

LNF-76/16(R)
8 Marzo 1976

G. Pasotti e M. Spadoni: PERDITE PER CORRENTI
PARASSITE IN CAMPI MAGNETICI PULSATI. -

G. Pasotti e M. Spadoni: PERDITE PER CORRENTI PARASSITE IN CAMPI MAGNETICI PULSATI.

In questa nota riportiamo il calcolo delle perdite per correnti parassite in conduttori sottoposti a campi magnetici linearmente variabili nel tempo, $B_{\text{ext}}(t) = \dot{B}t$.

I casi esaminati sono: lamina infinita di spessore finito e conduttore di sezione rettangolare e lunghezza infinita.

Il problema è nato dalla necessità di calcolare le perdite nei magneti superconduttori di un reattore a fusione del tipo Tokamak (F. I. N. T. O. R.). La variazione lineare del campo magnetico è stata presa in considerazione poichè è quella prevista nel ciclo di lavoro del reattore.

Una stima accurata delle perdite è necessaria poichè il calore prodotto deve essere asportato da conduttori che si trovano a $\sim 5^{\circ}\text{K}$; il problema è abbastanza complesso e impone soluzioni il cui costo è molto elevato ed è funzione della quantità di calore da asportare.

1. - Equazione di diffusione ed energia dissipata. -

Dalle equazioni di Maxwell si ricava l'equazione generale delle onde⁽¹⁾:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 . \quad (1)$$

In un conduttore il terzo termine della (1), che si riferisce alla corrente di spostamento, è ovviamente trascurabile e la (1) si trasforma nel-

2.

la equazione di diffusione :

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Grumet⁽²⁾ ha dimostrato che la (2) è valida per tempi maggiori di $T = L/C$, dove L è una dimensione tipica nella direzione di propagazione del flusso e C è la velocità della luce. Nel nostro caso $L \approx 1$ cm e quindi $T = 10^{-10}$ sec.

La densità media di energia dissipata nel conduttore è data da :

$$E = \int_0^{\infty} dt \int_V \frac{J^2 \rho}{V} dv, \quad (3)$$

dove ρ è la resistività del conduttore e l'integrazione è fatta sul volume V dello stesso; la densità di corrente \vec{J} è ricavabile dalla equazione di Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (4)$$

2. - Calcolo delle perdite in una lamina. -

La soluzione generale della equazione di diffusione (2) per una lamina di spessore l sottoposta ad un campo pulsato parallelo è⁽³⁾, per $0 < x < l$,

$$B_z(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-r_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left\{ \int_0^l f(x') \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) dx' + \frac{n\rho\pi}{\mu l} \int_0^t e^{r_n \lambda} \left[\phi_1(\lambda) - (-1)^n \phi_2(\lambda) \right] d\lambda \right\}, \quad (5)$$

dove :

$$r_n = \frac{\rho n^2 \pi^2}{\mu l^2}, \quad (6)$$

e $f(x')$ è la distribuzione di campo all'interno del conduttore per $t = 0$, mentre $\phi_1(\lambda)$ e $\phi_2(\lambda)$ rappresentano l'andamento temporale del campo esterno sulle due pareti della lamina.

Nel nostro caso $f(x') = 0$ e $\phi_1(\lambda) = \phi_2(\lambda) = \dot{B}\lambda$. La (5) si trasforma quindi in:

$$B_z(x, t) = \frac{2\rho\pi\dot{B}}{l^2\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{1-(-1)^n}{r_n^2} n(r_n t - 1 + e^{-r_n t}) \quad (7)$$

Tenendo conto che tutti i termini con n pari sono nulli si può sostituire ad n $2n+1$ estendendo la sommatoria da $n=0$ a $n=\infty$; inoltre è più conveniente avere l'origine del sistema di riferimento al centro della lamina ($-l < x < l$), vedi fig. 1. La (7) si trasforma quindi in:

$$B_z(x, t) = \frac{16\mu l^2}{\pi^3 \rho} \dot{B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos\left[(2n+1) \frac{\pi x}{2l}\right] \left[q_n t + e^{-q_n t} - 1\right], \quad (8)$$

dove:

$$q_n = \frac{\pi^2 \rho (2n+1)^2}{4l^2 \mu} \quad (9)$$

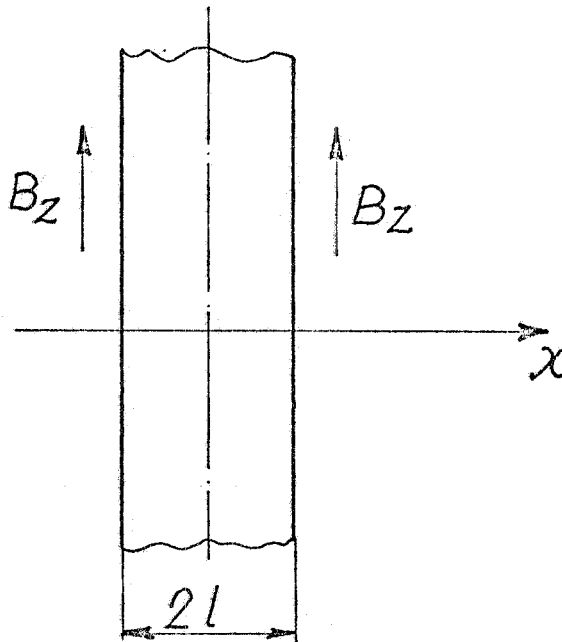


FIG. 1 - Lamina infinita di spessore $2l$ sottoposta a campo magnetico pulsato parallelo.

