

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-75/16(L)

•Aprile 1975

(Lezioni)

C. Mencuccini, A. Reale e G. Tallini: LEZIONI SULLA
TEORIA DEI GRUPPI DI LIE (PARTE I).

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

PREFAZIONE

Non c'è campo di ricerca in cui non si faccia uso della Teoria dei Gruppi, "una rete a maglie larghe, ma robusta, per pescare nel mare della conoscenza" - come la definì un nostro vecchio e saggio Professore. In questi ultimi anni, inoltre, essa ha assunto un nuovo ruolo rispetto al passato: si tende ad applicarla allo studio dei fenomeni fisici per scoprire, attraverso le simmetrie osservate, le leggi dinamiche delle forze che li governano. Questo è accaduto particolarmente in Fisica Nucleare e nella Fisica delle Alte Energie: basti pensare ai successi di SU_3 o SU_4 nella classificazione delle particelle elementari.

Come conseguenza di questa rinnovata importanza della Teoria dei Gruppi i fisici, in particolare gli sperimentali, si sono spesso trovati di fronte a questioni che non costituiscono il normale bagaglio di conoscenze matematiche di un ricercatore come: spazi topologici, algebre, rappresentazioni di gruppi compatti e non compatti e così via. Questo li ha obbligati ad una affrettata e spesso imprecisa acquisizione di nozioni che permettessero di seguire nei loro risultati le nuove teorie. Di conseguenza - eccettuati alcuni buoni trattati - si è assistito a una presentazione della Teoria dei Gruppi "for pedestrians" che talvolta lasciano insoddisfatto chi vuol capire anche i fondamenti di una teoria così bella, oltre che rallegrarsi per l'eventuale successo delle sue applicazioni.

E' così dunque che si è presentata per alcuni fisici l'esigenza di un approfondimento delle proprie conoscenze di Teoria dei Gruppi il che ha avviato un dialogo tra fisici-matematici col proposito di mettere i fisici in condizione di capire l'esatto significato dei concetti fondamentali che sono alla base della Teoria dei Gruppi e di informare i matematici di "ce qui se passe" oggi in Fisica, in vista di fruttuose collaborazioni.

Le lezioni che presentiamo, tenute da noi nei Laboratori di Frascati, sono un primo frutto di questa collaborazione (iniziata molti anni fa sotto gli ombrelloni delle spiagge di Formia e di Sabaudia). La collaborazione, certo, non è stata facile, perché si trattava di scrivere allo stesso tempo, con il rigore che soddisfa i lettori matematici, ma in modo che il testo non riuscisse, tuttavia, troppo astratto per i fisici, abituati a trattare queste cose in maniera "più intuitiva" (!).

In questa prima parte delle lezioni ci siamo fermati alle algebre di Lie; la classificazione di queste, la teoria delle rappresentazioni dei gruppi e lo studio più particolareggiato di quelli che maggiormente interessano i fisici sarà l'argomento della seconda parte delle lezioni.

Frascati, 25 Marzo 1975.

INDICE

CAP. I - RICHIAMI ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI

1. - Definizioni	Pag.	4
2. - Prodotto diretto o cartesiano tra insiemi	"	4
3. - Relazioni binarie	"	5
4. - Corrispondenza o applicazione	"	6
5. - Potenze (o numero cardinale) di un insieme	"	7

CAP. II - TEORIA DEI GRUPPI

1. - Definizioni	"	11
2. - Esempi di gruppi	"	11
3. - Proprietà dei gruppi	"	12
4. - Sottogruppi di un gruppo	"	13
5. - Classi laterali determinate da un sottogruppo in un gruppo	"	14
6. - Elementi coniugati in un gruppo	"	17
7. - Omomorfismi	"	17
8. - Prodotto diretto o cartesiano tra gruppi	"	21
9. - Gruppi operatori - Prodotto semi - diretto tra gruppi	"	22
10. - Ulteriori esempi di gruppi	"	25
Complemento ed esercizi	"	27

CAP. III - SPAZI VETTORIALI

1. - Spazi vettoriali. Definizioni ed esempi. Base	"	30
2. - Sottospazi vettoriali: sottospazi supplementari; somma diretta ; Prodotto tensoriale di spazi vettoriali	"	32
3. - Algebra	"	35
4. - Omomorfismi (o operatori lineari) tra spazi vettoriali. Automorfismi	"	36

CAP. IV - SPAZI TOPOLOGICI

1. - Definizioni e generalità sugli spazi topologici	"	38
2. - Applicazione continua tra spazi topologici	"	40
3. - Operazioni tra spazi topologici	"	41
4. - Assiomi di separazione	"	42
5. - Assiomi di numerabilità. Separabilità di uno spazio topologico	"	43
6. - Nozione di compattezza	"	43
7. - Nozione di connessione	"	45
8. - Cammini in uno spazio topologico. Spazi linearmente connessi	"	46
9. - Omotopia in uno spazio topologico	"	48
10. - Omeomorfismo locale tra spazi topologici	"	52
11. - Spazi topologici localmente linearmente connessi e localmente semplicemente connessi	"	53
12. - Spazio di ricoprimento universale di uno spazio topologico	"	54
13. - Spazi metrici	"	57

CAP. V - GRUPPI TOPOLOGICI

1. - Nozione di gruppo topologico	"	59
2. - Primi esempi di gruppi topologici	"	59
3. - Traslazioni e sistema fondamentale di intorchi dell'unità	"	60
4. - Sottogruppi di un gruppo topologico. Sottogruppi normali. Gruppo quoziente	"	61
5. - Esempi di sottogruppi di gruppi topologici	"	63
6. - Prodotto di gruppi topologici	"	65
7. - Omomorfismi e isomorfismi tra gruppi topologici	"	66
8. - Proprietà di connessione di un gruppo topologico	"	66
9. - Isomorfismo locale tra gruppi topologici	"	68
10. - Il gruppo di ricoprimento universale di un dato gruppo topologico	"	69

CAP. VI - VARIETA' DIFFERENZIABILI

1. - Richiami sulle funzioni differenziabili	Pag.	72
2. - Omeomorfismi differenziabili	"	73
3. - Spazi parametrizzabili e varietà topologiche	"	74
4. - Esempi di spazi parametrizzabili e di varietà topologiche	"	76
5. - Varietà differenziabili e analitiche	"	79
6. - Esempi di varietà differenziabili ed analitiche	"	79
7. - Sottovarietà aperte di V_n	"	81
8. - Varietà prodotto	"	82
9. - L'algebra delle funzioni differenziabili su V_n	"	83
10. - Cammini differenziabili su una varietà	"	84
11. - Spazio dei vettori tangenti in un punto di una varietà	"	85
12. - Vettori tangenti lungo un cammino	"	89
13. - Campi dei vettori tangenti ad una V_n	"	90
14. - Crochet e algebra di Lie su una varietà differenziabile	"	90
15. - Applicazioni differenziabili tra varietà	"	92
16. - Differenziale di una applicazione	"	95
17. - Varietà immerse	"	98

CAP. VII - GRUPPI DI LIE

1. - Nozione di gruppo di Lie	"	99
2. - Primi esempi di gruppi di Lie	"	99
3. - Sottogruppi di Lie di un gruppo di Lie	"	101
4. - Proprietà di connessione di un gruppo di Lie	"	102

CAP. VIII - ALGEBRA DI LIE ASSOCIATA A UN GRUPPO DI LIE

1. - Introduzione	"	104
2. - Definizione di algebra di Lie associata a un gruppo di Lie	"	104
3. - Costanti di struttura	"	107

PREMESSA -

Definizione di alcuni simboli logici. -

In seguito verrà fatto uso di concetti frequentemente ricorrenti che torna utile indicare con i simboli seguenti:

SIMBOLO	SIGNIFICATO
\forall	per ogni
\exists	esiste
\nexists	non esiste
$\exists!$	tale che
\Rightarrow	segue
\in	è elemento di
\notin	non è elemento di
$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$	equivale per definizione
\Leftrightarrow	equivale, se e solamente se (condizione necessaria e sufficiente)
\cup	unione (di insiemi)
$\dot{\cup}$	somma logica (di insiemi)
\vee	o, oppure (latino Vel)
\cap	intersezione (di insiemi)
\wedge	e
\equiv	coincide
\neq	diverso da
\subseteq	è contenuto (di insiemi).

CAP. I - RICHIAMI ALLA TEORIA DEGLI INSIEMI -

1. - DEFINIZIONI -

La nozione di oggetto, sinonimo di elemento o ente, è un concetto primitivo.

La nozione di insieme, sinonimo di aggregato o collezione o famiglia, è anch'esso un concetto primitivo.

Dare un insieme equivale a dare una legge - ben precisa, che non ammette equivoci né contraddizioni logiche - che permetta di affermare se un oggetto appartiene o no all'insieme.

Per indicare che un elemento a appartiene all'insieme A si scrive:

$$a \in A.$$

Si dice che un insieme B è contenuto in A o anche che B è un sottoinsieme o parte di A e si indica con

$$B \subseteq A$$

quando accade che

$$\forall b \in B \Rightarrow b \in A$$

Se $B \subseteq A$, ed esiste un elemento $a \in A$ tale che $a \notin B$, diremo che B è contenuto propriamente in A e scriveremo $B \subset A$.

Si definisce insieme vuoto e si indica con \emptyset l'insieme al quale non appartiene nessun elemento. L'insieme \emptyset è sottoinsieme o parte di un qualsiasi insieme.

Presi due elementi a, b di un insieme, con la scrittura $a = b$ intendiamo solamente dire che i due elementi sono identici.

Presi due insiemi A, B con la scrittura $A = B$ intendiamo dire che

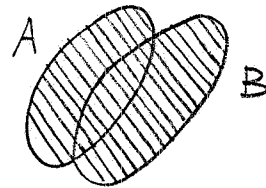
$$a \in A \iff a \in B$$

quindi si ha che:

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

Dati due insiemi A e B si chiama unione di A e B, e si scrive $A \cup B$, l'insieme costituito da tutti gli elementi che sono in A o in B (considerando gli eventuali elementi comuni ai due insiemi una sola volta). Cioè in simboli:

$$a \in A \cup B \stackrel{\text{def}}{\iff} a \in A \text{ o } a \in B$$



Si chiama somma logica di due insiemi A e B, e si scrive $A \dot{\cup} B$, l'insieme costituito da tutti gli elementi che sono in A o in B (considerando gli eventuali elementi comuni una volta come appartenenti ad A e una volta come appartenenti a B).

Se gli insiemi A e B non hanno elementi comuni, la unione e la somma logica di essi coincidono. Se, ad esempio, consideriamo l'insieme A costituito dagli elementi a, b, c e l'insieme B costituito dagli elementi b, c, d, l'insieme $A \cup B$ sarà formato da a, b, c, d, mentre l'insieme $A \dot{\cup} B$ da a, b_A, c_A, b_B, c_B, d , dove b_A vuol dire b pensato appartenente ad A, etc.

Dati due insiemi A e B, si definisce loro intersezione, e si scrive $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che sono in A e in B. Cioè in simboli:

$$a \in A \cap B \iff a \in A \text{ e } a \in B$$



Sia dato un insieme J di indici e supponiamo dato per ogni indice $i \in J$ un insieme A_i . L'insieme degli A_i che così si ottiene al variare di i in J prende il nome di famiglia di insiemi dipendenti dall'indice i variabili in J . Esso si denota con:

$$\{A_i\}_{i \in J}$$

Esempio 1. - Si consideri nel piano il cerchio C_i (inclusi i punti della circonferenza) con centro un fissato punto O e raggio dato da un numero intero i . Al variare di i nell'insieme N dei numeri interi positivi si ottiene una famiglia di cerchi $\{C_i\}_{i \in N}$.

Esempio 2. - Si consideri la famiglia $\{C_i\}_{i \in N}$ dei cerchi di cui all'esempio 1.

A che cosa si riduce l'unione e l'intersezione?

2. - PRODOTTO DIRETTO O CARTESIANO TRA INSIEMI. -

Dati due insiemi A e B si definisce prodotto cartesiano dei due insiemi e si indica con $A \times B$ l'insieme i cui elementi sono costituiti da tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Esempio 1. - Se A e B coincidono con l'insieme \mathbb{R} costituito dai numeri reali, $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali. Se allora A e B vengono rappresentati come l'asse x ed y di un sistema di coordinate cartesiane, l'insieme prodotto $A \times B$ sarà rappresentato dai punti del piano (x, y) .

Esempio 2. - Se A è l'insieme costituito dai segni $+$ e $-$, e B è l'insieme dei numeri naturali, cioè:

$$A \equiv (+, -) \quad B \equiv (0, 1, 2, \dots)$$

si ha:

$$A \times A = (\pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Dato un insieme A , si possono costruire i prodotti cartesiani seguenti

$$A^2 \stackrel{\text{def}}{\iff} A \times A, \quad A^3 \stackrel{\text{def}}{\iff} A \times A \times A, \dots$$

Esempio 3. - Se $A = (1, 2, 3)$

$$A^2 = A \times A = ((1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)).$$

Nell'insieme $A \times A$ si definisce insieme diagonale e si indica con Δ il sottoinsieme di $A \times A$, costituito dalle coppie (a, a) . Preso un elemento $(a, b) \in A \times A$, l'elemento (b, a) si dice simmetrico di (a, b) rispetto a Δ .

Esempio 4. - Nella rappresentazione su piano cartesiano delle coppie di numeri reali (insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) l'insieme Δ è costituito dalla bisettrice degli assi. Gli elementi simmetrici rispetto all'insieme Δ sono i punti simmetrici rispetto alla retta $x = y$.

3. - RELAZIONI BINARIE -

Dato un insieme A , diciamo che è definita una relazione binaria quando è data una legge, definita sulle coppie ordinate di elementi (a, b) di A , tale che per ciascuna coppia (a, b) essa legge ammette due valori logici: vero e falso. Nel primo caso si scrive aRb e si dice che a è in relazione con b , nel secondo caso si scrive $A \not R b$ e si dice che a non è in relazione con B .

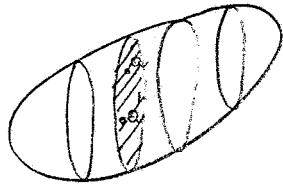
Esempio. - Sia A l'insieme costituito da tutte le rette di un piano. La relazione di parallelismo tra due $a, b \in A$ è una relazione binaria. Le rette in relazione sono le coppie di rette parallele ad a . Al variare dell'elemento a si ottengono tanti possibili sottoinsiemi K , diversi tra loro, quante sono le possibili direzioni nel piano.

Una relazione binaria si dice di equivalenza se gode delle 3 proprietà seguenti:

6.

- 1) riflessiva: $\forall a \in A \Rightarrow aRa$
- 2) simmetrica: $\forall a, b \in A / aRb \Rightarrow bRa$
- 3) transitiva: $\forall a, b, c \in A, aRb, bRc \Rightarrow aRc$.

La relazione binaria dell'esempio precedente è una relazione di equivalenza. Dato un insieme A ed una relazione di equivalenza R; tra gli elementi di A rimane determinata una suddivisione in classi (classi di equivalenza) tale che due elementi che sono in relazione appartengono alla stessa classe.



$$aRa' \iff a' \in \{a\}$$

dove si è indicato con $\{a\}$ la classe degli elementi di A che sono in relazione di equivalenza R con a.

L'insieme costituito da tutte le classi di equivalenza, definite in un insieme A da una relazione di equivalenza R, si chiama insieme quoziente e si indica con A/R .

4. - CORRISPONDENZA O APPLICAZIONE. -

Dati due insiemi A, A' si dice applicazione di A in A' una legge φ che consente di associare ad ogni elemento $a \in A$ un elemento $a' \in A'$. Si scrive, in simboli:

$$\varphi: A \rightarrow A' \text{ oppure } a' = \varphi(a) \text{ con } a \in A, a' \in A' \text{ oppure } A \xrightarrow{\varphi} A'$$

$$\text{oppure } \varphi: a \in A \rightarrow a' = \varphi(a) \in A'$$

Si dice che l'elemento $a' = \varphi(a)$ è l'immagine di a mediante φ . L'insieme delle immagini a' degli elementi a di A costituisce un sottoinsieme di A' che si chiama immagine di A mediante φ in A' e si indica con $\text{Im } \varphi$.

Preso un elemento a' di A', l'insieme degli elementi di A che mediante φ vanno in a' si dice controimmagine di a' mediante φ e si indica con $\varphi^{-1}(a')$.

Un'applicazione φ si dice:

surgettiva se ogni elemento di A' proviene, mediante φ , da qualche elemento di A, cioè se $\text{Im } \varphi = A'$;

iniettiva se la controimmagine di ogni elemento a' di $\varphi(A)$ è ridotta ad un solo elemento (ossia se vi è corrispondenza biunivoca tra A e $\varphi(A) = \text{Im } \varphi$);

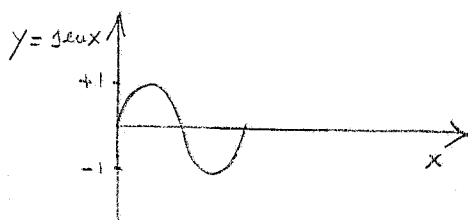
biettiva se è contemporaneamente surgettiva e iniettiva cioè se pone una corrispondenza biunivoca tra A e A'. Per esempio l'applicazione identica di A in se stesso, che fa corrispondere ad ogni elemento di A l'elemento stesso, è una biiezione.

Se $\varphi: A \rightarrow A'$ è una applicazione biettiva tra A ed A', rimane determinata l'applicazione $\varphi^{-1}: A' \rightarrow A$ che fa corrispondere ad ogni a' di A' l'unico elemento a di A tale che $\varphi(a) = a'$. La $\varphi^{-1}: A' \rightarrow A$ prende il nome di trasformazione inversa della φ .

Se $\varphi: A \rightarrow A'$ e $\psi: A' \rightarrow A''$ sono applicazioni, rimane determinata l'applicazione di A in A'' definita da: $a \in A \rightarrow \psi[\varphi(a)] \in A''$. Essa prende il nome di applicazione prodotto di φ e ψ e si denota con $\psi \varphi$.

Una applicazione φ si dice costante quando tutti gli elementi di A vanno a finire, mediante φ , in un solo elemento di A'.

Esempi - La funzione $y = \sin x$ è una applicazione tra l'asse x e l'asse y, che non è iniettiva, perchè ad ogni valore di y dell'intervallo (-1, 1), che costituisce l'immagine dell'applicazione, corrispondono infiniti valori di x; cioè la controimmagine non è un solo elemento. Essa non è neanche surgettiva perchè se y è tale che $|y| > 1$, non esiste nessun x che ha come corrispondente quell'y.



La funzione $y = x^3 - x$ è una applicazione tra l'asse x e l'asse y surgettiva, ma non è biettiva.

La funzione $y = \lg x$ è una applicazione iniettiva tra gli assi x e y .

La funzione $y = x^3$ è una applicazione fra gli assi x e y , biettiva.

5. - POTENZA (O NUMERO CARDINALE) DI UN INSIEME. -

a) Potenza di un insieme.

Due insiemi A e B si dicono equipotenti se è possibile porre tra essi una corrispondenza biunivoca, cioè se sono biettivi.

Si chiama potenza di un insieme A , e si scrive $\text{pot } A$, la classe di tutti gli insiemi equipotenti ad A .

Se l'insieme A è costituito da un numero finito di elementi, $\text{pot } A$ è il numero cardinale finito relativo ad A . Se invece A è costituito da un numero non finito di elementi, $\text{pot } A$ prende il nome di numero cardinale transfinito.

La relazione di equipotenza definita nella totalità degli insiemi è una particolare relazione di equivalenza; infatti gode delle proprietà:

- 1) riflessiva: un insieme A è equipotente a se stesso.
- 2) simmetrica: se un insieme A è equipotente ad un altro B , questo è equipotente al primo.
- 3) transitiva: dati tre insiemi A , B , C , se A è equipotente a B e B è equipotente a C , è A equipotente a C .

Dati due insiemi A e B , supponiamo che si possa porre una corrispondenza biunivoca tra A e una parte di B . Diremo allora che la potenza di A è minore o uguale alla potenza di B e scriveremo $\text{pot } A \leq \text{pot } B$. Tale definizione è ben posta perchè se A' è equipotente ad A e B' è equipotente a B evidentemente si potrà porre una corrispondenza biunivoca tra A' e una parte di B' .

La relazione di \leq definita tra le potenze è una relazione d'ordine: cioè gode delle proprietà riflessiva ed inoltre gode della proprietà antisimmetrica in base al seguente Teorema di Cantor - Bernstein, (di cui omettiamo la dimostrazione):

Teorema 5.1 (di Cantor-Bernstein). -

DATI DUE INSIEMI A E B , SE ESISTONO UNA CORRISPONDENZA BIUNIVUCA TRA A E UNA PARTE DI B E UNA CORRISPONDENZA BIUNIVUCA TRA B E UNA PARTE DI A , ALLORA ESISTE UNA CORRISPONDENZA BIUNIVUCA TRA A E B , CIOE' A E B SONO EQUIPOTENTI. ONDE:

$$\text{pot } A \leq \text{pot } B, \text{pot } B \leq \text{pot } A \implies \text{pot } A = \text{pot } B$$

8.

b) Potenza del numerabile. -

Si dice che un insieme ha la potenza del numerabile se si può porre un corrispondenza biunivoca con i numeri naturali $N(1, 2, \dots, n, \dots)$, cioè i suoi elementi si possono ordinare secondo una successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Diamo qui di seguito alcuni teoremi, omettendone talvolta la dimostrazione che lasciamo al lettore.

Teorema 5.2. -

LA SOMMA LOGICA $\bigcup_{i \in N} A_i$ DI UNA FAMIGLIA NUMERABILE DI INSIEMI NUMERABILI $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ E' UN INSIEME NUMERABILE.

Dimostrazione. -

Infatti siano dati gli insiemi:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \\
 A_2 &= a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots \\
 &\dots \ \dots \ \dots \\
 A_m &= a_{m1} \ a_{m2} \ a_{m3} \ \dots
 \end{aligned}$$

Bisogna dimostrare che gli elementi a_{ik} si possono ordinare secondo una successione. Si consideri, all'uopo, la successione seguente:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \dots$$

cioè si scrivono prima gli elementi per i quali la somma degli indici è due, poi quelli per i quali la somma degli indici è tre, e così via; gli elementi che hanno per somma degli indici lo stesso numero, si ordinino secondo valori crescenti del primo indice. Rimane così provato che $\bigcup_{i \in N} A_i$ è numerabile.

In modo del tutto analogo si prova che:

Teorema 5.3. -

LA SOMMA LOGICA $\bigcup A_i$ DI UNA FAMIGLIA FINITA DI INSIEMI NUMERABILI, A_1, \dots, A_n , E' UN INSIEME NUMERABILE.

Per esempio l'insieme dei numeri interi relativi è un insieme numerabile perchè è la somma logica degli insiemi dei numeri interi non negativi e dei numeri interi negativi, entrambi numerabili.

Risulta evidente che se un insieme numerabile viene privato di alcuni suoi elementi si ottiene ancora un insieme numerabile o finito.

Teorema 5.4. -

DATI DUE INSIEMI A E B ENTRAMBI NUMERABILI, IL PRODOTTO CARTESIANO $A \times B$ E' ANCORA UN INSIEME NUMERABILE.

Dalla proposizione precedente e in forza della proprietà associativa del prodotto cartesiano si prova facilmente che:

Teorema 5.5. -

DATI n INSIEMI NUMERABILI A_1, A_2, \dots, A_n , L'INSIEME $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ E' NUMERABILE.

Proviamo ora che:

Teorema 5.6. -

L'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI E' NUMERABILE.

Dimostrazione. -

Infatti, se I è l'insieme numerabile degli interi relativi, l'insieme $I \times I$, per il teorema 5.4 è numerabile. Sopprimiamo da $I \times I$ le coppie il cui secondo elemento è lo zero e identifichiamo le coppie del tipo (n, m) e (kn, km) . L'insieme che così si ottiene risulta allora ancora numerabile; un tale insieme coincide con quello, Q , dei numeri razionali relativi. Onde l'asserto.

Da quanto precede si ha che gli insiemi $Q^2 = Q \times Q$, $Q^3 = Q \times Q \times Q$, ... $Q^n = Q \times Q \times \dots \times Q$, sono numerabili; cioè l'insieme delle n -ple ordinate di numeri razionali risulta numerabile. Dunque i punti del piano (x, y) e dello spazio (x, y, z) a coordinate razionali costituiscono insiemi numerabili, e così i punti dello spazio numerico razionale ad n dimensioni.

Se S è un insieme infinito, sfruttando il postulato di Zermelo (o postulato delle infinite scelte libere), si può determinare in S un insieme numerabile. Precisamente si scelga un elemento a_1 di S , poi un elemento a_2 , poi a_3 , e così via. Questo procedimento non ha fine perchè S infinito. Rimane così determinata la successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ contenuta in S e quindi in corrispondenza biunivoca con una parte di S . Se ne deduce la seguente proposizione:

Teorema 5.7. -

QUALUNQUE SIA L'INSIEME S INFINITO SI HA CHE LA POTENZA DI S È MAGGIORE O UGUALE DI QUELLA DEL NUMERABILE.

c) Potenza del continuo. -

Si chiama potenza del continuo quella dell'insieme dei numeri reali.

Proviamo che:

Teorema 5.8. -

OGNI INTERVALLO (a, b) APERTO, CHIUSO A SINISTRA, A DESTRA, O CHIUSO DELL'ASSE REALE HA LA POTENZA DEL CONTINUO.

Dimostrazione. -

Consideriamo l'applicazione $y = \operatorname{tg} x$, con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, che pone una corrispondenza biunivoca tra l'intervallo aperto $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ e tutto l'asse y ; tale applicazione prova che tale intervallo ha la potenza del continuo. Ma l'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ si può trasformare mediante una similitudine nell'intervallo aperto (a, b) . Aggiungendo all'intervallo aperto (a, b) uno o entrambi gli estremi, si ottiene un intervallo chiuso a sinistra, a destra, o chiuso che, evidentemente, ha ancora la potenza del continuo. Onde l'asserto.

Teorema 5.9. -

OGNI SEMIRETTA, APERTA O CHIUSA, DELL'ASSE REALE HA LA POTENZA DEL CONTINUO.

Dimostrazione. -

Si consideri la funzione $y = \operatorname{lg} x$; essa pone una corrispondenza biunivoca tra la semiretta, aperta, dell'asse delle x e tutto l'asse y . Di qui segue, immediatamente, l'asserto.

Teorema 5.10. -

LA POTENZA DEL CONTINUO È MAGGIORE DI QUELLA DEL NUMERABILE.

Teorema 5.11. -

I PUNTI DI UN QUADRATO (APERTO) FORMANO UN INSIEME CHE HA LA STESSA POTENZA DELL'INSIEME DEI PUNTI DI UN INTERVALLO (APERTO). -

Teorema 5.12. -

I PUNTI DI UN PIANO REALE COSTITUISCONO UN INSIEME AVENTE LA POTENZA DEL CONTINUO. -

Dimostrazione. -

I punti di un piano si possono mettere in corrispondenza biunivoca con quelli del quadrato aperto di vertici $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$ del piano cartesiano reale (x, y) mediante la cor

10.

rispondenza $x' = x/\sqrt{1-x^2}$, $y' = y/\sqrt{1-y^2}$ onde l'asserto per il teorema 5.12.

Teorema 5.13. -

L'INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI HA LA POTENZA DEL CONTINUO.

Essi possono, infatti, mettersi in corrispondenza biunivoca con punti di un piano^(x).

Teorema 5.14. -

LO SPAZIO REALE NUMERICO AD n DIMENSIONI, \mathbb{R}^n , HA LA POTENZA DEL CONTINUO.

Esercizi. -

- 1) - Verificare che la relazione di parallelismo delle rette in un piano è una relazione di equivalenza.
- 2) - Dimostrare che la relazione di perpendicolarità tra rette in un piano non è una relazione di equivalenza.
- 3) - Si consideri l'insieme dei numeri interi positivi, e la relazione binaria che mette in relazione ciascun numero con i suoi multipli interi (per esempio $a = 2$ genera il sottoinsieme $K = 2, 4, 6, \dots$). Dimostrare che tale relazione binaria non è di equivalenza.
- 4) - Immaginate di dividere in gruppetti un mazzo di carte francesi in modo che in ognuno di essi vi siano tutte e sole le carte di un solo colore. Tale criterio di suddivisione ha i caratteri che de finiscono una relazione d'equivalenza. Ogni gruppetto fornisce un elemento dell'insieme quoziente di quello dato, rispetto a quella relazione.

(x) - L'insieme dei numeri trascendenti ha anche la potenza del continuo.

CAP. II - TEORIA DEI GRUPPI -

1. - DEFINIZIONI. -

Chiamasi gruppo un insieme G di elementi, finito od infinito, in cui sia definita una legge di composizione ("moltiplicazione") in maniera tale che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

$$(1) \quad \forall a, b \in G \Rightarrow c = ab \in G$$

(la notazione ab indica l'elemento ottenuto con la composizione o moltiplicazione dei due elementi a, b);

$$(2) \quad \forall a, b \in G : (ab)c = a(bc)$$

vale cioè la proprietà associativa;

$$(3) \quad \exists v \in G \quad \text{tale che} \quad \forall a \in G : va = av = a$$

u è l'elemento unità ed è unico; infatti $uu' = u'u = u' = u$;

$$(4) \quad \forall a \in G \Rightarrow a' \in G \quad \text{tale che} \quad aa^{-1} = a^{-1}a = v$$

L'elemento a^{-1} si dice inverso di a .

Un gruppo si dice abeliano se vale la proprietà commutativa nella legge di composizione, cioè:

$$\forall a, b \in G : ab = ba$$

Ordine di un gruppo è la potenza del gruppo: G . Se G è finito l'ordine è il numero cardinale finito degli elementi di G . Se G è infinito l'ordine è il numero cardinale infinito determinato dallo insieme G .

2. - ESEMPI DI GRUPPI. -

A) Gruppi infiniti. -

a) I numeri interi relativi incluso lo zero costituiscono gruppo rispetto alla somma. Lo zero coincide l'"unità" e l'inverso di un elemento a con $-a$.

b) I numeri razionali positivi (escluso lo zero) costituiscono gruppo rispetto al prodotto. Il numero 1 è l'elemento unità.

