E_γ del fotone emesso:

a) $E_e^+ = 100.51 \text{ MeV}$;

b) $E_e^+ = 200.51 \text{ MeV}$;

c) $E_e^+ = 300.51 \text{ MeV}$.

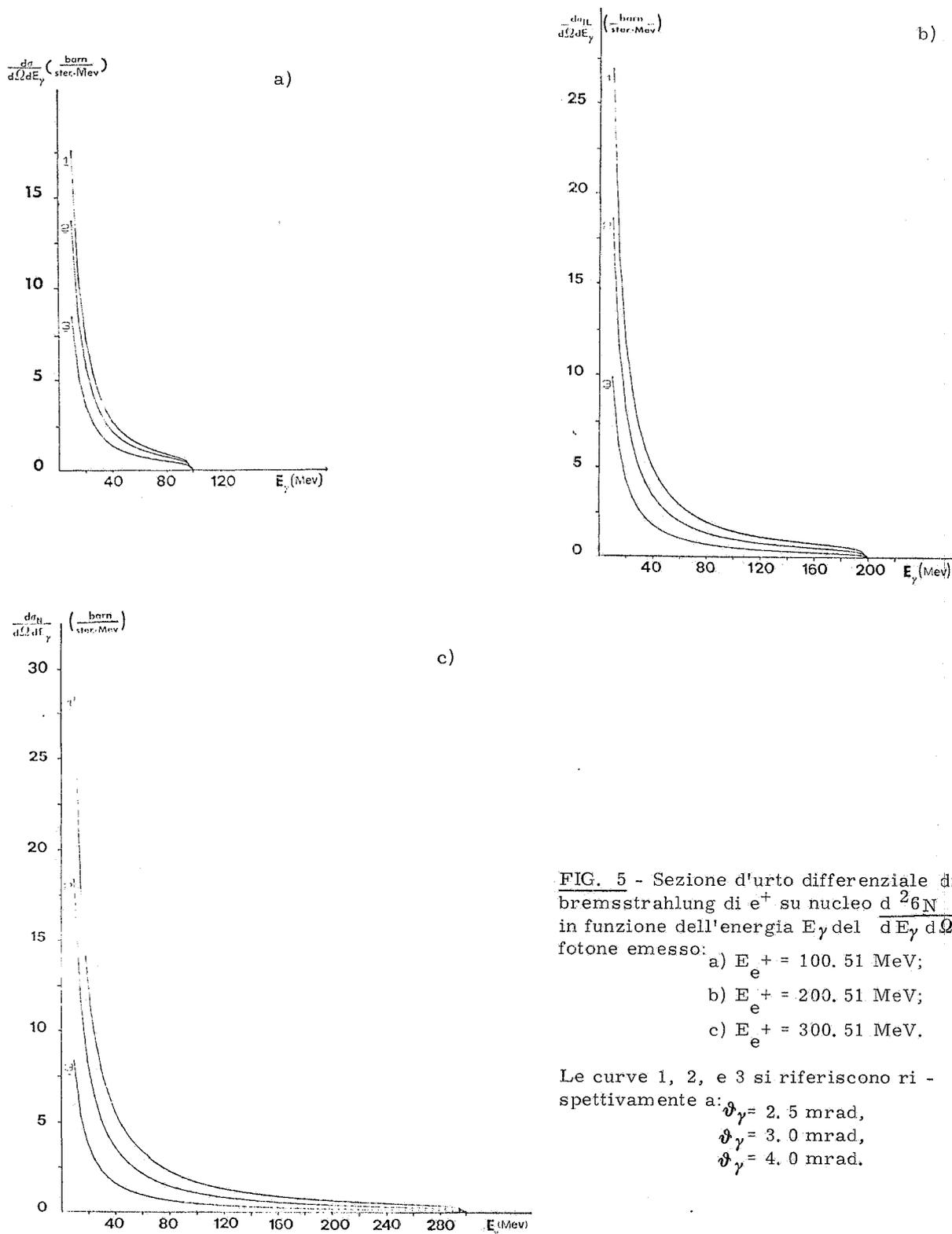
Le curve 1, 2 e 3 si riferiscono, rispettivamente, a:

$\vartheta_\gamma = 8.0 \text{ mrad}$,

$\vartheta_\gamma = 9.0 \text{ mrad}$,

$\vartheta_\gamma = 10.0 \text{ mrad}$.

Nella fig. 5 è mostrato l'andamento della (10) in varie condizioni d'interesse, per $Z = 1$ ed assenza di schermo.



2. - PERDITE D'ENERGIA E STRAGGLING DEI POSITRONI.

2.1. - Perdite per ionizzazione ed eccitazione.

Per tener conto della distribuzione delle perdite di energia di un positrone si è usata la teoria di Landau modificata per positroni ultrarelativistici considerando le correzioni dovute all'effetto densità (10, 11, 12).

Indichiamo con $F(t, E_+, \Delta) d\Delta$ la probabilità (normalizzata ad 1) che un positrone d'energia iniziale $E_+ = T_+ + mc^2$ abbia perso una energia compresa tra Δ e $\Delta + d\Delta$ dopo aver percorso uno spessore t di materia; l'espressione usata nei calcoli è:

$$F(t, E_+, \Delta) d\Delta = \exp \left[-\alpha^+ (\lambda + \ln \alpha^+) \right] \varphi(\lambda) d\lambda ,$$

dove:

$$\alpha^+ = \frac{n_e t X}{T_+} \beta_+^2 \left[2 - (\gamma_+ + 1)^{-2} \right] ; \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{\Delta}{\zeta T_+} - \left(\ln \frac{\zeta T_+ m c^2}{(h \nu_p)^2} + 1.114 \right) ;$$

con n_e = numero di elettroni per unità di volume;

$$X = \frac{2 \pi r_o^2 m c^2}{\beta_+^2} ; \quad \zeta = \frac{n_e X}{T_+} t ; \quad \nu_p = \left(\frac{n_e e^2}{\pi m} \right)^{1/2}, \text{ frequenza di plasma del mezzo.}$$

$\varphi(\lambda) d\lambda$ è la funzione universale di Landau.

Per essa Blunck e Leisegang danno la seguente espressione analitica (13):

$$\varphi(\lambda) d\lambda = \sum_{k=1}^4 \frac{c_k \gamma_k}{(\gamma_k + b)^{2, 1/2}} \exp \left[-\frac{(\lambda - \lambda_k)^2}{\gamma_k^{2, 2}} \right] d\lambda , \quad (12)$$

dove i coefficienti c_k , λ_k e γ_k valgono:

| K | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| c_k | 0.174 | 0.058 | 0.019 | 0.007 |
| λ_k | 0.0 | 3.0 | 6.5 | 11.0 |
| γ_k | 1.8 | 2.0 | 3.0 | 5.0 |

mentre b^2 può scriversi come (14):

$$b^2 = \frac{q \bar{A} Z^{4/3}}{(\xi T_+)^2}$$

con q costante pari a ~ 20 eV, e \bar{A} energia media persa nello spessore t .

2. 2. - Perdite d'energia per irraggiamento.

