

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-75/33(R)
23 Giugno 1975

V. Montelatici: IL RUMORE E LA RIVELAZIONE NELLA
SPETTROSCOPIA "OTTICA" DI MODULAZIONE. -

V. Montelatici: IL RUMORE E LA RIVELAZIONE NELLA SPETTROSCOPIA "OTTICA" DI MODULAZIONE.

1. - INTRODUZIONE -

Questa relazione può considerarsi la seconda parte della nota "La tecnica strumentale nella spettroscopia ottica di modulazione magnetica" (LNF-73/56).

In essa veniva affrontato e risolto il problema di determinare il valore dell'ampiezza del campo magnetico modulante, $\Delta H(G.)$, ed il valore della banda di frequenza, $\delta\omega(ev)$, della sorgente elettromagnetica affinché la derivata prima dello spettro fosse rivelabile senza distorsioni dovute alle derivate di ordine superiore rispetto al campo ed alla frequenza.

I termini di ordine superiore (T. O. S.) da rendere molto minori dell'unità, risultavano relativi alla larghezza di riga dalle relazioni:

$$(T. O. S.)_{\Delta H} = 5.75 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\Delta H(G.)}{\Gamma(G.)} \right]^2$$

$$(T. O. S.)_{\delta\omega} = \frac{1}{3} \cdot 5.75 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\delta\omega(ev)}{\Gamma(ev.)} \right]^2$$

ove Γ rappresenta la semilarghezza più piccola della riga a metà ampiezza. Risulta immediatamente che $(T. O. S.) \ll 1$ appena le ampiezze percentuali (riferite alla semilarghezza di riga) sono dello stesso ordine di grandezza (un valore pratico ottimale è

$$\frac{\Delta H(G.)}{\Gamma(G.)} = \frac{\delta\omega(ev)}{\Gamma(ev.)} \approx 10^{-1}$$

Se i due criteri sono importanti per rivelare lo spettro, altresì è importante il rumore che inevitabilmente è associato ai segnali di tensione che in ultima analisi si rivelano

Perciò questa relazione è intesa a determinare il valore della banda elettrica, Δf , mediante la quale è reso uguale all'unità il rapporto segnale/rumore.

Questa banda può ben immaginarsi che sia molto minore dell'unità, cosicché dovrà usarsi di una tecnica particolare nella quale giuoca con un ruolo fondamentale la banda equivalente, Δf , e ciò in quanto è impensabile operare con amplificatori audio su banda molto mi

nore dell'unità.

Questa tecnica, nota come rivelazione sincrona, trasferisce il segnale alternato in un segnale continuo con una banda equivalente che può raggiungere, per esempio, valori dell'ordine di 10^{-4} Hertz. (Per esempio: Lock-in Amplifier 124, Princeton Applied Research).

Anche se una tale costante di tempo raramente viene usata risulta chiara l'efficacia di un tal valore di banda nella riduzione del rumore, ovvero nell'aumentare il rapporto segnale/rumore.

Nella trattazione verranno prese in considerazione sorgenti elettromagnetiche termiche e non termiche, intendendo distinguere la dipendenza della energia radiata dalla temperatura, nel caso degli elettroni di conduzione in moto casuale, e quella dall'energia cinetica nel caso di elettroni accelerati relativisticamente su di un'orbita chiusa.

Poichè il campo delle lunghezze d'onda che ci interessano esclude l'infrarosso penseremo di usare rivelatori di radiazione elettromagnetica di tipo fotoelettrico e non di tipo semiconduttore, per cui i tipi di rumore significativi sono il rumore termico ed il rumore shot, cui deve aggiungersi il rumore proprio della sorgente elettromagnetica.

Anticipando il risultato, il rumore shot proprio del fototubo è preponderante e quindi di una esperienza sono necessari gli ordini di grandezza dei segnali tra rivelare in modo da scegliere il fotomoltiplicatore con caratteristiche tali da dare, alla fine del sistema di rivelazione, un rapporto segnale/rumore non inferiore all'unità.

2. - IL SEGNALE DA RIVELARE -

Nella spettroscopia ottica di modulazione si rivelano segnali di tensione che in qualche modo sono la trasformazione di una potenza luminosa.

Quest'ultima incide il campione dopodichè in parte è riflessa (o trasmessa), questa onda luminosa riflessa è modulata in ampiezza e la profondità di modulazione è direttamente legata alla informazione fisica che si vuol rivelare.

Così se $I_0(\omega_0)$ è la potenza incidente, quella riflessa dal campione è:

$$(1) \quad I(\omega_0) = I_0(\omega_0) \left[R(\omega_0) + \left(\frac{dR}{dH} \right)_{H=H_0} \Delta H \sin \Omega t + \dots \right]$$

ove ω_0 è la frequenza dell'onda portante al generico istante e ΔH è l'ampiezza del parametro che modula una grandezza fisica del campione alla frequenza $\Omega/2\pi$ (per esempio la distanza tra due livelli energetici). La riflessione totale dal campione è quindi:

$$(2) \quad R = R(\omega_0) + \left(\frac{dR}{dH} \right)_{H=H_0} \Delta H \sin \Omega t$$

ove i termini di ordine superiore nelle derivate e nelle armoniche in Ω è stato ommesso, in quanto si suppone di aver scelta l'ampiezza ΔH in modo opportuno; $R(\omega_0)$ è una grandezza che dipende dal campione ed è generalmente lentamente variabile in funzione di ω , infine con ω_0 si è indicato il valore della frequenza nel campo di variabilità delle frequenze

Per inciso si deve ricordare che la operazione di variabilità delle frequenze è eseguita con mezzi mecano-ottici per cui si ha un campo di variabilità nelle lunghezze d'onda piuttosto che nelle frequenze.

Si deve notare che in presenza di campo magnetico statico, ma in assenza di modulazione la riflettività avrà la forma:

$$R = R(\omega_0, H) = R(\omega_0) + R^*(\omega_0, H)$$

ove $R^*(\omega_0, H) \ll R(\omega_0)$ e mediante la tecnica di modulazione si rivela la grandezza

$$\frac{dR^*(\omega_0, H)}{dH} \Delta H$$

(ovvero $\Delta R = dR^*$) e via una opportuna operazione si rivela:

$$(3) \quad \frac{S(A.C.)}{S(D.C.)} = \frac{(dR^*/dH)\Delta H}{R(\omega_0)} = \frac{R'_H}{R^*} \frac{R^*}{R(\omega_0)} \Delta H < \frac{R^*}{R(\omega_0)}$$

Cioè se per esempio $R^* = 10^{-2} R(\omega_0)$ il rapporto sarà $(R'_H)/(R(\omega_0)) < 10^{-2}$: ciò può essere visto, per esempio, assumendo per R^* una Lorentziana e $\Delta H = 1/10$ della larghezza della riga assunta.

Questa considerazione mostra che si ha una perdita di sensibilità nella rivelazione, ma desiderando eliminare il largo valore (D.C.), $R(\omega_0)$, rispetto a R^* obbligatoriamente si è costretti ad una riduzione nel segnale.

La operazione di divisione tra il segnale $S(A.C.)$ ed il segnale $S(D.C.)$ è eseguibile per un fotomoltiplicatore^(x) mediante la esecuzione di una variazione della tensione di alimentazione del fototubo in senso opposto ad una variazione del segnale (D.C.) di ingresso in modo che all'uscita si abbia una tensione (D.C.) costante, per esempio uguale a V_R . È chiaro che il circuito di reazione deve essere non sensibile alle variazioni proprie della tensione alla frequenza di modulazione, in definitiva si ha lo schema di Fig. 2. Nel punto (A) deve risultare la tensione^(*) $V(\omega_0) + \Delta V(\Omega) \sin t = V_R$ ovvero

$$V_R \left[\frac{V(\omega_0)}{V(\omega_0)} + \frac{\Delta V(\Omega)}{V(\omega_0)} \sin t \right] = V_R \quad \text{con} \quad \frac{\Delta V(\Omega)}{V(\omega_0)}$$

assumendo valori che vanno da 10^{-2} a 10^{-5} , cosicchè all'ingresso del secondo rivelatore si ha una tensione $(\Delta V(\Omega))/(V(\omega_0)) = \Delta R/R$ quando $V_R = 1$ volt.

Sul primo rivelatore (cioè il F.M.T.) incide la intensità luminosa $I(\omega_0, H)$ ove ω_0 è la frequenza della portante ed H è il parametro di modulazione. La $\sigma(\omega_0)$ il fattore di conversione fotoni \rightarrow corrente, allora la corrente in uscita sarà:

$$(4) \quad i = I_0(\omega_0) \sigma(\omega_0) \left[R(\omega_0) + R'_H \Delta H \sin \Omega t \right] \delta \omega_0$$

ove $\delta \omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ è la larghezza della fenditura e $\omega_0 = (\omega_2 + \omega_1)/2$, è chiaro che il primo rivelatore deve possedere una caratteristica intensità luminosa + corrente lineare secondo un coefficiente di conversione tipico del F.M.T.. Infine la larghezza della fenditura $\delta \omega_0$ sarà scelta in modo da eliminare i contributi nelle derivate e nelle armoniche di ordine superiore.

Una opportuna conversione della corrente in tensione, dopo il 1° rivelatore da il segnale:

$$(5) \quad V = (\text{cost.}) i = (\text{cost.}) I_0(\omega_0) \sigma(\omega_0) \delta(\omega_0) \left[R(\omega_0) + R'_H \Delta H \sin \Omega t \right]$$

ed indicando con $V(\omega_0) = (\text{cost.}) I_0(\omega_0) \sigma(\omega_0) \delta(\omega_0) R(\omega_0)$ la componente lentamente variabile e con $\Delta V(\Omega) = (\text{cost.}) I_0(\omega_0) \sigma(\omega_0) R'_H \Delta H \delta(\omega_0)$ la componente alternata abbiamo all'uscita del circuito di conversione corrente-tensione il segnale:

(x) - Per un semiconduttore questo metodo non è più possibile.

(*) - Per ulteriori dettagli ed altri sistemi vedasi Cardona, Modulation spectroscopy, Solid State Physics, Suppl. 11.

4.

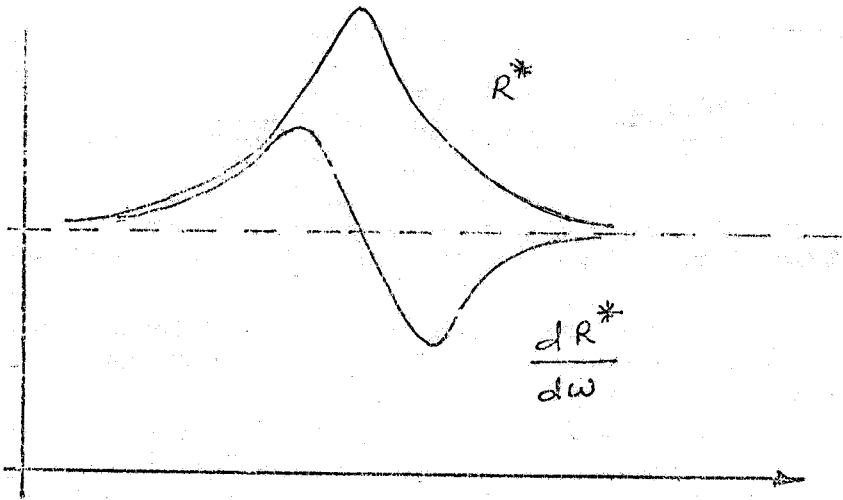


FIG. 1 - Andamento schematico della riflettività $R(\omega_0)$ su cui è sovrapposta la risonanza R^* .

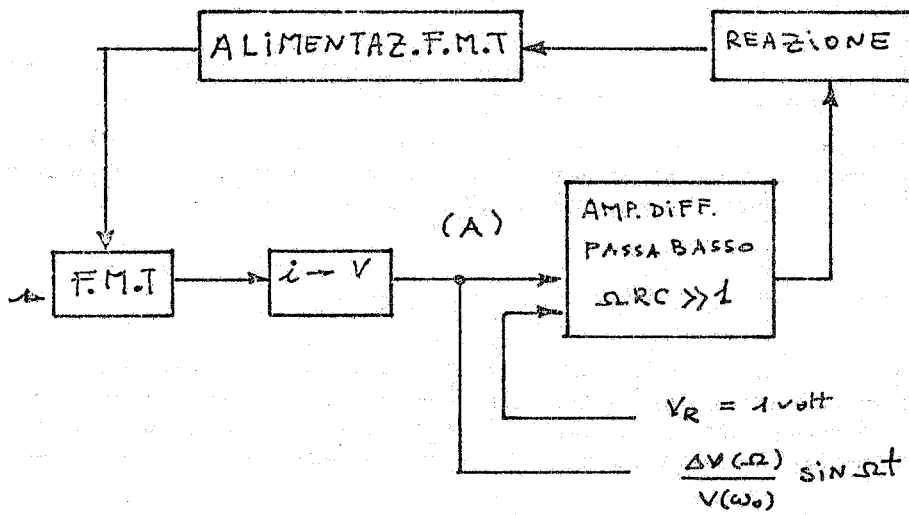


FIG. 2 - Schema di principio della operazione di divisione del segnale (A.C.) per il segnale (D.C.)

$$(6) \quad V = V(\omega_0) + \Delta V(\Omega) \sin \Omega t$$

e tramite il circuito di divisione del segnale (A.C.) rispetto al segnale (D.C.) abbiamo:

$$(7) \quad \frac{S(A.C.)}{S(D.C.)} = \frac{\Delta V(\Omega)}{V(\omega_0)} \sin \Omega t = \frac{\Delta R}{R(\omega_0)} \sin \Omega t$$

Il segnale a frequenza $\Omega/2\pi$ è inviato ad un rivelatore di fase, cioè un circuito di tipo SI + NO sincronizzato alla frequenza $\Omega/2\pi$. Questo segnale, che indicheremo con $V_0 \sin \Omega t$, è accompagnato da un rumore casuale $V_N(t)$. La tensione alternata è preventivamente amplificata, ma pure il rumore lo è; per cui l'analisi che segue si riferisce ad un segnale: $V(t) = V_0 \sin \Omega t + V_N(t)$, proveniente da un opportuno amplificatore di cui peraltro non si danno specifiche particolari.