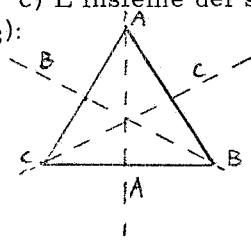
c) I numeri reali o complessi (escluso lo zero) costituiscono gruppo rispetto al prodotto. Il numero 1 è l'elemento unità.

B) Gruppi finiti. -

a) Le rotazioni intorno ad un asse ciascuna di un angolo pari a $m(2\pi/n)$ (n intero, $m = 0 \dots n$), costituiscono un gruppo, con n elementi, rispetto al prodotto di due rotazioni (cioè rispetto all'applicazione successiva di due rotazioni).

b) L'insieme costituito dai numeri $+1, -1$ forma un gruppo di ordine 2 rispetto al prodotto.

c) L'insieme dei seguenti movimenti che mutano un triangolo equilatero in se stesso (gruppo D_3):



- 1) A rotazione di 180° intorno all'asse AA;
 - 2) B rotazione di 180° intorno all'asse BB;
 - 3) C rotazione di 180° intorno all'asse CC;
- (con gli assi AA, BB, CC solidali al piano del foglio);

12.

- 4) D rotazione oraria di 120° nel piano del foglio;
5) E rotazione antioraria di 120° nel piano del foglio;
6) U operazione "identità" che non muove il triangolo;
costituisce gruppo rispetto alla successiva applicazione di due operazioni (v. esercizio 1 e 2).

d) Le matrici quadrate a coefficienti reali, di ordine 2 non degeneri (determinante $\neq 0$) costituiscono gruppo rispetto al prodotto righe per colonne.

L'elemento generico del gruppo è la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \Delta = ad - bc \neq 0$$

l'unità è la matrice

$$U = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e l'inverso di A è

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{vmatrix}$$

Più in generale si ha che:

e) Le matrici quadrate di ordine n, non degeneri, a coefficienti reali o complessi costituiscono gruppo rispetto al prodotto righe per colonne in cui l'unità è data dalla matrice $u = \|\delta_{ij}\|$ l'inverso della matrice $A = \|\alpha_{ik}\|$ è la matrice $A^{-1} = \|\alpha_{ki}/\det A\|$ dove α_{ki} è il complemento algebrico di α_{ik} in A.

3. - PROPRIETA' DEI GRUPPI. -

Per i gruppi valgono le seguenti proprietà, le prime due delle quali sono in immediata dimostrazione:

I) - Proprietà di semplificazione.

$$\forall a \in G : ax = ax' \Rightarrow x = x'$$

$$\forall a \in G : xa = x'a \Rightarrow x = x'$$

II) - Proprietà del quoziente.

$$\forall a, b \in G : ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b$$

$$xa = b \Rightarrow x = b^{-1}a$$

III) - Proprietà dell'inverso.

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Dim.: $(ab)(ab)^{-1} = v ; (ab)(b^{-1}a^{-1}) = abb^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = v$

In generale

$$(a_1 a_2 \dots a_m)^{-1} = a_m^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$$

IV) - L'inverso dell'inverso. -

$$\forall a \in G : (a^{-1})^{-1} = a$$

Dim.:

$$\text{per definizione } (a^{-1})(a^{-1})^{-1} = v \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = av = a$$

V) - Potenza in un gruppo.

Introduciamo il concetto di potenza di un elemento a appartenente ad un gruppo G ,

$$\forall a \in G, \text{ si pone}$$

$$a^0 = v \quad a^1 = a \quad a^2 = aa, \quad a^p = \underbrace{aa \dots a}_{p \text{ volte}}$$

$$a^{-p} = (a^{-1})^p \quad \text{con } p \text{ intero positivo}$$

Da qui deriva:

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm} \quad \text{con } n, m \text{ interi relativi.}$$

E' importante notare che in generale risulta $(ab)^n \neq a^n b^n$. Se però a, b sono tra loro permutabili ($ab = ba$), risulta:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

L'uguaglianza vale sempre, dunque, se il gruppo è abeliano.

4. - SOTTOGRUPPI DI UN GRUPPO. -

Definizione: Si dice che un sottoinsieme non vuoto H di G è un sottogruppo di G se H risulta un gruppo rispetto alle operazioni di G , cioè, concisamente:

$$H \subseteq G \quad H \neq \emptyset$$

$$(1) \quad \forall a, b \in H \Rightarrow ab \in H \quad HH \subseteq H$$

$$(2) \quad \forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \quad H^{-1} \subseteq H$$

Vale il seguente teorema:

Teorema 4.1. -

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$ SIA UN SOTTOGRUPPO DI G E' CHE:

$$(3) \quad \forall a, b \in G \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

Dimostrazione:

La condizione necessaria essendo evidente, basta dimostrare la sufficienza della (3).

Poichè $H \neq \emptyset$:

$$\exists a \in H \Rightarrow (\text{per la (3)}) \quad aa^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow v \in H$$

$$\forall b \in H \Rightarrow vb^{-1} \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$$

$$\forall a, b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H \Rightarrow (\text{per la (3) applicata alla coppia } ab^{-1})$$

$$a(b^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow ab \in H$$

- Ogni gruppo G ammette due sottogruppi banali: il gruppo costituito dalla unità e G stesso;
- Due sottogruppi di G hanno sempre l'unità in comune.
- Se H e K sono due sottogruppi di G , $H \cap K$ è ancora sottogruppo di G .
- Se H e K sono due sottogruppi di G , si definisce unione di H e K e si indica con $H \cup K$ il minimo sottogruppo che contiene H e K , cioè l'intersezione di tutti i gruppi contenenti H e K . Si osservi che $H \cup K$ così definito non è in generale l'unione, nel senso della teoria degli insiemi, di H e K .

Esempio - Sia G il gruppo additivo dei numeri interi relativi, H il sottogruppo dei numeri pari e K quello dei numeri multipli di 3. Allora $H \cap K$ è il gruppo dei numeri multipli sia di 2 che di 3 e quindi di 6 mentre $H \cup K$ è il gruppo G stesso. Infatti ogni gruppo contenente H e K deve contenere $2 \in H$ e $3 \in K$ e quindi deve contenere $3-2 = 1$. Ma allora deve anche contenere $1+1 = 2$, $2+1 = 3$, $3+1 = 4$, $4+1 = 5$, ... etc. e i loro opposti onde deve coincidere con G . Da notare che la unione nel senso della teoria degli insiemi, sarebbe l'insieme dei numeri multipli di 2 e di 3, che non coincide con G .

Se G è un gruppo tutte le potenze di $a \in G$ costituiscono un sottogruppo di G . Infatti (cfr. Teorema 4.1):

$$\forall a^m, a^n \in H \Rightarrow a^m a^{-m} = a^{m-m} \in H$$

Due casi si possono presentare:

I) $a^n \neq a^m$ per ogni $n \neq m$. Allora $H(a^0 = u, a^1, a^2, \dots, a^n, \dots)$ è infinito e si dice che a ha periodo infinito.

II) Esistono due interi n, m (supponiamo $n > m$) tali che $a^n = a^m$. Ne segue $a^{n-m} = u$. Dunque esiste un intero $p' > 0$ tale che $a^{p'} = u$. Ma allora i numeri p' che godono di tale proprietà sono infiniti (un qualsiasi multiplo di uno di essi gode di tale proprietà).

Sia p il più piccolo intero positivo tale che

$$a^p = u$$

allora il sottogruppo sarà costituito dagli elementi

$$a^0 = u, a^1 = a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}, a^p = u$$

$$(a^{p+1} = a^p \cdot a = u \cdot a = a)$$

Dunque H contiene p elementi e si dice che ha periodo p .

Un gruppo si dice ciclico se è generato dalle potenze di un suo elemento.

5. - CLASSI LATERALI DETERMINATE DA UN SOTTOGRUPPO IN UN GRUPPO. -

Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo

$$H \subseteq G$$

In G rimane definita la seguente relazione binaria R_d :

$$a, b \in G \quad a R_d b \iff ab^{-1} \in H$$

Dimostriamo che R_d è una relazione d'equivalenza.

1) Vale la proprietà riflessiva:

$$a R_d a, \quad a \in G$$

Infatti:

$$aa^{-1} = u \in H.$$

2) Vale la proprietà simmetrica:

$$a R_d b \Rightarrow b R_d a \quad a, b \in G$$

Dim.:

$$a R_d b \Rightarrow a b^{-1} \in H \Rightarrow (a b^{-1})^{-1} \in H = b a^{-1} \in H \Leftrightarrow b R_d a$$

3) Vale la proprietà transitiva:

$$a R_d b, b R_d c \Rightarrow a R_d c \quad a, b, c \in G$$

Dim.:

$$\begin{aligned} a R_d b, b R_d c &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a b^{-1} \in H, b c^{-1} \in H \Rightarrow a b^{-1} b c^{-1} \in H \Rightarrow \\ &\Rightarrow a c^{-1} \in H \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a R_d c \end{aligned}$$

Resta individuata in G una partizione in classi di equivalenza (cfr. Cap. I, 3). La classe individuata dall'elemento $a \in G$ si indica con:

$$\{a\}_d$$

ed è data da:

$$\{a\}_d = H a$$

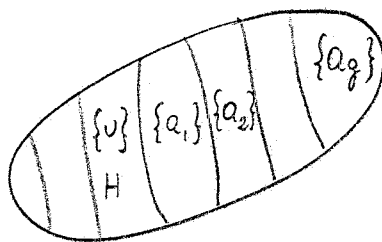
ove con il simbolo $H a$ si intende l'insieme ottenuto moltiplicando ogni elemento di H per a a destra. Se $a \in H$ per definizione di sottogruppo, $\forall b \in H, ab \in H$ e dunque l'operazione $H a$ genera ancora H con gli elementi in diversi ordine.

Dimostriamo la precedente eguaglianza tra insiemi:

$$\begin{aligned} b \in \{a\}_d &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} b R_d a \Leftrightarrow b a^{-1} = c \in H \Leftrightarrow b = c a, c \in H \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b \in H a \end{aligned}$$

La partizione di G (di ordine g) in classi di equivalenza sarà simbolicamente indicata con

$$G = H + H a_1 + H a_2 + H a_3 + \dots + H a_g$$



In modo analogo si definisce la relazione sinistra R_s

$$a R_s b \Leftrightarrow a^{-1} b \in H$$

che risulta essere anch'essa di equivalenza e che individua la classe $\{a\}_s$ data da $\{a\}_s = aH$

Simbolicamente:

$$G = H + a_1 H + a_2 H + \dots + a_g H$$

Vale il seguente teorema (cfr. Cap. I, 3);

Teorema 5.1. -

LE CLASSI DESTRE (O SINISTRE) (IN INGLESE "LEFT OR RIGHT COSETS") GODONO DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1) SONO TRA LORO A DUE A DUE PRIVE DI ELEMENTI COMUNI E QUINDI UNA SOLA CONTIENE L'UNITÀ.

2) LA CLASSE $\{u\}_s = uH = Hv = \{u\}_d$ ONDE, PER OGNI a NON APPARTENENTE AD H , LA CLASSE $\{a\}_s$ O $\{a\}_d$ NON È UN SOTTOGRUPPO (CIOÈ SOLO UNA CLASSE, $\{u\} = H$, CONTIENE

L'UNITA', LE ALTRE NO, E QUINDI ESSE NON COSTITUISCONO DEI SOTTOGRUPPI).

Dimostrazione. -

Gli elementi a e b individuano mediante R_d due classi $\{a\}_d, \{b\}_d$. Preso un elemento $c \in G$ non è possibile che esso appartenga simultaneamente alle classi $\{a\}$ e $\{b\}$.

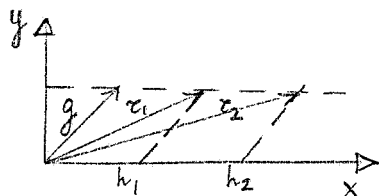
Se ciò fosse:

$$\begin{aligned} a R_d c, b R_d c &\Rightarrow \text{(p. la p. simmet.) } a R_d c, \\ c R_d b &\Rightarrow \text{(p. la p. trans.) } a R_d b \end{aligned}$$

da cui, essendo a e b arbitrari sulle rispettive classi, queste dovrebbero coincidere. Le stesse considerazioni si applicano a gruppi di ordine infinito.

Esempio. -

Sia G l'insieme dei vettori del piano xy e H i vettori il cui estremo è sempre sull'asse x . Indichiamo con \vec{h} un generico vettore di H e con \vec{g} un generico vettore del piano xy (non giacente sull'asse x). G e H costituiscono gruppo rispetto alla somma. Il generico "left coset" o classe sinistra è l'insieme dei vettori $\vec{g} + \vec{h} = \vec{r}$ che chiaramente, al variare di h , descrivono una retta parallela all'asse x . Al cambiare di g cambia la retta ma non la sua giacitura. E' chiaro che "classificando" i vettori su queste classi sinistre, si ricopre di nuovo tutto il piano xy .



Un sottogruppo si dice normale o invariante se

$$\forall a \in G \quad aH = Ha \quad \text{ovvero} \quad \{a_s\} = \{a_d\}$$

Un sottogruppo H di un gruppo abeliano è sempre normale (vedi esercizio 4).

Teorema 4.2. -

SE H E' UN SOTTOGRUPPO NORMALE DI G , SI HA CHE:

$$\{a\}\{b\} = aHb = a(Hb) = a(bH) = abH = \{ab\}$$

POSSIAMO ALLORA DEFINIRE NELL'INSIEME DELLE CLASSI $\{a\}$, UN PRODOTTO, PONENDO:

$$\{a\}\{b\} = \{ab\}$$

RISPETTO A TALE PRODOTTO L'INSIEME DELLE CLASSI $\{a\}$ COSTITUISCE, UN GRUPPO CHE SI DENOTA CON G/H E SI CHIAMA GRUPPO QUOZIENTE.

Dimostrazione. -

$$\begin{aligned} - \forall \{a\}, \{b\} \in G/H &\Rightarrow \{a\}\{b\} = \{ab\} \in H \\ - \forall \{a\}, \{b\}, \{c\} \in G/H &\Rightarrow \{\{a\}\{b\}\}\{c\} = \{ab\}\{c\} = \\ &= \{(ab)c\} = \{a(bc)\} = \{a\}\{bc\} = \{a\}\{\{b\}\{c\}\} \end{aligned}$$

(3) Esiste l'unità, essa è data da $\{u\} = H$;
infatti $\{u\}\{a\} = \{ua\} = \{a\}$

(4) Per ogni $\{a\} \in G/H$ esiste l'inverso $\{a\}^{-1}$; esso è dato da $\{a^{-1}\}$; infatti $\{a\}\{a^{-1}\} = \{aa^{-1}\} = \{u\} = \{a^{-1}\}\{a\}$

Un gruppo si dice semplice se non ammette sottogruppi invarianti (non banali).

Teorema 4.3. (di Lagrange). -

SE n E' L'ORDINE DI UN GRUPPO G ED n' E' L'ORDINE DI UN SUO SOTTOGRUPPO

H, ALLORA $N = In$ CON I INTERO (dato dal numero delle classi laterali di H in G).

Dimostrazione. -

La dimostrazione segue immediatamente dalla constatazione che il numero di elementi di una classe $\{a\}$ coincide con il numero degli elementi del sottogruppo H che la genera e che ogni elemento $k \in G$ deve appartenere ad una sola classe $\{k\}$ (v. eserc. 5).

Corollario:

Ogni gruppo finito di ordine p, con p numero primo è semplice.

Tutte le precedenti considerazioni si estendono ai gruppi di ordine infinito.

6. - ELEMENTI CONIUGATI IN UN GRUPPO. -

Sia G un gruppo e a, b due elementi di G. Si dice che a, b sono "elementi coniugati" se è possibile trovare un elemento $c \in G$ tale che si abbia:

$$b = c a c^{-1}$$

E' facile dimostrare che la relazione di coniugazione su definita è una relazione d'equivalenza. Risulta allora per il gruppo G una partizione in classi (che non contengono necessariamente lo stesso numero di elementi) è che indicheremo come "classi di elementi coniugati", nel senso che tutti gli elementi appartenenti ad una stessa classe sono coniugati tra di loro. La classe definita dalla unità è costituita dalla sola unità.

Nel caso che il gruppo sia abeliano ogni elemento risulta coniugato di se stesso cioè le classi si riducono ciascuna ad un solo elemento.

Come ora mostreremo la nozione di coniugazione può applicarsi ad un intero sottogruppo. Si verifica facilmente che, essendo H un sottogruppo di G e c un qualunque elemento di G, lo insieme $H' = c H c^{-1}$ è ancora un sottogruppo di G. Chi ameremo H' sottogruppo coniugato di H in G rispetto a c.

Dalla definizione di sottogruppo invariante del par. 5 risulta che un sottogruppo invariante è sempre coniugato di se stesso rispetto ad ogni $c \in G$, e viceversa. Ciò giustifica il nome di sottogruppo invariante.

7. - OMOMORFISMI. -

Definizione:

Chiamasi omomorfismo di un gruppo G in un altro gruppo G' un'applicazione (v. Cap. I, par. 4) :

$$\varphi : G \rightarrow G' \quad \text{tale che}$$

$$\forall a, b \in G \Rightarrow \varphi(a b) = \varphi(a) \varphi(b)$$

Esempio:

Sia G il gruppo delle trasformazioni centro-affini nello spazio a 3 dimensioni specificate dalle relazioni:

$$X'_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3$$

$$X'_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3$$

$$X'_3 = a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3$$

Sia $GL(3, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici di ordine 3 coefficienti reali (GL = gruppo lineare) con determinante $\neq 0$.

Associamo ad ogni trasformazione centro-affine $x \rightarrow x'$ una matrice A mediante la relazione seguente:

$$x' = A x \quad \text{con} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

L'associazione $\varphi: GL(3, \mathbb{R}) \rightarrow G$ sopra definita è un omomorfismo.

Infatti; al prodotto di due trasformazioni centro-affini, $x \rightarrow x'$, $x' \rightarrow x''$, corrisponde una matrice che è il prodotto righe per colonne delle due matrici associate alla due trasformazioni considerate:

$$x' = B x \quad x'' = A x' \Rightarrow x'' = A B x$$

Definizioni: (v. Cap. I, par. 4).

Un omomorfismo si dice: epimorfismo se accade che l'applicazione φ sia surgettiva; monomorfismo se accade che φ sia iniettiva; isomorfismo se si tratta di un omomorfismo biunivoco.

Indichiamo con $\text{Im } \varphi$ l'immagine di G , mediante φ , in G' . Valgono i seguenti teoremi:

Teorema 7.1. -

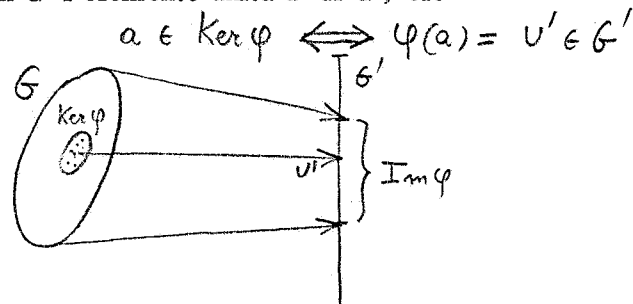
SE L'APPLICAZIONE $\varphi: G \rightarrow G'$ È UN OMOMORFISMO SI HA:

$$\begin{cases} \varphi(u) = u' \\ \forall a \in G \quad \varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1} \\ \text{Im } \varphi \text{ È UN SOTTOGRUPPO DI } G'. \end{cases}$$

Dimostrazione. -

$$\begin{aligned} \varphi(av) &= \varphi(a) \varphi(v) \Rightarrow \varphi(v) = u' \\ \forall a \in G \quad \varphi(aa^{-1}) &= \varphi(u) = u' = \varphi(a) \varphi(a^{-1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1} \\ \forall a', b' \in \text{Im } \varphi &\Rightarrow \exists a, b \in G / a' = \varphi(a), b' = \varphi(b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a' b' = \varphi(a) \varphi(b) = \varphi(ab) \in \text{Im } \varphi \end{aligned}$$

Definiamo $\text{Ker } \varphi$ (Kernel o nucleo dell'omomorfismo φ) l'insieme degli elementi di G , che hanno come trasformato in G' l'elemento unità u' di G' , cioè



Teorema 7.2. -

$\text{Ker } \varphi$ È UN SOTTOGRUPPO INVARIANTE DI G .

Dimostrazione. -

$$\forall a, b \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) = u'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) &= \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)[\varphi(b)]^{-1} \\ &= v'v'^{-1} = v' \Rightarrow ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi \end{aligned}$$

si ha allora, per il teorema 4.1, che $\text{Ker } \varphi$ è un sottogruppo. Proviamo che esso è invariante, cioè che:

$$\forall a \in G, \quad a(\text{Ker } \varphi) = (\text{Ker } \varphi) \cdot a$$

Dim.:

$$\begin{aligned} \forall a \in G, \forall c \in \text{Ker } \varphi &\Rightarrow \varphi(aca^{-1}) = \varphi(a)\varphi(c)\varphi(a^{-1}) = \\ &= \varphi(a)\varphi(c)[\varphi(a)]^{-1} = \varphi(a)v'[\varphi(a)]^{-1} = v' \Rightarrow c' \\ &= ac a^{-1} \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \exists c' \in \text{Ker } \varphi / ac = c'a \end{aligned}$$

Teorema 7.3. -

SUSSISTE LA SEGUENTE EQUIVALENZA:

$$\varphi(a) = \varphi(b) \iff b \in \{a\} = a(\text{Ker } \varphi) = (\text{Ker } \varphi)a$$

LA QUALE AFFERMA CHE SE DUE ELEMENTI a, b HANNO LA STESSA IMMAGINE MEDIANTE φ , ESSI APPARTENGONO ALLA STESSA CLASSE E VICEVERSA.

Dimostrazione. -

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi(b) &\iff \varphi(b)[\varphi(a)]^{-1} = v' \iff \varphi(b)\varphi(a^{-1}) = v' \\ &\iff ba^{-1} = v' \iff ba^{-1} \in \text{Ker } \varphi \iff b \in \{a\} \end{aligned}$$

Teorema 7.4. -

L'APPLICAZIONE

$$(o) \quad \bar{\Phi} : \{a\} \in G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \varphi(a) \in \text{Im } \varphi$$

E' UN ISOMORFISMO.

Dim.:

Per il teorema 7.3 l'applicazione (o) è biunivoca. Proviamo che essa è un omomorfismo:

$$\begin{aligned} \forall \{a\}, \{b\} \in G/\text{Ker } \varphi, \quad \bar{\Phi}(\{a\}\{b\}) &= \bar{\Phi}(\{ab\}) = \bar{\Phi}(ab) = \\ &= \varphi(a)\varphi(b) = \bar{\Phi}(\{a\})\bar{\Phi}(\{b\}) \end{aligned}$$

Riassumendo in un unico enunciato i teoremi precedenti si ha il seguente:

Teorema fondamentale 7.5. - (Sugli omomorfismi tra gruppi).

DATI DUE GRUPPI G e G' , SE $\varphi: G \rightarrow G'$ E' UN OMOMORFISMO DI G in G' , SI HA:

- 1) $\text{Im } \varphi$ E' UN SOTTOGRUPPO DI G' ;
- 2) $\text{Ker } \varphi$ E' UN SOTTOGRUPPO INVARIANTE DI G ;
- 3) TUTTI GLI ELEMENTI DI UNA CLASSE $\{a\} = a(\text{Ker } \varphi) = (\text{Ker } \varphi)a$ HANNO IL MEDESIMO TRASFORMATO IN $\text{Im } \varphi$. VICEVERSA SE DUE ELEMENTI HANNO LO STESSO TRASFORMATO IN $\text{Im } \varphi$ ESSI APPARTENGONO ALLA STESSA CLASSE.

4) L'APPLICAZIONE CHE ASSOCIA AD UNA CLASSE $\{a\}$ IL TRASFORMATO $\varphi(a)$ COMUNE A TUTTI GLI ELEMENTI DI QUELLA CLASSE E' UN ISOMORFISMO TRA $G/\text{Ker } \varphi$ E $\text{Im } \varphi$ (v. ESERCIZIO 6).

Corollario:

Se G è un gruppo semplice ogni omomorfismo tra G ed un altro gruppo G' o è banale (manda tutto G nell'unità u' di G') o è un monomorfismo. (cioè un omomorfismo con corrispondenza biunivoca tra G e $\text{Im } \varphi$).

Esempio:

Si consideri ancora il gruppo D_3 di cui al par. 2. Si verifica immediatamente che esso ha un solo sottogruppo invariante non banale costituito dagli elementi (UDE).

L'associazione:

$$\begin{array}{ll} U \rightarrow +1 & C \rightarrow -1 \\ A \rightarrow -1 & D \rightarrow +1 \\ B \rightarrow -1 & E \rightarrow +1 \end{array}$$

tra il gruppo $D_3 = G$ e il gruppo G (rispetto al prodotto) costituito dagli interi $+1$ e -1 è un omomorfismo, come si verifica immediatamente.

In questo esempio $\text{Im } \varphi$ è l'intero gruppo G' (cioè φ è un epimorfismo); $\text{Ker } \varphi$ è il sottogruppo invariante di G costituito dagli elementi (UDE); il gruppo quoziente $G/\text{Ker } \varphi$ è quello costituito dai due soli elementi (classi di G), (U, C, D) e (A, B, C).

Il gruppo quoziente è isomorfo al gruppo G'

$$\Phi : \begin{array}{l} (U \ C \ D) \rightarrow +1 \\ (A \ B \ C) \rightarrow -1 \end{array}$$

Tale isomorfismo ha un immediato significato geometrico e fisico.

Prodotto tra omomorfismi.

Sia φ un omomorfismo di un gruppo G su un altro gruppo G' e ψ un omomorfismo di G' su un altro gruppo G'' :

$$\varphi : G \rightarrow G' \quad , \quad \psi : G' \rightarrow G''$$

L'applicazione $X = \psi \varphi$ di G su G''

$$X = \psi \varphi : G \rightarrow G''$$

è un omomorfismo. Infatti

$$\begin{aligned} X(ab) &= \psi \varphi(ab) = \psi(\varphi(ab)) = \psi(\varphi(a)\varphi(b)) = \psi(a'b') = \\ &= \psi(a')\psi(b') = \psi \varphi(a)\psi \varphi(b) = X(a)X(b) \end{aligned}$$

Il prodotto di due epimorfismi è un epimorfismo. Il prodotto di due monomorfismi è un monomorfismo. Il prodotto di due isomorfismi è un isomorfismo.

Un omomorfismo di un gruppo in se si chiama endomorfismo.

Osservazione:

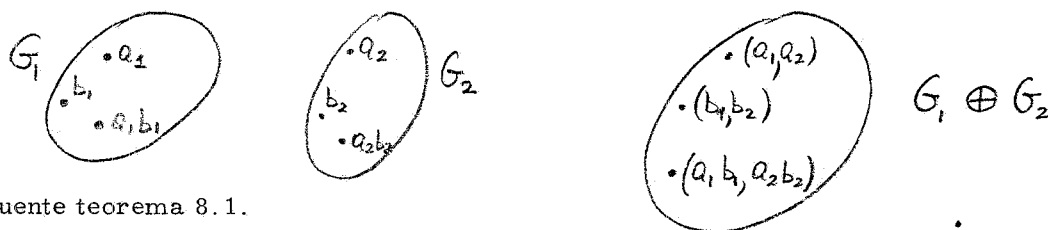
L'insieme degli omomorfismi di G in G' denotasi con $\text{Hom}(G, G')$. Consideriamo $\text{Hom}(G, G')$; in tale insieme rimane definito un prodotto di due endomorfismi. Tale prodotto gode della proprietà associativa, esiste l'unità ma non esiste in generale l'inverso di ogni elemento. Gli elementi che ammettono inverso sono tutti e soli gli automorfismi. Gli automorfismi allora costituiscono un gruppo: gruppo degli automorfismi di G .

8. - PRODOTTO DIRETTO O CARTESIANO TRA GRUPPI -

Siano dati due gruppi G_1 e G_2 . Si consideri il prodotto cartesiano $G_1 \times G_2$ (cfr. Cap. 1, par. 2). In $G_1 \times G_2$ si definisce la seguente legge di composizione:

$$(8.1) \quad (a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

con $a_1, b_1 \in G_1, \quad a_2, b_2 \in G_2$



Vale il seguente teorema 8.1.

Teorema 8.1. -

RISPETTO A TALE LEGGE DI COMPOSIZIONE $G_1 \times G_2$ COSTITUISCE, COME SUBITO DIMOSTREMO, UN GRUPPO. TALE GRUPPO PRENDE IL NOME DI PRODOTTO DIRETTO O CARTESIANO TRA I DUE GRUPPI G_1 E G_2 E SI INDICA CON $G_1 \oplus G_2$.

Dimostrazione:

a) Il prodotto di due elementi del gruppo è ancora, ovviamente, un elemento del gruppo.

b) Vale la proprietà associativa:

$$\begin{aligned} [(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2)] \oplus (c_1, c_2) &= (a_1 b_1, a_2 b_2) \oplus (c_1, c_2) = \\ &= [(a_1 b_1) c_1, (a_2 b_2) c_2] = [a_1 (b_1 c_1), a_2 (b_2 c_2)] = (a_1, a_2) \oplus [(b_1, b_2) \oplus (c_1, c_2)] \end{aligned}$$

c) Esiste l'unità ed è data da (u_1, u_2) ove u_1, u_2 sono le unità di G_1 e G_2 . Infatti:

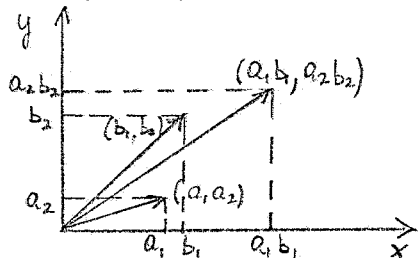
$$(u_1, u_2) \oplus (a_1, a_2) = (u_1 a_1, u_2 a_2) = (a_1, a_2)$$

d) Esiste l'inverso di ogni elemento $(a_1, a_2) \in G_1 \oplus G_2$ ed è dato da (a_1^{-1}, a_2^{-1}) . Infatti:

$$(a_1, a_2) \oplus (a_1^{-1}, a_2^{-1}) = (u_1, u_2)$$

Esempio: di prodotto diretto tra gruppi:

Siano G_1 e G_2 i gruppi (rispetto all'operazione di somma) costituiti rispettivamente dai punti dell'asse x ed y di un sistema di coordinate cartesiane. Il gruppo $G_1 \oplus G_2$ coincide con il piano (x, y) e l'operazione coincide con quella di somma usuale dei vettori applicati in 0



$$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x+x', y+y')$$

Valgono i seguenti importanti teoremi:

Teorema 8.2. -

IL GRUPPO $G = G_1 \oplus G_2$ AMMETTE DUE SOTTOGRUPPI INVARIANTI $\overline{G_1}$ E $\overline{G_2}$ ISOMORFI RISPETTIVAMENTE A G_1 E G_2 , TALI CHE IL GRUPPO QUOZIENTE $G/\overline{G_1}$ E' ISOMOR-

FO A G_2 E $G/\overline{G_2}$ E' ISOMORFO A G_1 .