La distribuzione delle perdite d'energia per irraggiamento può scriversi (15):

$$G(x, E_+, E) = \frac{1}{E_+} \frac{[\ln(E_+ / E)]^{(\frac{4}{3}x - 1)}}{\Gamma(\frac{4}{3}x)} \quad (13)$$

$\Gamma(y)$ è la funzione gamma di Eulero.

La (13) rappresenta la distribuzione di energia finale E che ha un positrone d'energia iniziale E_+ dopo aver attraversato x lunghezze di radiazione.

Per le energie e gli spessori considerati ($x \approx 10^{-2}$ lunghezze di radiazione) le perdite d'energia per irraggiamento risultano trascurabili. In fig. 6 è mostrata, per esempio, la distribuzione dell'energia persa per irraggiamento ΔE , per $E_+ = 150$ MeV ed $x = 0.011$ l. r. Come si vede l'energia più probabilmente persa in questo processo è 0.

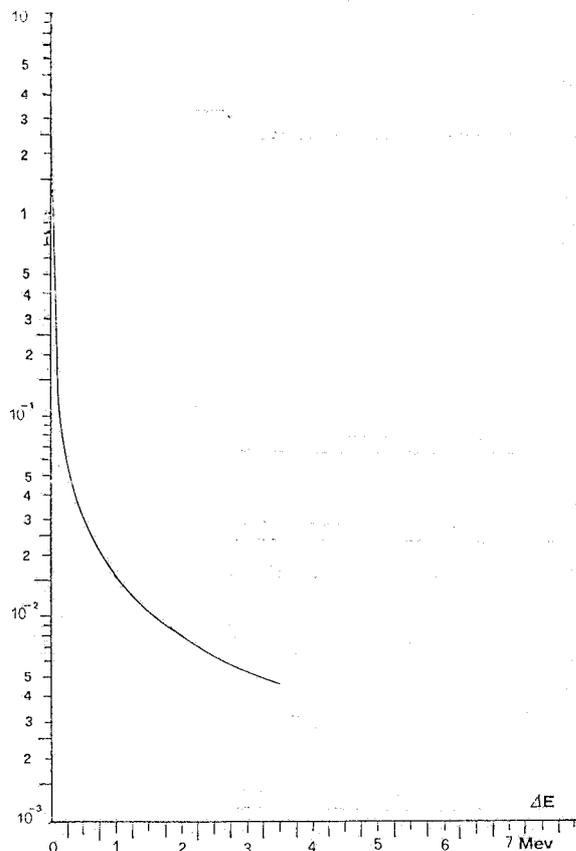


FIG. 6 - Distribuzione delle perdite d'energia per irraggiamento ΔE per $T_+ = 150$ MeV; $x = 0.011$ lunghezze di radiazione.

3. - SCATTERING MULTIPLO.

Per tener conto dello scattering multiplo dei positroni nel bersaglio di annichilazione per angoli di scattering $\vartheta \ll 1$ si è usata la teoria di Molière considerando le correzioni proposte da Nigam ed al. (16) e da Scott (17). Ossia per la funzione di distribuzione degli angoli si è usata la seguente gaussiana, che costituisce una buona approssimazione della distribuzione proposta da Molière:

$$P(\vartheta_s) d\vartheta_s = \frac{2\vartheta_s d\vartheta_s}{\langle \vartheta_s^2 \rangle} \exp \left[-\frac{\vartheta_s^2}{\langle \vartheta_s^2 \rangle} \right] \quad (14)$$

dove ϑ_s è l'angolo di scattering multiplo, e per $\langle \vartheta_s^2 \rangle$ si è usata la seguente espressione fornita da Scott e Nigam:

$$\langle \vartheta_s^2 \rangle = \chi_c^2 (-0.17 + 1.13 \ln \Omega_0)^2, \quad (15)$$

con

$$\chi_c^2 = \frac{4\pi e^4 t}{(\vec{p}_+ \vec{v}_+)^2} Z(Z+1); \quad \Omega_0 = \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2}; \quad \chi_a^2 = 1.07 \times 10^{-4} \frac{Z^{2/3}}{(\gamma_+ - 1)}$$

e dove si sono indicati con \vec{p}_+ e \vec{v}_+ l'impulso e la velocità del positrone; gli altri simboli sono stati definiti in precedenza.

Se definiamo come in fig. 7 i seguenti angoli:

ϑ_s = angolo di scattering multiplo del positrone;

ϑ_a = angolo di emissione del fotone rispetto alla direzione del positrone deflesso;

φ_a = angolo azimutale corrispondente a ϑ_a ;

ϑ_γ = angolo di emissione del fotone rispetto alla direzione iniziale del positrone;

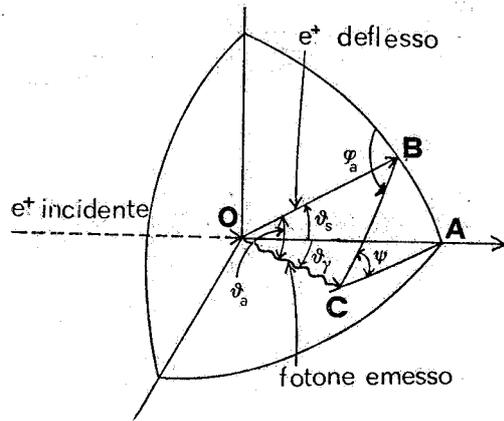


Fig. 7

si può mostrare (18) che, per ogni dato ϑ_a , la probabilità che il fotone sia emesso entro l'angolo di collimazione scelto ($\vartheta_{c_0} \leq \vartheta_\gamma \leq \vartheta_c$) può scriversi:

$$I = \int_{\vartheta_{c_0}}^{\vartheta_c} \frac{2\vartheta_\gamma d\vartheta_\gamma}{\langle \vartheta_s^2 \rangle} \exp\left(-\frac{\vartheta_a^2 + \vartheta_\gamma^2}{\langle \vartheta_s^2 \rangle}\right) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\psi \exp\left(\frac{2\vartheta_a \vartheta_\gamma \cos\psi}{\langle \vartheta_s^2 \rangle}\right) \quad (16)$$

dove

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\psi \exp\left(\frac{2\vartheta_a \vartheta_\gamma \cos\psi}{\langle \vartheta_s^2 \rangle}\right) = I_0\left(\frac{2\vartheta_a \vartheta_\gamma}{\langle \vartheta_s^2 \rangle}\right)$$

con $I_0(X)$ funzione di Bessel modificata d'ordine zero.

Nel caso del fotone di annichilazione ϑ_a è fissato univocamente dall'energia del positrone che si annichila e dall'energia del fotone emesso; mentre nel caso del fotone di bremsstrahlung è necessario integrare su tutti i valori che ϑ_a può assumere.

Per comodità in seguito scriveremo la (16) in questo modo più conciso:

$$I = I(E_{e^+}; \vartheta_{c_0}, \vartheta_c; \vartheta_a; t) \quad (17)$$

4. - FORMULE FINALI PER LO SPETTRO DEI FOTONI.