È chiaro che la tensione di rumore è la grandezza che limita la osservabilità dei segnali (A.C.), perciò in una esperienza è di primaria importanza il minimo valore del rapporto segnale/rumore che è possibile realizzare, ovvero:

$$(8) \quad \frac{S}{N} = \frac{S(A.C.)}{S(D.C.)} \cdot \frac{S(D.C.)}{S(N)}$$

3. - IL SECONDO RIVELATORE ED IL RUMORE. -

Si deve ricordare che la raccolta dei segnali è eseguita nel dominio delle frequenze, cioè al variare della frequenza, istante per istante, si ha un segnale:

$$(9) \quad V_{\omega_0}(t) = V_1(t) = V_0 \sin \Omega t + V_N(t)$$

ove con l'indice ω_0 si è voluto indicare un segnale che è diverso per ogni valore della frequenza ω_0 ; è chiaro che fissata la frequenza il segnale dipende solo dalla variabile tempo tramite $\sin \Omega t$. Questo segnale alternato deve essere ridotto ad un segnale costante proporzionale a V_0 (ampiezza che porta la informazione di interesse) e nello stesso tempo ridurre il rumore. Se inizialmente il segnale alternato è raddrizzato ed in seguito integrato si compie l'operazione desiderata di rivelazione. La massima efficienza di raddrizzamento si ottiene in un circuito SI + NO operante alla frequenza $\Omega/2\pi$ ed in fase con il segnale di ingresso, cioè un rivelatore di fase (R.F.). In definitiva il (R.F.) esegue il prodotto della funzione

$$\zeta = \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|} \quad \text{per la funzione } V_1(t).$$

Dividiamo l'operazione in due parti, l'una per il segnale sinusoidale l'altra per il rumore. Per il segnale sinusoidale all'uscita del (R.F.) si ha, quando il segnale è in fase:

$$(10) \quad V_0(t) = V_0 \sin \Omega t \cdot \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|} = V_0 |\sin \Omega t|$$

$$= V_0 \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\Omega t}{4K^2 - 1} \right\}$$

Mentre il rumore si potrà scrivere:

6.

$$V_N(t) = V_S(t) \sin \Omega t + V_c(t) \cos \Omega t$$

cioè la tensione di rumore viene decomposta in due segnali, l'uno in fase e l'altro sfasato di $\pi/2$ rispetto al segnale di riferimento $\xi = (\sin \Omega t) / |\sin \Omega t|$.

Il segnale di rumore $V_N(t)$ è casuale nel tempo e la domanda è come possa essere descritto analiticamente.

Un segnale casuale non ha possibilità di essere predetto nella forma e perciò non può darsi una espressione esplicita per $V_N(t)$. Qualsiasi descrizione deve forzatamente essere di natura statistica e la grandezza utile è la varianza ovvero il valore quadratico medio $[V_N(t)]^2$ che è diverso da zero, mentre la media $[V_N(t)]$ è uguale a zero. Perciò ogni segnale casuale, $V_N(t)$, ha una sua varianza che dipende dalla banda elettrica del circuito; il fatto di scrivere $V_N(t) = V_S \sin \Omega t + V_c \cos \Omega t$ è una comodità, non deve pensarsi che il (R.F.) esegue una tale operazione, avremmo potuto scrivere il segnale in tale modo in qualunque punto del circuito, per maggiori dettagli vedasi: Davenport, Root: Random signal and noise. McGraw-Hill.

In effetti il (R.F.) non modifica il rumore, esso è un semplice interruttore e perciò non ha proprietà riduttive del rumore. L'unica maniera di ridurre la varianza è quella di operare mediante un filtro passa basso. Cosicché un sistema elettrico costituito da Amplificatore + (R.F.) + (F.P.B.) presenta grandi varianze di larghezza decrescenti: la più grande all'uscita dell'amplificatore fino alla più piccola all'uscita del filtro.

Perciò le ampiezze delle due componenti sono tali che per esse valgono le seguenti relazioni:

$$\overline{V_S(t)} = \overline{V_c(t)} = 0$$

$$\overline{V_S^2(t)} = \overline{V_c^2(t)} = \overline{v^2}$$

La varianza all'uscita del (R.F.) è:

$$\begin{aligned} \overline{\left[V_N(t) \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|} \right]^2} &= \overline{\left[V_S \sin \Omega t \cdot \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|} + V_c \cos \Omega t \cdot \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|} \right]^2} = \\ &= \overline{V_S^2 \sin^2 \Omega t \frac{\sin^2 \Omega t}{|\sin \Omega t|^2} + V_c^2 \cos^2 \Omega t \frac{\sin^2 \Omega t}{|\sin \Omega t|^2} + 2V_c V_S \cos \Omega t \sin \Omega t \frac{\sin^2 \Omega t}{|\sin \Omega t|^2}} = \\ &= \overline{v^2} \end{aligned}$$

Perciò il segnale in uscita al (R.F.) è :

$$(11) \quad V_o(t) = V_o |\sin \Omega t| + \sqrt{\overline{v^2}}$$

Per quanto detto, circa le caratteristiche non riduttive del rumore da parte del (R.F.), questo segnale avrà la forma $V_o(t) = v_o |\sin \Omega t| + \sqrt{\cos^2 \Delta f}$ ove Δf è la banda elettrica dell'amplificatore posto immediatamente prima del (R.F.).

Al fine di poter diminuire la radice quadrata della varianza è necessario far seguire al (R.F.) un filtro passa basso (RC). Sia $F(j\omega)$ la funzione di trasferimento del filtro, allora la varianza, $\overline{n^2}$, è legata alla densità spettrale del rumore, $N(f)$ [volt²sec⁻¹], dalla ri

lazione(*)

$$(12) \quad \overline{n^2} = \int_0^{\infty} N(f) |F(j\omega)|^2 df$$

La densità spettrale, $N(f)$, è determinata dal fenomeno fisico che genera la tensione di rumore, (per esempio: $N_T(f) = 4KTR$, $K = \text{cost. Boltzman}$, $T(^{\circ}K)$, $R(\Omega)$ per il rumore termico; $N_S(f) = G^2 R^2 i$, $G = \text{guadagno F.M.T.}$, $R(\Omega)$ e e_0 (Coulomb) carica dell'elettrone, $i(\text{Amp})$; che sono indipendenti dalla frequenza come le fonti più significative del rumore).

E' chiaro che la varianza sarà minore a seconda del tipo della funzione $F(j\omega)$ e nel caso in cui $N(f) = \text{costante}$ si potrà determinare una banda di frequenze equivalente, B , tale che:

$$(13) \quad \overline{n^2} = N(\text{cost.}) |F(j\omega = j\omega_r)|^2 B$$

ove ω_r è la frequenza di risonanza del filtro, per cui

$$(14) \quad B = |F(j\omega_r)|^{-2} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 df$$

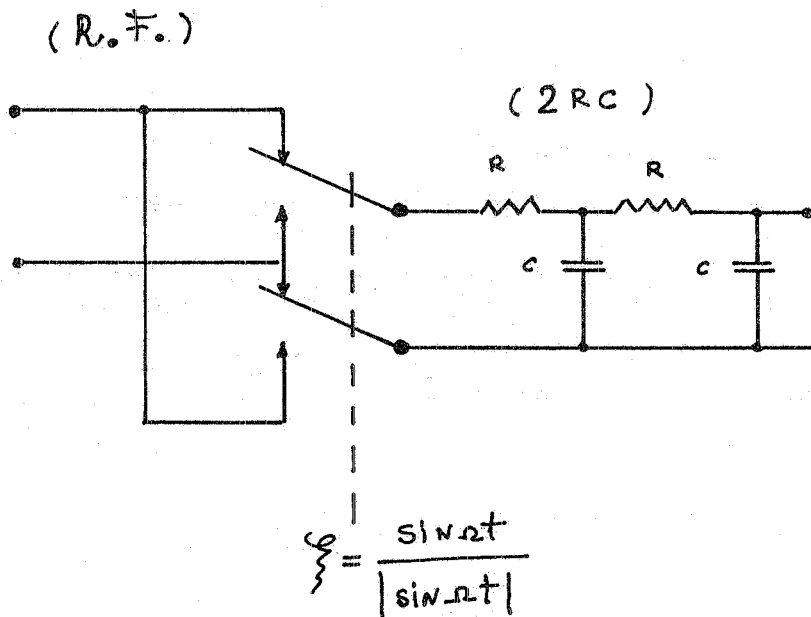


FIG. 3 - Schema di principio del rivelatore di fase ($R_0 F_0$) seguito da un doppio filtro (2R.C.).

Si nota che usando del concetto di banda equivalente si determina una varianza, in uscita ad un filtro rettangolare, uguale alla varianza del filtro reale. Questa definizione della banda equivalente è necessaria poichè in genere la banda di un filtro è definita mediante valori della frequenza per cui l'ampiezza è una frazione dell'ampiezza massima di segnale (per esempio a metà ampiezza).

Naturalmente la banda alle frequenze per cui si ha metà ampiezza non coincide con la banda equivalente.

(*) - Vedasi opera citata: Davenport, Root.

8.

Ritornando al problema del rumore in uscita al (R. F.) introduciamo una sezione dop-
pia di filtro (RC) e analizziamo la riduzione del rumore, (v. Fig 3).

La doppia sezione (2RC) ha una funzione di trasferimento:

$$(15) \quad \frac{|E_o|}{|E_i|} = |F(j\omega)|^{1/2} = \left\{ F(j\omega)F(-j\omega) \right\}^{1/2}$$

ove $F(j\omega) = (1 + j\omega RC)^{-2}$ perciò:

$$|F(j\omega)|^2 = [1 + \omega^2 (RC)^2]^{-1}$$

ove alla frequenza di risonanza $\omega_r/2\pi = 0$ si ha $|F(j\omega_r)|^2 = 1$, ne viene che la banda equi-
valente è:

$$(16) \quad B = \int_0^{\infty} [1 + f^2 (2\pi RC)^2]^{-2} df = \frac{1}{2\pi\theta} \frac{\pi}{4} = \frac{f}{8\theta}$$

ove $\theta = RC$ è la costante di tempo del filtro.

Poiché all'uscita del filtro si ha una varianza

$$(17) \quad \overline{v^2} = N \left(\frac{\text{Volt}^2}{\text{sec}^{-1}} \right) \Delta f (\text{sec}^{-1}) = N \frac{1}{8\theta}$$

ove $\Delta f = 1/8\theta$ è la banda equivalente del filtro.

Importanti sono inoltre le variazioni di fase nel segnale, esse comportano un aumen-
to di rumore.

Inizialmente si era supposto il segnale esattamente in fase con il segnale di riferimen-
to nel caso di una variazione di fase φ , che supporremo piccola, all'uscita del (R. F.) avremo:

$$(18) \quad \begin{aligned} V_o(t) &= V_o \sin(\Omega t + \varphi) \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|} = \\ &= V_o \sin \Omega t \cos \varphi \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|} + V_o \cos \Omega t \sin \varphi \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|} \\ &= V_o |\sin \Omega t| + V_o \varphi \cos \Omega t \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|} \end{aligned}$$

La varianza del rumore di fase sarà:

$$(19) \quad \overline{V_N(\varphi)^2} = \overline{V_o^2 \varphi^2 \cos^2 \Omega t} = \overline{V_o^2 \varphi^2} \cdot \frac{1}{2}$$

Questa varianza del rumore di fase al più sarà uguale alla varianza già determinata, cioè
 $\overline{v^2}$, per cui: all'uscita del doppio filtro (2RC) avremo:

$$\frac{V_o^2}{2} \overline{\varphi^2} = \overline{v^2} = N(f) \int_0^{\infty} [1 + f^2 (2\pi RC)^2]^{-2} df$$

$$(20) \quad \overline{\varphi^2} = \frac{2}{V_o^2} N(f) \frac{1}{8\theta}$$

ovvero una tensione di rumore di fase

$$\overline{V_N(\varphi)^2} = \frac{N(f)}{8\theta}$$

Poiscia all'uscita del filtro (2RC) avremo un rumore totale massimo:

$$(21) \quad \sqrt{\overline{V_N(\varphi)^2}} + \sqrt{V_o^2} = 2\sqrt{\frac{N(f)}{8\theta}}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per una singola sezione di filtro (R.C.), poichè la funzione di trasferimento è ora:

$$F(j\omega) = (1+j\omega RC)^{-1}$$

e

$$(22) \quad \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 df = \int_0^{\infty} [1 + f^2(2\pi RC)^2]^{-1} df = \frac{\pi}{2} \theta$$

la banda equivalente diviene $\Delta f = \frac{1}{4\theta}$.