Dimostrazione.

Consideriamo l'applicazione:

$$\varphi_1 : (a_1, a_2) \in G_1 \oplus G_2 \rightarrow a_1 \in G_1$$

Essa è un omomorfismo (anzi un epimorfismo). Infatti:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \oplus G_2, \quad \varphi_1 [(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2)] &= \\ = \varphi_1 [(a_1 b_1), (a_2 b_2)] &= a_1 b_1 = \varphi_1 (a_1, a_2) \varphi_1 (b_1, b_2) \end{aligned}$$

Determiniamo ora il $\text{Ker } \varphi_1$:

$$(a_1, a_2) \in \text{Ker } \varphi_1 \iff \varphi_1 (a_1, a_2) = u_1 \in G_1 \iff a_1 = u_1$$

Dunque $\text{Ker } \varphi_1$ è costituito dalle coppie (u_1, a_2) al variare di a_2 in G_2 . Tale sottogruppo invariante $\text{Ker } \varphi_1$ di $G_1 \oplus G_2$ (cfr. teorema fond. 7.5) sarà indicato con $\overline{G_2}$. Esso è chiaramente isomorfo a G_2 . Sempre per il teorema fondamentale 7.5 il gruppo quoziente $G_1 \oplus G_2 / \overline{G_2}$ è isomorfo a $\text{Im } \varphi_1 = G_1$ (in quanto $\varphi_1: G_1 \oplus G_2 \rightarrow G_1$ è un epimorfismo).

Analogamente si prova che l'applicazione

$$\varphi_2 : (a_1, a_2) \in G_1 \oplus G_2 \rightarrow a_2 \in G_2$$

è un epimorfismo; che $\text{Ker } \varphi_2$ coincide con l'insieme $\overline{G_1}$ delle coppie (a_1, u_2) , al variare di a_1 in G_1 , e che il gruppo quoziente $G_1 \oplus G_2 / \overline{G_1}$ è isomorfo a G_2 .

Teorema 8.3. -

SE G E' UN GRUPPO CONTENENTE DUE SOTTOGRUPPI INVARIANTI $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$ TALI CHE PER OGNI $a \in G$ L'ELEMENTO a SI SCRIVE IN UN SOLO MODO $a = a_1 a_2$, CON $a_1 \in \overline{G_1}$, $a_2 \in \overline{G_2}$, ALLORA G E' ISOMORFO A $G_1 \oplus G_2$, E VICEVERSA.

Si definisce in modo analogo il prodotto cartesiano tra n gruppi G_1, G_2, \dots, G_n , e si denota:

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$$

nel modo seguente. Gli elementi sono le n -ple ordinate (a_1, a_2, \dots, a_n) , con $a_i \in G_i$.

Il prodotto di $(a_1, \dots) (b_1, \dots)$ è dato da:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$$

9. - GRUPPI OPERATORI, PRODOTTO SEMI-DIRETTO TRA GRUPPI. -

Dato un gruppo R e un gruppo G diremo che R è un gruppo operatore su G quando è data una applicazione di $R \times G$ su G (cioè una legge che associa ad un elemento r di R e un elemento g di G ancora un elemento $\tau(r, g)$ di G)

$$(9.1) \quad \varphi : (r, g) \in R \times G \rightarrow \tau(r, g) \in G$$

tale che soddisfi alle seguenti proprietà

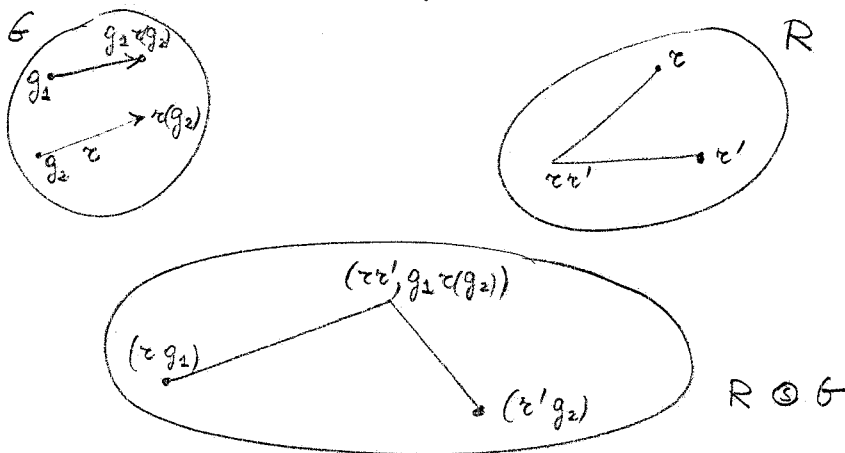
$$1) \forall g \in G \rightarrow \tau(u_R, g) = g \quad (\text{dove } u_R \text{ è l'unità di } R)$$

$$(9.2) \quad 2) \forall r \in R, \forall g_1, g_2 \in G \Rightarrow \tau(r, g_1 g_2) = \tau(r, g_1) \tau(r, g_2)$$

$$3) \forall r, r' \in R, \forall g \in G \Rightarrow \tau(r r', g) = \tau(r, \tau(r', g))$$

Il prodotto semidiretto di R per G si denota con $R \ltimes G$ e si definisce nel modo seguente: esso è l'insieme $R \times G$ in cui è data la legge di composizione (o prodotto)

$$(9.3) \quad (\tau, g_1)(\tau', g_2) = (\tau\tau', g_1\tau(g_2))$$



Proviamo il Teorema 9.1.

RISPETTO AL PRODOTTO SEMIDIRETTO, L'INSIEME $R \times G$ È UN GRUPPO.

Dimostrazione:

Vale la proprietà associativa:

$$\begin{aligned} - & [(\tau, g_1)(\tau', g_2)](\tau'', g_3) = (\tau\tau', g_1\tau(g_2))(\tau'', g_3) = (\tau\tau'\tau'', g_1\tau(g_2)(\tau\tau')(\tau''(g_3))) = \\ - & = (\tau\tau'\tau'', g_1\tau(g_2)\tau(\tau''(g_3))) = (\tau\tau'\tau'', g_1\tau(g_2\tau''(g_3))) \\ - & = (\tau, g_1)[(\tau', g_2)(\tau'', g_3)] = (\tau, g_1)(\tau'\tau'', g_2\tau''(g_3)) = (\tau\tau'\tau'', g_1\tau(g_2\tau''(g_3))) \end{aligned}$$

Esiste l'unità ed è data da (u_R, u_G) :

$$(\tau, g_1)(u_R, u_G) = (\tau, g_1\tau(u_G)) = (\tau, g_1) \quad \text{Dalla (2) segue infatti } \tau(u_G) = u_G$$

Esiste l'inverso di (τ, g) ed è dato da $(\tau^{-1}, \tau^{-1}(g^{-1}))$:

$$\begin{aligned} (\tau, g)[\tau^{-1}, \tau^{-1}(g^{-1})] &= (u_R, g\tau(\tau^{-1}(g^{-1}))) = \\ &= (u_R, g u_R(g^{-1})) = (u_R, g g^{-1}) = (u_R, u_G) = [\tau^{-1}, \tau^{-1}(g^{-1})](\tau, g) \end{aligned}$$

Esempi di prodotto semi-diretto. -

A) Come applicazione $\varphi: R \times G \rightarrow G$ prendiamo la seguente:

$$\varphi: (\tau, g) \in R \times G \rightarrow g \in G \quad (\tau(g) = g, \forall \tau \in R)$$

Verifichiamo le 1), 2), 3):

- 1) $u_R(g) = g$
- 2) $\tau(g_1 g_2) = g_1 g_2 = \tau(g_1) \tau(g_2)$
- 3) $\tau\tau'(g) = g = \tau(\tau'(g))$

Dunque la φ precedente è tale che R è un gruppo operatore su g . Il prodotto semidiretto attuale

$$(\tau, q_1)(\tau', q_2) = (\tau\tau', q_1, q_2)$$

coincide dunque, in questo caso, con il prodotto cartesiano. Il prodotto semi-diretto è dunque una generalizzazione del prodotto diretto tra gruppi.

B) Consideriamo l'insieme delle trasformazioni lineari nello spazio tridimensionale specificate dalle seguenti relazioni:

$$(9.4) \quad \begin{cases} X_1' = R_{11} X_1 + R_{12} X_2 + R_{13} X_3 + T_1 \\ X_2' = R_{21} X_1 + R_{22} X_2 + R_{23} X_3 + T_2 \\ X_3' = R_{31} X_1 + R_{32} X_2 + R_{33} X_3 + T_3 \end{cases}$$

(sinteticamente indicate con:

$$\vec{x}' = R \vec{x} + \vec{T} \quad \text{o anche} \quad x'_k = R_{kj} x_j + T_k$$

dove $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{x}' \equiv (x_1', x_2', x_3')$ ed R, di elementi R_{ij} , indica una rotazione pura (o riflessione o inversione) e T una traslazione.

L'insieme di trasformazioni precedenti costituisce gruppo rispetto alla operazione di successiva applicazione di due di esse. Infatti, da

$$\vec{x}'_1 = R_1 \vec{x} + \vec{T}_1 \quad \vec{x}'_2 = R_2 \vec{x}'_1 + \vec{T}_2$$

si ha:

$$\vec{x}'_2 = R \vec{x} + \vec{T} \quad \text{con } R = R_2 R_1 \quad \text{e} \quad \vec{T} = R_2 \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

L'unità è costituita dall'elemento $R_{ij} = \delta_{ij}$, $\vec{T} = 0$. L'inverso del generico elemento (R, \vec{T}) è $(R^{-1}, -R^{-1}\vec{T})$.

Risulta chiaro che questo gruppo è isomorfo al gruppo $R \oplus T$ prodotto semidiretto del gruppo delle rotazioni (o riflessioni o inversioni) per il gruppo delle traslazioni. Tale gruppo costituito da tutte le coppie ordinate $\{R, T\}$ ha infatti come regola di moltiplicazione la:

$$\{R_2, \vec{T}_2\} \{R_1, \vec{T}_1\} = \{R_2 R_1, \vec{T}_2 + R_2 \vec{T}_1\}$$

L'insieme delle traslazioni pure ($R_{ij} = \delta_{ij}$, $T \neq 0$) è un sottogruppo abeliano (e quindi invariante) delle trasformazioni più generali (10, 4).

L'insieme delle rotazioni pure ($R_{ij} = \delta_{ij}$, $T = 0$) è un sottogruppo non invariante del gruppo (10, 4). Infatti (par. 5)

$$\begin{aligned} (R, \vec{T})(R', 0)(R, \vec{T})^{-1} &= (R, \vec{T})(R', 0)(R^{-1}, -R^{-1}\vec{T}) = \\ &= (R, T)(R'R^{-1}, 0 - R'R^{-1}\vec{T}) = (R R' R^{-1}, \vec{T} - R R' R^{-1}\vec{T}) \end{aligned}$$

C) L'insieme delle trasformazioni quadridimensionali

$$x'_\mu = l_{\mu\lambda} x_\lambda$$

che:

1°) lascia invariante la forma quadratica s^2 (world-distance) tra due punti $P(x_1, x_2, x_3; x_4 = ict_P)$ e $Q(y_1, y_2, y_3; y_4 = ict_Q)$ dello spazio-tempo con $x_1, \dots, x_3; y_1, \dots, y_3$ coordinate spaziali reali

$$s^2 = \sum_{\nu=1}^4 (x_\nu - y_\nu)^2 = \sum_{n=1}^3 (x_n - y_n)^2 - c^2 (t_P - t_Q)^2$$

2°) non altera le proprietà di realtà delle coordinate (le coordinate spaziali restano reali, la com

ponente temporale resta immaginaria),

si dice insieme delle trasformazioni di Lorentz.

Nella sua forma più generale (full inhomogeneous Lorentz group o gruppo di Poincaré) esso si scrive:

$$(9.5) \quad x'_\mu = l_{\mu\lambda} x_\lambda + \tau_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$$

o anche in forma compatta:

$$X' = L X + \tau \quad (L \text{ matrice } 4 \times 4, \tau \text{ vettore quadridimensionale})$$

Le trasformazioni (9.5) soddisfano le condizioni 1) e 2) purchè siano:

$$l_{ik}, l_{44} \quad \text{reali} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

$$l_{ik}, l_{4i} \quad \text{immaginari puri}$$

$$\tau_k \quad \text{reale} \quad \tau_4 \quad \text{immaginario puro.}$$

L'insieme delle trasformazioni (9.5) costituisce gruppo rispetto alla operazione di successiva applicazione. Indicando con $\{L, \tau\}$ il generico elemento dell'insieme si ha che la trasformazione prodotta di due trasformazioni $\{L^{(1)}, \tau^{(1)}\}, \{L^{(2)}, \tau^{(2)}\}$ è data da:

$$\{L^{(2)}, \tau^{(2)}\} \{L^{(1)}, \tau^{(1)}\} = \{L^{(2)} L^{(1)}, L^{(2)} \tau^{(1)} + \tau^{(2)}\}$$

Si vede facilmente che l'elemento unità del gruppo $\{1, 0\}$ e che l'inverso di un elemento $\{L, \tau\}$ è.

$$\{L, \tau\}^{-1} = \{L^{-1}, -L^{-1}\tau\}$$

Il gruppo di Poincaré è isomorfo con il prodotto semidiretto $L \circledast T$ tra il gruppo L delle trasformazioni di Lorentz omogenee (sottogruppo del gruppo di Poincaré con $\tau = 0$) ed il gruppo T delle traslazioni quadridimensionali.

10. - ULTERIORI ESEMPI DI GRUPPI. -

Gli esempi che seguono riguardano gruppi di matrici; è opportuno per questo ricordare alcuni concetti sulle matrici.

Data una matrice quadrata di ordine n a coefficienti reali, o complessi, non degenera

A:

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

si dice complemento algebrico od aggiunto di un elemento a_{hk} il determinante di ordine (n-1) che si ottiene sopprimendo dalla matrice considerata la h-esima colonna moltiplicato per $(-1)^{h+k}$.

Si definisce matrice inversa di A e si indica con A^{-1} la matrice tale che: $AA^{-1} = u$ essendo u la matrice unitaria di elementi $a_{ij} = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$). Si vede che:

$$A^{-1} \equiv \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{m1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{m2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{m1}}{\Delta} & \frac{A_{m2}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{mm}}{\Delta} \end{vmatrix}$$

dove A_{ik} è il complemento algebrico dell'elemento a_{ki} della matrice A .

Si dimostra che $\det A^{-1} = 1/\det A$ e che $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$. Si definisce matrice trasposta e si indica con \tilde{A} la matrice

$$\tilde{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Si dimostra che $\det \tilde{A} = \det A$.

Data una matrice $A = \|a_{ik}\|$ a coefficienti complessi, si dice matrice complessa coniugata di A e si indica con A^* la matrice i cui elementi sono i complessi coniugati degli elementi di A :

$$A_{ik}^* = \bar{a}_{ik}.$$

Si dice matrice hermitiana coniugata od aggiunta di una matrice A a coefficienti complessi e si indica con A^+ la matrice i cui elementi si ottengono dagli elementi della matrice A trasponendo e coniugando:

$$A_{ik}^+ = \bar{a}_{ki}$$

ovvero:

$$A^+ = (\tilde{A})^*.$$

La coniugazione hermitiana sopra definita gode delle seguenti proprietà:

- 1) $(A^+)^+ = A$
- 2) $(cA^+)^+ = \bar{c}A^+$
- 3) $(A_1 + A_2)^+ = A_1^+ + A_2^+$
- 4) $(A_1 A_2)^+ = A_2^+ A_1^+$

Una matrice A si dice hermitiana se coincide con la sua hermitiana coniugata, cioè

$$A^+ = A \quad \text{cioè} \quad A_{ik}^+ = a_{ik}$$

L'insieme delle matrici quadrate d'ordine n sui complessi o sui reali costituisce un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne che si denota con $GL(n, \mathbb{C})$ o $GL(n, \mathbb{R})$ e si chiama gruppo lineare d'ordine n sui complessi o sui reali.

Si dice che una matrice A , a coefficienti reali, è ortogonale se accade che

$$\tilde{A}A = u \quad \text{con} \quad A = A^* \quad (\text{poichè } A \text{ è a coeff. reali}).$$

In questo caso segue

$$\det(A \tilde{A}) = \det V = \det A \cdot \det \tilde{A} = \det A \cdot \det A, \quad \det A = \pm 1$$

(non è vero il viceversa, in generale). Si dimostra che $(\tilde{AB}) = \tilde{B} \tilde{A}$.

Le matrici ortogonali di ordine n a coefficienti reali costituiscono un gruppo, che si indica con $O(n)$.

$$\begin{aligned} \text{Infatti } \forall A, B \in O(n) &\Rightarrow (A B^{-1})(\tilde{A} \tilde{B}^{-1}) = A B^{-1} \tilde{B}^{-1} \tilde{A}^{-1} = A \tilde{A} \\ &= V, \quad \text{cioè } A B^{-1} \in O(n) \end{aligned}$$

da cui segue, per il teorema 4.1 (II.4) che l'insieme $O(n)$ è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.

Si dicono matrici ortogonali speciali le matrici ortogonali per cui $\det A = +1$.

L'insieme delle matrici ortogonali speciali costituisce un sottogruppo invariante di $O(n)$ che si indica con $SO(n)$.

Si dice che una matrice d'ordine n a coefficienti complessi è ortogonale complessa se è soltanto

$$A \tilde{A} = U$$

L'insieme delle matrici ortogonali complessa si indica con $O(n, \mathbb{C})$.

Si dice che una matrice A d'ordine n a coefficienti complessi è unitaria se accade che moltiplicata per la sua trasposta complessa coniugata $A^* = A^+$ dà la matrice unità

$$A A^* = A A^+ = U$$

Le matrici unitarie di ordine n a coefficienti complessi costituiscono un gruppo che in diciamo con $U(n)$.

Infatti

$$\begin{aligned} \forall A, B \in U(n, \mathbb{C}) &\Rightarrow (A B^{-1})(A B^{-1})^+ = (A B^{-1})(\tilde{A} \tilde{B}^{-1})^* \\ &= A B^{-1} (\tilde{B}^{-1})^* \tilde{A}^+ = A B^{-1} B^{-1+} A^+ = A B^{-1} (B^{-1})^{-1} A^+ = U \end{aligned}$$

Per le matrici $U(n)$ si ha:

$$\begin{aligned} \forall A \in U(n, \mathbb{C}) &\Rightarrow \det A \cdot \det A^+ = \det U = 1 = \det A (\det \tilde{A})^* \\ &= \det A (\det \tilde{A})^* = |\det A|^2 \end{aligned}$$

Si ha così $|\det A|^2 = +1$.

Si dicono matrici speciali unitarie (o unitarie unimodulari) $SU(n)$ quelle per cui si ha:

$$\forall A \in SU(n), \quad \det A = 1$$

Si vede che $SU(n)$ è un sottogruppo di $U(n)$, invariante in $U(n)$. Tali matrici non costituiscono gruppo rispetto al prodotto righe per colonne, ovvero le matrici hermitiane non formano un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{C})$.

Osserviamo che se A è una matrice hermitiana e S una matrice unitaria, SAS^{-1} è di nuovo hermitiana. Inoltre esiste una matrice unitaria S_0 tale che $S_0 A S_0^{-1}$ è una matrice diagonale. Se A è reale, S_0 può essere S_0 ortogonale.

Complementi ed esercizi al Capitolo II. -

1. - Si consideri il gruppo D_3 del par. 2. Dimostrare che gli elementi di tale gruppo obbediscono alla seguente tabella moltiplicativa

	U	A	B	C	D	E
U	U	A	B	C	D	E
A	A	U	E	D	C	B
B	B	D	U	E	A	C
C	C	E	D	U	B	A
D	D	B	C	A	E	U
E	E	C	A	B	U	D

2. - Si dimostri il seguente teorema (Rearrangement theorem): Data la Tabella moltiplicativa di un gruppo finito, in ogni riga o colonna compare una permutazione degli elementi del gruppo.

3. - Scrivere tutti i sottogruppi del gruppo D_3 di cui al par. 2.

4. - Trovare i sottogruppi invarianti del gruppo D_3 , non banali.

5. - Si consideri un gruppo finito G di ordine 6. Si dimostri che, se G non è ciclico ($a^6 = U$) ogni suo elemento ha periodo 2 o 3.

Questo è un caso estremamente particolare del "Teorema di Seelov": Dato un gruppo G di ordine N , sia N scomposto in fattori primi $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$. Per ogni $i = 1, \dots, k$ esiste almeno un sottogruppo di ordine $p_i^{n_i}$. Se tale gruppo è unico, esso è invariante. Se non è unico, il numero di sottogruppi di ordine $p_i^{n_i}$ è dispari, ma tali gruppi sono coniugati in un automorfismo interno.

6. - Si consideri il gruppo G delle trasformazioni reali ortogonali (a determinante $\neq +1$) tridimensionali. Sia H il sottogruppo di G delle trasformazioni ortogonali a $\det = +1$ (proprie).

Poichè ogni matrice ortogonale è: i) o una rotazione propria e quindi appartiene ad H , ii) o il prodotto di una rotazione propria per una riflessione P rispetto all'origine data da $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$, il gruppo G potrà scriversi

$$H, PH \quad \text{oppure} \quad H, HP$$

Provare che:

a) H è un sottogruppo invariante ($H = PHP^{-1}$);

b) la classe $\{m\}$, per ogni m non appartenente ad H (e quindi appartenente a PH o HP , che è lo stesso) non è un sottogruppo, mentre per $m \in H$ la classe $\{m\}$ è un sottogruppo e coincide con H stesso;

c) il gruppo quoziente è di ordine 2: il suo elemento unità è $\{u\} = H$ stesso, l'altro elemento è $\{k\} = kH = Hk$ ($k \notin H$). Tale gruppo, di ordine 2, è tale che $\{k\}\{k\} = \{u\}$; cioè è ciclico.

7. - Dato un gruppo operatore R su un gruppo G proviamo le seguenti proprietà

a) $\forall r \in R \Rightarrow r(U_G) = U_G$ (la dimostrazione segue dalla seconda delle (9.2)).

b) Per ogni fissato $r \in R$, l'applicazione di R in sé data da:

$$\varphi_r : g \in G \rightarrow r(g) \in G$$

è un omomorfismo (endomorfismo).

8. - Dato un gruppo G , l'insieme degli endomorfismi di G in G denotasi con $\text{Hom}(G, G)$. Definiamo in esso come operazione di prodotto l'applicazione successiva di due endomorfismi (che è ancora un omomorfismo). Rispetto a tale operazione, l'insieme suddetto è un gruppo che si denota con $\text{Hom}(G, G)$. Provare che:

L'applicazione di R in $\text{Hom}(G, G)$:

$$\Omega : r \in R \rightarrow \varphi_r \in \text{Hom}(G, G)$$

è un omomorfismo.

9. - Dimostrare che il gruppo delle trasformazioni di Lorentz omogenee è a 6 parametri mentre quello di Poincaré è a 10 parametri. Qual è il significato dei parametri?

10. - Una trasformazione di Lorentz può essere scritta sotto forma di matrice che soddisfa la equazione

$$\tilde{L} g L = g \quad (\tilde{L} = \text{trasposta di } L)$$

essendo

$$g = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dimostrare che:

- 1) un insieme di matrici così definite costituisce gruppo;
- 2) l'inversa di L è $\tilde{L} g$;
- 3) $\det L = +1$;
- 4) l'elemento 4.4 è tale che $L_{44} \geq 1$ o $L_{44} \leq -1$.

Gli elementi del gruppo di Lorentz omogeneo per cui $\det L = +1$ e $L_{4,4} \geq 1$ formano un sottogruppo del gruppo di Lorentz, che è il sottogruppo delle trasformazioni di Lorentz proprie ortocrone.

CAP. - III - SPAZI VETTORIALI -

1. - SPAZI VETTORIALI. -

Dicesi spazio vettoriale sui reali un gruppo abeliano additivo (detto anche modulo) dotato di una legge che associa ad ogni numero reale e ad ogni elemento \underline{y} di V ancora un elemento di V , denotato con $a\underline{y}$, tale che:

- (1) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \underline{x}, \underline{y} \in V \Rightarrow a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$
- (2) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \underline{x} \in V \Rightarrow (a+b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}$
- (3) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \underline{x} \in V \Rightarrow (ab)\underline{x} = a(b\underline{x}) = a b \underline{x}$
- (4) $\forall \underline{x} \in V \Rightarrow 1\underline{x} = \underline{x}$

In modo analogo si definisce uno spazio vettoriale sui complessi.

Gli elementi di V si dicono vettori, l'unità di V si denota con 0 e prende il nome di vettore nullo; se $v \in V$ l'elemento $-v$ prende il nome di vettore opposto di v . Gli elementi di \mathbb{R} si chiamano coefficienti e $a\underline{v}$ è il vettore ottenuto moltiplicando il coefficiente $a (\in \mathbb{R})$ per il vettore \underline{v} . Osserviamo che dalla (1) si ha^(x)

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \underline{x}, \underline{y} \in V \Rightarrow a(\underline{x} - \underline{y}) = a\underline{x} - a\underline{y}$$

Dalla precedente uguaglianza, ponendo $\underline{x} = \underline{y}$, si ha:

$$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a\underline{0} = \underline{0}$$

Esempi di spazi vettoriali:

1) I vettori dello spazio ordinario costituiscono uno spazio vettoriale sui reali, rispetto alle usuali leggi di somma tra i vettori e prodotto per un coefficiente reale.

2) Le funzioni continue definite in un dominio costituiscono uno spazio vettoriale su \mathbb{R} rispetto alle usuali leggi di somma tra funzioni e prodotto per un coefficiente.

3) Sia $C(a, b)$ l'insieme delle funzioni continue $f(t)$ a valori complessi definite nell'intervallo $a \leq t \leq b$ dell'asse reale t . Tale insieme costituisce uno spazio vettoriale V sui reali quando si definisca la somma di due vettori $\underline{x}, \underline{y} \in V$ come la somma delle funzioni complesse corrispondenti $x(t)$ ed $y(t)$ e l'elemento $a\underline{x}$, con $a \in \mathbb{R}$ come la funzione $a x(t)$. Il vettore nullo corrisponde alla funzione identicamente nulla.

4) L'insieme delle funzioni di una variabile reale, sviluppabili in serie di Fourier, costituisce, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un coefficiente, uno spazio vettoriale. Così l'insieme delle funzioni sviluppabili in serie di fissate funzioni speciali (p. es. i polinomi di Legendre).

Diremo che n vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k, \dots, \underline{x}_n$ di uno spazio vettoriale sono linearmente indipendenti se la condizione:

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \underline{x}_k = \underline{0} \quad (\alpha_k \in \mathbb{R})$$

implica $\alpha_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$

In caso contrario diremo che essi sono linearmente dipendenti.

Si dice base di uno spazio vettoriale V un insieme B di vettori tale che ogni vettore di V si possa esprimere in uno e un solo modo come combinazione lineare di un numero finito di vettori di B . Si dimostra che ogni spazio vettoriale V ammette una base.

(x) - Dim.: $a\underline{x} = a[(\underline{x} - \underline{y}) + \underline{y}] = a(\underline{x} - \underline{y}) + a\underline{y} \Rightarrow a\underline{x} - a\underline{y} = a(\underline{x} - \underline{y})$

Si osservi che, nell'esempio 4 precedente l'insieme $(1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots)$ non costituisce una base nel senso anzidetto.

Uno spazio V si dice a base finita e di dimensione n , e si denota con V_n , se esiste una base con n vettori. Allora si prova che ogni base è costituita da n vettori indipendenti e che qualsiasi vettori indipendenti costituiscono una base. Ne segue che n è il massimo numero di vettori in dipendenti di V .

Se uno spazio, vettoriale contiene un numero arbitrariamente grande di vettori linearmente indipendenti, allora si dice che ha infinite dimensioni.

5) I vettori dello spazio ordinario costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione 3.

6) Tutti i polinomi a coefficienti reali (o complessi), rispetto alle usuali leggi di somma tra polinomi e prodotto per un coefficiente, costituiscono uno spazio vettoriale. Una base di tale spazio è data da $(1, x, x^2, \dots, x^n, \dots)$. Questo spazio non è a base finita.

7) I polinomi di grado n a coefficienti reali (o complessi) del tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

costituiscono uno spazio vettoriale ad $(n+1)$ dimensioni.

8) Lo spazio vettoriale $C(a, b)$ di cui all'esempio 3, ha infinite dimensioni. Infatti sono elementi di $C(a, b)$ i vettori $x_1 = t, x_2 = t^2, \dots, x_n = t^n$ (per ogni valore di n) che sono anche chiaramente linearmente indipendenti. (L'elemento t^n non si può scrivere combinando linearmente altre funzioni del tipo t^k se $k \neq n$).

Definizioni:

a) Chiamasi sottospazio vettoriale di V un sottoinsieme H di V che gode della seguente proprietà:

$$\forall x, y \in H, \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow ax + by \in H$$

Se H, K sono sottospazi di V , l'insieme intersezione (v. Cap. I, par. 1) $H \cap K$ risulta ancora un sottospazio di V , come è evidente. In modo analogo si prova che l'intersezione, in senso insiemistico, di una qualsiasi famiglia (non vuota) di sottospazi di V è anche un sottospazio di V .

Se H e K sono sottospazi di V , l'insieme di vettori di V ciascuno dei quali è somma di un vettore di H e di un vettore di K , costituisce ancora un sottospazio di V , come è facile dimostrare. Tale sottospazio prende il nome di spazio somma di H e K e si denota con $(H+K)$. Esso evidentemente è il minimo sottospazio che contiene contemporaneamente H e K .