Piassumendo, le espressioni usate nel programma per calcolare lo spettro dei fotoni, includendo l'effetto delle perdite d'energia, dello straggling e dello scattering multiplo dei positroni nel bersaglio di annichilazione, sono:

$$\frac{dN_A}{dK} dK = N_0 q \frac{\sum_i Z_i}{\sum_i A_i} dK \int_0^T dt \int_0^{T_+} \left[\frac{d\sigma_A(E_+ - \Delta)}{dK} I(E_+; \vartheta_{c_0}; \vartheta_c; \vartheta_a; t) F(E_+, t, \Delta) \right] d\Delta; \quad (18)$$

$$\frac{dN_B}{dK} dK = N_0 q dK \int_0^T dt \int_0^\pi d\cos\vartheta_a \int_0^T I(E_+; \vartheta_{c_0}; \vartheta_c; \vartheta_a; t) F(E_+, t, \Delta) \times$$

$$\times \left[\frac{\sum_i Z_i^2}{\sum_i A_i} \frac{d\sigma_N(E_+ - \Delta)}{dK d\cos\vartheta_a} + \frac{\sum_i Z_i}{\sum_i A_i} \frac{d\sigma_e^2(E_+ - \Delta)}{dK d\cos\vartheta_a} \right] d\Delta; \quad (19)$$

T è lo spessore totale del bersaglio, e le espressioni $\sum_i Z_i / \sum_i A_i$, $\sum_i Z_i^2 / \sum_i A_i$ servono a generalizzare al caso di bersaglio composto di più elementi. N_0 = Numero di Avogadro; q = densità del bersaglio.

La (18) e la (19) rappresentano, rispettivamente, il numero dei fotoni di annichilazione e di bremsstrahlung, di energia compresa tra K e $K + dK$, prodotti da un positrone d'energia totale E_+ incidente su un bersaglio di spessore T , ed emessi nella regione compresa tra due coni di

semiapertura ϑ_c e ϑ_c .

Poichè i positroni incidenti sul bersaglio di annichilazione non sono monocromatici, si tiene conto della influenza della loro distribuzione energetica $g(E_+) dE_+$ sullo spettro dei fotoni, eseguendo la convoluzione su di questa della (18) e della (19).

Per tener conto inoltre della divergenza angolare intrinseca del fascio di positroni, si suppone che la distribuzione angolare di questi sia una gaussiana d'angolo quadratico medio $\langle \vartheta_p^2 \rangle$, e si somma quadraticamente questo alla espressione (15) dell'angolo quadratico medio di scattering multiplo nel bersaglio di annichilazione: il nuovo $\langle \vartheta_s^2 \rangle$ che si ottiene viene poi usato nella (16).

5. - RISULTATI DEI CALCOLI.

In questa sezione vengono presentate le caratteristiche più importanti del fascio di fotoni, per diverse condizioni di interesse.

I calcoli sono stati eseguiti per un bersaglio di H_2 liquido; la scelta di questo materiale è stata fatta per ottimizzare il rapporto $R = \frac{\text{Fotoni di Annichilazione}}{\text{Fotoni di Bremsstrahlung}}$, dato che le sezioni d'urto d'annichilazione e di bremsstrahlung dipendono, rispettivamente, lineamente e quadraticamente dal numero atomico Z del bersaglio.

Una volta fissato il materiale del bersaglio, lo spettro dei fotoni dipende ancora da:

- a) Energia E_+ e spettro dei positroni incidenti;
- b) Angolo medio di raccolta dei fotoni $\langle \vartheta_\gamma \rangle$;
- c) Ampiezza dell'intervallo angolare di collimazione centrato su $\langle \vartheta_\gamma \rangle$: $\langle \vartheta_\gamma \rangle \pm \Delta \vartheta$;
- d) Spessore del bersaglio di annichilazione T ;
- e) Divergenza angolare dei positroni incidenti ϵ .

Il punto b) è particolarmente interessante, poichè è possibile migliorare il rapporto R variando $\langle \vartheta_\gamma \rangle$, sfruttando la diversa dipendenza angolare delle sezioni d'urto di annichilazione e di bremsstrahlung (3, 19).

Per comodità in fig. 8 sono riportati in funzione della energia dei positroni i valori della corrente e della larghezza percentuale FWHM del fascio di positroni⁽³⁾.

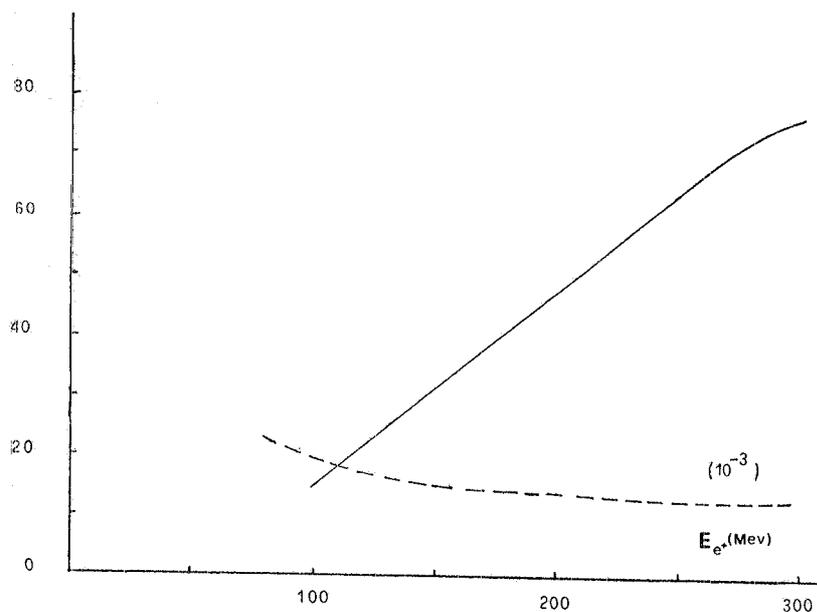


FIG. 8 - Corrente dei positroni in funzione dell'energia del positrone E_+ . (nA). ———. Risoluzione del fascio di positroni $\Delta E_+/E_+$. - - - - -.

Nelle figure seguenti sono presentati gli andamenti delle caratteristiche del fascio dei fotoni in funzione dei parametri indicati nei punti a), b), c), d) ed e) precedenti.

Nelle figure 9 e 10 è mostrato l'andamento, con energia E_+ dei positroni, del numero di fotoni di annichilazione per positrone incidente, della risoluzione FWHM del picco di annichilazione, e del numero di fotoni di annichilazione al secondo, nelle seguenti condizioni: divergenza angolare dei positroni nulla, bersaglio di H_2 di spessore $T = 0.7 \text{ g/cm}^2$; angolo di raccolta e collimazione dei fotoni: $0. \pm 4. \text{ mrad}$. La fig. 9 si riferisce a positroni monocromatici, mentre la fig. 10 è relativa a positroni con distribuzione gaussiana di energia, di valor medio E_+ e risoluzione indicata in fig. 8.

La curva del numero di fotoni di annichilazione al secondo si ottiene da quella del numero di fotoni di annichilazione prodotti per positrone incidente, utilizzando i valori della corrente di positroni desunti dalla fig. 8.