In definitiva il segnale all'uscita dei complessi (R.F.) + (2RC) e (R.F.) + (RC) sono:

$$V(2RC) = \frac{2}{\pi} V_o + 2\sqrt{\frac{N(f)}{8\theta}} - V_o \frac{2}{1 + \Omega^2 \theta^2} \sum \frac{\cos 2K\Omega t}{4K^2 - 1}$$

$$(23) \quad V(2RC) = \frac{2}{\pi} V_o + 2\sqrt{\frac{N(f)}{8\theta}} - \frac{2V_o}{1 + \Omega^2 \theta^2} \sum \frac{\cos 2K\Omega t}{4K^2 - 1}$$

$$V(RC) = \frac{2}{\pi} V_o + 2\sqrt{\frac{N(f)}{4\theta}} - \frac{2V_o}{\sqrt{1 + \Omega^2 \theta^2}} \sum \frac{\cos 2K\Omega t}{4K^2 - 1}$$

Si nota che l'ufficio del filtro è duplice: riduzione a valori trascurabili delle componenti multiple pari della frequenza e riduzione del rumore.

La figura (4) mostra le funzioni di trasferimento nel dominio delle frequenze per il rapporto e delle tensioni e delle densità spettrali.

Si può notare che la riduzione delle armoniche è molto meno critica della riduzione del rumore. Infatti facendo il parametro $\Omega \theta = 100$ le armoniche sono ridotte a valori completamente trascurabili data la dipendenza di esse da $\Omega \theta$; al contrario il rumore si riduce secondo la funzione $\theta^{-1/2}$.

Cosicchè una costante di tempo ragionevolmente corta sufficiente a ridurre le armoniche non è più sufficiente a ridurre il rumore, proprio perchè è sempre $\theta < \Omega \theta$ essendo $\Omega > 1$.

Poiscia la grandezza guida nella scelta della costante di tempo è il rapporto segnale-rumore, che nei due casi risulta:

$$\frac{S}{N} (2RC) = \frac{V_o}{\pi} \frac{\sqrt{8\theta}}{\sqrt{N(f)}} = \frac{V_o}{\pi} \frac{1}{\sqrt{N(f)\Delta f}}$$

(24)

$$\frac{S}{N} (RC) = \frac{V_o}{\pi} \frac{\sqrt{4\theta}}{\sqrt{N(f)}} = \frac{V_o}{\pi} \frac{1}{\sqrt{N(f)\Delta f}}$$

Si deve ora determinare il rapporto S/N in funzione dei parametri in uso nella esperienza, cioè potenza della sorgente elettromagnetica, forma esplicita della densità spettrale, in modo da confrontarli con il rapporto S/N proprio del complesso (R. F.) + (RC) e determinare la costante di tempo θ , per avere un rapporto segnale-rumore $\gg 1$.

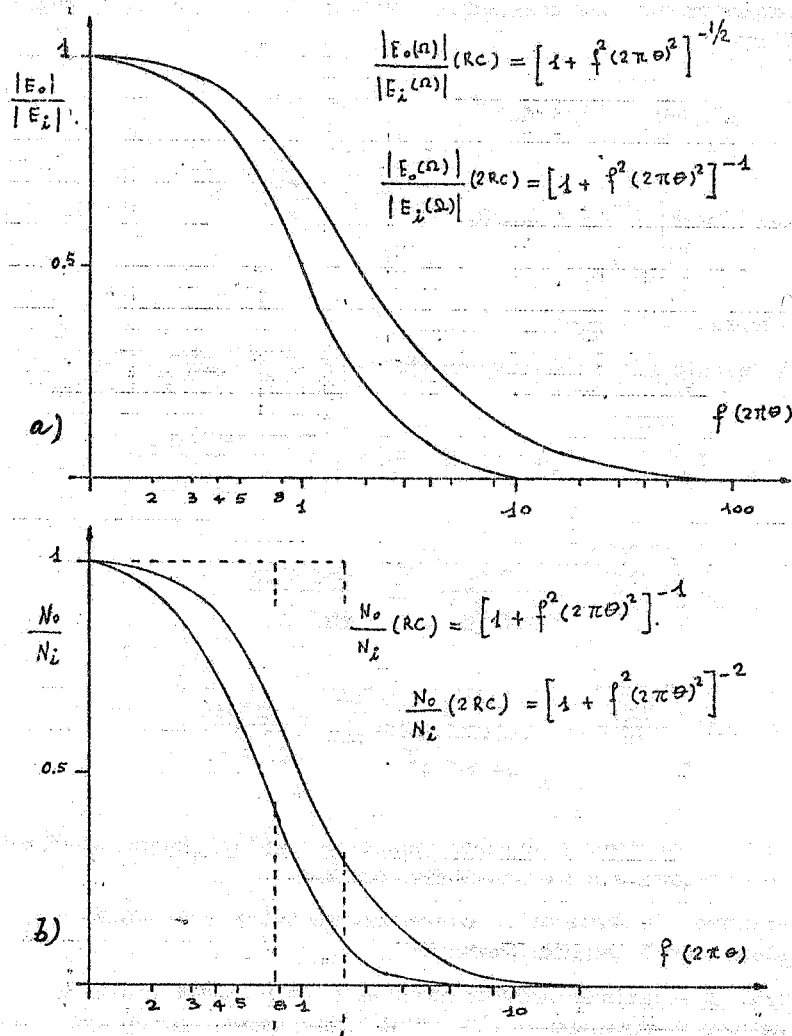


FIG. 4 - Funzioni di trasferimento per la tensione a) e per la densità spettrale di rumore; b) per un filtro semplice ed uno doppio.

4. - IL SISTEMA DI RIVELAZIONE -

Sebbene il complesso (R.F.) + (2RC) sia il "cuore" della operazione di rivelazione al suo ingresso non possono essere inviati direttamente i segnali. Essi debbono essere amplificati per avere una ragionevole ampiezza, ma in questo modo pure il segnale di rumore viene amplificato. Ne viene che il segnale dovrà essere filtrato opportunamente cosicchè il rumore non sia tale da sovraccaricare il circuito di rivelazione sincrona e di integrazione. Inoltre deve notarsi che il rumore non è solo quello determinato, via la densità spettrale $N(f)$, proprio del primo rivelatore^(x), ma esso può essere molto maggiore a causa di sorgenti spurie non calcolabili a priori; non solo, ma che non hanno niente a che fare con il rumore elettrico proprio del primo rivelatore e della elettronica associata. Lo schema di principio di una esperienza in cui si usa la rivelazione sincrona assume l'aspetto di fig. 5.

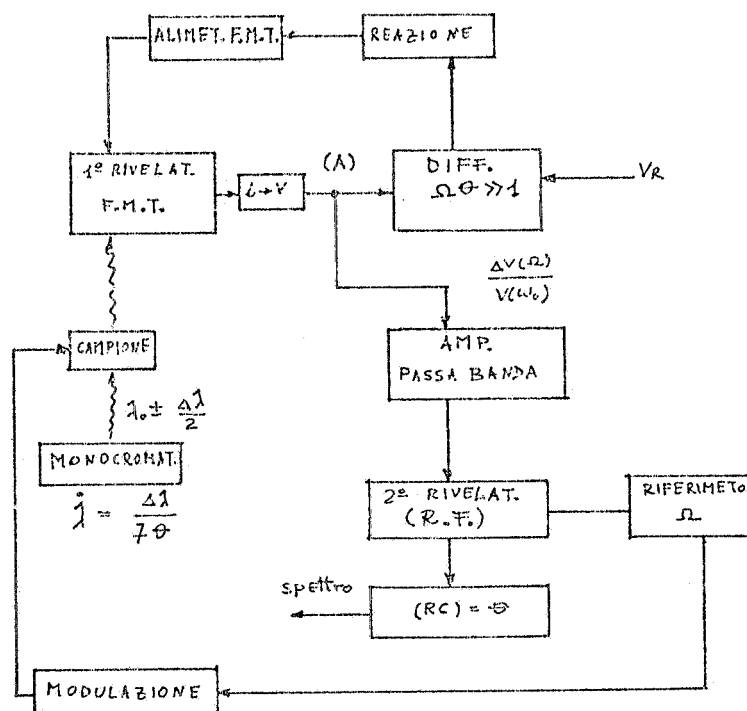


FIG. 5 - Schema di principio della rivelazione sincrona.

Una volta determinata la costante di tempo, θ , del secondo rivelatore, che riduce il rumore nella maniera desiderata, rimane da determinare la velocità di traversamento; cioè in quanto tempo la frequenza passa da un valore ad un altro.

Sino ad ora si è sempre scritto le grandezze fisiche funzioni di ω_0 , ma come già accennato, nella pratica della spettroscopia ottica l'elemento ottico-meccanico che determina la frequenza di lavoro è uno strumento, il monocromatore, il quale determina piuttosto la

(x) - Si ammette, ed in effetti è proprio così, che la fonte predominante di rumore sia dovuta al primo rivelatore; il rumore generato nei circuiti tra il primo rivelatore ed il filtro è totalmente trascurato dato che essi presentano caratteristiche di rumore molto al di sotto di quelle proprie del primo rivelatore. In pratica, una volta eseguito l'adattamento di impedenza tra le varie parti, il limite è dato dalla minima sensibilità fornita dalla casa costruttrice.

Generalmente la minima sensibilità è al di sopra del rumore proprio di questi circuiti elettrici che costituiscono il blocco Lock-in Amplifier, per esempio quello costruito dal PAR 124.

lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica. Esso è uno strumento dispersivo che determina una lunghezza d'onda centrata su di un intervallo, $\Delta\lambda$, di lunghezza d'onda e $\Delta\lambda$, la risoluzione, dipende dal numero di tratti nell'unità di lunghezza del reticolo. Comunque deve determinarsi la velocità di traversamento, $d\lambda/dt$, delle lunghezze d'onda.

Questa grandezza dipende dalla risposta del circuito (RC) e dalla risoluzione spettrale, $\Delta\lambda$.

La risoluzione $\Delta\lambda$ è determinata, a sua volta, dalla forma dello spettro da rivelare e deve essere tale da eliminare le componenti di ordine superiore in ($\Delta\lambda$), le quali danno rilievo alle derivate d'ordine superiore al primo dello spettro.

Fissato, perciò, il valore $\Delta\lambda$ le curve di risposta del circuito (RC) (Fig. 6) mostrano che un intervallo di tempo pari a $n\theta$ ($n = 7$) è necessario per ottenere la massima ampiezza per una funzione eccitatrice a gradino.

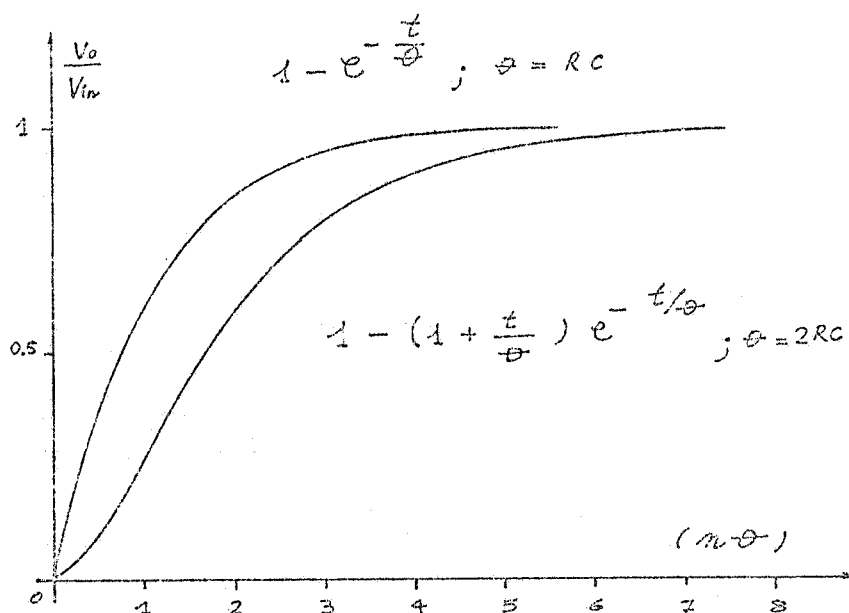


FIG. 6 - Risposta ad una funzione a gradino dei filtri (RC) e (2RC).

Per cui il minimo intervallo di lunghezza d'onda, cioè $\Delta\lambda$, deve essere traversato in un tempo tale che:

$$(25) \quad 7\theta = \Delta\lambda \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^{-1}$$

5. - LE SORGENTI DI RUMORE. -

Rimane da determinare la densità spettrale $N(f)$, essa chiaramente dipende dal tipo di rivelatore, questi sono essenzialmente di due tipi: rivelatori fotoelettrici e rivelatori semiconduttori.