Se H ha dimensione \underline{h} e K ha dimensione \underline{k} , si ha che $H \cap K$ ha dimensione finita, diciamo \underline{i} , $(H+K)$ ha dimensione finita, diciamo \underline{s} . Sussiste allora la relazione di Grassmann seguente:

$$\underline{h} + \underline{k} = \underline{i} + \underline{s}.$$

b) Sottospazi supplementari: due sottospazi L_m ed L_{n-m} di uno spazio vettoriale V_n si dicono supplementari se hanno in comune il solo vettore nullo e danno per somma tutto V_n . Per esempio: in \mathbb{R}^3 , il piano (x, y) è unito, l'asse z unito, la somma di (x, y) e z copre \mathbb{R}^3 e l'intersezione di (x, y) con z è l'unità (lo zero).

c) Somma diretta di spazi vettoriali. Chiamasi somma (o prodotto) diretta di L_m, L_p e denotasi $L_m \oplus L_p$ (cfr. Cap. II, par. 8) lo spazio vettoriale i cui elementi sono le coppie $(\underline{V}_1, \underline{V}_2)$ con $\underline{V}_1 \in L_m, \underline{V}_2 \in L_p$ e le operazioni sono definite da:

$$(\underline{V}_1, \underline{V}_2) + (\underline{V}'_1, \underline{V}'_2) = (\underline{V}_1 + \underline{V}'_1, \underline{V}_2 + \underline{V}'_2)$$

$$c(\underline{V}_1, \underline{V}_2) = (c\underline{V}_1, c\underline{V}_2) \quad c \in \mathbb{R}$$

Naturalmente se $B_m = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ e $B_p = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ sono basi di L_m ed L_p rispettivamente, $B_m \cup B_p$ costituisce una base per $L_m \oplus L_p$.

Esempio:

Possiamo scrivere, nel caso dello spazio \mathbb{R}^3

$$R^3 = L_1 + L_2$$

dove, preso L_1 come un piano, L_2 è determinato da un qualunque vettore non appartenente al piano.

2. - PRODOTTO TENSORIALE DI SPAZI VETTORIALI -

Siano V_n e W_m due spazi vettoriali sui reali di dimensioni n ed m rispettivamente. Ci proponiamo di provare il:

Teorema 2.1. -

ESISTE UN'APPLICAZIONE t DEL PRODOTTO CARTESIANO $V_n \times W_m$ IN UN FISSATO SPAZIO T_{nm} DI DIMENSIONI $n \times m$

$$t : V_n \times W_m \rightarrow T_{nm}$$

TALE CHE VANGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

a) SE \underline{v} , \underline{v}' e \underline{v}'' SONO ELEMENTI QUALSIASI DI V_n E \underline{w} , \underline{w}' , \underline{w}'' SONO ELEMENTI QUALSIASI DI W_m

$$(1) \quad t(\underline{v}, \underline{w}' + \underline{w}'') = t(\underline{v}, \underline{w}') + t(\underline{v}, \underline{w}'')$$

$$(2) \quad t(\underline{v}' + \underline{v}'', \underline{w}) = t(\underline{v}', \underline{w}) + t(\underline{v}'', \underline{w})$$

b) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in V_n$, $\underline{w} \in W_m$ si abbia

$$(3) \quad t(a\underline{v}, \underline{w}) = a t(\underline{v}, \underline{w}) = t(\underline{v}, a\underline{w})$$

c) Se $\underline{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \{e_i\}_{i=1..n}$, $\underline{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\} = \{\eta_j\}_{j=1..m}$

SONO DUE BASI RISPETTIVAMENTE IN V_n e W_m $t(e_i, \eta_j)_{i=1..n, j=1..m}$ COSTITUISCONO UNA BASE IN T_{nm} .

Dimostrazione. -

Fissiamo in T_{nm} una base che indicheremo con

$$\{e_{ij}\}$$

e siano

$$\{e_i\}, \quad \{\eta_j\}$$

basi scelte in V_n e W_m .

Si consideri l'applicazione seguente:

$$t : (\underline{v}, \underline{w}) \in V_n \times W_m \rightarrow t(\underline{v}, \underline{w}) \in T_{nm}$$

$$\text{ove, se } \underline{v} = \sum v_i e_i, \quad \underline{w} = \sum w_j \eta_j \text{ sia}$$

$$(4) \quad t(\underline{v}, \underline{w}) = \sum v_i w_j e_{ij}$$

Dimostriamo che l'applicazione (4) gode delle proprietà a), b), c).

Per la definizione (4) si ha:

$$\begin{aligned} t(\underline{v}, \underline{w}' + \underline{w}'') &= \sum v_i (w'_j + w''_j) e_{ij} = \sum v_i w'_j e_{ij} + \sum v_i w''_j e_{ij} = \\ &= t(\underline{v}, \underline{w}') + t(\underline{v}, \underline{w}'') \end{aligned}$$

con ciò è dimostrata la (1). In modo analogo si provano la (2) e la (3).

Proviamo la proprietà c). Siano

$$\{e'_i\}_{i=1..n} \quad \{\eta'_j\}_{j=1..m}$$

due qualsiasi basi scelte rispettivamente in V_n e W_m . Dimostriamo che

$$\{t(e'_h, \eta'_k)\}_{h=1..n, k=1..m} \text{ costituisce una base di } T_{nm}$$

Per la (4) si ha intanto:

$$(5) \quad t(e'_h, \eta'_k) = \sum_{ij} \delta_{hi} \delta_{kj} e_{ij} = e_{hk}$$

per cui se le basi

$$\{e'_i\} \quad \{\eta'_j\} \quad \text{coincidono con le basi} \quad \{e_i\}, \quad \{\eta_j\}$$

l'asserto è provato. Si tratta ora di provarlo quali che siano le basi in V_n e W_m . Si ha, effettuando i cambiamenti di base

$$(6) \quad e'_h = \sum_{i} a_{hi} e_i \quad \eta'_k = \sum_j b_{kj} \eta_j$$

per le condizioni a) e b) già provate, che:

$$t(e'_h, \eta'_k) = \sum_{ij} a_{hi} b_{kj} t(e_i, \eta_j)$$

Indicando con $e'_{hk} = t(e'_h, \eta'_k)$, per la (5) si ha:

$$(7) \quad e'_{hk} = \sum_{ij} a_{hi} b_{kj} e_{ij}$$

Ora le (6) si invertono in (cfr. par. 1):

$$e_i = \sum_h a'_{ih} e'_h, \quad \eta_j = \sum_k b'_{jk} \eta'_k \quad \text{e quindi}$$

$$(8) \quad e_{ij} = t(e_i, \eta_j) = \sum_k a'_{ik} b'_{jk} t(e'_k, \eta'_k) \\ = \sum_k a'_{ik} b'_{jk} e'_{hk}$$

La (8) inverte la (7) e ciò prova che e'_{hk} costituisce una base in T_{nm} . Enunciamo ora senza dimostrarlo il:

Teorema 2.2.

SE

$$\theta : V_n \times W_m \longrightarrow T_{nm}$$

E' UN'APPLICAZIONE QUALSIASI CHE GODE DELLE PROPRIETA' a), b), c), ESISTE IN T_{nm} UN AUTOMORFISMO φ TALE CHE

$$\varphi : t(\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \theta(\underline{v}, \underline{w}) \quad , \quad (\underline{v}, \underline{w}) \in V_n \times W_m$$

Ciò premesso si definisce prodotto tensoriale di V_n per W_m e si indica con

$$V_n \otimes W_m$$

la coppia costituita di un fissato spazio T_{nm} e da una fissata applicazione t di $V_n \times W_m$ in T_{nm} che goda delle proprietà a) b) e c). Chiamasi prodotto tensore di $\underline{v} \in V_n$ e $\underline{w} \in W_m$ l'elemento $t(\underline{v}, \underline{w}) \in T_{nm}$. Si pone poi

$$t(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v} \otimes \underline{w}$$

e il secondo membro si legge "v tensore w"^(x).

Osserviamo che se si cambia l'applicazione, t , soggetta sempre alle a) b) e c) il prodotto tensoriale non cambia che per un isomorfismo un essenziale.

Dalle proprietà a) b) segue subito:

$$\underline{v} \otimes (\underline{w}' + \underline{w}'') = \underline{v} \otimes \underline{w}' + \underline{v} \otimes \underline{w}''$$

$$(\underline{v}' + \underline{v}'') \otimes \underline{w} = \underline{v}' \otimes \underline{w} + \underline{v}'' \otimes \underline{w}$$

$$(a \underline{v}) \otimes \underline{w} = a \underline{v} \otimes \underline{w}$$

Inoltre che $\{\underline{e}_i\}$ è una base di V_n ed $\{\eta_j\}$ una base di W_m risulta, per la c), $\{\underline{e}_i \otimes \eta_j\}$ è una base in $V_n \otimes W_m$. Si ha:

$$\underline{v} = \sum v_i \underline{e}_i, \quad \underline{w} = \sum w_j \eta_j, \quad \underline{v} \otimes \underline{w} = \sum v_i w_j \underline{e}_i \otimes \eta_j$$

Osserviamo che al variare di \underline{v} in V_n e \underline{w} in W_m il prodotto tensore $\underline{v} \otimes \underline{w}$ non descrive tutto T_{nm} non appena sia $n \geq 2$ ed $m \geq 2$ (risultando allora $n+m \leq nm$). Però ogni elemento di T_{nm} si può esprimere come combinazione lineare di prodotti tensoriali, risultando

$$\{\underline{e}_i \otimes \eta_j\}_{i=1 \dots n, j=1 \dots m}$$

una base di T_{nm} ; cioè i prodotti tensoriali $\underline{v} \otimes \underline{w}$ generano tutto T_{nm} .

Quanto esposto si generalizza nel modo seguente. Dati p spazi vettoriali $V_{m_1}^{(1)}, V_{m_2}^{(2)}, \dots, V_{m_p}^{(p)}$ e fissato uno spazio vettoriale di dimensione $m_1 \cdot m_2 \dots m_p$ indicato con $T_{m_1 m_2 \dots m_p}$ si prova, in modo del tutto analogo al caso precedente il

Teorema 2.3. -

ESISTE UN'APPLICAZIONE t DEL PRODOTTO CARTESIANO $V_{m_1}^{(1)} \times V_{m_2}^{(2)} \times \dots \times V_{m_p}^{(p)}$ NELLO SPAZIO $T_{m_1 m_2 \dots m_p}$ TALE CHE:

$$a) \quad \underline{v}^{(1)} \in V_{m_1}^{(1)} \dots \underline{v}^{(s)} \in V_{m_s}^{(s)} \dots$$

$$t(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(s)} + \underline{v}'^{(s)}, \dots, \underline{v}^{(p)}) = t(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(s)}, \dots, \underline{v}^{(p)}) + t(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}'^{(s)}, \dots, \underline{v}^{(p)})$$

$$b) \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ e } \underline{v}^{(s)} \in V_{m_s}^{(s)}$$

$$t(a \underline{v}^{(1)}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}^{(p)}) = t(\underline{v}^{(1)}, a \underline{v}_2, \dots, \underline{v}^{(p)}) = t(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)} \dots a \underline{v}^{(p)}) = a t(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(p)})$$

c) Se $\underline{e}_{i_1}^{(1)} (i_1 = 1 \dots m_1)$ $\underline{e}_{i_p}^{(p)} (i_p = 1 \dots m_p)$ sono basi scelte comunque rispettivamente in $V_{m_1}, V_{m_2}, \dots, V_{m_p}$,

$$t(\underline{e}_{i_1}^{(1)}, \underline{e}_{i_2}^{(2)}, \dots, \underline{e}_{i_p}^{(p)})$$

costituisce una base in $T_{m_1 \dots m_p}$.

(x) - Lo spazio T_{nm} prende il nome di sostegno del prodotto tensoriale di V_n per W_m . Spesso esso viene denotato ancora con $V_n \otimes W_m$ qualora ciò non dia luogo ad equivoci.

Ciò premesso si definisce prodotto tensoriale degli spazi $V_{m_1} \dots V_{m_p}$ e si indica con

$$V_{m_1}^{(1)} \otimes V_{m_2}^{(2)} \dots \otimes V_{m_p}^{(p)}$$

la coppia costituita da $T_{m_1 \dots m_p}$ e dall'applicazione t . Chiamasi poi prodotto tensore di $\underline{v}^{(1)} \in V_{m_1}, \dots, \underline{v}^{(p)} \in V_{m_p}$ l'elemento $t(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(p)})$ di $T_{m_1 \dots m_p}$.

$$t(\underline{v}^{(1)} \dots \underline{v}^{(p)}) = \underline{v}^{(1)} \otimes \dots \otimes \underline{v}^{(p)}$$

In modo analogo a quanto visto al paragrafo precedente si prova che se θ è una qualsiasi altra applicazione del prodotto cartesiano $V_{m_1}^{(1)} \times V_{m_2}^{(2)} \dots V_{m_p}^{(p)}$ in $T_{m_1 \dots m_p}$ che goda delle proprietà a) b) e c) esiste un automorfismo di $T_{m_1 \dots m_p}$ per cui si ha:

$$\theta : t(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \dots, \underline{v}^{(p)}) \rightarrow \theta(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \dots, \underline{v}^{(p)})$$

Quindi il prodotto tensore su definito è unico a meno di automorfismi.

Notiamo infine che, dati per esempio tre spazi V_1, V_m, V_n si può considerare il prodotto tensoriale $(V_1 \otimes V_m) \otimes V_n$. Esso risulta isomorfo a $V_1 \otimes V_m \otimes V_n$. Ciò si enuncia dicendo che vale la proprietà associativa per il prodotto tensore.

3. - ALGEBRE. -

Un'algebra è uno spazio vettoriale V tale che in V è definito un prodotto interno per cui:

$$(1) \quad \forall x, y, z \in V \Rightarrow x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx$$

$$(2) \quad \forall a \in \mathbb{R}, x, y \in V \Rightarrow (ax)y = a(xy) = x(ay) = axy$$

Esempi:

I vettori dello spazio ordinario costituiscono uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Se in esso si definisce come prodotto interno il prodotto vettoriale ordinario, allora tale spazio diventa una algebra.

Le matrici quadrate di ordine n , reali o complesse costituiscono un gruppo abeliano rispetto alla somma:

$$A = \|a_{ik}\| \quad B = \|b_{ik}\| \quad A+B = \|a_{ik} + b_{ik}\|$$

Se poi s'introduce il prodotto di una matrice per un coefficiente reale o complesso si ottiene uno spazio vettoriale. Se in tale spazio vettoriale si definisce come prodotto interno il prodotto righe per colonne allora si ottiene un'algebra.

Un'algebra si dice associativa se vale la proprietà associativa del prodotto interno, commutativa se vale la proprietà commutativa del prodotto interno.

Esempio. -

L'algebra dei vettori non è associativa ($A \wedge (B \wedge C) \neq (A \wedge B) \wedge C$) nè commutativa $A \wedge B \neq B \wedge A$ mentre quella delle matrici è associativa ma non commutativa.

Algebra di Lie. -

Un'algebra L si dice algebra di Lie se gode delle seguenti proprietà:

$$(1) \quad \forall x \in L \Rightarrow x x = 0 \quad (0 \text{ è l'unità del gruppo})$$

$$(2) \quad \forall x, y, z \in L \Rightarrow (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0 \quad (\text{identità di Jacobi}).$$

Per esempio, l'algebra dei vettori dello spazio ordinario risulta un'algebra di Lie, come è facile provare.

In un'algebra di Lie L si ha:

$$\forall x, y \in L \quad xy = -yx$$

Dim.:

$$\begin{aligned} (x+y)(x+y) &= 0 \text{ (per la (1))} = (x+y)x + (x+y)y = xx + yx + xy + yy = 0 \\ &\Rightarrow yx + xy = 0 \Rightarrow xy = -yx \end{aligned}$$

Sia V un'algebra associativa; a partire da V si può costruire una altra algebra L , che sia di Lie, modificando nel modo seguente il prodotto interno:

$$[x, y] = xy - yx$$

Si vede infatti immediatamente che:

$$(1) \quad [x, x] = 0$$

$$(2) \quad [x, (y, z)] + [y, (z, x)] + [z, (x, y)] = 0$$

4. - OMOMORFISMI (O OPERATORI LINEARI) TRA SPAZI VETTORIALI. - AUTOMORFISMI. -

Consideriamo due spazi vettoriali V e V' . Chiamasi omomorfismo od operatore lineare di V in V' un'applicazione T :

$T: V \rightarrow V'$ tale che goda della seguente proprietà:

$$(5.1) \quad \forall x, y \in V, \forall a, b \in \mathbb{R} \\ T(ax + by) = aT(x) + bT(y) \in V'$$

Vale il seguente:

Teorema fondamentale 4.1. per gli spazi vettoriali, (confronta con il teorema (7.5) del capitolo II sugli omomorfismi tra gruppi):

SE T E' UN OMOMORFISMO TRA DUE SPAZI VETTORIALI V E V' SI HA:

- 1) $\text{Im}T$ E' UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V' ;
- 2) $\text{Ker}T$ E' UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V ;
- 3) LE CONTROIMMAGINI DEGLI ELEMENTI DI $\text{Im}T$ SONO LE CLASSI LATERALI INDOTTE DA T IN V ($\text{Ker}T$ E' CHIARAMENTE INVARIANTE);
- 4) LA CORRISPONDENZA DI CUI AL PUNTO 3) TRA LE CLASSI LATERALI E GLI ELEMENTI DI $\text{Im}T$ E' UN ISOMORFISMO.

Dimostrazione:

- 1) Dire che $\text{Im}T$ è un sottogruppo vettoriale di V' equivale a dire che:

$$\forall u, v \in \text{Im}T, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u + \mu v \in \text{Im}T$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \text{Im}T &\Rightarrow \exists x, y \in V \text{ tali che } u = T(x), v = T(y) \\ &\Rightarrow \lambda u + \mu v = \lambda T(x) + \mu T(y) = T(\lambda x + \mu y) \in \text{Im}T \end{aligned}$$

essendo

$$\lambda x + \mu y \in V$$

2) Dire che $\text{Ker} T$ è un sottospazio vettoriale di V equivale a dire che:

$$\forall x, y \in \text{Ker} T \iff T(x) = T(y) = 0'$$

dove $0'$ è l'elemento unità di V' .

Infatti:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \text{Ker} T, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} &\implies T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \\ &= \lambda 0' + \mu 0' = 0' \implies \lambda x + \mu y \in \text{Ker} T \end{aligned}$$

3) Facciamo vedere che tutti gli elementi di una classe indotta in V da $\text{Ker} T$ hanno lo stesso trasformato in $\text{Im} T$.

Si consideri la classe:

$$\begin{aligned} \{x\}_s &= x + \text{Ker} T = x + y, \quad y \in \text{Ker} T \\ \forall y \in \{x\}_s &\implies T(y) = T(x+y) = T(x) + 0' = T(x) \end{aligned}$$

4) La corrispondenza tra gli elementi di $V/\text{Ker} T$ (cioè le classi laterali) e gli elementi in $\text{Im} T$ è un isomorfismo, cioè due elementi di classi diverse non possono avere lo stesso trasformato.

Infatti ciò consegue dal punto 4) del teorema fondamentale (7.5) per i gruppi:

Oltre al teorema fondamentale precedente vale il seguente:

Teorema 4.2. -

DUE SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONI FINITA SONO ISOMORFI SE E SOLO SE ES
SI HANNO LA STESSA DIMENSIONE.

Dim.:

Se i due spazi sono isomorfi, cioè se esiste un isomorfismo φ tra essi, l'isomorfismo muta una base di V in una base di V' e pertanto i due spazi hanno la stessa dimensione.

Viceversa proviamo che se V e V' hanno la stessa dimensione n si riesce a determinare un'isomorfismo φ tra essi. Sia (e_1, e_2, \dots, e_n) una base in V e $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ una base in V' . La corrispondenza $\varphi: v \in V \rightarrow v' \in V'$ che associa al vettore $v = \sum v_i e_i$ il vettore $v' = \sum v'_i e'_i$ (con le stesse componenti nelle due basi!) risulta manifestamente un isomorfismo.

Definizione:

Si dice automorfismo di uno spazio vettoriale V un isomorfismo di V in se stesso (cfr. Cap. II, par. 7).

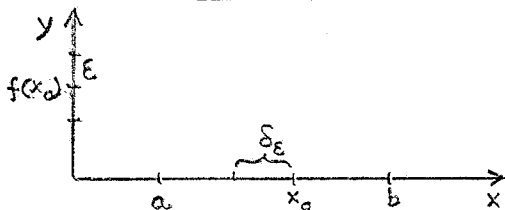
L'insieme di tutti i possibili automorfismi di V forma un gruppo, che indicheremo con $A(V)$, rispetto all'applicazione successiva di due di essi.

Le matrici considerate nel capitolo II costituiscono un semplice esempio di operatori lineari in C^n .

CAP. - IV - SPAZI TOPOLOGICI -

1. - DEFINIZIONI E GENERALITA' SUGLI SPAZI TOPOLOGICI. -

In analisi il concetto di continuità di una funzione si introduce facendo ricorso al concetto di intorno di un punto. Per esempio, nel caso di una funzione di variabile reale $y=f(x)$ definita in un intervallo (a, b) si dice che la $f(x)$ è continua in un punto x_0 dell'intervallo, se per ogni reale $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che per ogni x dell'intervallo per cui $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, cioè per ogni x di un intorno aperto di x_0 di raggio δ_ε , risulti $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



Si può pensare di estendere il concetto di continuità anche per insiemi più generali dell'asse reale \mathbb{R} ma per questo occorre introdurre il concetto di intorno aperto di un punto dell'insieme.

A tale scopo conviene procedere introducendo innanzitutto la nozione di spazio topologico:

Definizione:

Si dice che nell'insieme $S (\neq \emptyset)$ è definita una topologia o una struttura topologica quando è data una famiglia $\mathcal{T} = \{A_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi A_i di S , detti aperti, in modo che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

- 1) $\bigcup_{i \in I'} A_i = A \quad (I' \subseteq I)$
- 2) $\forall A_i, A_j \in \mathcal{T} \Rightarrow A_i \cap A_j \in \mathcal{T}$
- 3) \emptyset, S sono elementi di \mathcal{T}

La coppia (S, \mathcal{T}) si dice spazio topologico. S si dice sostegno ^{\mathcal{T}} /topologia dello spazio topologico.

Diamo ora alcuni esempi:

Esempio 1:

Sia S l'asse \mathbb{R} e \mathcal{T} la famiglia degli aperti di \mathbb{R} nel senso dell'analisi tradizionale (un insieme A di \mathbb{R} si dice aperto se per ogni punto di A esiste un intervallo aperto con centro nel punto e tutto in A). \mathcal{T} Si può anche definire come l'insieme costituito da \emptyset e dalle parti di \mathbb{R} ciascuna delle quali è unione di intervalli aperti di \mathbb{R} . Si verificano manifestamente per \mathcal{T} le proprietà 1), 2) e 3). Dunque \mathcal{T} è una topologia di \mathbb{R} e prende il nome di topologia naturale di \mathbb{R} .

Esempio 2:

Sia $S = \mathbb{R}^2$ il piano cartesiano (x, y) e \mathcal{T} la famiglia degli aperti del piano nel senso dell'analisi tradizionale (un insieme A di S si dice aperto se per ogni punto di A esiste un intorno circolare, con centro nel punto, tutto contenuto in A). Si vede immediatamente che sono soddisfatte per \mathcal{T} le condizioni 1), 2) e 3). Dunque \mathcal{T} è una topologia di \mathbb{R}^2 e prende il nome di topologia naturale di \mathbb{R}^2 .

Esempio 3:

Sia S un insieme costituito dai tre elementi A, B, C . Consideriamo come aperti costanti la famiglia \mathcal{T} gli elementi A, \emptyset ed S .

Si vede facilmente che (S, \mathcal{T}) costituiscono uno spazio topologico:

- 1) $A \cup \emptyset \cup S = A \cup S = S \in \mathcal{T}$;
 $A \cup \emptyset = A \in \mathcal{T}$; $A \cup S = S \in \mathcal{T}$;
 $\emptyset \cup S = S \in \mathcal{T}$

$$\begin{array}{c} A \cdot \\ \cdot C \\ B \cdot \end{array} \quad \mathcal{T} = (A, \emptyset, S)$$

- 2) $A \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{T}$; $A \cap S = A \in \mathcal{T}$; $\emptyset \cap S = \emptyset \in \mathcal{T}$.

3) \emptyset , S aperti

Esempio 4:

Sia S lo stesso insieme dell'esempio precedente e sia \mathcal{T} costituito da A, B, \emptyset , S.

In questo caso (S, \mathcal{T}) non è uno spazio topologico. Infatti non è verificata la condizione 1): $A \cup B \notin \mathcal{T}$.

Dato un insieme $S (\neq \emptyset)$ la famiglia costituita da tutti i sottoinsiemi di S costituisce una topologia di S che prende il nome di topologia discreta di S, mentre la famiglia costituita soltanto da \emptyset ed S costituisce un'altra topologia di S che viene detta topologia banale di S.

Dunque ogni insieme $S (\neq \emptyset)$ ammette sempre due topologie che sono distinte se e solo se l'insieme possiede almeno due elementi.

Dati un sostegno S e due sue topologie \mathcal{T} e \mathcal{T}' si dice che \mathcal{T}' è più fine di \mathcal{T} se ogni aperto di \mathcal{T} è anche aperto di \mathcal{T}' , cioè se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. La più fine di tutte le topologie di S è quella discreta, la meno fine è quella banale.

Definizione:

Una famiglia B di aperti di uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) prende il nome di base per lo spazio se ogni aperto di S è ottenuto come unione di aperti di B.

Per esempio nella topologia naturale dell'asse reale gli intervalli aperti costituiscono una base in quanto per definizione ogni aperto di tale topologia è unione di intervalli aperti. Un'altra base di tale topologia è costituita dagli intervalli con estremi dati da numeri razionali (infatti ogni intervallo aperto dell'asse reale è unione di intervalli con estremi razionali).

Nella topologia naturale di \mathbb{R}^2 gli interni circolari costituiscono una base. Un'altra base è data dagli interni circolari con centro a coordinate razionali e raggio razionale.

Nella topologia discreta una base è costituita dai singoli punti di S (ogni punto essendo un aperto ed ogni parte di S essendo unione di punti).

Dato un punto x di uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) chiamasi intorno di x un qualsiasi insieme U_x che contenga un aperto contenente x. Un intorno aperto di x è un intorno di x che sia aperto.

Si ha subito che un insieme A di S è aperto se e solo se ogni suo punto ammette un intorno tutto contenuto in A (cioè se ogni suo punto è interno).

Definizione:

Chiamasi sistema fondamentale di interni di un punto x di S una famiglia di interni di x tali che ogni aperto contenente x contiene qualche intorno di x della famiglia.

Per esempio gli interni sferici di un punto x di \mathbb{R}^n nella topologia naturale costituiscono un sistema fondamentale per gli interni di x. Un altro sistema fondamentale per gli interni di x è dato dagli interni sferici di raggio razionale, mentre gli interni sferici di raggio intero non costituiscono un sistema fondamentale per gli interni di x.

Evidentemente gli aperti di una base di S contenenti tutti un punto x di S costituiscono un sistema fondamentale di interni di x.

Se X è un sottoinsieme di uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) un punto x di S si dice di accumulazione per X quando ogni intorno di x contiene qualche punto di X diverso da x.

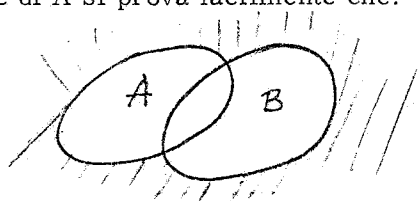
In uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) si definisce chiuso C in S il complementare di un aperto (cioè l'insieme costituito da tutti gli elementi di S che non appartengono all'aperto).

Denotato con $\mathcal{C}A$ il complementare di A si prova facilmente che:

$$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$$

$$\mathcal{C}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{C}A_i)$$

$$\mathcal{C}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (\mathcal{C}A_i)$$



Dalle proprietà 1), 2) e 3) che definiscono una topologia e da quanto ora detto, si ha allora che

- 1) $\bigcap_{i \in I} C_i = \text{chiuso}$
- 2) $C_1 \cup C_2 = \text{chiuso}$
- 3) S, \emptyset sono chiusi

Si definisce chiusura di una parte x di S l'intersezione di tutti i chiusi contenenti la parte stessa; essa si denota con \bar{x} .

Si prova subito che un insieme A è un chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura.

Si prova facilmente che un sottoinsieme X di uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione ed inoltre che l'unione di un insieme X con l'insieme dei suoi punti di accumulazione coincide con la chiusura di X .

Un insieme D di uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) si dice denso in S se la chiusura \bar{D} di D coincide con S cioè se ogni punto di $S-D$ è punto di accumulazione di D ($S-D$ è l'insieme, dei punti di S non contenuti in D).

Esempio:

L'insieme dei razionali è denso in \mathbb{R} .

2. - APPLICAZIONE CONTINUA TRA SPAZI TOPOLOGICI. -

Dati due spazi topologici (S, \mathcal{T}) ed (S', \mathcal{T}') ed una applicazione (o funzione) f di S in S' , si dice che f è continua in $x_0 \in S$ se, per ogni intorno $U'_{x'_0}$ di x'_0 , trasformato di x_0 in S' , esiste in S un intorno U_{x_0} di x_0 tale che per ogni $x \in U_{x_0}$ si abbia $f(x) \in U'_{x'_0}$.

$$f: S \rightarrow S', \quad \forall x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) \in U'_{x'_0}.$$

Se, per esempio, $S' = \mathbb{R}$ la definizione di continuità ora data coincide evidentemente con la seguente: si dice che una funzione $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 se per ogni reale $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U_{x_0} tale che per ogni $x \in U_{x_0}$ risulti $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si dice che un'applicazione è continua in S se è continua in ogni suo punto.