Le stesse quantità, nelle stesse condizioni di prima, sono mostrate nelle figure 11 e 12, per collimazione dei fotoni di $17.5 \pm 4. \text{ mrad}$: la figura 11 è per positroni monocromatici; la figura 12 per positroni con distribuzione gaussiana di energia.

L'andamento del numero di fotoni di annichilazione per positrone incidente, e della risoluzione del picco di annichilazione, per una fissata apertura di collimazione, è graficato in fig. 13 al variare dell'angolo medio di raccolta dei fotoni $\langle \vartheta_\gamma \rangle$, avendo scelto $T_{H_2} = 0.7 \text{ g/cm}^2$, e due diverse energie dei positroni.

Nella figura 14 si può vedere l'influenza sulle caratteristiche del fascio di fotoni di diverse aperture angolari di collimazione $\Delta \vartheta$ per un angolo medio di raccolta dei fotoni di $0. \text{ mrad}$, nel caso di 0.7 g/cm^2 di H_2 liquido, positroni con $E_+ = 200.51 \text{ MeV}$, monocromatici, ed a divergenza angolare nulla.

La dipendenza dallo spessore del bersaglio di annichilazione di H_2 liquido è mostrata in fig. 15, nel caso di positroni monocromatici di $E_+ = 200.51 \text{ MeV}$, con divergenza angolare nulla, per due diversi angoli di raccolta dei fotoni:

a) $0. \pm 4. \text{ mrad}$

b) $17. \pm 4. \text{ mrad}$

In fig. 16 è mostrato l'andamento del rapporto $R = \frac{N_A}{N_B}$ del numero di fotoni di annichilazione al numero di fotoni di bremsstrahlung (con energia B da 5 MeV in su); al variare dell'angolo medio di raccolta dei fotoni, per una fissata collimazione e due diverse energie dei positroni.

L'influenza di una divergenza angolare intrinseca ϵ del fascio di positroni sulle caratteristiche dei fotoni raccolti, può vedersi nelle figure 17 e 18, che mostrano, rispettivamente per le energie dei positroni di 150.51 MeV e 200.51 MeV , il numero di fotoni di annichilazione per e^+ incidente, il valore del rapporto $R = \frac{N_A}{N_B}$ e l'energia totale trasportata dal fascio di fotoni per positrone incidente (x) , nel caso di H_2 liquido di spessore 0.7 g/cm^2 , a diversi angoli di raccolta di fotoni.

Le curve mostrate in fig. 17 e 18 includono anche l'effetto dello scattering multiplo e delle perdite d'energia dei positroni nei mezzi posti prima del bersaglio di H_2 liquido, e cioè:

Al ($1.619 \times 10^{-2} \text{ g/cm}^2$), Aria ($1.650 \times 10^{-2} \text{ g/cm}^2$) e Mylar ($7.506 \times 10^{-2} \text{ g/cm}^2$).

(x) L'energia totale trasportata dal fascio di fotoni (da 5 MeV in su) è stata normalizzata in modo da renderla direttamente confrontabile col valore misurato del rapporto QT/TF (19).

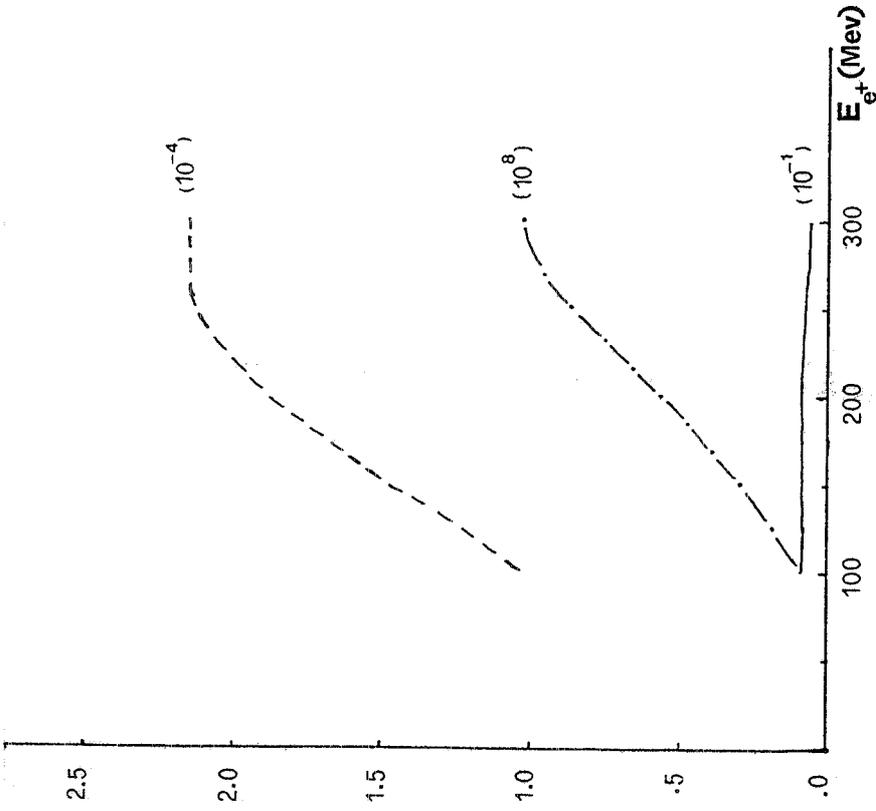


FIG. 9

Fotoni di annichilazione per e^+ incidente ----;
 Fotoni di annichilazione al secondo - · - · - ·;
 Risoluzione del picco di annichilazione ———;
 in funzione dell'energia E_{e^+} dei positroni.

Spessore H_2 : 0.7 g/cm²;
 Collimazione fotoni: 0. ± 4. mrad;
 Positroni monocromatici, con divergenza $\epsilon = 0$ mrad.