Sebbene ambedue abbiano una larga zona di frequenze in cui si coprono (intorno a 10.000 Å), i rivelatori fotoelettrici sono sensibili nell'ultravioletto e nel visibile, mentre i rivelatori semiconduttori sono più utili nell'infrarosso.

Affronteremo il problema del rumore per i fotomoltiplicatori che sono rivelatori basati sull'effetto fotoelettrico, essi possiedono due tipi significativi di rumore^(x): quello termi-

(x) - Vedasi: Nyquist, Phys. Rev. 33, 110 (1928); Johnson, Phys. Rev. 32, 97 (1928). Davemport, Root operacitate - Jamison, Infrared Physics and Engineering. McGraw Hill. Kruse, McGhauchlin, McQuistan; Infrared Tecnology, Wiley (1962).

co generato nella resistenza di carico e quello shot ed inoltre hanno una corrente di buio.

Il rumore termico (Johnson-Niquist) è dovuto al moto casuale delle cariche elettriche, ovvero alla loro velocità, e perciò dipende dalla temperatura, ma non dipende dalla frequenza. La densità spettrale è espressa dalla relazione:

$$(26) \quad N(f)_T = \frac{\overline{v_N^2}}{\Delta f} = 4KTR$$

ove $K = 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg $^{\circ}K^{-1}$, $T(^{\circ}K)$, $R(\Omega)$. Poichè il rumore termico è generato nella resistenza di carico all'uscita del fototubo, verrà momentaneamente tralasciato ed inserito nella espressione finale della varianza dopo la conversione corrente-tensione, vedremo che tale rumore è trascurabile rispetto al rumore di shot.

Il rumore shot (Schokty), pur esso indipendente dalla frequenza, è dovuto alla natura quantica della corrente elettrica, causato dalla variazione temporale della emissione elettronica. La densità spettrale è espressa dalla relazione:

$$(27) \quad N(f)_S = \frac{\overline{v_s^2}}{\Delta f} = G^2 e_o^2 i_k R^2$$

ove G è il guadagno del fototubo, $e_o = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, i_k la corrente media emessa dal catodo.

In definitiva questi due tipi di rumore sono dovuti ai fotoni incidenti il fotocatodo, essi possiedono una propria fluttuazione, che dipende dalla sorgente, e si aggiunge alle due già menzionate. Si dovrà perciò specificare la sorgente fotonica e la sua fluttuazione; come vedremo, per la determinazione del rumore, necessita la fluttuazione $\delta(n_c)$ nel flusso di cariche elettriche emesse dal fotocatodo $[\delta(\dot{n}_c)]^2 = \dot{n}_c^2 = \text{varianza nel flusso di cariche}]$

Le sorgenti luminose sono di vari tipi; ma ne considereremo solo due: quelle termiche o molto simili nel senso che lo spettro di potenza segue la legge di Planck; quelle non termiche di cui prenderemo in considerazione la sola "luce di sincrotrone".

Ora la fluttuazione nel numero di fotoni al secondo che giunge al fotocatodo genera una fluttuazione nelle cariche elettriche emesse dallo stesso; e Fink ha mostrato che le due fluttuazioni sono legate dalla relazione:

$$(28) \quad \delta(\dot{n}_c) = [2\Delta f \eta]^{1/2} \delta(\dot{n}_f) \quad \text{ove} \quad [\delta(\dot{n}_c)]^2 = \dot{n}_c^2, \quad [\delta(\dot{n}_f)]^2 = \dot{n}_f^2$$

Perciò la prima cosa da determinare è la fluttuazione nel flusso di fotoni per le sorgenti fotoniche menzionate.

Per questo scopo si deve tenere presente che, generalmente, il campione è investito dalla radiazione elettromagnetica riflessa o trasmessa, per cui deve essere determinata la potenza luminosa al 1° rivelatore essendo data la potenza luminosa dalla sorgente.

Ricordiamo, infine, che la grandezza da confrontare con il segnale frazionario,

$$\frac{S(A.C.)}{S(D.C.)} = \frac{\Delta V(\Omega)}{V(\omega_o)} \quad \text{è un segnale di rumore frazionario} \quad \frac{S(N)}{S(D.C.)}$$

6. - POTENZA DELLE SORGENTI TERMICHE E NON. -

Al fine di poter determinare la potenza radiante spettrale che giunge al 1° rivelatore sarà utile considerare una sorgente luminosa che sia possibile assimilare ad un corpo nero di temperatura T(°K). Allora è noto che la sua potenza emessa nella semisfera da una superficie unitaria è:

$$(29) \quad R = \sigma T^4 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 (\text{°K})^4} (\text{°K})^4$$

$$= \int_0^{\infty} R_{\lambda, \Omega} \cos\theta \, d\lambda \int_{\text{semisfera}} d\Omega$$

ove $R_{\lambda, \Omega}$ ($\frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \mu \text{ster}}$) è la radianza spettrale, cioè la potenza emessa dalla superficie unitaria nell'angolo solido, $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$, ad una determinata lunghezza d'onda, ed il termine $\cos\theta$ tiene conto della legge di Lambert. Allora

$$(30) \quad R = \int_0^{\infty} R_{\lambda, \Omega} \, d\lambda \int_{\text{S.S.}} \cos\theta \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} R_{\lambda, \Omega} \, d\lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \int_0^{\infty} R_{\lambda, \Omega} \, d\lambda \pi$$

Ora la potenza emessa dalla superficie unitaria nella semisfera alla lunghezza d'onda λ sarà:

$$(31) \quad R_{\lambda} \, d\lambda = R_{\lambda, \Omega} \pi \, d\lambda \left(\frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \mu \text{ster}} \right)$$

La emittanza radiante, R_{λ} , è espressa dalla legge di Planck:

$$R_{\lambda} \, d\lambda = \frac{2\pi c^2 h^2}{\lambda^5} \left[\exp \frac{ch}{\lambda KT} - 1 \right]^{-1} d\lambda$$

od anche

$$(32) \quad R_{\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} \left[\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1 \right]^{-1} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \mu}$$

ove

$$C_1 = 2\pi c^2 h^2 = 3.7 \times 10^4 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} \mu^4$$

$$C_2 = \frac{ch}{K} = 1.44 \times 10^4 \mu \text{°K}$$

e si ha: $R_{\lambda, \Omega} = R_{\lambda} / \pi$.

La figura (7) dà la emittanza radiante per alcune temperature.

Determiniamo la potenza luminosa al 1° rivelatore, supponendo di avere una sorgente

di radianza spettrale, $R_{\lambda, \Omega}$, posta nella fenditura ingresso di un monocromatore con S_1 e S_2 le aree delle due fenditure, (fig. 8):

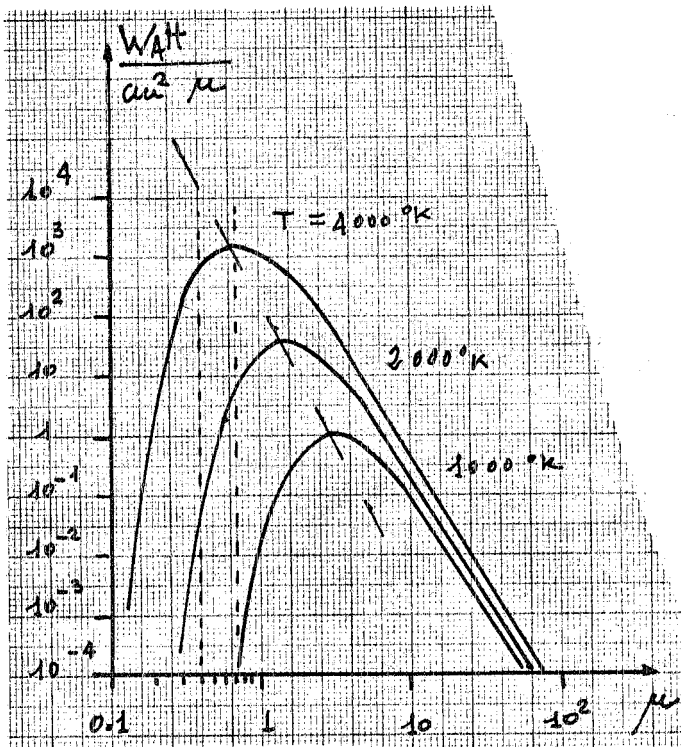
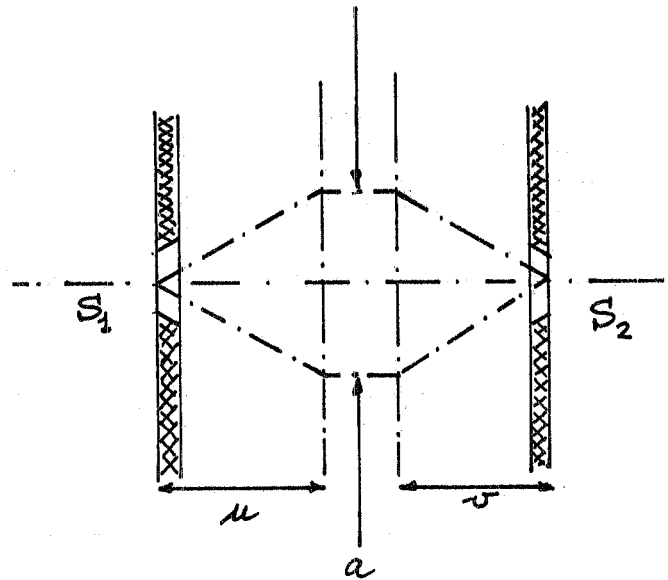


FIG. 7 - La funzione

$$R = \frac{C_1}{\lambda^5} \exp\left[\frac{C_2}{T} - 1\right]^{-1} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \mu}$$

FIG. 8 - Rappresentazione del monocromatore fatta con due fenditure ed un obiettivo.



il sistema di specchi e reticolo ha area a . Sull'obiettivo giungerà la potenza

$$\int_0^{\infty} R_{\lambda, \Omega} S_1 \frac{a}{u^2} d\lambda,$$

di tutte le lunghezze d'onda il reticolo ne sceglie una in un intervallo $\Delta\lambda$, per cui alla fenditura di uscita si avrà la potenza distribuita nella superficie S_2 , cioè:

$$R_{\lambda, \Omega} S_1 \frac{a}{u^2} \Delta\lambda \frac{1}{S_2}$$

ma poichè vale la relazione ottica $S_1/S_2 = u^2/v^2$ si ottiene

$$\Delta \lambda R_{\lambda, \Omega} \frac{a}{v^2} = R_{\lambda, \Omega} \frac{\Delta \lambda}{f^2} = R_{\lambda} \frac{\Delta \lambda}{\pi f^2}$$

ove $f^2(\text{ster})^{-1}$ è l'apertura relativa del monocromatore.

In definitiva alla fenditura di uscita si ha una potenza luminosa pari a:

$$(33) \quad P_{\lambda} = \frac{R_{\lambda}}{(\pi) f^2} \Delta \lambda \text{ hw (Watt)}$$

ove $hw = S_2$. Ed è questa la potenza ricevuta da un rivelatore qualora sia posto all'uscita della fenditura. Si deve notare che un monocromatore ha una ben definita apertura relativa, cioè un numero f (= (distanza focale/Diametro obiettivo), e la potenza all'uscita dipende dal prodotto $hw/f^2 = \Omega$ (Monocromat.) $\times A$ (area fenditura).

Perciò, qualora la sorgente ed il rivelatore non siano posti nelle fenditure, qualsiasi sistema ottico, compreso il campione, dovrà avere un proprio $(\Omega \cdot A)$ non minore di quello ideale determinato, per avere tutta la potenza al 1° rivelatore. Ammesso di avere rispettato questa condizione rimane da introdurre le perdite per assorbimento e del campione e del monocromatore che indicheremo con T_c e T_M , avremo quindi:

$$(34) \quad P_{\lambda} = \frac{R_{\lambda}}{(\pi) f^2} \Delta \lambda \text{ hw } T_c T_M$$

od anche introducendo la dispersione $\mathcal{D} = \Delta \lambda / W$ si ha:

$$(35) \quad P_{\lambda} = \frac{R_{\lambda}}{(\pi) f^2} \frac{h}{\mathcal{D}} \lambda^2 \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)^2 T_c T_M$$

Mentre il corpo nero è una sorgente elettromagnetica isotropa rispetto allo spazio, la sorgente che dà la luce di sincrotrone è fortemente anisotropa. Infatti la radiazione è emessa essenzialmente in un piccolo angolo, centrato rispetto ad un piano su cui giace l'orbita chiusa dell'elettrone accelerato possedente l'energia E .

Per esprimere la P_{λ} useremo l'espressione differenziale della potenza^(x) spettrale radiata dall'elettrone durante una rivoluzione completa sull'orbita e nell'angolo di elevazione 2ψ :

$$(36) \quad dW\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right) = A \cdot Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right) d\lambda d\psi \quad \text{ove}$$

$$A = 1.31 \cdot 10^{-7} \frac{[E(\text{GeV})]^8}{[R(\text{m})]^3} \frac{\text{Watt}}{\text{A MRAD elet.}}$$

$Z(\lambda/\lambda_m, \eta)$ è una funzione universale tabulata.