4.

La (8) può essere ulteriormente semplificata poiché:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi x}{2l} \right] = \frac{\pi}{4} , \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi x}{2l} \right] = - \frac{\pi^3}{32l^2} (x^2 - l^2) . \quad (11)$$

Si ha in definitiva⁽³⁾:

$$\begin{aligned} B_z(x, t) = & \dot{B}t + \dot{B} \frac{\mu}{2\rho} (x^2 - l^2) + \\ & + \dot{B} \frac{16\mu l^2}{\pi^3 \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} e^{-q_n t} \cos \left[(2n+1) \frac{\pi x}{2l} \right] . \end{aligned} \quad (12)$$

Dalla (4) si ha:

$$\begin{aligned} J_y(x, t) = & - \frac{\partial B_z(x, t)}{\partial x} \frac{1}{\mu} = \\ = & - \dot{B} \frac{x}{\rho} + \dot{B} \frac{8l}{\pi^2 \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-q_n t} \sin \left[(2n+1) \frac{\pi x}{2l} \right] . \end{aligned} \quad (13)$$

La (3) fornisce, se la salita lineare dura un tempo t^* ,

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2l} \int_0^{t^*} dt \int_{-l}^{+l} J_y^2 \rho \, dx = \\ = & \dot{B}^2 \frac{l^2}{\rho} \left\{ \frac{t^*}{3} + \frac{64\mu l^2}{\pi^6 \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} (1 - e^{-2q_n t^*}) - \right. \\ & \left. - \frac{256\mu l^2}{\pi^6 \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^6} \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \right] \left[1 - e^{-q_n t^*} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (14)$$

Poichè per ogni n si ha $(-1)^n \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = 1$ la (14) si riduce a:

$$E = \dot{B}^2 \frac{l^2}{\rho} \left[\frac{t^*}{3} + \frac{64\mu l^2}{\pi^6 \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} (4e^{-q_n t^*} - e^{-2q_n t^*} - 3) \right] \quad (15)$$

3. - Calcolo delle perdite in un conduttore di sezione rettangolare. -

Procedendo analogamente al caso di una lamina, si può dimostrare che, per un conduttore di sezione rettangolare (vedi fig. 2) sottoposto ad un campo pulsato $B_z = \dot{B}t$ parallelo si ha⁽³⁾:

$$B_z(x, y, t) = \dot{B}t - \dot{B} \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)(2n+1)q_{m,n}} \cdot \quad (16)$$

$$\cdot (1 - e^{-q_{m,n}t}) \cos\left[(2m+1)\frac{\pi x}{2a}\right] \cos\left[(2n+1)\frac{\pi y}{2b}\right],$$

dove:

$$q_{m,n} = \frac{\rho \pi^2}{4\mu} \left[\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2} \right] \quad (17)$$

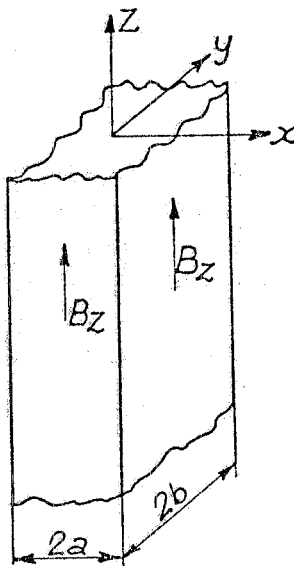


FIG. 2 - Conduttore di sezione rettangolare e di lunghezza infinita, sottoposto a campo pulsato parallelo.

6.

Dalla (4) si ha:

$$J_x(x, y, t) = B \frac{8}{\pi \mu b} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)q_{m,n}} (1 - e^{-q_{m,n}t}) \cdot \cos \left[(2m+1) \frac{\pi x}{2a} \right] \sin \left[(2n+1) \frac{\pi y}{2b} \right], \quad (18)$$

$$J_y(x, y, t) = B \frac{8}{\pi \mu a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2n+1)q_{m,n}} (1 - e^{-q_{m,n}t}) \cdot \sin \left[(2m+1) \frac{\pi x}{2a} \right] \cos \left[(2n+1) \frac{\pi y}{2b} \right]. \quad (19)$$

Le perdite risultano quindi:

$$E = B^2 \frac{16\rho}{\pi^2 \mu^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_{m,n}} \left[t^* + \frac{1}{2q_{m,n}} \cdot (4e^{-q_{m,n}t^*} - e^{-2q_{m,n}t^*} - 3) \right] \left[\frac{1}{(2n+1)^2 a^2} + \frac{1}{(2m+1)^2 b^2} \right]. \quad (20)$$

Il caso di campi pulsati perpendicolari non è stato affrontato poichè con le geometrie qui trattate non è possibile risolvere analiticamente l'equazione di diffusione. Analogamente a quanto fatto da Khalaf-Allah⁽⁴⁾, che ha trattato casi di salita esponenziale del campo, si può però affermare che le perdite causate da campi trasversali sono circa il doppio di quelle che si verificano in campi longitudinali.

BIBLIOGRAFIA. -

- (1) -- W. K. H. Panofsky and M. Phillips, Eletticità e magnetismo (Ediz. Ambrosiana, Milano, 1966).
- (2) -- A. Grumet, J. Appl. Phys. 30, 682 (1959).
- (3) -- H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Conduction of heat in solids (Clarendon Press, Oxford, 1959).
- (4) -- K. Khalaf-Allah, Culham Laboratory report CLM-R 139 (1974).