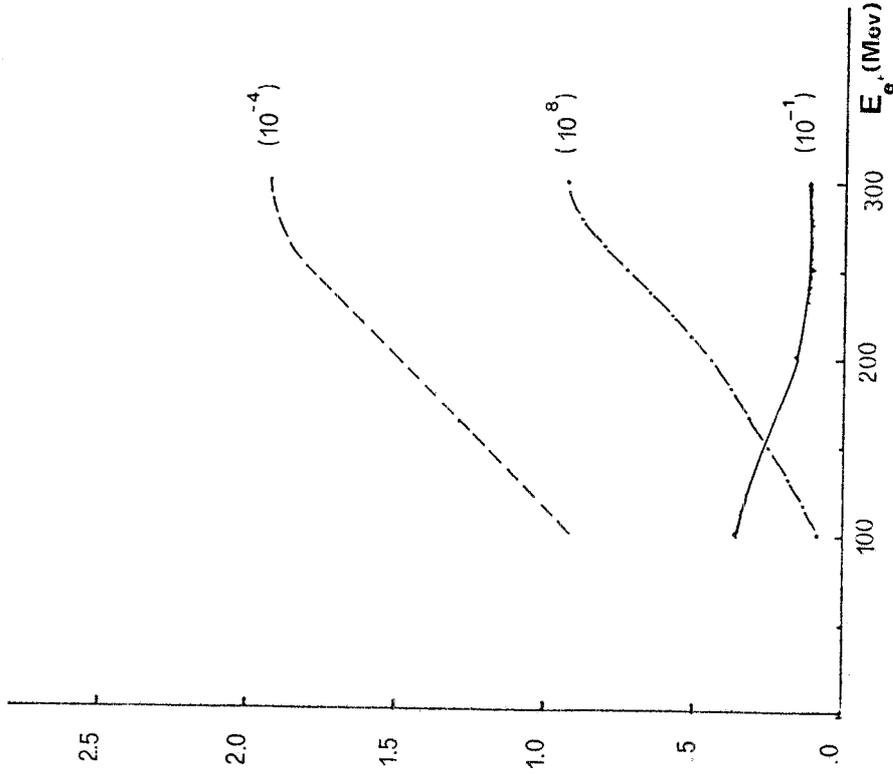


FIG. 10

Fotoni di annichilazione per e^+ incidente ----;
 Fotoni di annichilazione al secondo - · - · - ·;
 Risoluzione del picco di annichilazione ———;
 in funzione dell'energia E_{e^+} dei positroni.

Spessore H_2 : 0.7 g/cm²;
 Collimazione fotoni: 0. ± 4. mrad;
 Positroni non monocromatici con divergenza $\epsilon = 0$ mrad.

FIG. 11

Fotoni di annichilazione per e^+ incidente -----;
 Fotoni di annichilazione al secondo - - - - -;
 Risoluzione del picco di annichilazione ————;
 in funzione dell'energia E_{e^+} dei positroni.

Spessore H_2 : 0.7 g/cm^2 ;
 Collimazione fotoni: $17.5 \pm 4 \text{ mrad}$;
 Positroni monocromatici, con divergenza $\epsilon = 0 \text{ mrad}$.

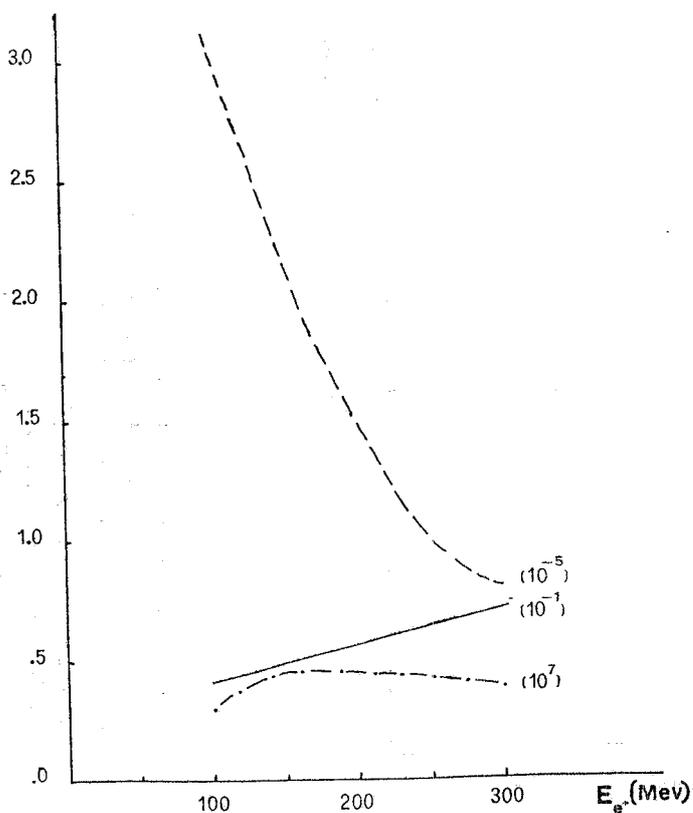
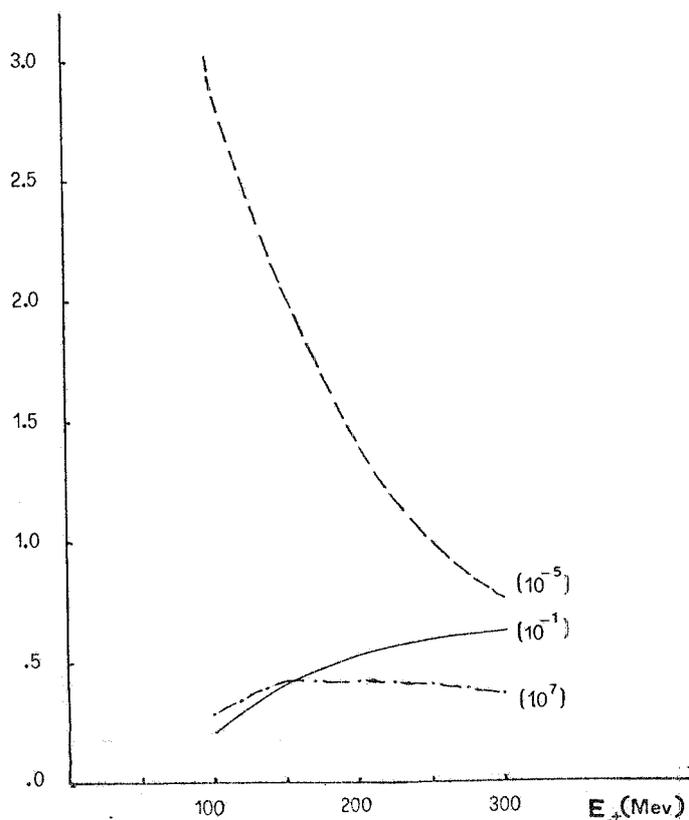


FIG. 12

Fotoni di annichilazione per e^+ incidente -----;
 Fotoni di annichilazione al secondo - - - - -;
 Risoluzione del picco di annichilazione ————;
 in funzione dell'energia E_{e^+} dei positroni.

Spessore H_2 : 0.7 g/cm^2 ;
 Collimazione fotoni: $17.5 \pm 4 \text{ mrad}$;
 Positroni non monocromatici, con divergenza $\epsilon = 0 \text{ mrad}$.