Per avere la potenza irradiata raccolta da una superficie ($h \cdot w$) posta a distanza d dall'orbita basterà scrivere:

(x) - Per queste formule vedasi: V. Montelatici: Calcoli numerici per la radiazione di sincrotrone, applicazione ad Adone, LNF-74/28 (R); Useful formulas and calculated functions for the luminous electron, LNF - 72/56.

$$(37) \quad P_{\lambda} = \left[A \cdot Z \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta \right) \right] \frac{w}{2\pi d} \cdot \frac{h}{d} \Delta\lambda \quad (\text{Watt})$$

ove il significato dei due fattori (h/d) e $(w/2\pi d)$ è specificato tramite la fig. 9.

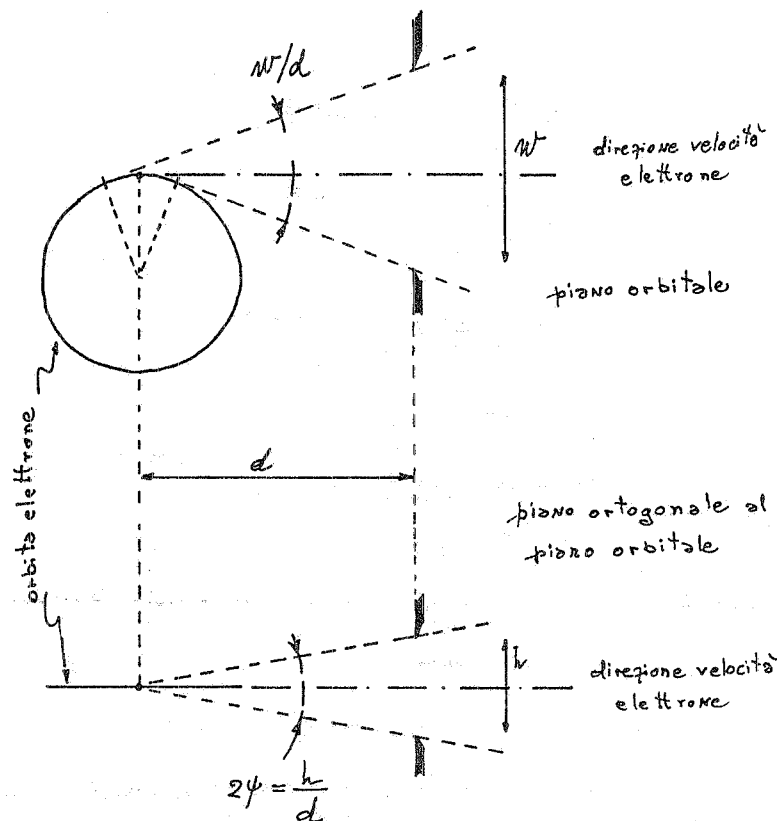


FIG. 9 - Significato dei fattori $w/2\pi d$ e h/d . Poichè le formule della potenza irraggiata dell'elettrone orbitante esprimono la potenza emessa durante una rivoluzione completa, $E(\text{rivoluzione})$, quella emessa dall'arco d'orbita, $R(w/d)$, sarà:

$$E\left(R \frac{w}{d}\right) = E(\text{rivoluzione}) \frac{w}{2\pi d}$$

Inoltre la stessa formula della potenza emessa è data per MRAD, nel piano ortogonale all'orbita. O meglio le funzioni

$$Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right) = Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta = \frac{E(\text{GeV})}{5.12 \times 10^{-4}} \psi\right)$$

sono funzioni dell'angolo di elevazione ψ , perciò una volta stabilito l'angolo $h/d = 2\psi$, esse vanno moltiplicate per tale angolo espresso in MRAD per avere la potenza.

Poichè i "lampade" per la luce di sincrotrone sono strumenti molto particolari e se ne trovano, diciamo uno per alcune nazioni, specificheremo quello in nostro possesso, cioè Adone. Esso ha uno spettro praticamente continuo di energia emessa nel dominio temporale e nel dominio delle lunghezze d'onda. La energia radiata è funzione della lunghezza d'onda e dell'angolo di elevazione tramite la funzione $Z(\lambda/\lambda_m, \eta)$, cosicchè nella fig. 10 è stata determinata la potenza radiata in funzione di ψ e λ avendo fissata l'energia orbitale degli elettroni al valore $E = 1.5 \text{ GeV}$ con $N = 10^{11}$ elettroni, che rappresentano condizioni

18.

ottimali.

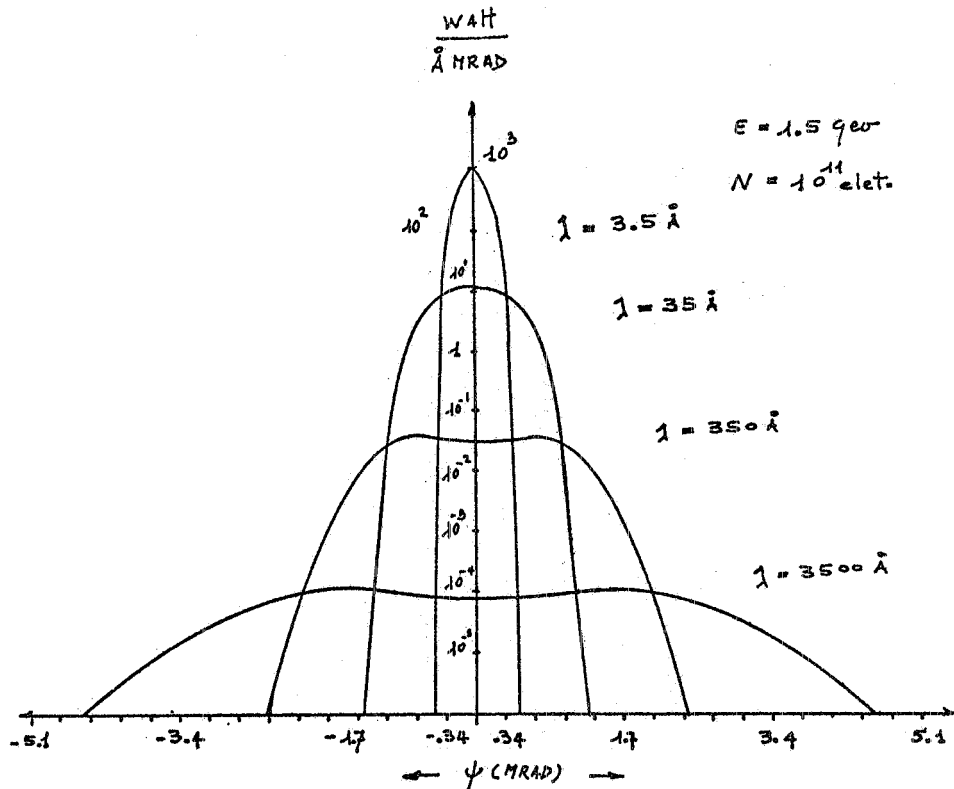


FIG. 10 - Potenza radiata da Adone in funzione dell'angolo di elevazione.

Si deve notare che la sorgente "luce di sincrotrone" è stata supposta puntiforme e colimata, (in effetti non è vero anche se la lunghezza dell'arco di orbita che irradia è alcuni ordini di grandezza inferiore alla distanza d , inoltre l'orbita non è una curva geometrica fissa nello spazio); infine non potendo usare sistemi ottici, all'infuori dell'elemento focalizzante (il reticolo) la potenza nel fuoco sarà quella già determinata, cioè

$$P_{\lambda} = W_{\lambda, \Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{h}{d^2} = \frac{W_{\lambda, \Omega}}{2\pi} \frac{1}{f^2}$$

ove f è l'apertura del reticolo sotto cui è vista la sorgente.

Facciamo ora due esempi di potenza raccolta al rivelatore.

Per la sorgente termica poniamo:

$$T = 4000 \text{ }^{\circ}\text{K}, \quad \lambda = 0.5 \mu$$

$$R_{\lambda} = 10^3 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ } \mu}, \text{ per il monocromatore:}$$

$$f = 10; \quad \phi = \frac{8 \text{ Å}}{\text{mm}} = 8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Å}}{\text{cm}}; \quad T_M = 50\%, \quad h = 1 \text{ cm} \text{ per il campione } T_C = 30\%$$

$$\frac{4\lambda}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ si ha quindi:}$$

$$P_{\lambda} = \frac{10^3}{3.14 \cdot 10^2} \cdot \frac{25}{100} \cdot \frac{1000}{8} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{5}{10^2} \cdot \frac{3}{10}$$

$$\approx 4 \cdot 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ Watt} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Watt.}$$

è chiaro che per una temperatura inferiore, per esempio un fattore 2; cioè $T = 2000 \text{ }^\circ\text{K}$, si ha una riduzione forte nella potenza al rivelatore, un fattore $\approx 10^{-3}$. Risulta evidente che data una sorgente ad alta temperatura, per variare la potenza converrà usare filtro neutro o diaframmi opportuni e non toccare la temperatura.

Per inciso questa potenza luminosa è perfettamente visibile all'occhio umano, poichè la soglia di visibilità è stabilita in un flusso di fotoni non minore a $100 \text{ fot. sec}^{-1}$ alla massima sensibilità cioè circa $0,5 \mu$. Si ha perciò:

$$P_\lambda = \dot{n} \frac{hc}{\lambda} \text{ Watt}$$

$$P_\lambda = 10^2 \frac{\text{fot}}{\text{sec}} \cdot 6.6 \cdot 10^{-27} \times 10^{-7} \text{ Joule sec} \times 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^4 \mu\text{sec}^{-1} \frac{1}{\frac{5}{10} \mu\text{fot}} \approx 4 \cdot 10^{-19} \text{ Watt.}$$

Per la sorgente non termica Adone debbono farsi alcune considerazioni. Intanto il pregio di una tale "lampada" è avere in un intervallo di lunghezza d'onda tra $\approx 1 \text{ \AA}$ e 2000 \AA potenze di radiazione che altrimenti non è possibile di ottenere, in più sono praticamente continue nel tempo. Inoltre, devesi ricordare, a queste lunghezze d'onda non è possibile usare lenti convenzionali.

Cosicchè il fascio "luminoso" collimato è inviato su specchi e reticoli focalizzanti, vedasi fig. 11 in cui si dà uno schema di principio per due monocromatori ad incidenza radente e normale, in un dispositivo tipico.

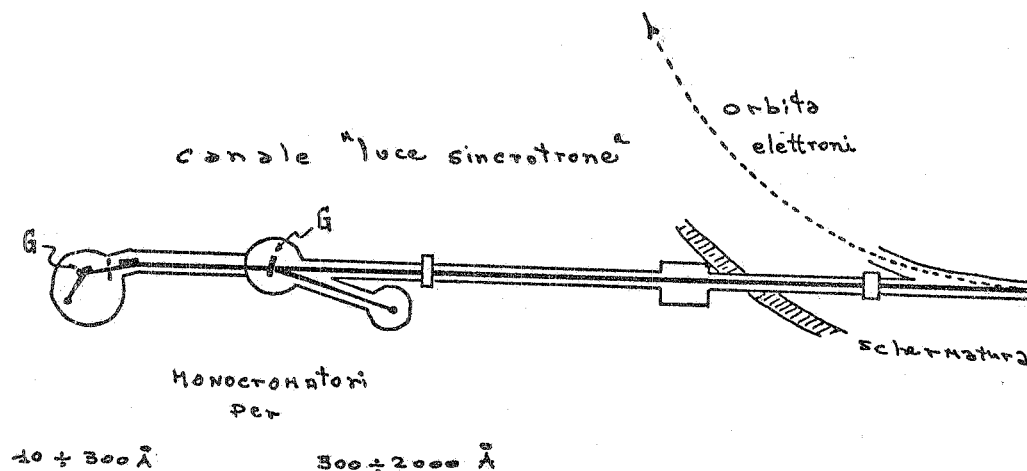


FIG. 11 - Schema di un canale "luce di sincrotrone", con due monocromatori in serie, G sta per il reticolo. Una tale disposizione permetterebbe di usare alternativamente le due zone di spettro: $10 \div 300 \text{ \AA}$ e $300 \div 3000 \text{ \AA}$, senza deviazioni del fascio luce.

Lo specchio focalizzante può ricevere la radiazione da un più esteso arco di orbita, e nel piano ortogonale tutta.

Il componente fondamentale di un monocromatore è il reticolo e per lunghezze d'onda maggiori di $\approx 300 \text{ \AA}$ sono impiegati reticoli ad incidenza normale o quasi, mentre a lunghezze d'onda inferiori deve usarsi una incidenza radente. La comprensione di ciò sta nel fatto che l'indice di rifrazione nei metalli è $n = \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_p)^2}$ ove λ_p è la lunghezza d'onda di plasma, e la riflessione sarà totale per $\lambda > \lambda_p \sin \alpha$ (con α = angolo di incidenza).

Per oro e plating $\lambda_p \approx 150 \text{ \AA}$ e la riflettanza è rispettivamente del 10% e 20% nello intervallo $500 - 1000 \text{ \AA}$ ad incidenza normale.