Si dimostrano subito le seguenti proposizioni:

Teorema 2.1. -

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÉ $f: (S, \mathcal{T}) \rightarrow (S', \mathcal{T}')$ SIA CONTINUA È CHE LE CONTROIMMAGINI DEGLI APERTI DI S' SIANO APERTI DI S

Teorema 2.2. -

IL PRODOTTO DI DUE APPLICAZIONI CONTINUE È UN'APPLICAZIONE CONTINUA

Un'applicazione $f: (S, \mathcal{T}) \rightarrow (S', \mathcal{T}')$ si dice aperta se l'immagine di ogni aperto di S risulta un aperto di S' . Un'applicazione può essere aperta e continua. Se l'applicazione f è biunivoca, aperta e continua prende il nome di omeomorfismo.

Si definisce cioè omeomorfismo un'applicazione biunivoca (cioè biettiva) $f: (S, \mathcal{T}) \rightarrow (S', \mathcal{T}')$ tale che sia f sia f^{-1} siano continue, cioè una applicazione biunivoca e bicontinua tra S ed S' .

È evidente che il prodotto di due omeomorfismi nel senso dell'applicazione successiva di essi è un omeomorfismo.

Un omeomorfismo $f: (S, \mathcal{T}) \rightarrow (S', \mathcal{T}')$ trasforma gli aperti di S in aperti di S' ed inoltre ogni aperto di S' proviene da un aperto di S ; esso dunque pone una corrispondenza biunivoca tra le due topologie \mathcal{T} e \mathcal{T}' . Poiché le proprietà topologiche di uno spazio S sono definite dagli a-

perti della topologia, due spazi topologici omeomorfi si possono identificare.

3. - OPERAZIONI TRA SPAZI TOPOLOGICI. -

a) Topologia relativa. -

Dato uno spazio topologico (S, \mathcal{C}) sia X un sottoinsieme (non vuoto) di S . In X si può definire una topologia \mathcal{C}' considerando aperti di X le intersezioni degli aperti di S con X .

$$A' \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow A = A \cap X, \quad A \in \mathcal{C}$$

Si prova subito che in tal modo si ottiene una topologia \mathcal{C}' in X . La topologia \mathcal{C}' si dice ottenuta per relativizzazione della topologia \mathcal{C} in X . Il sottoinsieme X dotato di questa topologia prende il nome di sottospazio topologico di S .

Se X è un insieme aperto di S , gli aperti di \mathcal{C}' , che pertanto sono intersezioni di aperti di S con X aperto di S , sono anche aperti di \mathcal{C} . Così non è, ovviamente, se X non è un aperto di S .

b) Prodotto di spazi topologici. -

Dati due spazi topologici (S, \mathcal{C}) ed (S', \mathcal{C}') si consideri il prodotto cartesiano $S \times S'$ degli insiemi S ed S' (cioè l'insieme delle coppie ordinate (x, x') con $x \in S$ ed $x' \in S'$).

Si definiscono aperti in $S \times S'$ i sottoinsiemi di $S \times S'$ ciascuno dei quali risulta unione di prodotti cartesiani $A \times A'$ con $A \in \mathcal{C}$ ed $A' \in \mathcal{C}'$.

Si verifica subito che gli aperti così definiti in $S \times S'$ costituiscono una topologia che prende il nome di topologia prodotto e si denota con $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

L'insieme $S \times S'$ dotato di tale topologia prende il nome di prodotto topologico di $S \times S'$.

Evidentemente i prodotti $A \times A'$, al variare di A in \mathcal{C} ed A' in \mathcal{C}' costituiscono una base per la topologia prodotto.

Come esempio si consideri il prodotto topologico dell'asse x reale, dotato della topologia naturale, per l'asse y reale dotato della topologia naturale. Si ottiene, come è facile verificare, la topologia naturale di \mathbb{R}^2 , gli elementi della base essendo formati da tutti i possibili rettangoli di \mathbb{R}^2 con i lati paralleli agli assi.

L'applicazione

$$p: (x, x') \in S \times S' \rightarrow x \in S$$

risulta manifestamente continua. Essa prende il nome di prima proiezione.

Analogamente l'applicazione

$$p': (x, x') \in S \times S' \rightarrow x' \in S'$$

risulta continua e prende il nome di seconda proiezione.

La nozione di prodotto topologico tra due spazi topologici si generalizza facilmente ad un numero finito qualsiasi di spazi.

c) Spazio topologico quoziente. -

Ricordiamo che, dato un insieme S ed una relazione d'equivalenza R tra gli elementi dell'insieme, resta definito l'insieme quoziente $S/R = X$ che ha come elementi le classi d'equivalenza $\{x\}$ con $x \in S$.

L'applicazione

$$p: S \rightarrow X = S/R$$

che fa corrispondere ad un elemento $x \in S$ l'elemento $\{x\} \in X$ si chiama applicazione naturale.

Se (S, \mathcal{C}) è uno spazio topologico, definiamo come aperti di $X = S/R$ quei sottoinsiemi di X le cui controimmagini, tramite p , siano aperti di S . Gli aperti di X così definiti costituiscono,

come subito si verifica, una topologia \mathcal{T}' in X . Essa prende il nome di topologia quoziente.

Lo spazio topologico (X, \mathcal{T}') si dice spazio quoziente di (S, \mathcal{T}) rispetto alla relazione d'equivalenza R . Evidentemente l'applicazione naturale $p: S \rightarrow X$ tra i due spazi topologici (S, \mathcal{T}) ed (X, \mathcal{T}') è continua.

4. - ASSIOMI DI SEPARAZIONE. -

Si dice che uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) è di Hausdorff o che è separato se in esso vale il seguente:

Assioma di Hausdorff: per ogni coppia di punti distinti x ed y dello spazio topologico (S, \mathcal{T}) esiste un intorno U_x di x ed un intorno U_y di y ad intersezione vuota, cioè:

$$x, y \in S, \quad x \neq y \Rightarrow \exists U_x, U_y / U_x \cap U_y = \emptyset$$

Esempio:

Lo spazio topologico dell'esempio 3 di par. 1, non è di Hausdorff.

Proviamo ora il:

Teorema 4.1. -

IN UNO SPAZIO DI HAUSDORFF OGNI PUNTO E' UN CHIUSO. -

Dimostrazione:

Se x è un qualsiasi punto dello spazio S di Hausdorff, si consideri l'insieme $S-(x)$ (cioè l'insieme ottenuto togliendo ad S il punto x); per ogni $y \in S-(x)$, esiste un intorno U_y di y che non contiene x (per l'assioma di Hausdorff) e quindi che è tutto contenuto in $S-(x)$. Dunque ogni punto di $S-(x)$ è interno ad $S-(x)$, cioè $S-(x)$ è un aperto, quindi x è chiuso; onde l'asserto.

Si noti che ci possono essere spazi topologici in cui ogni punto è un chiuso ma che non sono di Hausdorff (si osservi che nella dimostrazione precedente si è sfruttato solo in parte l'assioma di Hausdorff).

Uno spazio topologico si dice regolare se vale il seguente:

Assioma di regolarità: per ogni elemento x di uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) e per ogni chiuso C con $x \notin C$ esiste un intorno U_x di x ed un aperto A contenente C ad intersezione vuota.

Si osservi che esistono esempi di spazi regolari che non sono di Hausdorff e spazi di Hausdorff che non sono regolari. Ma se uno spazio topologico è regolare ed in esso ogni punto è un chiuso, allora è anche di Hausdorff.

Uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) si dice normale se in esso vale il seguente:

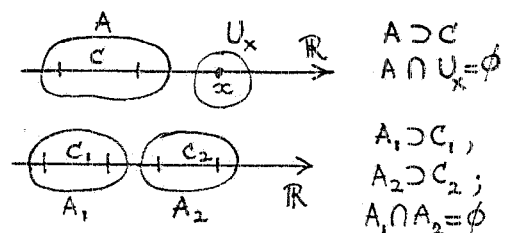
Assioma di normalità: per ogni coppia di chiusi C_1, C_2 con $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ esiste un aperto A_1 contenente C_1 ed un aperto A_2 contenente C_2 tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Uno spazio normale in cui ogni punto è un chiuso risulta evidentemente di Hausdorff ed inoltre anche regolare ma, in generale, non sono veri i viceversa.

Esaminiamo alla luce dei precedenti assiomi, alcuni esempi di spazi topologici.

Esempio 1:

Sia (S, \mathcal{T}) lo spazio topologico costituito dall'asse reale \mathbb{R} dotato della topologia naturale. Esso è, come già osservato, di Hausdorff. E' uno spazio topologico regolare. E' anche uno spazio topologico normale.



Esempio 2:

Sia (S, \mathcal{T}) lo spazio topologico dell'esempio 3 di par. 1, Cap. IV. Tale spazio non è di Hausdorff, non è regolare né normale.

$A, \quad B$
 $\quad \quad \quad \cdot C$

$\mathcal{T} = (A, \phi, S)$

5. - ASSIOMI DI NUMERABILITA', SEPARABILITA' DI UNO SPAZIO TOPOLOGICO. -

Si dice che uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) soddisfa la primo assioma di numerabilità quando:

I. - Ogni punto di S ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Si dice che uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) soddisfa al secondo assioma di numerabilità o che è a base numerabile quando:

II. - Lo spazio S ammette una base per gli aperti che sia numerabile.

Per esempio la topologia naturale in \mathbb{R}^n soddisfa al II assioma di numerabilità, una base numerabile essendo costituita dagli intorni sferici a raggio razionale e con centro a coordinate razionali (cfr. par. 1, Cap. IV).

Osserviamo che il II assioma di numerabilità implica il primo. Infatti per ogni punto x di S gli aperti della base numerabile di S che contengono x costituiscono un sistema fondamentale di intorni di x e tale sistema è numerabile in quanto è una parte di un sistema numerabile.

Il I assioma non implica però il II assioma di numerabilità.

Si dice che uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) è separabile quando:

In S esiste un sottoinsieme D , denso in S , cioè tale che $\bar{D} = S$, che risulti numerabile.

Esempio:

La retta numerica è separabile perchè i razionali sono numerabili.

(Ricordiamo che se D è un sottoinsieme denso in S ogni punto di $S-D$ è punto di accumulazione di D e quindi, in modo intuitivo, ogni punto di S può essere "approssimato" mediante punti di D). Se S è separabile allora i punti di S possono essere approssimati da punti di un insieme che risulta numerabile, cioè da successioni di punti. Di qui l'interesse per lo studio di spazi separabili.

Proviamo ora il:

Teorema 5.1.

OGNI SPAZIO TOPOLOGICO (S, \mathcal{T}) A BASE NUMERABILE, CIOE' PER IL QUALE VALGA IL II ASSIOMA DI NUMERABILITA', E' SEPARABILE. -

Dimostrazione:

Si scelga per ogni aperto della base numerabile B di S un punto. Sia D l'insieme, ovviamente numerabile, che così si ottiene. Proviamo che D è denso in S ; si tratta cioè di dimostrare che ogni punto x di $S-D$ è di accumulazione per D .

Sia U_x un qualsiasi intorno di x ; esisterà allora un aperto della base B contenuto in U_x . Tale aperto contiene un punto di D (per il modo in cui D è stato costruito) distinto da x , cioè x è punto di accumulazione di D ; onde l'asserto.

E' importante osservare che uno spazio separabile può non essere a base numerabile.

Osserviamo infine che se uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) soddisfa al I oppure al II assioma di numerabilità oppure è separabile, tutti i suoi sottospazi godono di tali proprietà.

Così se n spazi topologici soddisfano al I oppure II assioma di numerabilità, oppure sono separabili, anche il loro prodotto topologico gode delle stesse proprietà.

6. - NOZIONE DI COMPATTEZZA. -

Dato uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) si dice ricoprimento aperto di S una famiglia di aperti di S tale che; per ogni elemento x di S , esiste un aperto della famiglia contenente x ; cioè tale che l'unione di tutti gli aperti della famiglia risulti tutto S .

Uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) , che nel resto del paragrafo supporremo di Hausdorff, si dice compatto se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un numero finito di aperti che co-

stituisce ancora un ricoprimento di S.

Un sottoinsieme X di uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) si dice compatto se lo è nella topologia relativa.

Lo spazio \mathbb{R}^n dotato della topologia naturale non è compatto in quanto che se si considera il ricoprimento aperto di \mathbb{R}^n costituito dagli intorni sferici con centro in un punto qualsiasi fissato in \mathbb{R}^n e raggio un qualsiasi intero, si vede subito che da tale ricoprimento non si può estrarre un numero finito di intorni che ricopra tutto lo spazio. In modo del tutto analogo a quanto detto per \mathbb{R}^n si prova il

Teorema 6.1. -

UN SOTTOINSIEME ILLIMITATO DI \mathbb{R}^n NON PUO' ESSERE COMPATTO. (Un insieme di \mathbb{R}^n si dice limitato se esiste un intorno sferico che lo contenga completamente, illimitato in caso contrario).

Dimostrazione:

Se X è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n che ammette un punto x di accumulazione non appartenente ad X , cioè se X non è chiuso, X non può essere compatto. Infatti se consideriamo i complementari delle sfere chiuse di centro x e di raggio $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ essi sono degli aperti che costituiscono un ricoprimento di X (perchè x non appartiene ad X) da cui non è possibile estrarre un ricoprimento finito. Ciò perchè x è punto di accumulazione per X ; supponiamo infatti che sia possibile estrarre un ricoprimento finito e chiamiamo con $S_1, S_2, \dots, S_t, \dots$ le sfere chiuse di centro x i cui complementari costituiscono quel ricoprimento finito. Sia S_m la sfera di raggio minimo tra esse; il complementare di S_m deve contenere tutto X . Dunque tale sfera S_m non contiene punti di X e ciò in contraddizione con il fatto che x è punto di accumulazione per X .

Abbiamo così provato che un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^n deve necessariamente essere chiuso e limitato. Si dimostra che vale anche il viceversa cioè che esiste il seguente:

Teorema 6.2.

(TEOREMA DI HEINE-PINCHERLE-BOREL) OGNI SOTTOINSIEME CHIUSO E LIMITATO DI \mathbb{R}^n E' COMPATTO E VICEVERSA.

Per un qualsiasi spazio topologico (S, \mathcal{T}) di Hausdorff si provano facilmente i seguenti teoremi:

Teorema 6.3.

UN SOTTOINSIEME CHIUSO DI UN QUALSIASI SPAZIO TOPOLOGICO COMPATTO RISULTA COMPATTO.

Teorema 6.4.

OGNI COMPATTO DI UNO SPAZIO TOPOLOGICO E' CHIUSO.

Teorema 6.5.

IL PRODOTTO TOPOLOGICO DI n SPAZI COMPATTI RISULTA ESSERE UNO SPAZIO TOPOLOGICO COMPATTO.

Si prova anche, più in generale, il seguente teorema di Tjijnov:

Teorema 6.6.

IL PRODOTTO TOPOLOGICO DI UNA QUALSIASI FAMIGLIA (cfr. par. 3, Cap. IV) DI SPAZI COMPATTI RISULTA ESSERE COMPATTO.

Uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) si dice localmente compatto se ogni punto x di S ammette un intorno compatto. Per esempio \mathbb{R}^n (che non è compatto) è localmente compatto perchè per ogni suo punto una qualsiasi sfera chiusa di centro in quel punto risulta essere un intorno compatto del punto (per il teorema I).

Proviamo ora il teorema:

Teorema 6.7.

SE $f: X \rightarrow Y$ E' UN'APPLICAZIONE CONTINUA TRA DUE SPAZI TOPOLOGICI X ED Y E K UN SOTTOINSIEME COMPATTO DI X ALLORA $f(K)$ E' UN SOTTOINSIEME COMPATTO DI Y .

Dimostrazione:

Se $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto qualsiasi di $f(K)$, $f^{-1}(U_i)_{i \in I}$ risulta un ricoprimento aperto di K (in quanto, mediante f che è continua, le contraimmagini degli aperti sono aperti). Poichè K è compatto da $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ si può estrarre un ricoprimento finito del tipo $f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(U_2)$, $f^{-1}(U_3)$, ..., $f^{-1}(U_n)$. Ma allora U_1, U_2, \dots, U_n costituiscono un ricoprimento finito di $f(K)$, onde l'asserto.

Come applicazione del teorema supponiamo che X sia uno spazio topologico compatto qualsiasi ed Y l'asse reale \mathbb{R} . Si ha allora che ogni applicazione continua f del compatto X in \mathbb{R} cioè ogni funzione continua definita su X ed a valori reali è tale che $f(X)$ risulta un insieme chiuso e limitato, cioè la f è limitata su X .

7. - NOZIONE DI CONNESSIONE. -

Uno spazio topologico S si dice connesso se non esistono due aperti A_1 ed A_2 ($A_1, A_2 \neq \emptyset$)
tali che:

$$S = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Un'altra definizione di connessione equivalente a quella data è la seguente:

Uno spazio topologico S si dice connesso se non esistono due chiusi C_1 e C_2 ($C_1, C_2 \neq \emptyset$)
tali che

$$S = C_1 \cup C_2, \quad C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

Chiamando clopen un insieme che sia simultaneamente aperto e chiuso si ha un'ulteriore definizione di connessione equivalente alle precedenti:

Uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) si dice connesso se gli unici clopen sono \emptyset ed S .

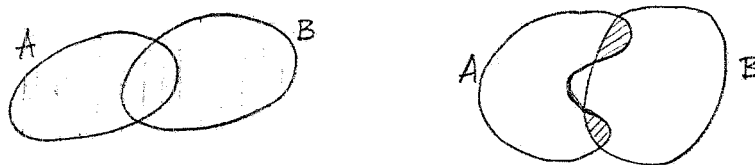
Esempio di spazio topologico connesso è \mathbb{R} con la topologia naturale.

Si dice che un sottoinsieme X di uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) è connesso se tale è il sottospazio topologico X nella topologia relativa.

Si dimostrano le seguenti due proprietà di connessione:

I. - La chiusura di un insieme connesso è connessa.

II. - Se A e B sono due sottoinsiemi connessi di S e se $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso, mentre ciò può non essere vero per l'intersezione.



Dato uno spazio topologico (S, \mathcal{T}) in S rimane definita la relazione seguente:

$$x, y \in S, \quad xRy \Leftrightarrow \text{esiste un connesso contenente } x \text{ e } y.$$

Dalla proprietà II di connessione segue subito che tale relazione è di equivalenza. Conseguentemente S risulta suddiviso in classi ciascuna delle quali per la II proprietà è connessa. La classe $\{x\}$ è il massimo connesso contenente x nel senso che ogni connesso contenente x è contenuto nella classe $\{x\}$. Per la proprietà I tale classe $\{x\}$ è un chiuso (infatti la $\overline{\{x\}}$, data dalla chiusura di $\{x\}$, è un insieme connesso per la I proprietà; poichè essa contiene $\{x\}$ non può che coincidere con $\{x\}$ che è il massimo connesso contenente x).

La classe $\{x\}$ si definisce componente connessa di x . Dunque tali componenti connesse sono dei chiusi connessi.

Se le componenti connesse sono in numero finito, ciascuna di esse è un clopen. Infatti il complementare di $\{x\}$ è un aperto (essendo $\{x\}$ un chiuso) ma è anche un chiuso essendo l'unione di un numero finito di chiusi. Tale complementare di $\{x\}$ è dunque un clopen. Ne segue imme-

diatamente che $\{x\}$ è un clopen. Questo non è detto che sia il caso se le componenti sono in numero infinito.

Si dimostra la seguente proposizione:

III. - Siano (S, \mathcal{C}) ed (S', \mathcal{C}') due spazi topologici e sia $f: S \rightarrow S'$ un'applicazione continua di S in S' . Se X è un sottoinsieme connesso di S allora $f(X)$ è un sottoinsieme connesso di S' .

Dalla precedente proposizione discende come corollario che se S ed S' sono due spazi topologici omeomorfi, allora se S è connesso anche S' è connesso.

Uno spazio topologico si dice totalmente sconnesso se la componente connessa di ciascun punto si riduce a quel punto.

Uno spazio topologico con topologia discreta è totalmente sconnesso.

Un altro esempio di spazio topologico totalmente sconnesso è la retta razionale dotata della topologia relativa indotta dalla topologia naturale in \mathbb{R} . Se, infatti, x ed y sono due razionali distinti si può trovare un irrazionale α compreso tra x ed y tale che le due semirette aperte in cui α suddivide la retta \mathbb{R} , che sono degli aperti nella topologia naturale, determinano come aperti nello spazio topologico relativo dei razionali due insiemi ad intersezione nulla e con unione che coincide con l'insieme dei razionali stessi. Quindi x ed y non possono appartenere ad una stessa componente connessa. Ne segue che la componente connessa di x si riduce al solo x .

Osserviamo infine che se n spazi topologici sono connessi anche il loro prodotto topologico è connesso. Ne segue che \mathbb{R}^n è connesso dal fatto che \mathbb{R} è connesso.

8. - CAMMINI IN UNO SPAZIO TOPOLOGICO. SPAZI LINEARMENTE CONNESSI. -

Dato uno spazio topologico (S, \mathcal{C}) , che nel seguito supporremo di Hausdorff, chiameremo cammino di S un'applicazione (o funzione) continua l dell'intervallo reale chiuso $I = \{t \in \mathbb{R} / 0 \leq t \leq 1\}$ (dotato della topologia naturale) in S :

$$(1) \quad l : t \in I \rightarrow l(t) \in S$$

I punti $l(0)$ ed $l(1)$ sono detti rispettivamente origine ed estremo del cammino $l(t)$. L'immagine di l in S si denoterà al solito con $Im l$.

Il cammino $l(t)$ si dice nullo o identico se esso è un'applicazione costante (cioè $l(t) = p \in S$ con p fisso per ogni $t \in I$).

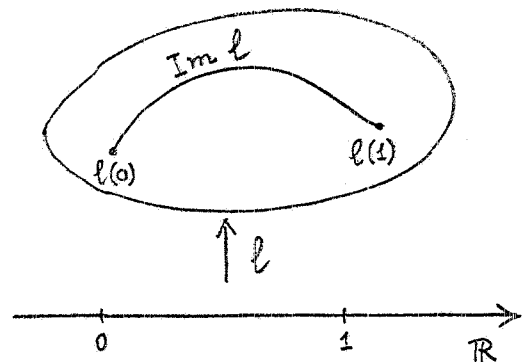
Chiamasi opposto o inverso del cammino l e si indica con l^{-1} il cammino costituito dalla funzione $l^{-1}(t) = l(1-t)$, $t \in I$. Evidentemente si ha che $l^{-1}(0) = l(1)$ ed $l^{-1}(1) = l(0)$ e che le immagini dei due cammini l ed l^{-1} coincidono.

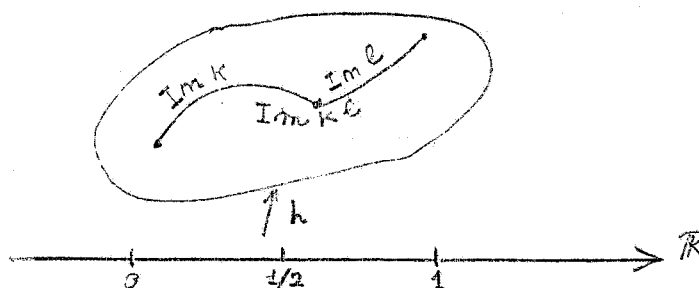
Dati due cammini k, l tali che l'estremo di k coincide con l'origine di l (cioè $k(1) = l(0)$) si definisce prodotto $k1$ tra essi il cammino h dato da:

$$(2) \quad \begin{aligned} h(t) &= k(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ h(t) &= l(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Si noti che l'applicazione $h: I \rightarrow S$ definita in (2) risulta continua perchè $k(1) = l(0) = h(1/2)$; inoltre la sua immagine in S coincide con l'unione tra immagine di k e l'immagine di l .

Osserviamo che l'insieme dei cammini rispetto al prodotto sopra definito non costituisce gruppo; ciò per diverse ragioni. Per esempio, il prodotto può non essere definito o può non esistere l'elemento neutro o l'inverso di l in senso gruppendo. Nel paragrafo seguente faremo però vedere come, a partire dalle nozioni introdotte, si possa costruire in modo opportuno un gruppo: il gruppo di omotopia.





Un cammino l si dice chiuso se la sua origine coincide con il suo estremo, cioè $l(0) = l(1)$. Ogni cammino nullo risulta evidentemente chiuso.

Uno spazio topologico (S, \mathcal{C}) si dice linearmente connesso (cioè connesso per linee e cammini) se ad ogni coppia di punti p e q di S si può associare un cammino l che ha origine in p ed estremo in q (cioè $l(0) = p$ ed $l(1) = q$).

Poichè l'immagine di un cammino risulta un connesso nella topologia di S (infatti l'intervallo I è connesso e l'applicazione $l: I \rightarrow S$ è continua, onde $l(I)$ è connessa, come risulta dalla proposizione III del par. 8) si ha il:

Teorema 8.1:

UNO SPAZIO TOPOLOGICO LINEARMENTE CONNESSO RISULTA CONNESSO.

Si noti che in generale non vale il viceversa della proposizione precedente: esistono cioè degli spazi connessi che non sono linearmente connessi. Un esempio al riguardo è il seguente. Si consideri il sottospazio S di \mathbb{R}^2 costituito dall'origine e dal grafico della funzione $\text{sen}(1/x)$ ($x \in \mathbb{R} - 0$). Proviamo che S è connesso. Denotati con S^+ , S^- i sottoinsiemi di S rispettivamente costituiti dai punti del grafico della funzione per $x > 0$ e per $x < 0$, si ha $S = S^+ \cup S^- \cup \{0, 0\}$. Ciascuno degli insiemi S^+ ed S^- risulta evidentemente connesso (perchè la funzione $\text{sen}(1/x)$ per $x > 0$ è continua e la semiretta positiva di \mathbb{R} è connessa; e analogamente per S^-). Poichè la chiusura di un insieme connesso è connessa (cfr. Proposizione I, par. 8, Cap. IV) e la chiusura \bar{S}^+ di S^+ risulta costituita da S^+ e dall'origine di \mathbb{R} (che è punto di accumulazione di S^+) si ha che \bar{S}^+ è connesso. Analogamente per S^- . Tutto S risulta dunque connesso in quanto $S = \bar{S}^+ \cup \bar{S}^-$, ed inoltre $\bar{S}^+ \cap \bar{S}^- = \{0, 0\} \neq \emptyset$ (cfr. proposizione II, par. 8, Cap. IV).

Il sottospazio S non risulta però linearmente connesso perchè l'origine ed un qualsiasi altro punto di S non possono essere uniti da un cammino. Ciò si prova facilmente osservando che la funzione che ha come grafico S non è continua nell'origine.

Dato un qualsiasi spazio topologico S in esso si può definire la seguente relazione R , che risulta, come subito si prova, di equivalenza:

$$R: x R y \iff \text{esiste un cammino che ha origine in } x \text{ ed estremo in } y.$$

Tale relazione d'equivalenza determina in S una suddivisione in classi. Ogni classe prende il nome di componente linearmente connessa.

Una componente linearmente connessa è un connesso e quindi è contenuta in una ben determinata componente connessa di S .

In definitiva, dato uno spazio topologico S , esso è suddiviso in componenti connesse ciascuna delle quali è a sua volta suddivisa in componenti linearmente connesse. Nell'esempio precedente le componenti connesse di S sono S^+ , S^- e l'origine.

Proviamo ora il:

Teorema 8.2.

SE $f: S \rightarrow S'$ E' UN'APPLICAZIONE CONTINUA TRA GLI SPAZI TOPOLOGICI S ED S' UN CAMMINO DI S SI MUTA IN UN CAMMINO DI S' .

Dimostrazione:

Un cammino di S è un'applicazione continua $l: I \rightarrow S$ e l'applicazione $f \circ l: I \rightarrow S'$ è ancora continua perchè è il prodotto di due applicazioni continue e cioè è un cammino in S' immagine

mediante f del cammino $Im\ l$ di S . Dunque se S è linearmente connesso, $Im\ f \in S'$ è linearmente connessa.

Si osservi infine che (per le proposizioni III e V del par. 7) si ha:

Teorema 8.3. -

L'IMMAGINE DI CAMMINO l DI S RISULTA ESSERE UN COMPATTO (se S è di Hausdorff) ED INOLTRE UN CHIUSO DI S .

9. - OMOTOPIA IN UNO SPAZIO TOPOLOGICO. -

Due cammini k ed l di uno spazio topologico S tali che abbiano la stessa origine p e lo stesso estremo q ($p=k(0)=l(0)$ e $q=k(1)=l(1)$) si dicono omotopi e si scrive $k \sim l$ se esiste un'applicazione (o funzione) continua φ di $I^2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ (dotato della topologia naturale in S):

$$(1) \quad \varphi : (s,t) \in I^2 \rightarrow \varphi(s,t) \in S$$

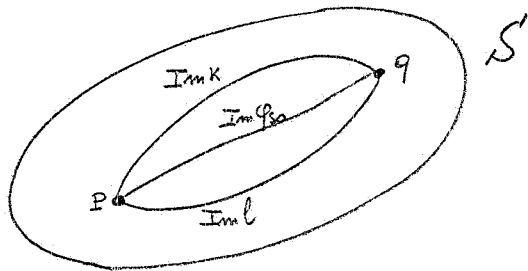
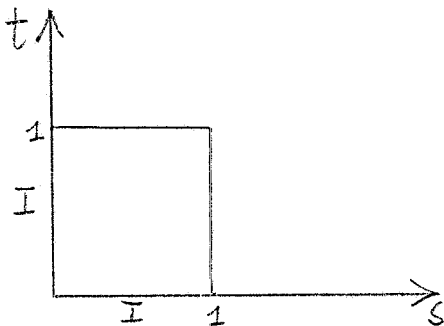
tale che:

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi(0,t) &= k(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ \varphi(1,t) &= l(t) \\ \varphi(s,0) &= k(0) = l(0) \\ \varphi(s,1) &= k(1) = l(1) & 0 \leq s \leq 1 \end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni fissato s_0 di I , l'applicazione φ_{s_0} di I in S , data da:

$$(3) \quad \varphi_{s_0} : t \in I \rightarrow \varphi(s_0,t) \in S$$

risulta essere un cammino (cioè è continua) che ha origine in p ed estremo in q ed immagine contenuta in $Im\ \varphi$. In base alla (2) si vede che $\varphi_{s=0}$ coincide con k e $\varphi_{s=1}$ coincide con l . Al variare di s_0 da 0 ad 1 il cammino φ_{s_0} varia con continuità passando da k ad l e descrivendo tutto $Im\ \varphi$.