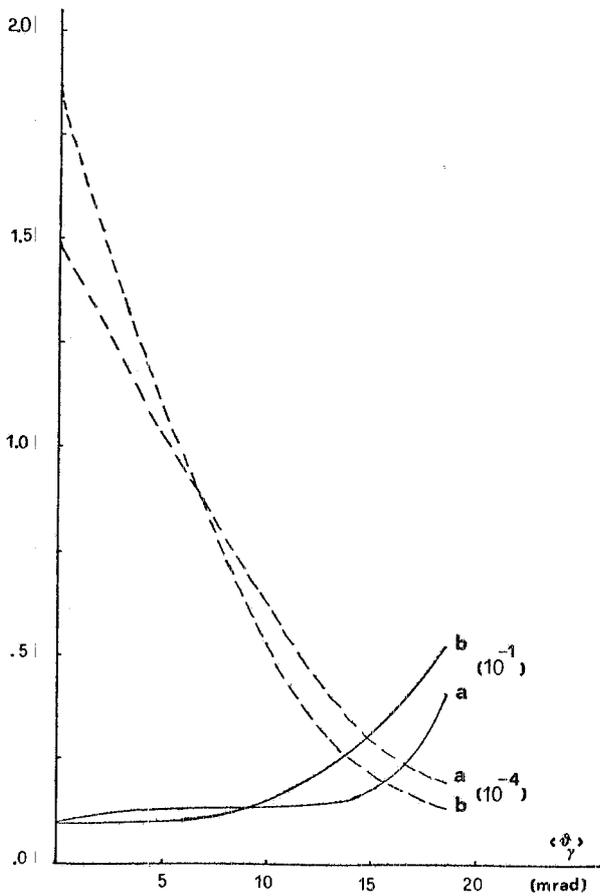


FIG. 13

Fotoni di annichilazione per e^+ incidente -----;
 Risoluzione del picco di annichilazione ———;
 in funzione dell'angolo medio di raccolta dei fotoni.

Spessore H_2 : 0.7 g/cm^2 ;
 Apertura di collimazione dei fotoni: ± 4 mrad;
 Positroni monocromatici, con divergenza $\varepsilon = 0$ mrad.

- a) $E_+ = 150.51$ MeV;
- b) $E_+ = 200.51$ MeV.

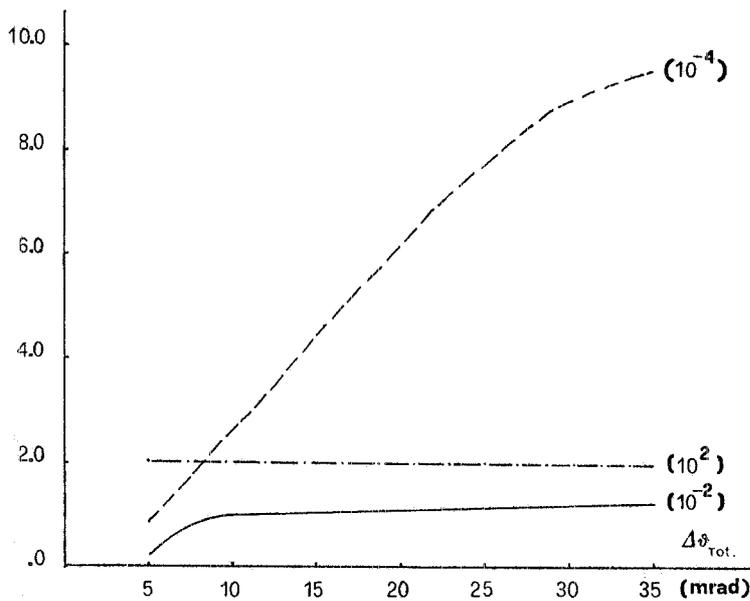


FIG. 14

Fotoni di annichilazione per e^+ incidente -----;
 Energia del massimo del picco di annichilazione (MeV) - · - · - ;
 Risoluzione del picco di annichilazione ———;
 in funzione dell'apertura totale di collimazione dei fotoni.

Spessore H_2 : 0.7 g/cm^2 ;
 Angolo medio di collimazione $\langle \phi_\gamma \rangle = 0$ mrad;
 Positroni con $E_{e^+} = 200.51$ MeV, monocromatici con divergenza $\varepsilon = 0$ mrad.

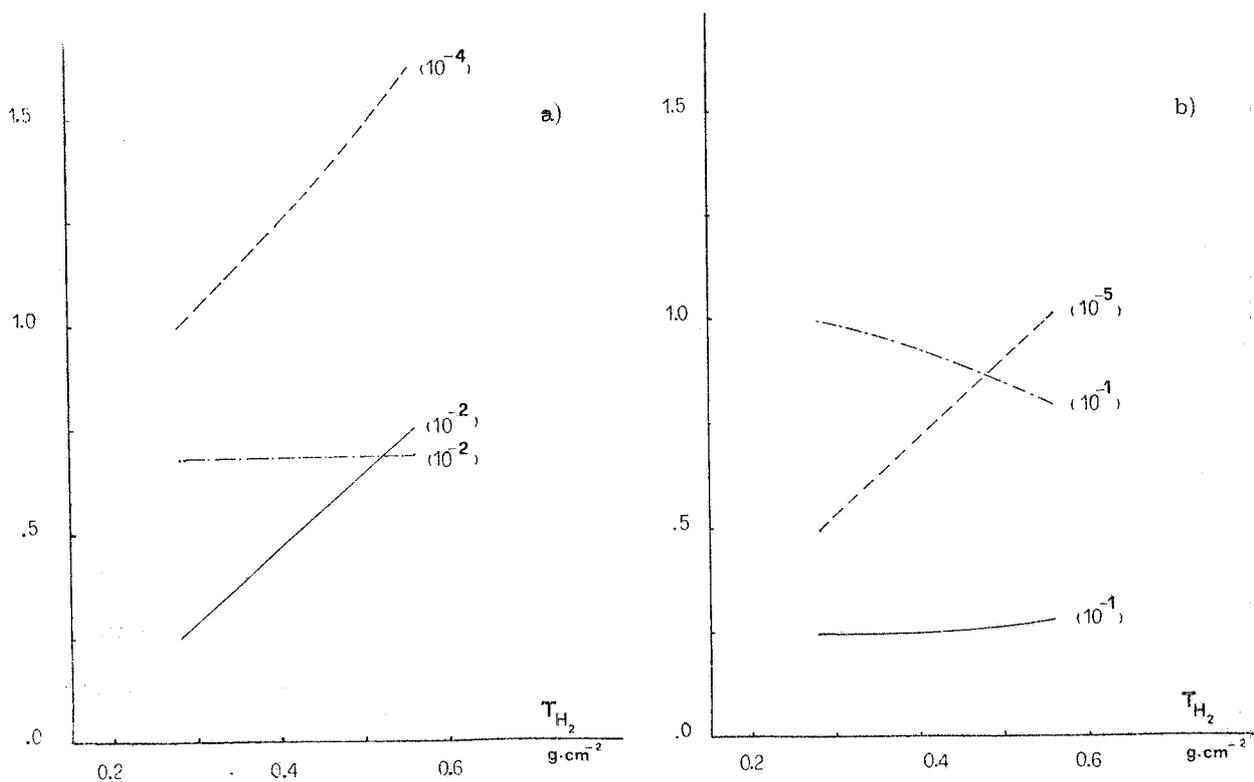


FIG. 15 - Fotoni di annichilazione per e^+ incidente ---- ;
 Rapporto $\frac{N_A}{N_B} = \frac{\text{numero di fotoni di annichilazione}}{\text{numero dei fotoni di bremsstrahlung (da 5 MeV in su)}}$ - · - · - ;
 Risoluzione del picco di annichilazione ——— ;
 in funzione dello spessore T del bersaglio di annichilazione, nel caso di positroni
 con $E_{e^+} = 200.51$ MeV, e divergenza $\varepsilon = 0$ mrad, per due collimazioni dei fotoni:
 a) $0. \pm 4.$ mrad; b) $17.5 \pm 4.$ mrad.