Allora supponendo di lavorare a $\lambda = 500 \text{ \AA}$ e con $E = 1.5 \text{ GeV}$ e 10^{11} elettroni, la ra-

20.

diaggione è emessa in un cono $2\psi = 3.5 \text{ MRAD}$ che a 20 mt. di distanza danno un'altezza di specchio utile $h = 7 \text{ cm}$. Se lo specchio nel piano orbitale è lungo $w = 20 \times 10^{-2} \text{ mt}$. si ha un fattore di efficienza

$$\frac{w}{2\pi d} = \frac{20 \times 10^{-2}}{2\pi \times 20} = 1.6 \cdot 10^{-3}$$

Se poi si tiene presente che lo specchio focalizzante può essere eliminato ed incidere direttamente nel reticolo focalizzante si ha un $T_M \approx 10 + 20\%$, perciò il fattore

$$T_M \frac{w}{2\pi d} \cdot \frac{h}{d} = 1.6 \times 10^{-3} \times 3.5 \times 10^{-1} = 5.5 \cdot 10^{-4};$$

e supponendo un $T_c = 1\%$ si ha:

$$\frac{w}{2\pi d} \frac{h}{d} T_M T_c = 5.5 \cdot 10^{-6}$$

se poi $\Delta\lambda = 1 \text{ \AA}$ otterremo

$$P_\lambda = \left[A \cdot Z \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta \right) \right] 5.5 \times 10^{-6} \text{ Watt}$$

$$A \approx 10^{-7} \frac{1.5^8}{125} 10^{11} = \frac{32.6}{1.25 \cdot 10^2} 10^4 \approx 2.6 \cdot 10^3$$

$$Z = \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} = 140, \eta = 0 \right) = 1.5 \cdot 10^{-5}$$

$$A \cdot Z = 1.5 \cdot 10^{-5} \times 2.6 \times 10^3 \approx 4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Watt}}{\text{\AA MRAD}}$$

$$P_\lambda = 4 \cdot 10^{-2} \times 5.5 \times 10^{-6} = 22.0 \cdot 10^{-8} \text{ Watt}$$

$$= 2.2 \cdot 10^{-7} \text{ Watt}$$

ora per $\lambda = 500 \text{ \AA}$ si ha una energia del fotone $12400/500 = 25 \text{ ev} = 25 \times 1.6 \times 10^{-12} \times 10^{-7} \text{ Joule} = 4 \times 10^{-18} \text{ Joule}$

$$\dot{N}(\text{fot.} : 500 \text{ \AA}) = \frac{2.2 \cdot 10^{-7}}{4 \times 10^{-18}} \frac{\text{fot}}{\text{sec}} \approx 5 \cdot 10^{10} \frac{\text{fot}}{\text{sec}}$$

Se l'efficienza quantica del fototubo $\eta = 10\%$ (x P 1122) si ha una corrente catodica ^(x)

(x) - Si ammette che la energia delle cariche uscenti del fotocatodo sia $h\nu$ uguale a quella del fotone incidente; in realtà si ha dalla equazione di Einstein:

$$W = E + e\phi$$

ove $W = h\nu$ è la energia del fotone incidente il fotocatodo, E l'energia dell'elettrone emesso, e la carica dell'elettrone, ϕ il lavoro di estrazione di un elettrone dal materiale.

$$i_k = \eta e_0 \dot{n}_f = 10^{-1} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ Coul. } 5 \cdot 10^{10} \text{ fot. /sec}$$

$$= 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ Amp.}$$

e con un guadagno di $5 \times 10^{+7}$ una corrente all'anodo $i_a = 1.6 \times 5 \cdot 10^{-10} \times 10^{+7} = 8 \cdot 10^{-3}$ Amp.

7. - LA FLUTTUAZIONE AL PRIMO RIVELATORE. -

La fluttuazione da luogo al rumore presente nel segnale da rivelare, fissiamo l'attenzione alla sorgente ed al fotocatodo.

Poichè il fotocatodo emette elettroni, la corrente ad essi dovuta è affetta da una varianza propria della emissione elettronica cui si somma quella della sorgente, cioè avremo lo schema di fig. 12

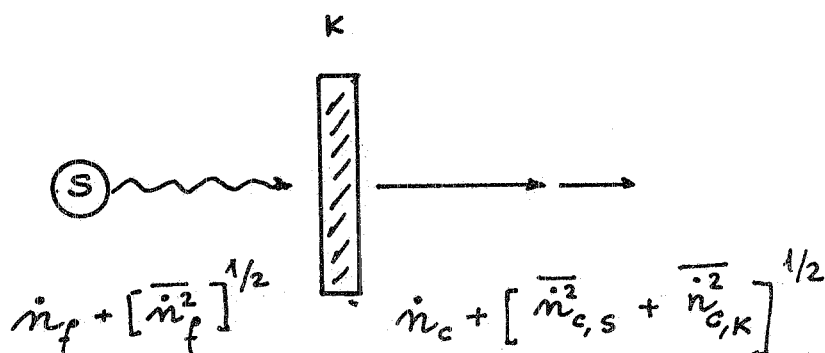


FIG. 12 - Schema della trasformazione fotoni-cariche ovvero fotoni-corrente, essendo la corrente

$$i = e \dot{n}_c + [e^2 \dot{n}_{c,s}^2 + e^2 \dot{n}_{c,k}^2]^{1/2}$$

ove k è il fotocatodo ed S la sorgente luminosa.

Ora è stato dimostrato da Fink che la varianza nella corrente dal fotocatodo è legata alla varianza nel numero di fotoni dalla relazione:

$$\overline{i_k^2} = e^2 \cdot \overline{\dot{n}_k^2} = 2 \Delta f \eta \overline{\dot{n}_f^2} \cdot e^2$$

ove Δf è la banda elettrica e $\eta = \dot{n}_c / \dot{n}_f$ è l'efficienza quantica del fotocatodo dipendente dalla lunghezza d'onda; poichè ci interessano le formule frazionarie scriveremo:

$$\frac{\delta i_k}{I_k} = \sqrt{\frac{\overline{i_k^2}}{I_k^2}} = \sqrt{\left[\frac{2 \Delta f \eta e^2 \overline{\dot{n}_f^2}}{e^2 \dot{n}_c} \right]}$$

$$= \left[\frac{2 \Delta f \eta e^2 \overline{\dot{n}_f^2}}{e^2 \eta \dot{n}_f^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{2 \Delta f}{\eta} \frac{\overline{\dot{n}_f^2}}{\dot{n}_f^2} \right]^{1/2}$$

Infine poichè i dinodi del fototubo portano ad una moltiplicazione delle cariche, all'anodo

22.

abbiamo la corrente frazionaria:

$$\frac{\delta i_a}{I_a} = \frac{\delta i_k}{I_k} \left[\frac{\sigma}{(\sigma-1)\epsilon\eta} \right]^{1/2}$$

ove σ è il guadagno medio per dinodo e ϵ il coefficiente di collezione del primo dinodo, cosicchè all'anodo si ha la fluttuazione frazionaria,

$$\frac{\delta i_a}{I_a} = \left[\frac{2\Delta f}{\eta} \frac{\sigma}{(\sigma-1)\epsilon} \frac{\overline{i_k^2}}{I_k^2} \right]^{1/2}$$

Inoltre la fluttuazione dovuta alla emissione casuale del fotocatodo, quando è investito da un flusso di fotoni, è stata dimostrata da Shockky che da la relazione:

$$\overline{i_k^2} = 2\Delta f e I_k$$

od anche:

$$\frac{\delta i_k}{I_k} = \sqrt{\frac{\overline{i_k^2}}{I_k^2}} = \sqrt{\frac{2\Delta f e}{I_k}} = \left[\frac{2\Delta f}{\eta \dot{n}_f} \right]^{1/2}$$

perciò all'anodo si avrà

$$\frac{\delta i_a}{I_a} = \left[\frac{\sigma}{(\sigma-1)\epsilon} \frac{2\Delta f}{\eta} \frac{1}{\dot{n}_f} \right]^{1/2}$$

All'anodo avremo la varianza percentuale totale data dalla somma delle varianze, ovvero la fluttuazione percentuale totale:

$$\frac{\overline{(i_{tot})^2}}{I_a^2} = \frac{i_a^2}{I_a^2} + \frac{\overline{i_k^2}}{I_k^2} \text{ shot} = \frac{2\Delta f \sigma}{(\sigma-1)\epsilon\eta} \frac{1}{\dot{n}_f} \left[1 + \frac{\overline{i_k^2}}{\dot{n}_f} \right]$$

8. - LA FLUTTUAZIONE NELLE SORGENTI TERMICHE E NON -

Esaminiamo innanzi tutto la fluttuazione di una sorgente termica possedente uno spettro di Planck. Sia \dot{n}_f il flusso di fotoni, $\nu = c/\lambda$ la frequenza della radiazione, allora la distribuzione spettrale dei fotoni emessi segue Bose-Einstein:

$$\dot{n}_f = \left[\exp \frac{h\nu}{kT} - 1 \right]^{-1} = \left[\exp \frac{hc}{\lambda kT} - 1 \right]^{-1}$$

e notoriamente la varianza è:

$$(39) \quad \bar{n}_f^2 = \bar{n}_f(1+\bar{n}_f) = \bar{n}_f \frac{\exp \frac{hc}{\lambda KT}}{\exp \frac{hc}{\lambda KT} - 1} = P_\lambda \frac{\lambda}{hc} \frac{\exp \frac{hc}{\lambda KT}}{\exp \frac{hc}{\lambda KT} - 1}$$

ove P_λ è la potenza luminosa spettrale.

Passiamo a determinare la fluttuazione nella luce di sincrotrone. Intanto notiamo che un'elettrone accelerato su una orbita circolare di raggio R possedente energia E emette una radiazione elettromagnetica su di un intervallo di lunghezza d'onda molto esteso, e l'energia media emessa nell'unità di tempo è:

$$(40) \quad W_o = \frac{2}{3} \frac{c e^2}{R^2} \left(\frac{E}{m_o c^2} \right)^4 \cdot \frac{1}{\Lambda} \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$$

$$\approx 4.2 \cdot 10^3 \frac{[E(\text{GeV})]^4}{R^2(\text{m})} \frac{\text{Gev}}{\text{sec}} \cdot \frac{1}{\Lambda}$$

ove Λ è il fattore di allungamento dell'orbita dovuto alle sezioni diritte ove non si ha irraggiamento. Il numero di fotoni emessi durante una rivoluzione sull'orbita è:

$$(41) \quad n(\text{rivoluzione}) = 1.29 \times 10^2 E (\text{GeV})$$

$$= \frac{1}{137} \frac{5}{\sqrt{3}} \left(\frac{E}{m_o c^2} \right)$$

Perciò l'emissione fotonica è discreta e non continua, cosicchè al trascorrere del tempo si ha una variazione statistica nella emissione fotonica nel senso che ai successivi istanti in cui si ha l'emissione di tutto lo spettro l'energia E successivamente diminuisce.

La massima diminuzione si avrà quando l'elettrone ha compiuto un giro completo, dopodichè è rifornito di energia nella misura di quella persa, cioè:

$$(42) \quad W(\text{rivoluzione}) = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{R} \left(\frac{E}{m_o c^2} \right)^4$$

$$= 88.5 \cdot 10^3 \frac{[E(\text{GeV})]^4}{R(\text{m})} \text{ ev.}$$

L'elettrone riportato alla sua orbita d'equilibrio inizia un nuovo ciclo e così sia, ne viene che il moto dell'elettrone esegue una oscillazione smorzata nel piano orbitale. Il fenomeno delle oscillazioni smorzate nel moto elettronico è abbastanza più complesso, ma ciò che interessa è che le oscillazioni smorzate radiali e azimutali e di sincrotrone hanno una costante di tempo caratteristica che può essere approssimata per eccesso al valore:

$$(43) \quad \tau = \frac{E}{W_o}$$

Se f_o è la frequenza a cui si ha il rifornimento di energia, durante il tempo τ , sarà persa l'energia radiata:

$$(44) \quad W = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{R} \left(\frac{E_o}{m_o c^2} \right)^4 (f_o \tau)$$

Indicando $\langle h\nu \rangle$ l'energia media dei fotoni emessi il loro numero medio sarà $\langle n \rangle = \Delta W / \langle h\nu \rangle$. Questi fotoni sono distribuiti nel tempo e seguono la distribuzione di Poisson, perciò $\overline{\Delta n^2} = \langle n \rangle$ e quindi la fluttuazione sarà:

$$(45) \quad \delta_{nf} = [\overline{\Delta n^2}]^{1/2} = [\langle n \rangle]^{1/2}$$

ne viene che la fluttuazione nell'energia perduta per irraggiamento è:

$$(46) \quad \begin{aligned} \delta W &= [\overline{W^2}]^{1/2} = \langle h\nu \rangle \delta n_f = \langle h\nu \rangle [\langle n \rangle]^{1/2} = \langle h\nu \rangle \left[\frac{\Delta W}{\langle h\nu \rangle} \right]^{1/2} = \\ &= [\langle h\nu \rangle \Delta W]^{1/2} \end{aligned}$$