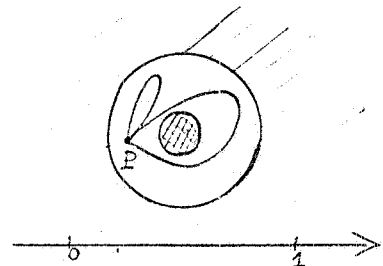
Un cammino chiuso l di origine p si dice omotopo a zero e si denota con $l \sim 0$ se esso è omotopo al cammino costante la cui immagine coincide con p (per esempio se S è unacorona circolare nel piano con la topologia naturale un cammino chiuso che ha nel suo interno la parte del piano non appartenente ad S , non è omotopo a zero mentre è omotopo a zero ogni cammino chiuso che non abbracci tale parte).

Si dimostra il seguente teorema:

Teorema 9.1.

a) LA RELAZIONE DI OMOTOPIA TRA CAMMINI AVENTI LA STESSA ORIGINE E LO STESSO ESTREMO E' DI EQUIVALENZA:

b) SE k ED l SONO CAMMINI ARBITRARI TALI CHE



$k \sim k'$, $l \sim l'$ ED INOLTRE E' DEFINITO IL PRODOTTO kl (CIOE' $k(1)=l(0)$) ALLORA E' DEFINITO IL PRODOTTO $k'l'$ ED INOLTRE:

$$kl \sim k'l', \quad k^{-1} \sim k'^{-1};$$

c) SE k E' UN CAMMINO ARBITRARIO ED l E' UN CAMMINO NULLO TALE CHE AB-
BIA SENSO IL PRODOTTO kl (O ANCHE lk) ALLORA SI HA:

$$kl \sim k, \quad lk \sim k$$

d) SE k , l , m SONO TRE CAMMINI ARBITRARI TALI CHE ABBA SENSO IL PROD-
TO kl ED lm ALLORA HA SENSO ANCHE IL PRODOTTO $(kl)m$ E $k(lm)$ ED INOLTRE SI HA:

$$(kl)m \sim k(lm)$$

e) SE k ED l SONO DUE CAMMINI ARBITRARI TALI CHE $k(0)=l(0)$ e $k(1)=l(1)$ ALLO-
RA SI HA:

$$k \sim l \iff kl^{-1} \sim 0, \quad l^{-1}k \sim 0$$

Sia 0 un punto fissato in uno spazio topologico S . Si consideri l'insieme \mathcal{L} dei cammini chiusi di S aventi l'origine e l'estremo coincidenti in 0 . Per tali cammini ha senso il prodotto di due qualsiasi di essi in quanto hanno l'origine e l'estremo in comune.

In \mathcal{L} rimane definita la relazione di omotopia, che è di equivalenza. Essa determina quindi una partizione in classi degli elementi di \mathcal{L} ogni classe $\{l\}$, classe d'omotopia di origine 0 , essendo costituita da tutti i cammini di \mathcal{L} omotopi ad l . Sia $\Omega(0)$ l'insieme di tali classi di omotopia. In $\Omega(0)$ si può introdurre un'operazione di prodotto ponendo:

$$(4) \quad \{k\}\{l\} = \{kl\}$$

una volta osservato che; in forza della b) della proposizione I, se k' ed l' sono due qualsiasi elementi rispettivamente delle classi $\{k\}$ ed $\{l\}$, $k'l'$ risulta un elemento della classe $\{kl\}$ e quindi il prodotto definito in (4) è ben determinato, non dipendendo dalla scelta del rappresentante nelle classi $\{k\}$ ed $\{l\}$.

Rispetto a tale operazione di prodotto $\Omega(0)$ costituisce un gruppo. Infatti per la d) di proposizione I vale la proprietà associativa; inoltre esiste l'elemento unità che è dato dalla classe $\{0\}$ dei cammini omotopi al cammino costante 0 (cioè che manda tutto I nell'unico punto 0) come si ricava dalla c) della proposizione I. Infine ogni $\{l\} \in \Omega(0)$ ammette l'inverso dato da $\{l\}^{-1} = \{l^{-1}\}$ (cfr. b) di proposizione I); infatti, poichè $l \sim 1$, per la e) di proposizione I si ha $ll^{-1} \sim 0, l^{-1}l \sim 0$ e quindi $\{l\}\{l^{-1}\} = \{ll^{-1}\} = \{0\}$ e $\{l^{-1}\}\{l\} = \{0\}$.

Il gruppo $\Omega(0)$ prende il nome di gruppo fondamentale o gruppo di omotopia o gruppo di Poincarè dello spazio topologico S relativo ad 0 . Ci proponiamo di provare che:

Teorema 9.3.

SIANO S UNO SPAZIO LINEARMENTE CONNESSO ED $0, 0_1$ DUE SUOI QUALSIASI PUNTI. I GRUPPI FONDAMENTALI $\Omega(0)$ ED $\Omega(0_1)$ SONO ISOMORFI.

Dimostrazione:

Sia m un fissato cammino di origine 0 ed estremo 0_1 , certo esistente perchè S è linearmente connesso. In forza della b) della proposizione I si ha che se $k \sim k'$ risulta anche $m^{-1}k'm \sim m^{-1}k'm$; quindi, fissata la classe $\{k\} \in \Omega(0)$ ad essa si può far corrispondere la ben determinata classe elemento di $\Omega(0_1)$ data da $\{m^{-1}k'm\}$. Rimane dunque determinata l'applicazione:

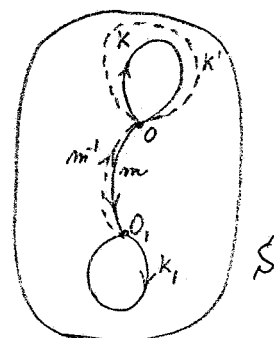
$$\mu: \{k\} \in \Omega(0) \longrightarrow \{m^{-1}k'm\} \in \Omega(0_1)$$

Essa è biunivoca e l'inversa è data evidentemente da

$$\mu^{-1}: \{k_1\} \in \Omega(0_1) \longrightarrow \{mk_1m^{-1}\} \in \Omega(0)$$

Inoltre si ha, come subito si verifica:

$$\mu(\{k\}\{l\}) = \mu(\{k\})\mu(\{l\})$$



Dunque μ è un isomorfismo tra $\Omega(0)$ ed $\Omega(0_1)$, onde l'asserto.

Per la proposizione precedente, se S è uno spazio topologico linearmente connesso, il gruppo d'omotopia non dipende dal punto 0 (a meno di isomorfismi). Il gruppo astratto definito da $\Omega(0)$, dove 0 è un qualsiasi punto di S , si denota semplicemente con Ω e si continua a chiamare gruppo di omotopia di S .

Uno spazio topologico linearmente connesso si dice semplicemente connesso se il suo gruppo di omotopia si riduce ad un unico elemento, cioè se due qualsiasi cammini chiusi di origine 0 sono sempre tra loro omotopi. Per esempio $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m$ dotati della topologia naturale sono semplicemente connessi, come è facile provare.

Evidentemente il gruppo di omotopia è un invariante per omeomorfismi di S e quindi le sue proprietà sono degli invarianti topologici di S .

In definitiva lo studio del gruppo Ω equivale allo studio delle proprietà di connessione dello spazio topologico S . Proviamo ora il:

Teorema 9.4.

SE f È UN'APPLICAZIONE CONTINUA $f: S \rightarrow S'$ TRA GLI SPAZI TOPOLOGICI S ED S' , IL GRUPPO DI OMOTOPIA $\Omega(0)$ DI S RELATIVO AD UN PUNTO $0 \in S$ RISULTA OMOMORFO AL GRUPPO DI OMOTOPIA $\Omega(0')$ DI S' RELATIVO AL PUNTO $0' = f(0) \in S'$.

Dimostrazione:

Ad ogni cammino chiuso l di origine 0 in S si può far corrispondere il cammino chiuso di S' di origine $0'$ dato da $f \circ l$ (cfr. proposizione II, par. 9, Cap. V). Si prova subito che se k ed l sono cammini chiusi di origine 0 :

$$(5) \quad f \circ (kl) = (f \circ k)(f \circ l)$$

$$(6) \quad k \sim l \Rightarrow f \circ k \sim f \circ l$$

Data la classe di omotopia $\{k\} \in \Omega(0)$ rimane allora determinata la classe di omotopia $f \circ k \in \Omega(0')$ (in forza della (6)). Nasce così l'applicazione:

$$\varphi: \{k\} \in \Omega(0) \rightarrow \{f \circ k\} \in \Omega(0')$$

In virtù della (5) l'applicazione φ risulta essere un omomorfismo. È così provata la proposizione III.

Si può infine dimostrare il:

Teorema 9.5.

SE R ED S SONO DUE SPAZI TOPOLOGICI LINEARMENTE CONNESSI, DENOTATO CON T IL LORO PRODOTTO TOPOLOGICO, SI HA CHE LO SPAZIO T È LINEARMENTE CONNESSO ED IL SUO GRUPPO FONDAMENTALE È ISOMORFO AL PRODOTTO DIRETTO DEI GRUPPI FONDAMENTALI DI R E DI S .

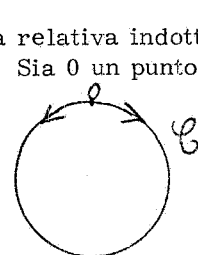
In particolare il prodotto topologico di due spazi semplicemente connessi è semplicemente connesso.

Esempio 1. -

\mathbb{R}^m dotato della topologia naturale od un qualunque intorno sferico di \mathbb{R}^m è semplicemente connesso ed il suo gruppo di omotopia si riduce al solo elemento nullo.

Esempio 2. -

Sia \mathcal{C} una circonferenza del piano \mathbb{R}^2 dotata della topologia relativa indotta in \mathcal{C} dalla topologia naturale di cui è dotato \mathbb{R}^2 . Essa è linearmente connessa. Sia 0 un punto di \mathcal{C} . Se si percorre tutto \mathcal{C} a partire da 0 una sola volta in un verso fissato si ottiene un cammino chiuso, di origine 0 , l_0 che non è evidentemente omotopo a zero. Si prova facilmente che ogni altro cammino chiuso di origine 0 che si ottiene percorrendo \mathcal{C}



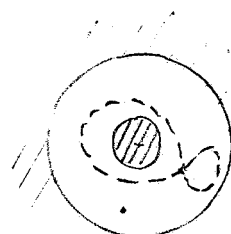
(con legge eventualmente diversa) a partire da 0 una sola volta nel verso di l_0 è omotopo ad l_0 . E' anche evidente che ogni altro cammino l chiuso e di origine 0 si ottiene (a meno di cammini omotopi a zero) percorrendo tutto \mathcal{C} a partire da 0 nel verso di l_0 un numero n ($n \in \mathbb{Z}$) di volte e cioè l è omotopo al prodotto di l_0 n volte per se stesso. Di qui segue subito che il gruppo di omotopia $\pi_1(0)$ di \mathcal{C} è isomorfo al gruppo additivo degli interi $\mathbb{Z}(+)$.

Esempio 3.

La corona circolare del piano \mathbb{R}^2 , dotata della topologia relativa indotta su di essa dalla topologia naturale in \mathbb{R}^2 , è omeomorfa al prodotto topologico della circonferenza per un intervallo aperto di \mathbb{R} . Dalla proposizione IV si ha allora che il suo gruppo di omotopia è isomorfo a $\mathbb{Z}(+)$. Una superficie cilindrica è omeomorfa alla corona circolare e quindi è isomorfa a $\mathbb{Z}(+)$.

Esempio 4.

La superficie torica (toro) è il prodotto topologico di due circonferenze e quindi il suo gruppo di omotopia è isomorfo a \mathbb{Z}^2 .



Esempio 5.

Si definisce n -toro il prodotto topologico di una circonferenza n volte per se stessa. Il suo gruppo di omotopia, per la proposizione IV, è \mathbb{Z}^n .

Esempio 6.

Il prodotto topologico di un intorno circolare per una circonferenza si chiama toro pieno. Il suo gruppo di omotopia è isomorfo a $\mathbb{Z}(+)$ per la proposizione IV.

Esempio 7.

E' facile provare che lo spazio topologico ottenuto dal piano \mathbb{R}^2 togliendo n punti (piano con n buchi) ha il gruppo di omotopia isomorfo a \mathbb{Z}^n .

Esempio 8.

Una superficie sferica di \mathbb{R}^3 (con la topologia relativa indotta dalla topologia di \mathbb{R}^3) è semplicemente connessa perchè ogni cammino chiuso è evidentemente omotopo a zero. Dunque il suo gruppo di omotopia è nullo.

Esempio 9.

L'ipersuperficie sferica di \mathbb{R}^m di centro nell'origine e raggio unitario, cioè il luogo dei punti di \mathbb{R}^m tali che:

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 = 1$$

con la topologia relativa risulta semplicemente connessa e quindi il suo gruppo di omotopia è zero.

Esempio 10.

Si consideri l'insieme SU_2 delle matrici quadrate A del secondo ordine ad elementi complessi, tali che:

$$A \tilde{A}^* = 1 \quad \det A = +1$$

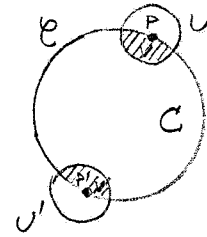
Si prova subito che tali matrici sono del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}; \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1; \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Posto $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3 + ix_4$, ogni matrice si può rappresentare mediante un punto di \mathbb{R}^4 appartenente all'ipersuperficie sferica Σ di \mathbb{R}^4 di centro nell'origine e raggio 1 (in quanto $aa + bb = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$). Dunque SU_2 si può identificare con Σ . Si vede immediatamente che Σ è uno spazio topologico (con la topologia relativa indotta in Σ dalla topologia naturale in \mathbb{R}^4) linearmente connesso e semplicemente connesso (cfr. esempio 9). Dunque SU_2 è uno spazio topologico semplicemente connesso.

Esempio 11.

Sia C un cerchio del piano \mathbb{R}^2 (inclusi i punti della sua circonferenza) dotato della topologia relativa. Si consideri la relazione d'equivalenza definita nel modo seguente: se P è un punto interno a C la classe d'equivalenza determinata da P sia costituita soltanto dal punto P ; se P è un punto di C la classe di equivalenza è costituita da P e dal punto P' diametralmente opposto di P . Sia K lo spazio topologico quoziente di C rispetto alla suddetta relazione d'equivalenza (cfr. par. 4, Cap. V). In modo intuitivo si può dire che K si ottiene identificando le coppie di punti diametralmente opposti di C e lasciando inalterati i punti interni a C . Se $\{P\} \in K$ è costituito da un punto P interno a C , un sistema fondamentale di intorni di $\{P\}$ in K è dato dal sistema degli intorni circolari di centro P contenuti in C . Se $\{P\} \in K$ è costituito da una coppia di punti P, P' diametralmente opposti su C , un sistema fondamentale di intorni di $\{P\}$ è costituito dai sottoinsiemi di T di K ciascuno ottenuto nel modo seguente: siano U ed U' due intorni circolari del piano di centri P e P' e raggio r ; si ponga $V = C \cap U$, $V' = C \cap U'$. Dal sottoinsieme $V \cup V'$ di C , qualora si facciano le identificazioni relative dei punti di $C \cap V = C \cap V'$ diametralmente opposti, si ottiene un sottoinsieme T di K intorno del punto $\{P\}$. K risulta essere uno spazio topologico evidentemente linearmente connesso. Ci proponiamo di determinare il gruppo di omotopia di K . Sia $\{0\}$ un punto di K costituito da una coppia di punti diametralmente opposti $0, 0'$ di C . Il diametro $00'$ di C in K è l'immagine di cammini chiusi di origine $\{0\}$ qualora si identifichi 0 con $0'$, omotopi evidentemente tra loro ma ciascuno non omotopo a zero, in quanto è chiaro che mediante una deformazione continua non si può ridurre il diametro $00'$ al punto $\{0\}$.



10 - OMEOMORFISMO LOCALE TRA SPAZI TOPOLOGICI. -

Un'applicazione $f: S \rightarrow S'$ continua dello spazio topologico S sullo spazio topologico S' prende il nome di omeomorfismo locale se per ogni punto P di S esiste un intorno aperto di P in S ed un intorno aperto V' di $P' = f(P)$ in S' tale che l'applicazione f , ristretta a V , risulta un omeomorfismo tra V e V' (dotati delle topologie relative).

Si ha subito il:

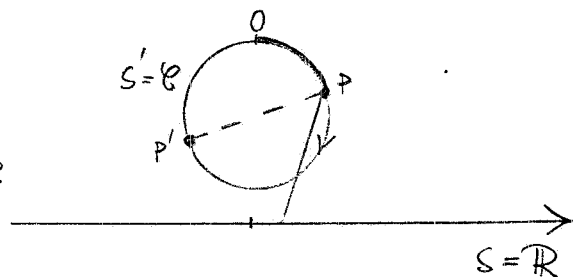
Teorema 10.1.

UN OMEOMORFISMO LOCALE $f: S \rightarrow S'$ DELLO SPAZIO TOPOLOGICO S SU S' RISULTA UN'APPLICAZIONE APERTA. INOLTRE LA TOPOLOGIA RELATIVA DEL SOTTOINSIEME DI S DATO DA $f^{-1}(P')$, CONTROIMMAGINE DI UN QUALSIASI PUNTO P' DI S' , RISULTA DISCRETA.

E' opportuno illustrare i concetti sopra esposti con alcuni esempi.

Esempio 1.

Siano $S = \mathbb{R}$ l'asse reale (dotato della topologia naturale), $S' = \mathbb{C}$ una circonferenza del piano di raggio 1 (dotata della topologia ottenuta per relativizzazione da quella naturale di \mathbb{R}^2) in cui sia fissato un punto 0 ed un verso di percorrenza ed $f: S \rightarrow S'$ l'applicazione che associa ad ogni $s \in S = \mathbb{R}$ il punto $P \in S' = \mathbb{C}$ estremità dell'arco orientato $\overline{0P}$ di lunghezza s . Manifestamente f è un'applicazione continua. Mostriamo che essa è un omeomorfismo locale. Infatti per ogni $s \in \mathbb{R}$ si consideri l'intervallo aperto V di \mathbb{R} di centro s e semilarghezza π . L'immagine V' di V mediante f risulta evidentemente $\mathbb{C} - P'$, dove P' è il punto diametralmente opposto (antipodale) di $P(s)$. Evidentemente la f ristretta all'aperto V di \mathbb{R} risulta essere un omeomorfismo tra V e V' . Dunque la f è un omeomorfismo locale. Si osservi che la controimmagine mediante f di $P(s) \in \mathbb{C}$ risulta costituita da tutti i punti di \mathbb{R} dati da $s + 2k\pi$ (k intero)



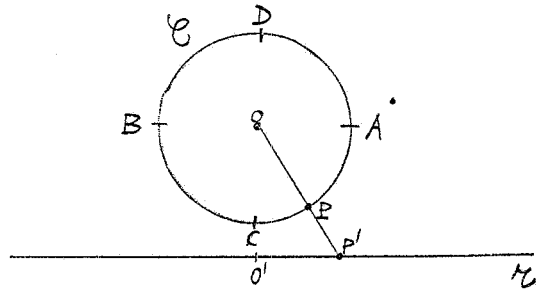
e quindi risulta essere un sottoinsieme discreto di \mathbb{R} .

Esempio 2.

Come è noto, la funzione complessa $\log z = \log |z| + i \arg z$, $z \in \mathbb{C}$, è olomorfa (cioè derivabile in modo complesso) in tutto il piano complesso \mathbb{C} meno la semiretta negativa (o nulla) dell'asse reale x . Il Riemann costruì però una superficie F ad infiniti fogli, che prende il nome di superficie di Riemann, su cui la funzione $\log z$ risulta ovunque olomorfa e tale che la F risulti semplicemente connessa e dotata di un omeomorfismo locale con \mathbb{C} . In tale omeomorfismo locale la contrimmagine di un punto di \mathbb{C} è costituita dalla successione di punti, ciascuno per ogni foglio della superficie, che costituiscono un insieme discreto in F .

Esempio 3.

Sia \mathcal{C} una circonferenza del piano di centro O e sia r una retta dello stesso piano esterna alla circonferenza. Indichiamo con A, B i punti d'incontro con \mathcal{C} della retta per O parallela ad r e con C, D quelli della retta perpendicolare. Sia S' lo spazio topologico i cui punti sono quelli di r e la direzione di r P'_∞ e come topologia quella che ammette come base per gli aperti gli intervalli aperti di r ed i complementari degli intervalli chiusi di \mathbb{R} (questi ultimi costituiscono un sistema fondamentale di intorni per P'_∞). Sia poi $S = \mathcal{C}$ (dotata della topologia di cui all'esempio 1) l'altro spazio topologico. Si consideri l'applicazione $f: P \in S \rightarrow P' \in S'$ che consiste nel proiettare da O un punto di \mathcal{C} su S' . La f è continua ma non è biunivoca (si noti anche che la controimmagine di P'_∞ è costituita dai punti A e B). Essa però risulta essere un omeomorfismo locale. Infatti per ogni $P \neq A, B$ sia V la semicirconferenza aperta contenente P e gli estremi A e B e $V' = r \setminus (S' - (P'_\infty))$; l'applicazione f ristretta a V , risulta evidentemente un omeomorfismo tra V e V' . Per $P = A$, sia V_A la semicirconferenza aperta contenente A di estremi C e D , e V' l'aperto di S' dato da $S' - (O')$. La f risulta ancora un omeomorfismo tra V_A e V' . Infine per $P = B$ la f risulta un omeomorfismo tra l'aperto V_B , dato dalla semicirconferenza aperta contenente B e di estremi C e D e l'aperto $V' = S' - (O')$.



11. - SPAZI TOPOLOGICI LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSI E LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSI. -

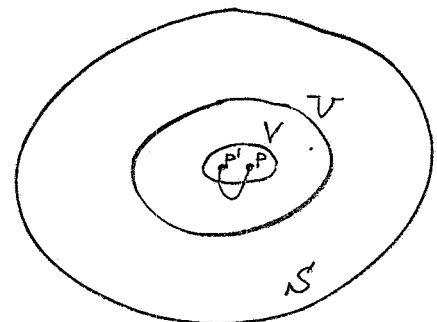
Uno spazio topologico S si dice localmente linearmente connesso se per ogni punto P di S e per ogni intorno aperto U di P esiste un intorno aperto V di P con $V \subset U$, tale che per ogni $P' \in V$ esiste un cammino λ di U di origine P ed estremo P' .

Si noti che la definizione di spazio linearmente connesso e quella di spazio localmente linearmente connesso sono tali che l'uno non implica l'altra. Infatti esistono spazi topologici addirittura sconnessi, e quindi non linearmente connessi, che sono invece localmente linearmente connessi (per esempio se S ed S' sono due spazi localmente linearmente connessi ad intersezione vuota, la loro unione è uno spazio sconnesso che risulta anche linearmente connesso).

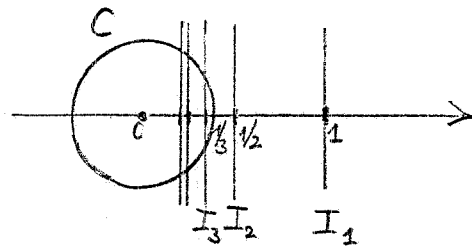
Viceversa si possono dare esempi di spazi che sono linearmente connessi ma non linearmente localmente connessi.

Esempio 1.

Nel piano \mathbb{R}^2 sia I_n il segmento di estremi $(1/n, -1)$, $(1/n, +1)$. Si consideri il sottospazio di \mathbb{R}^2 dato da $S = \mathbb{R}^2 - I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$. Evidentemente S risulta linearmente connesso, ma non è localmente linearmente connesso perchè, scelto un intorno circolare C di 0 (si noti che 0 appartiene ad S) di raggio < 1 e posto $U = S \cap C$, non è possibile trovare un intorno V di 0 , con



$V \subset U$ tale che per ogni punto P di V , 0 e P possono essere l'origine e l'estremo di un cammino di U . Ciò perchè U risulta sconnesso ed inoltre l'intersezione con S di ogni intorno circolare di 0 di raggio < 1 è sempre sconnesso.

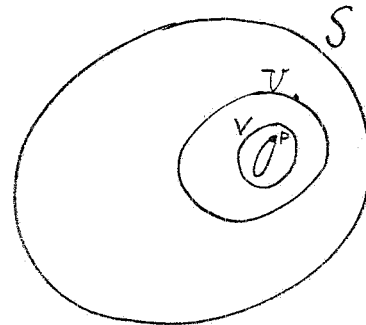


Esempio 2.

\mathbb{R}^n e più in generale ogni aperto connesso di \mathbb{R}^n è uno spazio topologico linearmente connesso e localmente linearmente connesso.

Uno spazio topologico S si dice localmente semplicemente connesso se per ogni punto P e per ogni intorno aperto U di P esiste un intorno aperto V di P , con $V \subset U$, tale che ogni cammino chiuso γ di origine P con $\text{Im} \gamma \subset V$ risulta omotopo a zero in U .

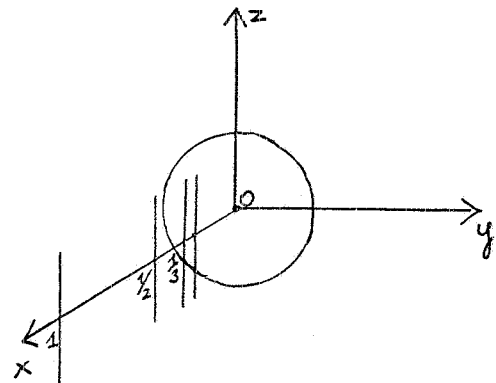
Si noti che la precedente definizione e quella di spazio topologico semplicemente connesso sono tali che l'uno non implica l'altra, come si può vedere dagli esempi che seguiranno.



Osserviamo intanto che ogni aperto A connesso di \mathbb{R}^n risulta localmente semplicemente connesso (infatti per ogni punto P di A e per ogni intorno aperto U di P , preso un intorno circolare V di P , con $V \subset U$, certo esistente, esso risulta semplicemente connesso in V e quindi in U).

Un aperto A di \mathbb{R}^n non semplicemente connesso (per esempio la corona circolare nel piano) dà un esempio di spazio topologico non semplicemente connesso che risulta però localmente semplicemente connesso.

Diamo ora un esempio di spazio topologico che risulta semplicemente connesso ma non localmente connesso. In \mathbb{R}^3 sia I_n il seguente chiuso di estremi nei punti $(1/n, 0, +1)$ e $(1/n, 0, -1)$. Si consideri il sottospazio S di \mathbb{R}^3 dato da $S = \mathbb{R}^3 - I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$; S risulta evidentemente connesso ed anche semplicemente connesso. Esso non è però localmente semplicemente connesso. Infatti sia U la intersezione di S con un intorno sferico di centro 0 e raggio < 1 . U non risulta semplicemente connesso (pur essendo linearmente connesso). Infatti un qualsiasi cammino chiuso γ di U concatenato con uno degli intervalli I_n non è omotopo a zero in U anche se è omotopo a zero in S . Ciò accade inoltre per l'intersezione con S di ogni intorno sferico di centro 0 e di raggio < 1 . E' così provato che S non è localmente semplicemente connesso.



Si prova subito il:

Teorema 11.1:

SE $f: S^* \rightarrow S$ E' UN OMEOMORFISMO LOCALE DI S SU S^* ED S^* E' LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSO O LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO, ALLORA ANCHE S RISULTA TALE.

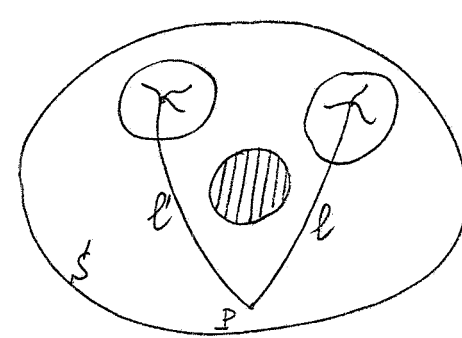
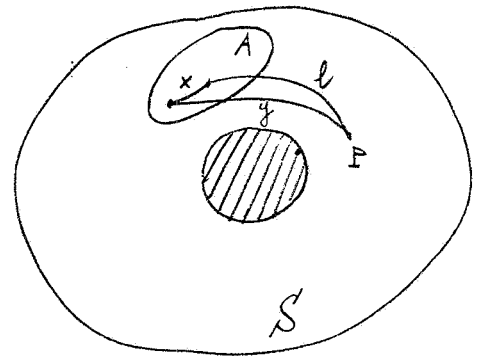
12. - SPAZIO DI RICOPRIMENTO UNIVERSALE DI UNO SPAZIO TOPOLOGICO. -

Se $f: S^* \rightarrow S$ è un omeomorfismo locale tra gli spazi topologici S^* ed S , allora manifestamente le proprietà locali dello spazio topologico S^* coincidono con quelle di S e viceversa. Quindi lo studio delle proprietà locali si può effettuare su S^* invece che su S se lo studio dello spazio S presenta delle difficoltà maggiori di quelle di S^* (come accade per esempio se S non è semplicemente connesso mentre S^* lo è).

Si pone allora il problema di indagare se, dato uno spazio topologico S , si possa costruire uno spazio S^* , addirittura semplicemente connesso che sia localmente omeomorfo ad S , cioè tale che esista un omeomorfismo locale $f: S^* \rightarrow S$. La risposta è sempre affermativa, sotto opportune condizioni per S , come mostriamo nel seguito.

Sia dato uno spazio topologico S linearmente connesso, localmente linearmente connesso, localmente semplicemente connesso (per esempio un aperto di \mathbb{R}^m) e sia P uno dei suoi punti. Sia \mathcal{L}_P l'insieme di tutti i cammini di S di origine P . Suddividiamo \mathcal{L}_P in classi d'equivalenza ponendo in ciascuna classe $L = \{l\}$ l'insieme dei cammini omotopi ad uno di essi l . Manifestamente i cammini della classe $L = \{l\}$ hanno tutti lo stesso estremo P' che denoteremo anche con $P' = f(L) \in S$. Indichiamo con S^* l'insieme delle classi L . Nasce allora l'applicazione naturale $f: L \in S^* \rightarrow f(L) \in S$ che fa corrispondere ad ogni classe L l'estremo di tutti i suoi cammini.