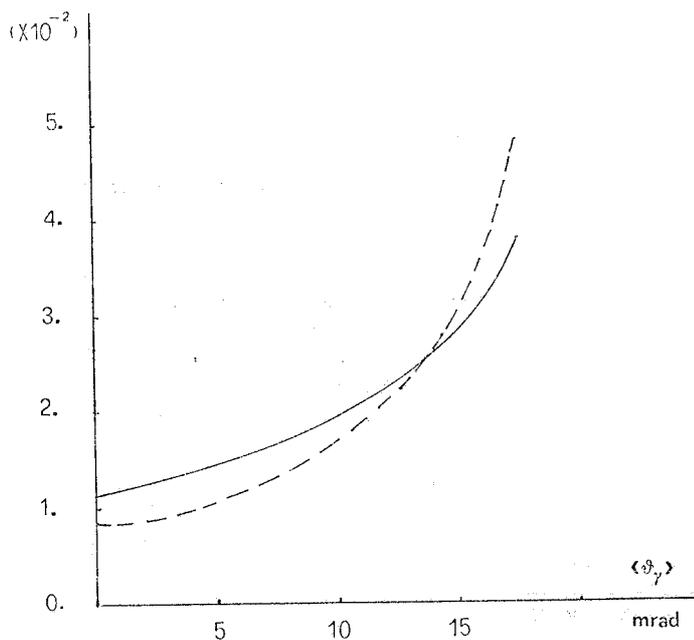


FIG. 16
 Andamento del rapporto N_A/N_B in funzione
 dell'angolo medio $\langle \phi_\gamma \rangle$ di raccolta dei fotoni.
 Spessore H_2 : 0.7 g/cm²; Apertura di collima-
 zione: $\pm 4.$ mrad; Positroni monocromatici,
 con divergenza $\varepsilon = 0$ mrad.
 $E_{e^+} = 150.51$ MeV ———; $E_{e^+} = 200.51$ MeV ----.

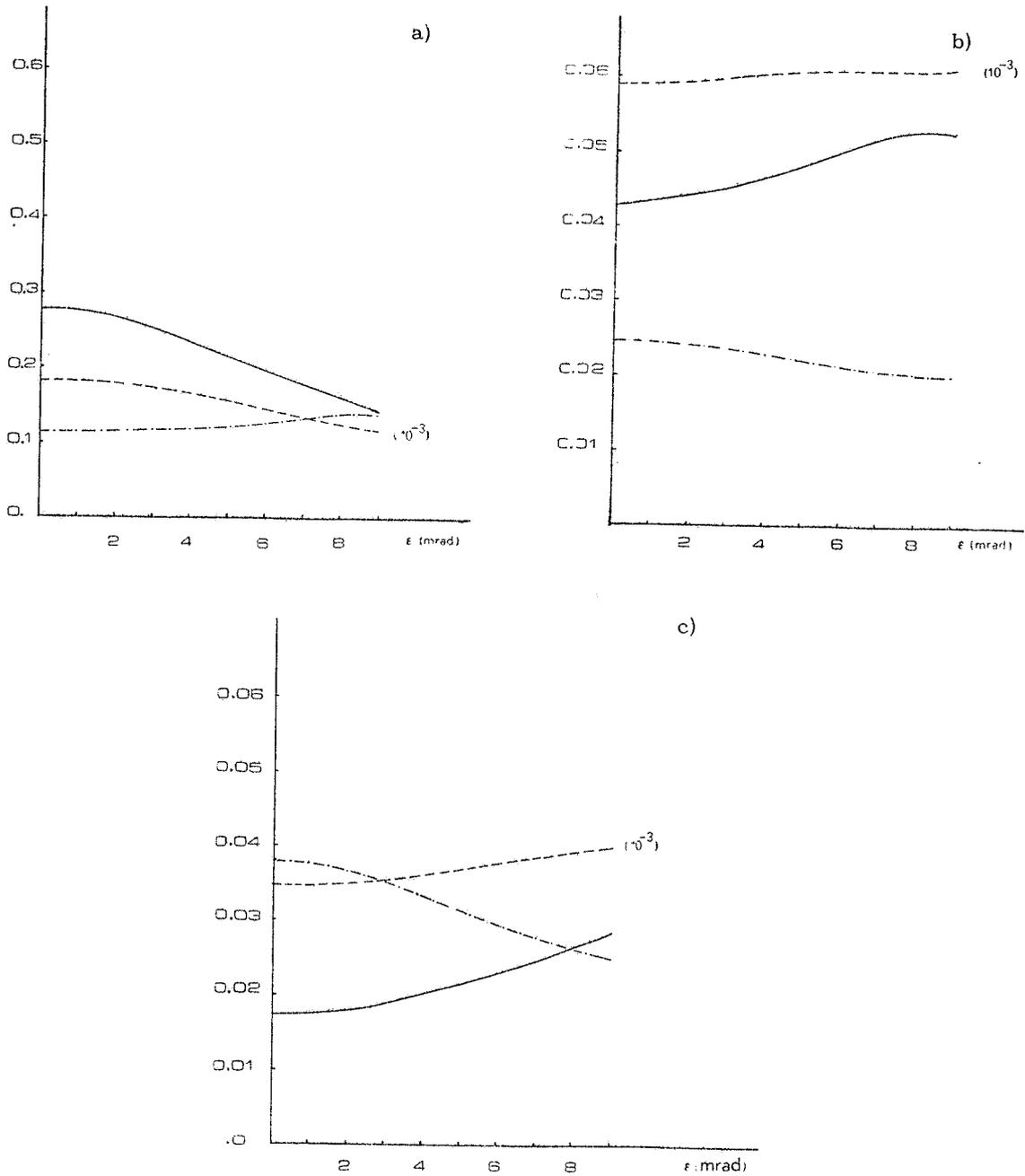


FIG. 17 - Fotoni di annichilazione per e^+ incidente ----- ;
 Rapporto $\frac{N_A}{N_B} = \frac{\text{numero dei fotoni di annichilazione}}{\text{numero dei fotoni di bremsstrahlung (da 5 MeV in su)}}$ - - - - - ;
 Energia totale del fascio di fotoni (normalizzata) ——— ;
 in funzione della divergenza ϵ del fascio di positroni.
 Spessore H_2 : 0.7 g/cm^2 ; Positroni monocromatici con $E_{e^+} = 150.51 \text{ MeV}$;
 Apertura collimazione: $\pm 5 \text{ mrad}$, per tre diversi valori dell'angolo medio
 di raccolta dei fotoni:
 a) $\langle \vartheta_\gamma \rangle = 0. \text{ mrad}$; b) $\langle \vartheta_\gamma \rangle = 13.5 \text{ mrad}$; c) $\langle \vartheta_\gamma \rangle = 17.5 \text{ mrad}$.