Se assumiamo il valore medio dell'energia dei fotoni come quello corrispondente al valore della frequenza critica, cioè $\langle h\nu \rangle \approx (\hbar c/R)(E/m_0 c^2)^3$ si ha:

$$\delta W = \frac{e}{R} \frac{(\hbar c \frac{4\pi}{3})^{1/2}}{(m_0 c^2)^{7/2}} \cdot E^{7/2} \cdot (f_0 \zeta)^{1/2}$$

che rappresenta la fluttuazione della energia irraggiata durante il tempo ζ . Od anche introducendo l'approssimazione per la costante di smorzamento

$$(47) \quad \begin{aligned} (\delta W)^2 = \overline{W^2} &= \frac{e^2}{R^2} \hbar c \frac{4}{3} \pi \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^7 \frac{E}{\frac{2}{3} \frac{c e^2}{R^2} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4} f_0 \\ &= 2\pi \hbar (m_0 c^2) \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 \cdot f_0 \end{aligned}$$

Tenendo presente che ciascun elettrone orbitale dà la fluttuazione δW e che ci interessa la espressione $\overline{\dot{n}^2}/\dot{n}$ avremo:

$$\overline{\dot{n}^2} \cdot (h\nu)^2 N^2 = \overline{W^2} \leq N^2 \overline{W^2} = N^2 2\pi \hbar (m_0 c^2) \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 f_0$$

$$\dot{n} \cdot (h\nu) N = \frac{9}{32} \frac{c e^2}{R^3} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^8 f\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right) d\lambda d\psi N$$

perciò:

$$\frac{\overline{\dot{n}^2}}{\dot{n}} \leq \frac{\overline{\dot{n}^2} (h\nu)^2 N^2}{\dot{n} (h\nu) N} = N 137 \frac{\pi 64}{9 c^2} (m_0 c^2) \frac{f_0 R^3}{\left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 f\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right) d\lambda d\psi}$$

Questa quantità è molto minore dell'unità, d'altra parte la funzione $F(B)$ per le lampade termiche è circa uguale all'unità (nel visibile) per cui la fluttuazione percentuale per le lampade termiche e per le non termiche è ben approssimata dalle relazioni:

$$\left(\frac{\delta i_a}{I_a}\right)_T = \left[\frac{2 \times 2 \Delta f \sigma}{(\sigma - 1) \varepsilon \eta} \cdot \frac{hc}{\lambda P \lambda} \right]^{1/2}_T$$

$$\left(\frac{\delta i_a}{I_a}\right)_{N.T.} = \left[\frac{2 \Delta f \sigma}{(\sigma - 1) \varepsilon \eta} \cdot \frac{hc}{\lambda P \lambda} \right]^{1/2}_{N.T.}$$

A queste grandezze, che esprimono il rumore percentuale, deve aggiungersi la corrente di buio propria del fotomoltiplicatore. Essa limita chiaramente il rapporto segnale rumore a basse potenze luminose e non dipende dalla potenza luminosa, ma corrisponde ad una certa potenza luminosa alla lunghezza d'onda di lavoro. Così una corrente anodica di buio di 10^{-8} A e un guadagno del fototubo di 10^6 da $\lambda = 0.5 \mu$ una potenza equivalente pari a

$$P_o = \frac{i_a}{G} \frac{hc}{\lambda}$$

$$\frac{10^{-8}}{10^6} \frac{6.6 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^4}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.5} \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}$$

$$10^{-14} \frac{19.8 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{14}}{8 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-19}} \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} = 2.47 \cdot 10^{-14} \text{ Watt.}$$

Perciò la corrente di buio percentuale sarà:

$$\frac{i_B}{I} = \frac{P_o}{P} = \frac{1.47 \cdot 10^{-14}}{P}$$

Un fotomoltiplicatore per fotoni da UV la corrente di buio è dell'ordine di 10^{-10} A per cui a 500 \AA si avrà una potenza corrispondente (x P1120) per un guadagno $G = 10^7$

$$P_o = \frac{10^{-10}}{10^7} \frac{6.6 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^8}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 500} \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}$$

$$= 10^{-17} \frac{19.8 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{18} \cdot 10^{19}}{8 \cdot 10} = 2.47 \cdot 10^{-15} \text{ Watt,}$$

che da per il XP1120 la corrente percentuale di

$$\frac{i_B}{I} = \frac{2.47 \cdot 10^{-15}}{P}$$

Per una sorgente non termica a 500 \AA si ha:

$$\sigma = 3.5, \quad \varepsilon = 80\%, \quad \eta = 10\%$$

$$\frac{\sigma}{(\sigma - 1) \varepsilon \eta} = \frac{3.5 \cdot 10^2}{2.5 \cdot 8} = 0.17 \cdot 10^2 = 17$$

$$hc = 6.6 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^8 \text{ Joule } \overset{\circ}{\text{A}}$$

$$= 19.8 \cdot 10^{-16} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ Joule } \overset{\circ}{\text{A}}$$

$$\left. \frac{\delta i_a}{I_a} \right)_{N.T.} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-15}}{500 P_\lambda}} \cdot 17 = \sqrt{\frac{68 \cdot 10^{-17}}{5 P_\lambda}} \approx \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^{-16}}{P_\lambda}} \approx \frac{10^{-8}}{P_\lambda}$$

Per una sorgente termica a 5000 $\overset{\circ}{\text{A}}$

$$\left. \frac{\delta i_a}{I_a} \right) \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^{-15}}{5000 P_\lambda}} \approx \frac{2.6 \times 2 \sqrt{10^{-18}}}{\sqrt{P_\lambda}} \approx \frac{5 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{P_\lambda}}$$

9. - LA CURVA DI OSSERVABILITA' -

L'uscita al primo rivelatore è una uscita in corrente di forma:

$$I = I_0 + \Delta i + \delta i$$

ove Δi e I_0 sono le componenti alternate e continua del segnale, mentre δi è la fluttuazione dovuta alla sorgente ed al fotocatodo. A questo punto si opera una conversione corrente tensione con la contemporanea operazione di divisione tra il segnale (A.C.) ed il segnale (D.C.) in un carico R. Perciò il carico R genera un rumore termico che si aggiunge al rumore shot, e poichè queste fluttuazioni sono incorrelate si sommano le loro potenze nel comune carico. Cosicchè la varianza totale è:

$$\overline{v^2} = R^2 \overline{(i^2)}_{F.M.T.} + R^2 \overline{(i^2)}_R$$

ove $\overline{(i^2)}_R = (4KT\Delta f)/R$ è il rumore Johnson. Si ha quindi la varianza percentuale di tensione:

$$\frac{\overline{v^2}}{V^2} = \frac{\overline{v^2}}{R^2 I_a^2} = \frac{R^2 \overline{(i^2)}_{F.M.T.}}{R^2 I_a^2} + \frac{R^2 \overline{(i^2)}_R}{R^2 I_a^2}$$

$$= \frac{\overline{(i^2)}_{F.M.T.}}{I_a^2} + \frac{4KT\Delta f}{R(Ge\eta)^2} \left(\frac{hc}{\lambda P_\lambda} \right)^2$$

od anche:

$$\frac{\delta v}{V} = \left[\frac{2\Delta f \sigma}{(\sigma-1)\epsilon\eta} \frac{hc}{\lambda P_\lambda} + \frac{4KT\Delta f}{R(Ge\eta)^2} \left(\frac{hc}{\lambda P_\lambda} \right)^2 \right]^{1/2}$$

da cui si deduce che il rumore è dovuto essenzialmente al rumore shot, essendo il secondo addendo molto minore del primo.

Cosicchè si ha ora la grandezza

$$\frac{S(N)}{S(D.C.)} = \frac{\delta i_a}{I_a} = \frac{\delta v}{V_0}$$

da confrontare con la grandezza:

$$\frac{S(A.C.)}{S(D.C.)} = \frac{\Delta V(\Omega)}{V(\omega_0)}$$

In definitiva per osservare il segnale dovrà accadere:

$$\frac{\frac{S(AC)}{S(D.C.)}}{\frac{S(N)}{S(D.C.)}} = \frac{\Delta V(\Omega)}{V(\omega_0)} \cdot \frac{V(\omega_0)}{\delta v} \gg 1$$

La forma esplicita di questa espressione determina la banda equivalente Δf dell'amplificatore da usare, ovvero la costante di tempo θ da usarsi nel sistema di rivelazione sincrona; chiaramente la teoria fisica determina almeno l'ordine di grandezza di $\Delta V(\Omega)/V(\omega_0) = \Delta R/R$. Cioè avremo:

$$\frac{\Delta R}{R} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{2\sigma}{(\sigma-1)\epsilon\eta} \frac{hc}{\lambda P_\lambda} \right)^{1/2} + \frac{P_0}{P}} \right\} > (\Delta f)^{1/2} = \frac{1}{(8\theta)^{1/2}}$$

per esempio, per una sorgente non termica e un filtro doppio.

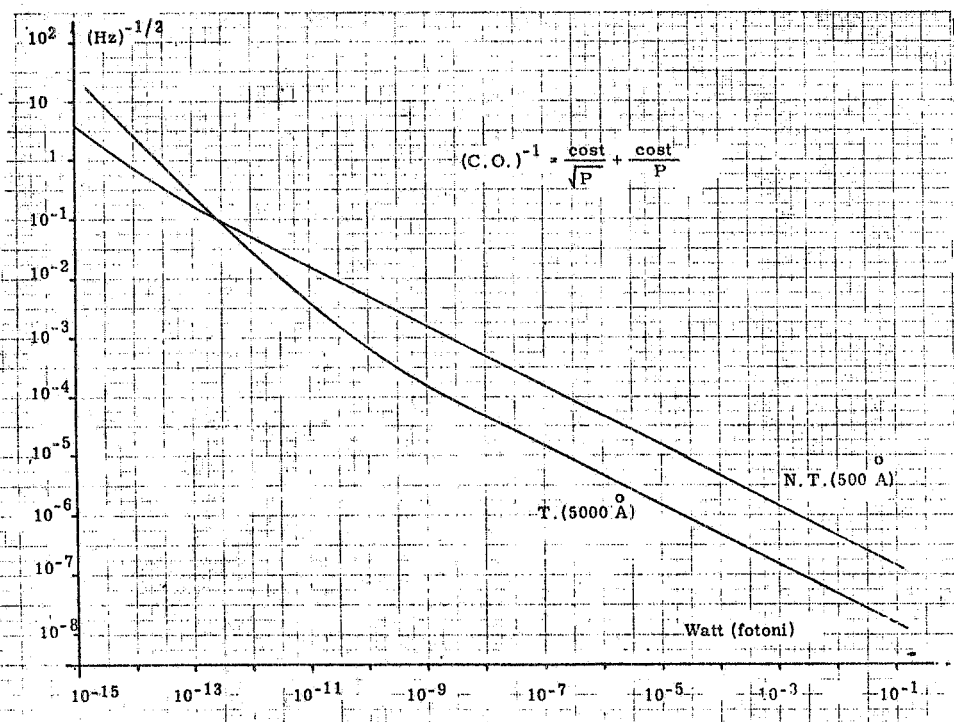


FIG. 13 - Le due curve rappresentano le funzioni.

$$\left. \frac{\delta i_a}{I_a} \right)_{T.} = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{P_\lambda}} + \frac{2.5 \cdot 10^{-14}}{P_\lambda}; \quad \lambda = 5000 \text{ \AA}$$

$$\left. \frac{\delta i_a}{I_a} \right)_{N. T.} = \frac{10^{-8}}{\sqrt{P_\lambda}} + \frac{2.5 \cdot 10^{-15}}{P_\lambda}; \quad \lambda = 500 \text{ \AA}$$

esprese in $\text{sec}^{1/2}$.

Perciò un esperimento di modulazione spettroscopica richiede una accurata scelta del primo rivelatore che deve avere la più alta possibile efficienza quantica η ed efficienza di collezione ε . La potenza luminosa sarà la maggiore ottenibile compatibilmente alla sorgente in uso, in modo da superare il ginocchio della curva di osservabilità dovuta alla corrente di buio. E' chiaro che per valori inferiori alla curva di osservabilità, essendo data la potenza luminosa $\propto R/R$, il segnale utile è confuso con il rumore.

La figura (13) mostra la curva di osservabilità definita come la funzione:

$$(C.O.) = \left\{ \left[\frac{\sigma_2}{(\sigma - 1)\varepsilon\eta} \frac{hc}{\lambda P_\lambda} \right]^{1/2} + \frac{P_o}{P_\lambda} \right\}^{-1} (\text{Hz})^{1/2}$$

per una sorgente termica ed una non termica.

Le due curve si riferiscono agli esempi già fatti, ma chiaramente non si possono riferire a nessun esperimento in quanto le singole esperienze hanno parametri da determinarsi volta per volta, in particolare per ogni esperienza il valore della potenza luminosa al primo rivelatore P_λ può variare drasticamente causa i fattori di risoluzione ($\Delta\lambda$), trasmissione (T_c), e dispersione (Φ). Ma è chiaro che al di là di questi fattori, praticamente eliminabili la sorgente può essere scelta, adoperata come nel caso di anelli di accumulazione, a dare la massima potenza. In particolare la sorgente non termica darà la massima potenza quando si usino specchi e reticoli focalizzanti, se non fossero usati avremmo il fattore di efficienza $w/(2\pi d) \approx 10^{-6}/1.3$ con $w = 0.1$ mm che è una fenditura piuttosto larga.