Introduciamo ora in S^* una topologia nel modo seguente: sia A un aperto di S ed l un fissato cammino di origine P ed estremo in A ; si consideri un cammino x , tale che $l \cup x \subset A$ avente per origine l'estremo di l . Sia inoltre $X = \{l \cup x\} \subset S^*$ la classe di tutti i cammini y omotopi al prodotto $l \cup x$ e sia infine $A^* = A^*(A, l)$ l'insieme delle classi X ottenute tenendo fissi A ed l e facendo variare x . E' chiaro che A^* è un sottoinsieme di S^* . Si consideri ora la famiglia \mathcal{A}^* degli A^* al variare comunque dell'aperto A e del cammino l (l sempre soggetto alla condizione che il suo estremo sia in A). Si noti che \mathcal{A}^* non costituisce una topologia di S^* perchè l'unione di due elementi di \mathcal{A}^* non è, in generale, ancora un elemento di \mathcal{A}^* , (come mostra la figura) anche se l'intersezione di due elementi di \mathcal{A}^* se non è vuota, appartiene ancora ad \mathcal{A}^* . Sia \mathcal{C}^* la famiglia dei sottoinsiemi di S^* , ciascuno costituito da unione di elementi di \mathcal{A}^* . Per quanto precede, l'intersezione di due elementi di \mathcal{C}^* è ancora elemento di \mathcal{C}^* e così per l'unione (in base alla stessa definizione). Inoltre S^* e \emptyset appartengono a \mathcal{C}^* .



Dunque \mathcal{C}^* costituisce una topologia per S^* di cui \mathcal{A}^* è una base per gli aperti.

Lo spazio topologico (S^*, \mathcal{C}^*) prende il nome di spazio di ricoprimento universale per S .

E' immediato provare che se P_1 è un qualsiasi punto di S lo spazio S_1^* di ricoprimento universale di S ottenuto a partire da P_1 è omeomorfo a quello S^* ottenuto a partire da P .

Dunque la scelta del punto P non è essenziale per la costruzione di S^* .

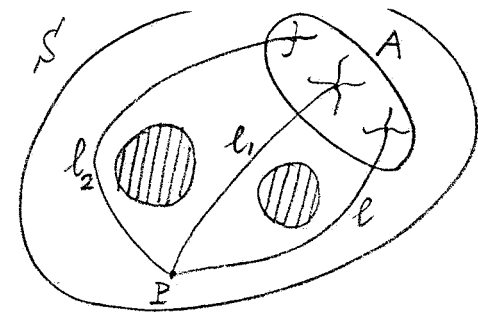
Proviamo ora: il:

Teorema 12.1:

L'APPLICAZIONE $f: L \in S^* \rightarrow f(L) \in S$ RISULTA UN OMEOMORFISMO LOCALE DI S^* SU S . INOLTRE SE S E' SEMPLICEMENTE CONNESSO f RISULTA UN OMEOMORFISMO E QUINDI S^* ED S SONO OMEOMORFI.

Dimostrazione:

Cominciamo con il provare che l'applicazione f è continua. Sia A un qualsiasi aperto di S . Per ogni cammino l di origine in P ed estremo in A si consideri l'aperto $A^*(A, l)$ dello spazio topologico S^* . Se si varia comunque l'unione degli aperti A^* che si generano in questo modo risulta un aperto di S^* . Ma esso evidentemente coincide con $f^{-1}(A)$. Dunque le controimmagini mediante f degli aperti di



S sono aperti di S^* , cioè f è un'applicazione continua.

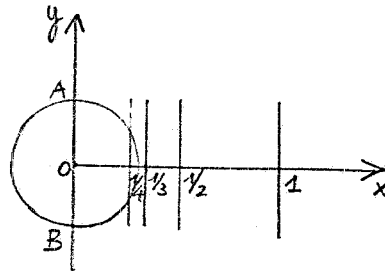
Proviamo ora che f è una applicazione aperta. Sia A^* un qualsiasi aperto di S^* ; si tratta di provare che $f(A^*) = A$ è un aperto di S , cioè per ogni Q di A esiste un intorno V di Q tutto contenuto in A . Il punto Q proviene mediante f da un elemento $L = \{1\}$ di S^* , cioè $Q=f(L)$. Poichè A^* è un aperto di S^* esiste un intorno U di Q in S tale che $U^*(U, 1)$ risulta tutto contenuto in A^* . Essendo S localmente linearmente connesso esiste un intorno aperto V di Q , con $V \subset U$ tale che ogni Q' di V è congiunto a Q da un cammino l' tutto contenuto in U . Ma allora $\{1'\}$ è un elemento di U^* e quindi di A^* . Dunque $f(U^*) \supset V$, ma essendo $f(U^*) \subset A$ si ha $V \subset A$.

Proviamo infine che f è un omeomorfismo locale. Sia $L = \{1\}$ un qualsiasi elemento di S^* . Poichè S è localmente semplicemente connesso esiste un intorno aperto V del punto $f(L) \in S$ tale che ogni cammino chiuso di origine $f(L)$ e contenuto in V risulti omotopo a zero in S . L'aperto $V^*(V, 1)$ di S^* contiene $L = \{1\}$; cioè è un intorno aperto di L . Proviamo che f , ristretta a V^* , risulta iniettiva (cioè è tale che muta elementi distinti in elementi distinti). Siano X ed X' due elementi di $V^*(V, 1)$. Allora $X = \{1x\}$, $X' = \{1x'\}$ ove x ed x' sono due cammini di origine $f(L)$ e tutti contenuti in V . Se accade che $f(X) = f(X')$, l'estremo di x deve coincidere con l'estremo di x' . Dunque $x \cdot x^{-1}$ è un cammino chiuso di origine $f(L)$, tutto contenuto in V , onde esse è omotopo a zero, cioè $x \sim x'$ da cui segue $1x \sim 1x'$ e quindi $X = X'$. Poichè f è aperta, $V_1 = f(V^*)$ è un aperto di S . Dunque la f è biunivoca tra V^* e V_1 oltre ad essere continua ed aperta. Dunque f è un omeomorfismo tra V^* e V_1 .

Se S è semplicemente connesso, fissato comunque un punto Q di S , esiste un'unica classe di omotopia di cammini di origine P ed estremo Q ; dunque $f^{-1}(Q)$ si riduce ad un solo elemento, cioè è biunivoca e pertanto è un omeomorfismo essendo continua ed aperta.

Osservazione:

Si noti che nel dimostrare la precedente proposizione interviene in modo essenziale l'ipotesi che S sia localmente linearmente connesso e localmente semplicemente connesso. Infatti se si partisse da uno spazio S che non fosse per esempio localmente linearmente connesso si potrebbe ugualmente costruire lo spazio S^* ma l'applicazione f potrebbe non essere aperta come mostra l'esempio 1, par. 12, Cap. V. In tal caso fissato un intorno circolare $U \in \mathbb{R}^2$ di centro 0 raggio < 1 , posto $A=U \cap \bar{S}$, l'aperto A^* di S^* relativo al punto $P=0$ risulta costituito da tutte le classi di omotopia dei cammini di origine 0 contenuti nel semicerchio di U a sinistra dell'asse y (diametro AB incluso) aventi quindi estremi nei punti di tale semicerchio incluso il diametro AB . Dunque $f(A^*)$ è costituito dal suddetto semicerchio, ma esso non è un aperto della topologia di S proprio perchè i punti del diametro AB non sono interni a tale semicerchio.



Dalla proposizione I del par. 12 e dalla proposizione precedente segue subito il:

Teorema 12.2.

LO SPAZIO TOPOLOGICO S^* DI RICOPRIMENTO UNIVERSALE DELLO SPAZIO TOPOLOGICO S RISULTA LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSO E LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO (tale essendo supposto S).

Proviamo ora il:

Teorema 12.3.

LO SPAZIO DI RICOPRIMENTO UNIVERSALE S^* DELLO SPAZIO TOPOLOGICO S È LINEARMENTE CONNESSO.

Dimostrazione:

Occorre provare che fissato un elemento $L_0 \in S^*$, comunque si consideri un elemento $L \in S^*$ esiste un cammino di S^* di origine L_0 ed estremo L . Ora L_0 lo si può scegliere coincidente con la classe di omotopia dei cammini di S di origine P . Dato comunque $L = \{1\} \in S^*$ sarà:

$$l: t \in I \rightarrow l(t) \in S \quad I(0 \leq t \leq 1)$$

Si consideri ora per ogni fissato s con $0 \leq s \leq 1$ l'applicazione di I in S data da:

$$l_s: t \in I \rightarrow l(ts) \in S$$

Essa è un cammino di origine P e di estremo il punto $l(s)$ di $Im l$. Si consideri l'elemento di S^* dato da $\{l_s\}$. L'applicazione:

$$l^*: S \in I \rightarrow \{l_s\} \in S^*$$

risulta evidentemente continua e quindi è un cammino di S^* . Inoltre si ha $l^*(0) = \{l_0\} = L_0$ ed $l^*(1) = \{l_1\} = 1 = L$. Quindi l^* è un cammino di S^* di origine L_0 ed estremo L , onde l'asserto.

Omettiamo la dimostrazione del seguente:

Teorema 12.4.

LO SPAZIO DI RICOPRIMENTO UNIVERSALE S^* DI S RISULTA DI HAUSDORFF (S supponendosi di Hausdorff).

Così pure omettiamo la dimostrazione del:

Teorema 12.5.

LO SPAZIO DI RICOPRIMENTO UNIVERSALE S^* DI S RISULTA SEMPLICEMENTE CONNESSO.

13 - SPAZI METRICI -

Un esempio notevole di spazi topologici si ottiene a partire dalla nozione di spazio metrico di cui ora parleremo.

Si dice che in un insieme S è definita una metrica se è data un'applicazione d di $S \times S$ in \mathbb{R} tale che:

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x, y \in S$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$
- (3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad \forall x, y, z \in S$

Un'applicazione $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ così definita si dice distanza.

Come conseguenza della condizione 3) si vede che $d(x, y) \geq 0$; infatti ponendo $z = x$ nella 3) si ottiene $d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \geq d(x, x) = 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$.

Uno spazio metrico così definito si indica con (S, d) .

Esempi:

1) Sia $S = \mathbb{R}$ l'asse reale e d la distanza pitagorica tra due punti. \mathbb{R} è uno spazio metrico.

2) Sia $S = \mathbb{R}^2$ il piano (x, y) e d la distanza pitagorica tra due punti del piano. Il piano S è uno spazio metrico.

3) In \mathbb{R}^n si definisce distanza tra due punti $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ed $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ponendo

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Tale distanza in \mathbb{R}^n gode ovviamente delle proprietà 1), 2). Si prova inoltre che è soddisfatta anche la proprietà 3). Dunque \mathbb{R}^n rispetto alla distanza d così definita risulta uno spazio metrico.

4) Consideriamo l'insieme $C(a, b)$ delle funzioni continue per $a \leq x \leq b$. Se $X(x) \in C(a, b)$, $Y(x) \in C(a, b)$ definiamo

$$d(X, Y) = \sup_{a \leq x \leq b} |X(x) - Y(x)|$$

Quando si definisce la distanza $d(X, Y)$ tra due funzioni mediante la relazione precedente, l'insieme $C(a, b)$ delle funzioni continue nell'intervallo $a \leq x \leq b$ diviene uno spazio metrico, come si verifica subito.

5) Dato un insieme $S (\neq \emptyset)$ qualsiasi si definisce una metrica in S se si pone $d(x, y) = 1$ per $x \neq y$ e $d(x, x) = 0$. Tale metrica prende il nome di metrica discreta.

Dato un insieme S ed un suo elemento \bar{x} si definisce intorno sferico di \bar{x} di raggio $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}$) la totalità dei punti x di S tali che $d(x, \bar{x}) < r$.

Si dice aperto in uno spazio metrico S ogni sottoinsieme A di S tale che ciascun suo punto ammetta un intorno sferico contenuto tutto in A .

Si prova facilmente il seguente teorema:

Teorema 14.1.

UN INTORNO SFERICO E' A SUA VOLTA UN APERTO NEL SENSO DETTO.

Gli aperti così definiti rendono uno spazio metrico, uno spazio topologico.

Si osservi che in generale per uno spazio metrico può non valere il II° assioma di numerabilità (cioè può non accadere che uno spazio metrico ammetta una base per gli aperti che sia numerabile).

Per gli spazi metrici le due nozioni di separabilità e di base numerabile coincidono; ciò è conseguenza del precedente teorema e del seguente:

Teorema 14.2. -

OGNI SPAZIO METRICO SEPARABILE E' A BASE NUMERABILE.

Dimostrazione. -

Sia S uno spazio metrico separabile e sia D l'insieme numerabile denso in S . Si considerino intorni sferici con centro in un punto di D e raggio razionale. La famiglia di tali intorni sferici è numerabile e costituisce una base per gli aperti di S come facilmente si prova.

Si prova inoltre che:

Teorema 14.3. -

UNO SPAZIO METRICO E' UNO SPAZIO DI HAUSDORFF.

Sia S uno spazio metrico ed $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione continua di S in \mathbb{R} . Ciò equivale a dire che per ogni $x \in S$ comunque si scelga un ε reale positivo esiste un reale $\delta_\varepsilon(x) > 0$ tale che per ogni y con $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ si abbia $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Noi diremo che una funzione $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua se, comunque se scelga un reale $\varepsilon > 0$, si possa trovare un reale $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x, y \in S$ con $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ risulti $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Naturalmente ogni funzione uniformemente continua risulta anche continua, ma in generale non vale il viceversa, a meno che S non sia compatto. Infatti si dimostra il seguente:

Teorema 14.4. -

SE S E' UNO SPAZIO METRICO COMPATTO OGNI APPLICAZIONE CONTINUA $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ (cioè ogni funzione continua definita su S ed a valori reali) RISULTA UNIFORMEMENTE CONTINUA.

Vale la seguente definizione:

Uno spazio metrico in cui una successione fondamentale risulti anche convergente si dice spazio metrico completo.

Esempio:

L'insieme E_r dei razionali, dotato della topologia naturale di \mathbb{D} costituisce uno spazio metrico. La successione dei razionali $1; 1, 4; 1, 41; 1, 414; \dots$ non è convergente in E_r anche se nel campo dei reali converge a $\sqrt{2}$.

CAP. V - GRUPPI TOPOLOGICI. -

1. - NOZIONE DI GRUPPO TOPOLOGICO. -

Si dice che è dato un gruppo topologico quando è dato un insieme G dotato di una struttura di gruppo \mathcal{G} (cioè una legge di prodotto tale che rispetto ad esse G risulti un gruppo) ed una struttura topologica \mathcal{T} (cfr. Cap. V) in modo che sia continua l'applicazione:

$$(1.1) \quad f: (a, b) \in G \times G \rightarrow a b^{-1} \in G$$

ove $G \times G$ è dotato della topologia prodotto $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ (cfr. par. 4, Cap. V).

Quanto detto equivale ad imporre che per ogni $a, b \in G$ e per ogni intorno $U_{ab^{-1}}$ di $ab^{-1} \in G$, esiste un intorno U_a di a ed un intorno U_b di b tale che per ogni $a' \in U_a$ e per ogni $b' \in U_b$ risulti $a'b'^{-1} \in U_{ab^{-1}}$.

Dalla continuità dell'applicazione (1.1) segue subito che sono continue le due applicazioni seguenti ($G \times G$, come sopra, dotato della topologia prodotto):

$$(1.2) \quad g: (a, b) \in G \times G \rightarrow ab \in G$$

$$(1.3) \quad h: a \in G \rightarrow a^{-1} \in G$$

Viceversa dalla continuità di g ed h segue facilmente la continuità della f .

Un gruppo topologico è quindi dato dalla terna $(G, \mathcal{G}, \mathcal{T})$ con la condizione che l'applicazione f risulti continua oppure le applicazioni g ed h risultino continue.

Supporremo nel seguito di questo capitolo, salvo esplicito contrario avviso, che la topologia \mathcal{T} di G sia separata (o di Hausdorff). Un gruppo topologico sarà in seguito denotato con G sottintendendo la struttura di gruppo e quella topologica.

Un gruppo topologico si dice compatto, connesso, soddisfacente al primo o secondo assioma di numerabilità ecc. se tale è la sua struttura topologica.

Un gruppo topologico si dirà abeliano, semplice, ecc. se tale è la sua struttura grupale.

2. - PRIMI ESEMPI DI GRUPPI TOPOLOGICI -

Esempio 1.

Consideriamo gli insiemi: Z dei numeri interi, Q dei razionali, \mathbb{R} dei reali, \mathbb{C} dei complessi nei quali sia data come legge di composizione grupale la somma ordinaria e come topologia quella naturale in \mathbb{R} e \mathbb{C} e quella relativa (indotta dalla naturale) in Z e Q .

I gruppi suddetti costituiscono altrettanti gruppi topologici in quanto sono evidentemente continue le applicazioni:

$$g: (a, b) \rightarrow a + b$$

$$h: a \rightarrow -a$$

Tali gruppi topologici sono abeliani; \mathbb{R} e \mathbb{C} sono connessi e localmente compatti ma non compatti; Z e Q sono totalmente sconnessi. Inoltre Z è localmente compatto (ogni punto in Z è aperto e chiuso), mentre Q non è localmente compatto.

Esempio 2.

Gli insiemi Q , \mathbb{R} e \mathbb{C} dell'esempio precedente ai quali sia tolto lo zero ed in cui sia data come legge di composizione grupale il prodotto ordinario e come topologia quella naturale per \mathbb{R} e \mathbb{C} e quella relativa (indotta dalla naturale) per Q costituiscono altrettanti gruppi topologici. Sono infatti continue le applicazioni:

$$g : (a, b) \rightarrow a \cdot b$$

$$h : a \rightarrow a^{-1}$$

Tali gruppi topologici sono abeliani. Inoltre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è connesso ed è costituito da due componenti connesse (i reali > 0 ed i reali < 0). Invece $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ è connesso (perchè è omeomorfo ad \mathbb{R}^2 meno un punto). \mathbb{Q} è totalmente sconnesso.

Esempio 3.

Le matrici quadrate di ordine n sui reali si possono rappresentare biunivocamente come punti dello spazio \mathbb{R}^{n^2} . Precisamente la matrice $A = \|a_{ij}\|$ si rappresenta mediante il punto di coordinate $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}$. Le matrici degeneri costituiscono un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n^2} che indicheremo con Δ . \mathbb{R}^{n^2} è dotato della topologia naturale ed induce nell'insieme $\mathbb{R}^{n^2} - \Delta$ una topologia relativa. Lo spazio topologico $\mathbb{R}^{n^2} - \Delta$ (nella topologia suddetta) risulta sconnesso e precisamente costituito da due componenti connesse (come si può facilmente provare) di cui una è costituita dalle matrici con determinante > 0 e l'altra dalle matrici a determinante < 0 . Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici quadrate non degeneri sui reali si può rappresentare dunque biunivocamente con i punti di $\mathbb{R}^{n^2} - \Delta$. Esso risulta un gruppo topologico (rispetto alla topologia di $\mathbb{R}^{n^2} - \Delta$) in quanto evidentemente le applicazioni:

$$g : (A, B) \in GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow AB \in GL(n, \mathbb{R})$$

$$h : A \in GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$$

sono continue. Tale gruppo è sconnesso e costituito da due componenti connesse per quello che si è visto. Non è compatto ma localmente compatto; è a base numerabile e quindi separabile (perchè \mathbb{R}^{n^2} è a base numerabile).

Esempio 4.

Le matrici quadrate d'ordine n sui complessi si possono rappresentare biunivocamente come punti dello spazio \mathbb{R}^{2n^2} . Precisamente la matrice $A = \|a'_{hk} + i a''_{hk}\|$ si rappresenta mediante il punto di coordinate:

$$a'_{11}, a''_{11}, \dots, a'_{1n}, a''_{1n}, \dots, a'_{n1}, a''_{n1}, \dots, a'_{nn}, a''_{nn}$$

Le matrici degeneri costituiscono un sottoinsieme di \mathbb{R}^{2n^2} che indicheremo con Δ . La topologia naturale di \mathbb{R}^{2n^2} induce nell'insieme $\mathbb{R}^{2n^2} - \Delta$ una topologia relativa. Il gruppo $GL(n, \mathbb{C})$ sarà topologicamente identificato con $\mathbb{R}^{2n^2} - \Delta$. Esso diventa allora un gruppo topologico in quanto l'operazione di prodotto e di inverso risultano continue nella topologia suddetta. Nel seguito tale gruppo topologico si denoterà ancora con $GL(n, \mathbb{C})$. Esso risulta linearmente connesso e quindi connesso, come subito si prova; non è compatto ma è localmente compatto; inoltre è a base numerabile.

3. - TRASLAZIONI E SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI DELL'UNITÀ.

In un gruppo topologico G risultano evidentemente omeomorfismi le seguenti applicazioni:

$$(3.1) \quad T_a^s : x \in G \rightarrow ax \in G \quad \forall a \in G$$

$$(3.2) \quad T_a^d : x \in G \rightarrow xa \in G$$

$$(3.3) \quad T_a : x \in G \rightarrow x^{-1} \in G$$

$$(3.4) \quad S_a : x \in G \rightarrow axa^{-1} \in G$$

Le (3.1) e (3.2) prendono il nome rispettivamente di traslazione sinistra e traslazione destra relativa all'elemento $a \in G$. Esse trasformano l'unità u di G nell'elemento a .

Denotato con θ^s l'insieme delle traslazioni sinistre di G si ha che il prodotto di due traslazioni T_a^s, T_b^s (cioè l'applicazione successiva di esse) risulta ancora una traslazione (infatti $T_a^s T_b^s(x) = T_a^s(bx) = a b x = T_{ab}^s(x)$) e precisamente la traslazione T_{ab}^s . Inoltre si ha che l'inverso della traslazione T_a^s risulta essere la traslazione T_a^{s-1} . Dunque θ^s risulta un gruppo rispetto al prodotto suddetto e l'applicazione:

$$\sigma: a \in G \longrightarrow T_a^s \in \theta^s$$

risulta essere un omeomorfismo, anzi, come subito si prova, un isomorfismo.

Analogamente si procede per l'insieme θ^d delle traslazioni destre.

Sia $\{U_u^i\}_{i \in \mathcal{J}}$ un sistema fondamentale di intorni aperti dell'unità (u) di G . Mediante la traslazione T_a^s tale sistema si trasforma in un sistema di intorni aperti del punto a (perchè T_a^s è un omeomorfismo), $\{T_a^s(U_u^i)\}_{i \in \mathcal{J}}$.

Tale sistema di intorni aperti del punto $a \in G$ è un sistema fondamentale di intorni di a , come ora proveremo.

Infatti sia A un qualsiasi aperto contenente a . Si consideri l'aperto $T_{a^{-1}}^s(A)$; esso contiene (u) (perchè $a \in A$). Poichè $\{U_u^i\}_{i \in \mathcal{J}}$ è un sistema fondamentale di intorni di (u) esisterà certamente U_u^1 contenuto in $T_{a^{-1}}^s(A)$. Ma allora $T_a^s(U_u^1)$ è contenuto in A , onde l'asserto.

Si è così provato che in un gruppo topologico G basta la conoscenza di un sistema fondamentale di intorni aperti dell'unità per ottenere un sistema fondamentale di intorni aperti in ogni punto di G e quindi una base per gli aperti di G . Dunque la topologia di G è completamente descritta da un sistema fondamentale di intorni aperti dell'unità (o, se si vuole, di un qualsiasi punto di G , perchè mediante una traslazione ci si può sempre ridurre all'unità). Da quanto precede segue anche che se un gruppo topologico G è tale che un suo punto ammette un sistema fondamentale di intorni aperti numerabile allora in G vale il I assioma di numerabilità.

Proviamo infine il seguente:

Teorema 3.1.

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÉ UN GRUPPO TOPOLOGICO G SIA DI HAUSDORFF E' CHE L'UNITÀ (u) DI G SIA UN CHIUSO (NELLA TOPOLOGIA DI G).

Dimostrazione:

Basta evidentemente provare che, se (u) è chiuso, G è di Hausdorff (cfr. proposizione II, par. 5, Cap. V). Siano dunque a e b due punti distinti di G . Allora $c = a b^{-1}$ è diverso da (u) . Poichè (u) è un chiuso il complementare di (u) è un aperto e quindi esiste un intorno aperto U_c di (c) non contenente (u) . Per definizione di gruppo topologico esiste allora un intorno aperto U_a di a ed un intorno aperto U_b di b tali che $x y^{-1} \in U_c$ per ogni $x \in U_a, y \in U_b$. U_a ed U_b non hanno punti in comune in quanto, in caso contrario, denotato con z un punto di $U_a \cap U_b$ si dovrebbe avere $z z^{-1} = (u) \in U_c$ il che è escluso perchè U_c non contiene (u) , onde l'asserto.

4. - SOTTOGRUPPI DI UN GRUPPO TOPOLOGICO. SOTTOGRUPPI NORMALI. GRUPPO QUOZIENTE. -

Sia G un gruppo topologico ed H un sottogruppo di G nella sua struttura gruppale. L'insieme degli elementi di H è un sottospazio di G con la topologia relativa indotta in H dalla topologia di G . Si prova subito che l'applicazione:

$$f_H: (x, y) \in H \times H \longrightarrow xy^{-1} \in H$$

risulta continua nella suddetta topologia di H . Dunque H risulta un gruppo topologico. Esso prende il nome di sottogruppo topologico di G .

Se H è un sottogruppo normale di G (rispetto alla struttura gruppale di G) si dirà che esso è un sottogruppo topologico normale di G .

Sia G un gruppo topologico, non necessariamente di Hausdorff, ed H un suo sottogruppo normale. Rimane allora definito nella struttura gruppale di G il gruppo quoziente G/H i cui elementi sono le classi $\{x\} = xH = Hx$ ($x \in G$) ed il prodotto è definito da:

$$\{x\}\{y\} = \{xy\}$$

Denotiamo poi con:

$$p: x \in G \longrightarrow \{x\} \in G/H$$

l'applicazione naturale di G su G/H . In G/H rimane definita la topologia quoziente (cfr. par. 4, Cap. V). In essa gli aperti sono i sottoinsiemi di G/H le cui controimmagini mediante p risultano aperti in G . L'applicazione p risulta allora manifestamente continua. Proviamo ora il:

Teorema 4.1.

L'APPLICAZIONE $p: x \in G \rightarrow \{x\} \in G/H$ E' APERTA, CIOE' MUTA APERTI DI G IN APERTI DI G/H .

Dimostrazione:

Sia A un aperto di G ; si tratta di provare che $p(A)$ è un aperto di G/H e cioè che $p^{-1}p(A)$ è un aperto di G . Si ha (essendo $p^{-1}p(x) = p^{-1}\{x\} = xH$):

$$p^{-1}p(A) = \bigcup_{x \in A} (xH)$$

D'altra parte risulta evidentemente:

$$\bigcup_{x \in A} (xH) = \bigcup_{y \in H} (Ay)$$

e quindi si ha:

$$p^{-1}p(A) = \bigcup_{y \in A} (Ay)$$

Ma, per ogni $y \in G$, essendo A un aperto, risulta Ay ancora un aperto (perchè la traslazione T_y^d muta A in Ay ed è un omeomorfismo). Dunque il secondo membro della relazione precedente è un aperto essendo unione di aperti, onde l'asserto.

Proviamo ora il:

Teorema 4.2.

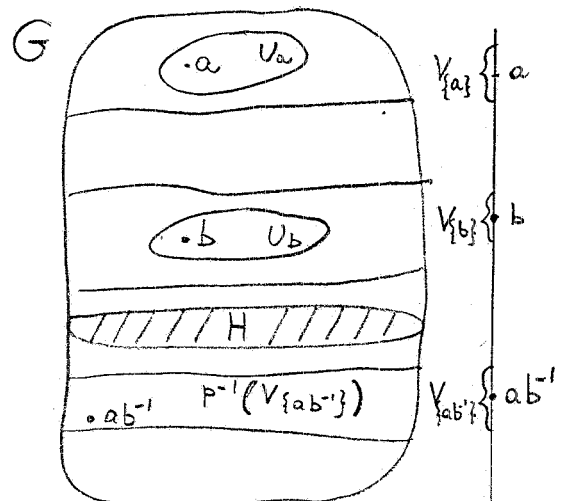
IL GRUPPO G/H , RISPETTO ALLA TOPOLOGIA QUOZIENTE, RISULTA UN GRUPPO TOPOLOGICO CHE PRENDE IL NOME DI GRUPPO QUOZIENTE DI G RISPETTO AD H .

Dimostrazione:

Si tratta di provare che l'applicazione:

$$f^*: (\{a\}, \{b\}) \in (G/H) \times (G/H) \longrightarrow \{a\}\{b\}^{-1} \in G/H$$

risulta continua rispetto alla topologia quoziente di G/H ; cioè dimostriamo che, scelto comunque un intorno aperto $V_{\{ab^{-1}\}}$ di $\{ab^{-1}\}$ in G/H esiste un intorno aperto $V_{\{a\}}$ di $\{a\}$ ed uno $V_{\{b\}}$ di $\{b\}$ in G/H tale che per ogni $\{x\} \in V_{\{a\}}$ ed $\{y\} \in V_{\{b\}}$ risulta $\{x\}\{y\}^{-1} = \{xy^{-1}\} \in V_{\{ab^{-1}\}}$. Consideriamo l'aperto $p^{-1}(V_{\{ab^{-1}\}})$; esso contiene ab^{-1} . Essendo G un gruppo topologico dovrà esistere un intorno aperto U_a di a ed uno U_b di b tali che per ogni $x \in U_a$ ed $y \in U_b$, risulti $xy^{-1} \in p^{-1}(V_{\{ab^{-1}\}})$. Gli insiemi $p(U_a)$ e $p(U_b)$ di G/H risultano aperti di G/H , in quanto p è aperto (cfr. proposizione I), contenenti rispettivamente la classe a e la classe b . Dunque $V_a = p(U_a)$ e $V_b = p(U_b)$ sono due intorni aperti di $\{a\}$ e $\{b\}$ in G/H . Proveremo ora che per ogni $\{x\} \in V_{\{a\}}$, $\{y\} \in V_{\{b\}}$ risulta $xy^{-1} \in V_{\{ab^{-1}\}}$. Poichè $\{x\} \in p(U_a)$, non è restrittivo supporre $x \in U_a$. Analogamente non è restrittivo supporre $y \in U_b$. Da quanto detto precedentemente risulta allora



$\{x y^{-1}\} \in p^{-1}(V \{ab^{-1}\})$ e quindi $\{x y^{-1}\} = \{x\} \{y\}^{-1} \in V_{ab^{-1}}$. La proposizione II è così provata.