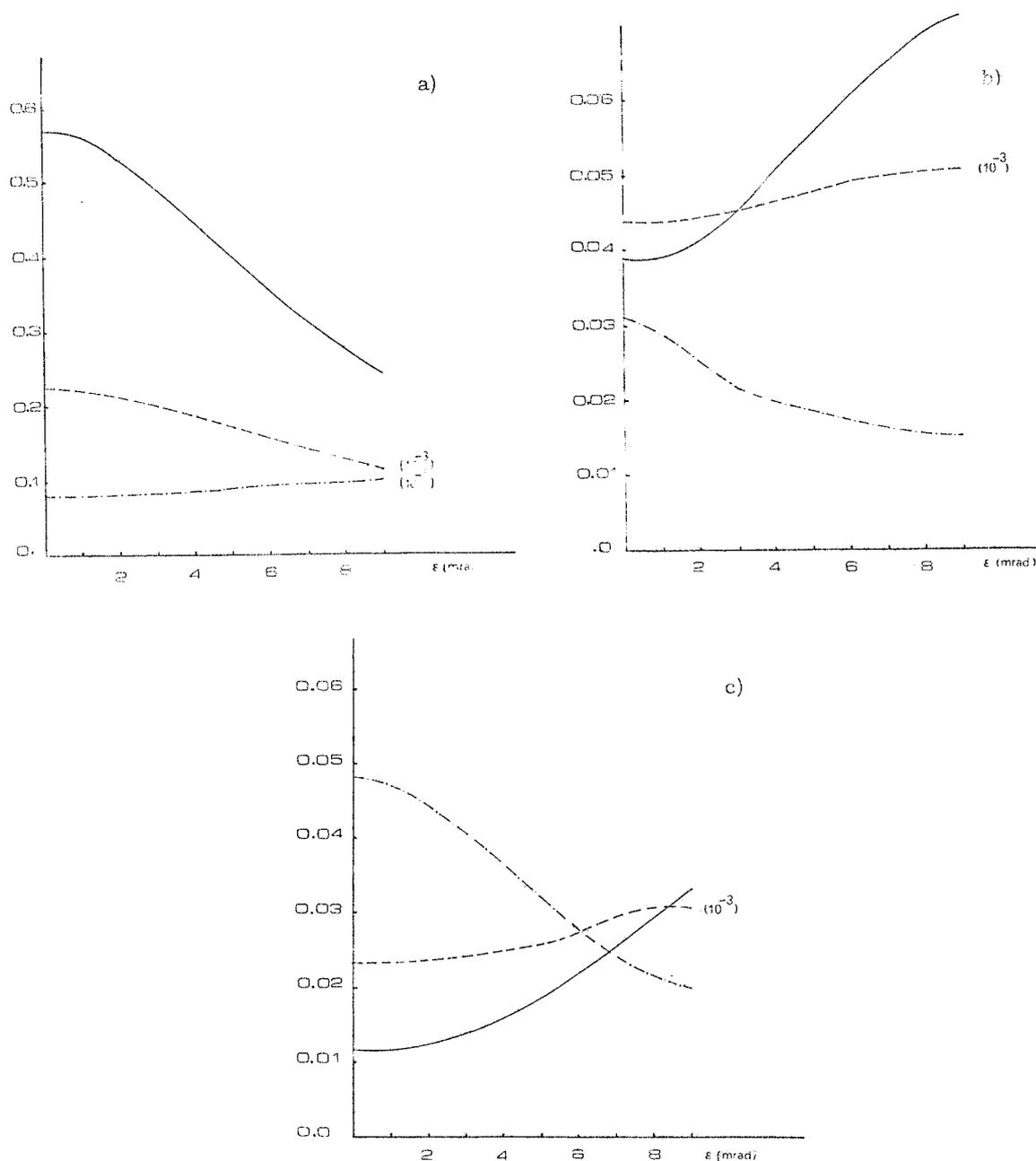


FIG. 18 - Fotoni di annichilazione per e^+ incidente ----- ;
 Rapporto $\frac{N_A}{N_B} = \frac{\text{numero dei fotoni di annichilazione}}{\text{numero dei fotoni di bremsstrahlung (da 5 MeV in su)}}$ ----- ;
 Energia totale del fascio di fotoni (normalizzata) ——— ;
 in funzione della divergenza ϵ del fascio di positroni.

Spessore H_2 : 0.7 g/cm^2 ; Positroni monocromatici con $E_{e^+} = 200.51 \text{ MeV}$;
 Apertura collimazione : $\pm 5 \text{ mrad}$, per tre diversi valori dell'angolo medio
 di raccolta dei fotoni :

a) $\langle \vartheta_\gamma \rangle = 0. \text{ mrad}$; b) $\langle \vartheta_\gamma \rangle = 13.5 \text{ mrad}$; c) $\langle \vartheta_\gamma \rangle = 17.5 \text{ mrad}$.

REFERENCES.

- (1) - G. P. Capitani, E. De Sanctis, S. Faini, R. Malvano, G. Ricco, M. Sanzone and R. Scrimaglio, Frascati Report LNF-72/99 (1972).
- (2) - G. P. Capitani, E. De Sanctis, S. Faini, C. Guaraldo, R. Scrimaglio, G. Ricco, M. Sanzone and A. Zucchiatti, Lett. Nuovo Cimento 16, 453 (1976).
- (3) - G. P. Capitani, E. De Sanctis, C. Guaraldo, G. Ricco, M. Sanzone, R. Scrimaglio and A. Zucchiatti, Frascati Report LNF-77/45 (1977).
- (4) - E. Mancini, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Genova (anno accademico 1966-67); R. Malvano, E. Mancini, G. Ricco, and M. Sanzone, Report INFN/BE-67/7 (1967).
- (5) - V. Lucherini, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Roma (anno accademico 1976/77).
- (6) - W. A. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, (Oxford University Press, 1954), p. 272.
- (7) - E. Mancini and M. Sanzone, Nucl. Instr. and Meth. 66, 87 (1968).
- (8) - A. Dufner, S. Swanson and Y. Tsai, SLAC Report N. 67 (1966).
- (9) - L. I. Schiff, Phys. Rev. 83 252 (1951).
- (10) - L. Landau, J. Phys. (URSS) 8 201 (1944).
- (11) - F. R. Rohrlich and B. C. Carlson, Phys. Rev. 93 38 (1964).
- (12) - R. M. Sternhaimer, Phys. Rev. 115 137 (1959); 103 511 (1956); 88 851 (1952).
- (13) - O. Blunck und S. Leisegang, Zeits. für Physik. 128 500 (1950).
- (14) - O. Blunck und K. Westphal, Zeits. für Physik 130 641 (1951).
- (15) - Y. S. Tsai and Van Whitis, Phys. Rev. 149 1248 (1966).
- (16) - B. P. Nigam, M. K. Sundaresam and Ta-You Wu, Phys. Rev. 115 491 (1959).
- (17) - W. T. Scott, Rev. Mod. Phys. 35 231 (1963).
- (18) - R. V. Elliott, Saskatchewan Accelerator Laboratory Report SAL-3 (1964).
- (19) - P. Di Giacomo e V. Lucherini, Frascati Report LNF-78/8 (1978).