APPENDICE -

Uso dei grafici universali per il calcolo della potenza luminosa di Adone.

Nella pratica sperimentale presso la "lampada" Adone devesi avere l'ordine di grandezza della potenza luminosa irraggiata e quindi il numero di fotoni, a lunghezza d'onda che variano in relativamente piccoli intervalli. Ciò che interessa è essenzialmente la potenza ad una lunghezza d'onda in funzione dell'angolo di elevazione. Useremo perciò la funzione:

$$P_{\lambda} = A \cdot Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right)$$

ove

$$A = \frac{9}{32} \frac{c e_0^2}{(m_0 c^2)^8} \frac{E^8}{R^3} = 1.31 \times 10^{-7} \frac{E^8 (\text{GeV})}{R^3 (\text{m})} \frac{\text{Watt}}{\text{Å MRAD elet.}}$$

$Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right)$ è una funzione universale, fig. (14) ove

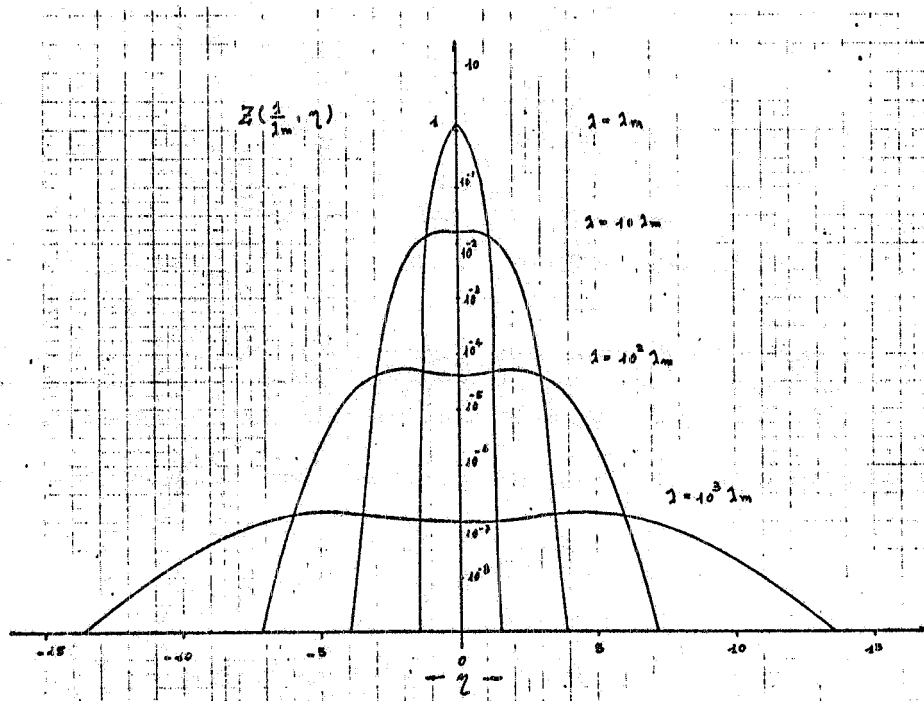


FIG. 14 - La funzione universale $Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right)$.

$\lambda_m = \frac{2.35 R(\text{m})}{E^3 (\text{GeV})}$ è la lunghezza d'onda cui si ha la massima potenza irraggiata;

$\eta = \frac{E(\text{GeV})}{5.12 \cdot 10^{-4}}$ ψ è il parametro che determina metà dell'angolo di elevazione,

il quale è centrato rispetto al piano orbitale. Poichè le funzioni universali sono state calcolate e graficate per multipli di λ_m secondo un fattore 10, quando si voglia la potenza ad una lunghezza d'onda intermedia è necessario sapere la potenza emessa per $\eta = 0$, ovvero sul piano orbitale. Si dà quindi la funzione

$Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta = \psi = 0\right)$ (Fig. 15) e si opera come segue:

- 1) Si determina $\lambda_m(\text{Å})$
- 2) Si determina $Z\left(\lambda_0/\lambda_m, \eta = 0\right)$ essendo λ_0 la lunghezza d'onda di lavoro. (Grafico Fig. 15)

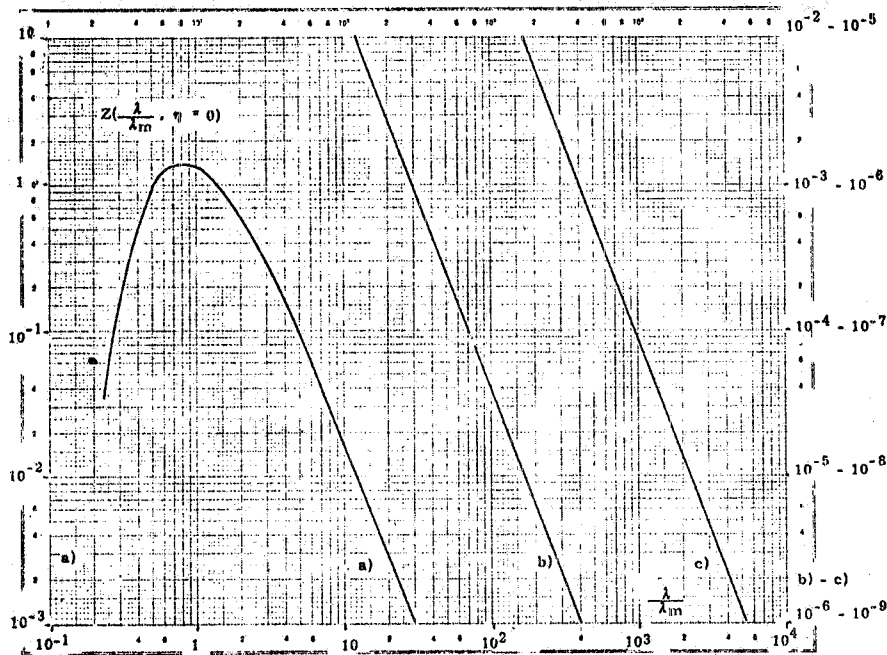


FIG. 15 - La funzione $Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta = 0\right)$.

- 3) Si riporta il valore trovato in 2) sull'ordinata del grafico di Fig. 14.
- 4) Si costruisce il rettangolo di lato $[Z(\lambda_0/\lambda_m)]$ e ascissa $[2\eta_0]$, ove η_0 è scelto approssimativamente in modo da accettare la potenza alla lunghezza d'onda graficata immediatamente superiore.
- 5) L (area del rettangolo moltiplicata per la costante A e per $N =$ numero elettroni da la potenza irradiata.

APPENDICE -

Uso dei grafici universali per il calcolo della potenza luminosa di Adone.

Nella pratica sperimentale presso la "lampada" Adone devesi avere l'ordine di grandezza della potenza luminosa irradiata e quindi il numero di fotoni, a lunghezza d'onda che variano in relativamente piccoli intervalli. Ciò che interessa è essenzialmente la potenza ad una lunghezza d'onda in funzione dell'angolo di elevazione. Useremo perciò la funzione:

$$P_{\lambda} = A \cdot Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right)$$

ove

$$A = \frac{9}{32} \frac{c e_0^2}{(m_0 c^2)^8} \frac{E^8}{R^3} = 1.31 \times 10^{-7} \frac{E^8(\text{GeV})}{R^3(\text{m})} \frac{\text{Watt}}{\text{\AA MRAD elet.}}$$

$Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right)$ è una funzione universale, fig. (14) ove

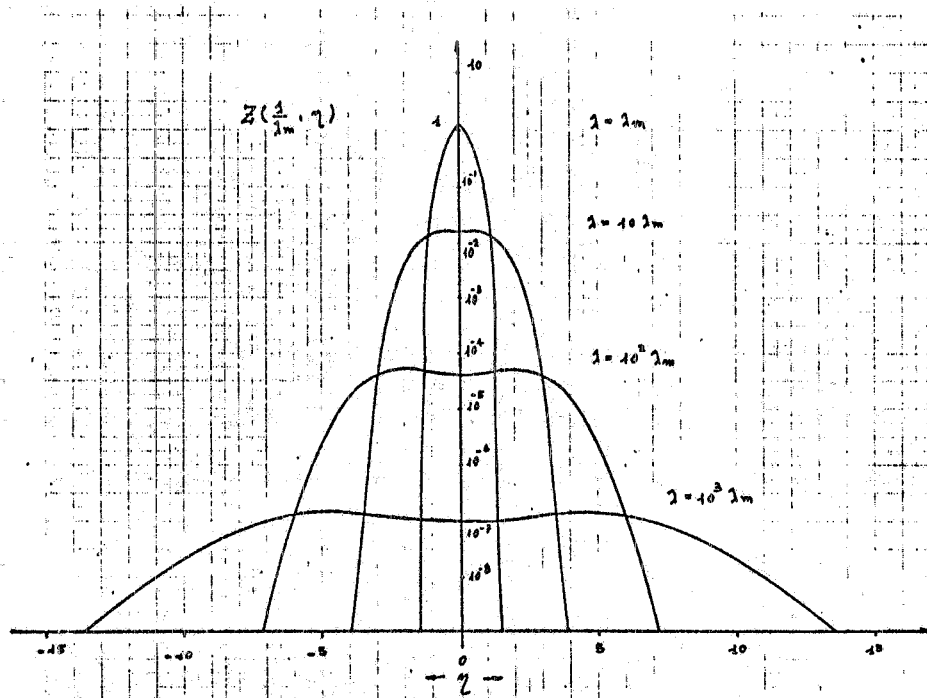


FIG. 14 - La funzione universale $Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta\right)$.

$\lambda_m = \frac{2.35 R(\text{m})}{E^3(\text{GeV})}$ è la lunghezza d'onda cui si ha la massima potenza irradiata;

$\eta = \frac{E(\text{GeV})}{5.12 \cdot 10^{-4}} \psi$ è il parametro che determina metà dell'angolo di elevazione,

il quale è centrato rispetto al piano orbitale. Poichè le funzioni universali sono state calcolate e graficate per multipli di λ_m secondo un fattore 10, quando si voglia la potenza ad una lunghezza d'onda intermedia è necessario sapere la potenza emessa per $\eta = 0$, ovvero sul piano orbitale. Si dà quindi la funzione

$Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta = \psi = 0\right)$ (Fig. 15) e si opera come segue:

- 1) Si determina $\lambda_m(\text{\AA})$
- 2) Si determina $Z(\lambda_o/\lambda_m, \eta = 0)$ essendo λ_o la lunghezza d'onda di lavoro. (Grafico Fig. 15)

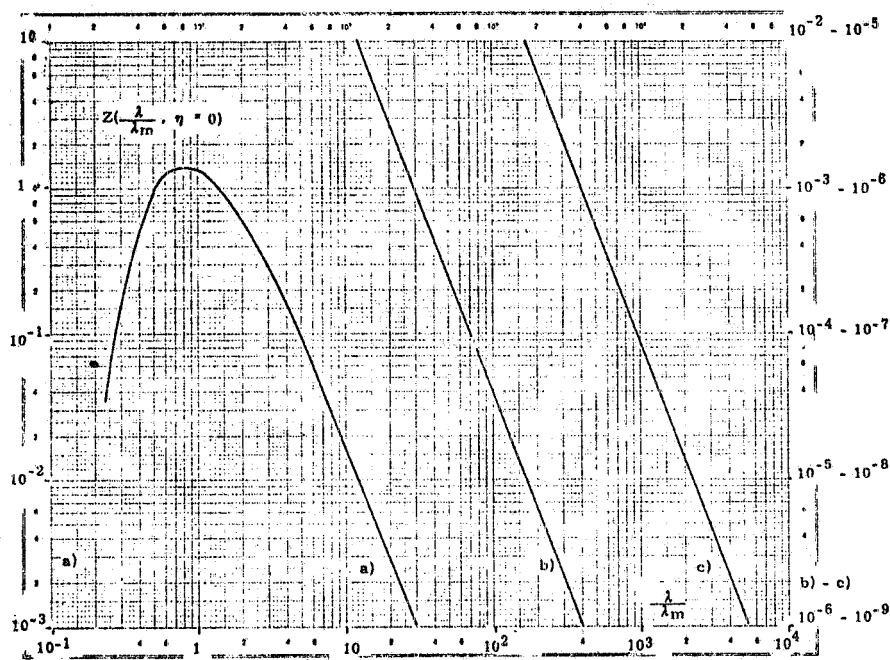


FIG. 15 - La funzione $Z\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}, \eta = 0\right)$.

- 3) Si riporta il valore trovato in 2) sull'ordinata del grafico di Fig. 14.
- 4) Si costruisce il rettangolo di lato $[Z(\lambda_o/\lambda_m)]$ e ascissa $[2\eta_o]$, ove η_o è scelto approssimativamente in modo da accettare la potenza alla lunghezza d'onda graficata immediatamente superiore.
- 5) L'area del rettangolo moltiplicata per la costante A e per $N =$ numero elettroni da la potenza irradiata.