Dimostriamo ora il:

Teorema 4.3.

SE G E' UN GRUPPO TOPOLOGICO ED H UN SUO SOTTOGRUPPO NORMALE CHIUSO, NELLA TOPOLOGIA DI G, IL GRUPPO QUOZIENTE G/H E' DI HAUSDORFF.

Dimostrazione:

Basta provare, in virtù della proposizione I, par. 3, Cap. VI, che l'unità $\{v\} = H$ di G/H risulta un chiuso nella topologia di G/H. Poichè H, per ipotesi, è un chiuso di G, il complementare di H in G è un aperto A di G. Poichè $p: G \rightarrow G/H$ è un'applicazione aperta, $p(A)$ risulta un aperto di G/H. D'altra parte manifestamente $p(A)$ è il complementare di $\{v\}$ in G/H. Dunque $\{v\}$ è un chiuso in G/H, onde l'asserto.

Notiamo infine che (come conseguenza delle proposizioni V, par. 7, Cap. V e III par. 8, Cap. V) si ha:

Teorema 4.4.

SE G E' UN GRUPPO TOPOLOGICO COMPATTO O CONNESSO ED H UN SUO SOTTOGRUPPO NORMALE CHIUSO IL GRUPPO QUOZIENTE G/H RISULTA COMPATTO O CONNESSO.

Inoltre, essendo l'applicazione $p: G \rightarrow G/H$ aperta, si ha:

Teorema 4.5.

SE G E' UN GRUPPO TOPOLOGICO ED H UN SUO SOTTOGRUPPO NORMALE IN G/H VALE IL I o II ASSIOMA DI NUMERABILITA' A SECONDA CHE CIO' ACCADA IN G.

5. - ESEMPI DI SOTTOGRUPPI DI GRUPPI TOPOLOGICI. -

Esempio 1:

I gruppi topologici \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} , rispetto all'operazione di somma ordinaria, considerati nell'esempio 1, par. 2, Cap. VI sono tali che \mathbb{Z} è sottogruppo normale di \mathbb{Q} , \mathbb{Q} sottogruppo normale di \mathbb{R} ed \mathbb{R} sottogruppo normale di \mathbb{C} .

Esempio 2:

I gruppi topologici $\mathbb{Q}-(0)$, $\mathbb{R}-(0)$, $\mathbb{C}-(0)$ (cioè rispettivamente \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} ai quali si tolga l'origine) rispetto al prodotto ordinario, considerati nell'esempio 2, par. 2, Cap. VI, sono tali che $\mathbb{Q}-(0)$ è sottogruppo normale di $\mathbb{R}-(0)$ ed $\mathbb{R}-(0)$ sottogruppo normale di $\mathbb{C}-(0)$. Inoltre il sottoinsieme \mathbb{Q}^+ dei razionali positivi costituisce un sottogruppo normale di $\mathbb{Q}-(0)$. Così il sottoinsieme \mathbb{R}^+ dei numeri reali positivi costituisce un sottogruppo normale di $\mathbb{R}-(0)$.

Esempio 3:

Nel gruppo topologico $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici reali d'ordine n non degeneri di cui all'esempio 3, par. 2, Cap. VI, l'insieme delle matrici con determinante positivo costituisce un sottogruppo normale di $GL(n, \mathbb{R})$.

Esempio 4:

Nel gruppo topologico $GL(n, \mathbb{R})$ (identificato ai punti di \mathbb{R}^{n^2} come nell'esempio 3, par. 2, Cap. VI) si consideri l'insieme delle matrici ortogonali cioè delle matrici $A \in GL(n, \mathbb{R})$ per cui $A^T A = U$ ($U =$ matrice unitaria). Esso costituisce un sottogruppo topologico di $GL(n, \mathbb{R})$ che si denota con $O(n)$. Proviamo che $O(n)$ è un chiuso di \mathbb{R}^{n^2} . Infatti si consideri l'applicazione:

$$\varphi: A \in \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \alpha = \|\alpha_{hk}\|$$

ove

$$\alpha_{hk} = \sum_{s=1}^n a_{hs} a_{ks} \quad A = \|a_{rs}\|$$

L'applicazione φ consiste nel far corrispondere alla matrice A la matrice $\alpha = A\bar{A}$. La φ è continua e l'immagine mediante φ di $O(n)$ risulta essere chiaramente la matrice $U = \|\delta_{hk}\|$ di \mathbb{R}^{n^2} anzi $\varphi^{-1}(U) = O(n)$ (in quanto la condizione $A\bar{A} = U$ equivale a scrivere: $\alpha_{hk} = \delta_{hk}$). Poichè $U \in \mathbb{R}^{n^2}$ è un chiuso allora $O(n) = \varphi^{-1}(U)$ risulta un chiuso di \mathbb{R}^{n^2} . Ne segue che $O(n)$ è un chiuso anche di $GL(n, \mathbb{R})$. Se $A \in O(n)$ si ha, come già osservato:

$$\sum_{s=1}^n a_{hs}^2 = 1$$

e quindi:

$$\sum_{h=1}^n \sum_{s=1}^n a_{hs}^2 = n$$

ne segue che $A \in O(n)$ appartiene all'ipersuperficie sferica di \mathbb{R}^{n^2} con centro nell'origine e raggio \sqrt{n} .

Dunque $O(n)$ è un insieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^{n^2} e pertanto $O(n)$ è compatto.

Se indichiamo con $O^+(n)$ ed $O^-(n)$ gli elementi A di $O(n)$ con $\det A = +1$ e $\det A = -1$ rispettivamente si ha:

$$O^+(n) \cup O^-(n) = O(n)$$

(infatti se $A \in O(n)$ si ha $(\det A)^2 = 1$). Inoltre $O^+(n)$ ed $O^-(n)$ sono dei chiusi in \mathbb{R}^{n^2} e quindi in $O(n)$ (perchè l'applicazione $\det: A \in \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \det A$ è continua e $O^+(n) \cap O^-(n) = \emptyset$). Ne segue che $O(n)$ è sconnesso, $O^+(n)$ ed $O^-(n)$ sono compatti (essendo dei chiusi contenuti in un compatto). Si potrebbe provare che $O^+(n)$ ed $O^-(n)$ sono linearmente connessi e quindi connessi, cioè $O^+(n)$ ed $O^-(n)$ costituiscono le componenti connesse di $O(n)$. Il sottoinsieme $O^+(n)$ risulta evidentemente un sottogruppo normale di $O(n)$ che si denota anche con $SO(n)$. Il gruppo quoziente di $O(n)$ per $SO(n)$ è costituito da due soli elementi dati da $O^+(n)$ ed $O^-(n)$ pensati come classi, cioè è isomorfo al gruppo, rispetto al prodotto ordinario, costituito dai due elementi $+1$ e -1 .

Esempio 5.

Nel gruppo topologico $GL(n, \mathbb{C})$ (identificato ai punti di \mathbb{R}^{2n^2} , (cfr. esempio 3, par. 2, Cap. VI) si consideri l'insieme delle matrici unitarie, cioè l'insieme delle matrici $A \in GL(n, \mathbb{C})$ per cui $A\bar{A}^t = U$ (A_t = matrice trasposta coniugata, U = matrice unitaria). Esso costituisce un sottogruppo topologico di $GL(n, \mathbb{C})$, che si denota con $U(n)$, come subito si prova.

Proviamo che $U(n)$ è un chiuso di \mathbb{R}^{2n^2} . Si consideri infatti la applicazione:

$$\varphi: A \in \mathbb{R}^{2n^2} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}^{2n^2} \quad \alpha = \|\alpha_{hk}\|$$

dove

$$\alpha_{hk} = \sum_{s=1}^n a_{hs} \bar{a}_{ks}, \quad A = \|a_{pm}\|$$

La φ è evidentemente continua. L'immagine mediante φ di $U(n)$ risulta costituita da un solo elemento u rappresentativo in \mathbb{R}^{2n^2} della matrice unitaria di $GL(n, \mathbb{C})$, anzi $\varphi^{-1}(u) = U(n)$ (in quanto la condizione $A\bar{A}^t = U$ equivale a: $\alpha_{hk} = \delta_{hk}$). Ne segue che $U(n) = \varphi^{-1}(u)$ è chiuso di \mathbb{R}^{2n^2} in quanto controimmagine mediante φ del chiuso u di \mathbb{R}^{2n^2} . Proviamo ora che $U(n)$ è un insieme limitato di \mathbb{R}^{2n^2} . Se $A \in U(n)$ si ha, come già osservato

$$\sum_{s=1}^n a_{hs} \bar{a}_{hs} = 1$$

e quindi

$$\sum_{h=1}^n \sum_{s=1}^n \left[(a'_{hs})^2 + (a''_{hs})^2 \right] = n, \quad a_{hs} = a'_{hs} + ia''_{hs}$$

Ne segue che $A \in U(n)$ appartiene all'ipersuperficie sferica di centro nell'origine e raggio \sqrt{n} di \mathbb{R}^{2n^2} , onde l'asserto. Perchè $U(n)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^{2n^2} esso risulta essere un compatto. Dunque $U(n)$ è un gruppo topologico compatto.

Le matrici A di $U(n)$ con $\det A = 1$ costituiscono evidentemente un sottogruppo topologico di $U(n)$ che si denota con $SU(n)$. $SU(n)$ risulta un chiuso di $U(n)$, come subito si prova; quindi

si può dire che SU(n) è un gruppo topologico compatto.

I gruppi U(n) ed SU(n) prendono il nome rispettivamente di gruppo unitario e gruppo unitario speciale.

Esempio 6.

Sia \mathbb{R} il gruppo topologico dei reali rispetto alla topologia naturale ed all'operazione di somma ordinaria. In \mathbb{R} il sottoinsieme Z degli interi relativi costituisce un sottogruppo normale chiuso. Il gruppo topologico quoziente $T = \mathbb{R}/Z$ prende il nome di 1-toro. Esso, come spazio topologico, è omeomorfo ad una circonferenza. Quindi è compatto, connesso e a base numerabile.

Esempio 7.

Sia \mathbb{R}^m il gruppo topologico delle n-ple ordinate dei reali (rispetto alla topologia naturale di \mathbb{R}^m ed all'operazione di somma data da $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$). In \mathbb{R}^m il sottoinsieme Z^n delle n-ple ordinate di numeri interi costituisce un sottogruppo normale chiuso. Il gruppo topologico quoziente $T^n = \mathbb{R}^m/Z^n$ prende il nome di n-toro. Esso risulta, come facilmente si prova, connesso, compatto, a base numerabile. Per $n=2$ si ottiene il 2-toro che topologicamente è omeomorfo ad una superficie torica.

6. - PRODOTTO DI GRUPPI TOPOLOGICI. -

Siano $G_1 = (G_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{C}_1)$ e $G_2 = (G_2, \mathcal{S}_2, \mathcal{C}_2)$ due gruppi topologici. Nell'insieme prodotto cartesiano $G_1 \times G_2$ (cioè nell'insieme delle coppie ordinate (g_1, g_2) con $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$) rimane definita la struttura di gruppo prodotto diretto $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ (precisamente ponendo $(g_1, g_2) \oplus (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2)$). Inoltre rimane definita la struttura topologica prodotto $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ (precisamente scegliendo come base per gli aperti in $G_1 \times G_2$ tutti i prodotti cartesiani tra gli aperti di \mathcal{C}_1 e gli aperti di \mathcal{C}_2).

Rispetto a tali strutture, gruppale e topologica, $G_1 \times G_2$ risulta essere un gruppo topologico, come è facile provare. Esso prende il nome di prodotto topologico tra i due gruppi e si denota con $G_1 \oplus G_2$. Quanto detto si generalizza immediatamente al caso di n gruppi topologici.

Esempio.

Si consideri il prodotto topologico T^1 dato dall'1-toro (cfr. esempio 6 del paragrafo precedente) per se stesso. Si prova subito che esso è isomorfo con il 2-toro. Così il prodotto topologico dell'1-toro n volte per se stesso è isomorfo all'n-toro.

La nozione di prodotto di gruppi topologici si estende anche al caso di una qualsivoglia famiglia di gruppi topologici. Precisamente sia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia qualsiasi di gruppi topologici (A può anche essere infinito) e si consideri l'insieme prodotto cartesiano $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ (cfr. par. 3, Cap. V). In esso si definisce la struttura \mathcal{G} di gruppo prodotto ponendo:

$$\{g_\alpha\}_{\alpha \in A} \{g'_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{g_\alpha g'_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

Sia poi \mathcal{C} la struttura topologica prodotto di G (cfr. par. 3; Cap. V). Così l'insieme G rispetto alla struttura di gruppo \mathcal{G} ed alla struttura topologica \mathcal{C} risulta un gruppo topologico, come subito si prova. Tale gruppo topologico prende il nome di gruppo topologico prodotto.

In base al teorema di Tjijnov (cfr. par. 7, Cap. V) si ha:

Teorema 6.1.

IL PRODOTTO TOPOLOGICO DI UNA QUALSIASI FAMIGLIA DI GRUPPI TOPOLOGICI COMPATTI E' COMPATTO.

Si ha inoltre:

Teorema 6.2.

IL PRODOTTO TOPOLOGICO DI UNA FAMIGLIA NUMERABILE DI GRUPPI TOPOLOGICI, PER CIASCUNO DEI QUALI VALGA IL I OD IL II ASSIOMA DI NUMERABILITA', E' TALE CHE PER ESSO VALE IL I O IL II ASSIOMA DI NUMERABILITA'.

7. - OMOMORFISMI E ISOMORFISMI TRA GRUPPI TOPOLOGICI. -

Siano G e G' due gruppi topologici e $\varphi : G \rightarrow G'$ un'applicazione di G su G' che sia continua ed aperta rispetto alle topologie di G e G' e tale che:

$$(1) \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \varphi(b) \quad \forall a, b \in G$$

cioè tale che sia un omomorfismo tra le strutture gruppali di G e G' . La applicazione prende il nome di omomorfismo del gruppo topologico G nel gruppo topologico G' . (Se φ risulta iniettiva o surgettiva essa prende più propriamente il nome rispettivamente di monomorfismo o epimorfismo). Se l'applicazione φ è biiettiva, cioè biunivoca, prende il nome di isomorfismo. Dunque un isomorfismo è un omeomorfismo tra le topologie di G e G' che è anche un isomorfismo tra i gruppi G e G' .

Se G è un gruppo topologico ed H un suo sottogruppo normale, la applicazione naturale

$$\pi : x \in G \rightarrow \{x\} \in G/H$$

risulta essere un omomorfismo tra il gruppo topologico G ed il gruppo topologico quoziente G/H . Infatti, in forza della proposizione I, par. 4, Cap. VI, la φ risulta continua ed aperta ed inoltre soddisfa manifestamente la (1). Tale situazione è del tutto generale in quanto vale il seguente teorema fondamentale sugli omomorfismi tra gruppi topologici:

Teorema 7.1.

SIA $\varphi : G \rightarrow G'$ UN OMOMORFISMO DEL GRUPPO TOPOLOGICO G NEL GRUPPO TOPOLOGICO G' . SI HA ALLORA CHE:

- $\text{Im } \varphi$ E' UN SOTTOGRUPPO TOPOLOGICO DI G' .
- $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(U)$ E' UN SOTTOGRUPPO TOPOLOGICO NORMALE DI G (chiuso se G' è di Hausdorff);
- $\forall x \in G$ LA CLASSE $\{x\} = x \text{Ker } \varphi$ E' COSTITUITA DA TUTTI E SOLI GLI ELEMENTI DI G CHE HANNO LO STESSO CORRISPONDENTE $\varphi(x)$ IN G' ;
- L'APPLICAZIONE:

$$\Phi : \{x\} \in G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \varphi(x) \in \text{Im } \varphi$$

RISULTA UN ISOMORFISMO TRA IL GRUPPO TOPOLOGICO QUOZIENTE $G/\text{Ker } \varphi$ ED IL GRUPPO TOPOLOGICO $\text{Im } \varphi$.

Dimostrazione.

Le a), b), e) sono di immediata dimostrazione anche in forza del teorema fondamentale sugli omomorfismi tra gruppi (cfr. Cap. II). Per dimostrare la d) basta provare che Φ è un omeomorfismo e quindi, essendo Φ manifestamente biunivoca, Φ e Φ^{-1} mutano aperti in aperti. Sia dunque A un aperto di $G/\text{Ker } \varphi$. Poichè l'applicazione naturale $p: x \in G \rightarrow \{x\} \in G/\text{Ker } \varphi$ è continua $p^{-1}(A)$ è un aperto di G , onde $\varphi(p^{-1}(A)) = \Phi(A)$ è un aperto di G' (perchè φ è aperta per definizione di omomorfismo tra gruppi topologici) contenuto in $\text{Im } \varphi$. Viceversa sia A' in aperto di $\text{Im } \varphi$. Allora $\varphi^{-1}(A')$ è un aperto in G (perchè φ è continua per definizione) e quindi $p(\varphi^{-1}(A'))$ è un aperto di $G/\text{Ker } \varphi$, onde l'asserto.

8. - PROPRIETA' DI CONNESSIONE DI UN GRUPPO TOPOLOGICO. -

Sia G un gruppo topologico ed u la sua unità. Se a è un elemento di G indicheremo con $[a]$ la componente connessa di a in G ; porremo poi $H = [u]$.

Se $\varphi : G \rightarrow G'$ è un omeomorfismo dello spazio topologico G , mediante φ ogni componente connessa di G si muta ancora evidentemente in una componente connessa di G' . Precisamente si ha:

$$(1) \quad \varphi(H) = [\varphi(u)]$$

$$(2) \quad \varphi([a]) = [\varphi(a)]$$

Dimostriamo ora il:

Teorema 8.1.

LA COMPONENTE CONNESSA H DI G E' UN SOTTOGRUPPO INVARIANTE DI G . INOLTRE SI HA:

$$(3) \quad aH = Ha = [a]$$

CIOE' LE COMPONENTI CONNESSE DI G COINCIDONO CON LE CLASSI LATERALI INDOTTE DA H IN G E QUINDI IL GRUPPO QUOZIENTE G/H E' COSTITUITO DA QUESTE CLASSI LATERALI.

Dimostrazione.

Per ogni $y \in H$ si consideri l'omeomorfismo di G :

$$\varphi = T_y^s : x \in G \longrightarrow yx^{-1} \in G$$

Si ha $\varphi(u) = y$ e quindi per la (1), essendo $y \in H$

$$\varphi(H) = [\varphi(u)] = [y] = H$$

Ne segue che:

$$x \in H \implies \varphi(x) = yx^{-1} \in H$$

e quindi

$$\forall x, y \in H \implies yx^{-1} \in H$$

cioè H è un sottogruppo di G .

Per ogni $a \in G$ si considerino le traslazioni sinistre T_a^s :

$$T_a^s : x \in G \longrightarrow ax \in G$$

Ciascuna di queste traslazioni è un omeomorfismo di G tale che $T_a^s(u) = a$. Quindi, per la (1), $T_a^s(H) = [a]$. Ma risulta $T_a^s(H) = aH$ onde $[a] = aH$. In modo analogo si prova sfruttando la traslazione destra T_a^d , che $[a] = Ha$, onde la (3), cioè H è un sottogruppo invariante e le classi laterali coincidono con le componenti connesse di G . Ne segue l'asserto.

Osserviamo che nella dimostrazione precedente si è sfruttato in modo essenziale il fatto che in G le operazioni di prodotto e di inverso sono continue, a norma della definizione stessa di gruppo topologico.

Osserviamo anche che poichè H è chiuso in G (essendo H una componente connessa di G), G/H risulta di Hausdorff (cfr. par. 4, Cap. VI).

Un gruppo topologico si dice totalmente sconnesso se la componente connessa di ogni punto si riduce a quel punto. In questo caso evidentemente G/H è isomorfo a G . Diamo ora alcuni esempi.

Esempio 1. -

Il gruppo $\mathbb{Q} - (0)$ (numeri razionali cui si tolga lo zero) rispetto al prodotto ordinario risulta totalmente sconnesso; infatti la componente connessa dell'unità si riduce alla stessa unità (cfr. par. 8, Cap. V).

Esempio 2. -

Il gruppo $\mathbb{R} - (0)$ rispetto al prodotto è costituito da due componenti connesse \mathbb{R}^+ ed \mathbb{R}^- (reali positivi e negativi rispettivamente). La componente connessa dell'unità è costituita da \mathbb{R}^+ . Essa è un sottogruppo invariante in $\mathbb{R} - (0)$ ed il quoziente $(\mathbb{R} - (0))/\mathbb{R}^+$ è dato dal gruppo $(+1, -1)$ rispetto al prodotto, dotato della topologia discreta.

Esempio 3.

Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$, come anche il gruppo $O(n)$, sono costituiti da due componenti con-

nesse, una fatta di matrici con determinante positivo ed una con determinante negativo. La prima delle due classi ($\det > 0$) risulta essere un sottogruppo normale; il gruppo quoziente risulta isomorfo a $(+1, -1)$ rispetto al prodotto.

9. - ISOMORFISMO LOCALE TRA GRUPPI TOPOLOGICI. -

Di speciale importanza per i gruppi topologici sono le così dette proprietà locali, cioè quelle proprietà determinate dal comportamento del gruppo nell'intorno dell'unità. Ci occuperemo in questo paragrafo della nozione di isomorfismo locale, una tra le più importanti.

Due gruppi topologici G e G' si diranno localmente isomorfi se esistono un intorno U dell'unità (u) di G , un intorno U' dell'unità (u') di G' ed un omeomorfismo f di U su U' che goda delle seguenti proprietà:

$$(a) \quad \forall x, y, xy \in U \Rightarrow f(xy) = f(x)f(y) \in U'$$

$$(b) \quad \forall x', y', x'y' \in U' \Rightarrow f^{-1}(x'y') = f^{-1}(x') \cdot f^{-1}(y') \in U$$

Dalle a) e b) segue subito che:

$$(c) \quad f(u) = u'$$

$$(d) \quad \text{se } x, x^{-1} \in U \Rightarrow f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$$

Sia $\varphi : G \rightarrow G'$ un omeomorfismo locale dello spazio topologico G sullo spazio topologico G' che sia un omomorfismo del gruppo G sul gruppo G' . Esso risulta un omomorfismo del gruppo topologico G sul gruppo topologico G' (si ricordi che un omeomorfismo locale risulta un'applicazione continua ed aperta). Ebbene allora G e G' sono localmente isomorfi. Infatti esiste un aperto U contenente (u) ed un aperto U' contenente (u') tale che φ , ristretto ad U , risulta un omeomorfismo tra U ed U' . Questo omeomorfismo soddisfa manifestamente alle proprietà (a) e (b) perchè è un omomorfismo grupale. Si è così provato il:

Teorema 9.1.

SE ESISTE UN OMEOMORFISMO LOCALE TRA G E G' CHE RISULTI UN OMOMORFISMO DI GRUPPO, G E G' SONO LOCALMENTE ISOMORFI.

Si osservi che due gruppi topologici possono essere localmente isomorfi senza che esista un omomorfismo che sia un omeomorfismo locale tra essi.

Esempio 1. -

Sia \mathbb{R} il gruppo topologico additivo dei reali ed \mathcal{R} il gruppo delle rotazioni nel piano (che si può identificare con una circonferenza in cui sia fissato un punto ed un verso di percorrenza) rispetto alla operazione di applicazione successiva di due di esse. I due gruppi sono localmente isomorfi in quanto, detto V l'intervallo aperto di \mathbb{R} di centro O e semiapertura π e V' l'insieme delle rotazioni di angolo $-\pi < \alpha < +\pi$, la corrispondenza che associa ad ogni α elemento di V la rotazione di angolo α risulta un omeomorfismo tra V e V' che gode evidentemente delle proprietà (a) e (b).

Enunciamo ora (senza dimostrarle) le seguenti proposizioni che danno una notevole informazione sui gruppi localmente isomorfi:

Teorema 9.2.

SIA G UN GRUPPO TOPOLOGICO ED N UN SUO SOTTOGRUPPO NORMALE CON LA TOPOLOGIA RELATIVA DISCRETA. ALLORA IL GRUPPO G E G/N SONO LOCALMENTE ISOMORFI.

Osserviamo che la precedente proposizione dà un metodo per costruire gruppi localmente isomorfi ad un dato gruppo.

Teorema 9.3.

SIANO G E G' DUE GRUPPI TOPOLOGICI CONNESSI E LOCALMENTE ISOMORFI. ALLORA ESISTONO UN GRUPPO K E DUE SOTTOGRUPPI NORMALI N ED N' DI K DOTATI DELLA TOPOLOGIA RELATIVA DISCRETA TALI CHE G RISULTA ISOMORFO A K/N E G' ISOMORFO A K/N' .

Nell'esempio 1 il gruppo K coincide con \mathbb{R} , N coincide con il sottogruppo ridotto al solo elemento nullo, N' con \mathbb{Z} , gruppo additivo degli interi. K/N è isomorfo ad \mathbb{R} e K/N' è isomorfo ad \mathbb{R} .

Intuitivamente la proposizione 9.3 afferma che due gruppi localmente isomorfi, anche se non sono isomorfi, lo sono a meno di sottogruppi normali discreti.

10. - IL GRUPPO DI RICOPRIMENTO UNIVERSALE DI UN DATO GRUPPO TOPOLOGICO.

Sia G un gruppo topologico di Hausdorff che supponiamo linearmente connesso, localmente linearmente connesso e localmente semplicemente connesso (cfr. par. 9, 12, Cap. V). In forza di quanto detto nel paragrafo 13 Cap. V, a partire dallo spazio topologico G rimane determinato lo spazio topologico G^* ricoprimento universale di G , i cui elementi sono le classi di omotopia dei cammini di origine u . Rimane inoltre determinata l'applicazione naturale:

$$(1) \quad f: A \in G^* \rightarrow f(A) \in G$$

ove $a = f(A)$ è l'estremo di tutti i cammini α della classe $A = \{\alpha\}$.

Ci proponiamo intanto di introdurre in modo opportuno in G^* una struttura di gruppo. Siano A e B due elementi di G^* ; essi sono individuati rispettivamente da due cammini di origine nell'unità e dati da:

$$\alpha: t \in I \rightarrow \alpha(t) \in G$$

$$\beta: t \in I \rightarrow \beta(t) \in G$$

con I intervallo chiuso $[0, 1]$ di \mathbb{R} . Pertanto $A = \{\alpha\}$, $B = \{\beta\}$, $f(A) = a = \alpha(1)$, $f(B) = b = \beta(1)$. Per ogni $t \in I$ si consideri l'elemento di G dato da $a \cdot \beta(t)$ (prodotto nel gruppo G di a per $\beta(t)$); si ottiene così l'applicazione:

$$(2) \quad a\beta: t \in I \rightarrow a\beta \in G$$

che è manifestamente continua e quindi è un cammino di G . Si ha:

$$(3) \quad (a\beta)(0) = a \quad (a\beta)(1) = ab$$

Dunque il cammino $a\beta$ ha origine in a ; ha senso allora considerare il prodotto di α (che è un cammino di estremo in a) per il cammino $a\beta$. Si consideri la classe di omotopia $C = \{\alpha(a\beta)\}$, costituita da cammini di origine u (in quanto α e quindi $\alpha(a\beta)$ hanno origine in u). Si prova subito che C non dipende nè dalla scelta di α in $A = \{\alpha\}$, nè dalla scelta di β in $B = \{\beta\}$, ma solamente da A e B . Si ha poi $C \in G^*$.

Si definisce allora prodotto di A per B in G^* l'elemento C :

$$(4) \quad AB = C$$

Si prova abbastanza facilmente che, rispetto al prodotto così definito, G^* risulta un gruppo la cui unità u coincide con la classe dei cammini chiusi omotopi a zero di origine u .

Si prova inoltre che lo spazio topologico G^* , rispetto all'operazione di gruppo sopra definita risulta essere un gruppo topologico.

In forza della seconda relazione della (3) si ha che l'estremo del cammino $\alpha(a\beta)$ risulta essere l'elemento ab , quindi:

$$(5) \quad f(AB) = f(C) = a \cdot b = f(A)f(B)$$

Ciò prova che l'applicazione naturale:

$$f: G^* \rightarrow G$$

risulta un omomorfismo sul gruppo topologico G (si ricordi che f è continua ed aperta).

Poichè f è un omeomorfismo locale si ha che G e G^* sono localmente isomorfi (cfr. proposizione I, par. 9, Cap. VI).

Sia N il nucleo (o Kernel) dell'omomorfismo f . Dalla proposizione I, par. 11, Cap. V, si ha che N è dotato della topologia relativa discreta. Inoltre, indicato con $\Omega(u)$ il gruppo fondamentale di G (i cui elementi sono le classi di omotopia dei cammini chiusi di origine u), si ha:

$$A \in N \iff v \iff A \in \Omega(v)$$

Dunque $N = \Omega(v)$. Si ha poi subito che il prodotto definito mediante la (4) in G^* e quindi in N coincide con il prodotto del gruppo fondamentale $\Omega(u)$. In base al teorema fondamentale sugli omomorfismi si ha che G^*/N è isomorfo a G .

Si è così provato il:

Teorema 10.1.

DATO UN GRUPPO TOPOLOGICO DI HAUSDORFF G LINEARMENTE CONNESSO, LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSO E LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO, SI RIESCE A COSTRUIRE UN GRUPPO TOPOLOGICO G^* (RICOPRIMENTO UNIVERSALE DI G) CHE RISULTA DI HAUSDORFF, SEMPLICEMENTE CONNESSO, LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSO, LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO, ED UN OMOMORFISMO $f: G^* \rightarrow G$ CHE RISULTA UN OMEOMORFISMO LOCALE IN MODO CHE $N = \text{Ker } f$ COINCIDE CON IL GRUPPO DI OMOTOPIA $\Omega(u)$ DI G . QUINDI G^*/N È LOCALMENTE ISOMORFO A G ED INOLTRE G^*/N È ISOMORFO A G .

Si può provare il:

Teorema 10.2.

SE N È UN SOTTOGRUPPO NORMALE DI UN GRUPPO TOPOLOGICO G DOTATO DELLA TOPOLOGIA DISCRETA ALLORA N È COMMUTATIVO.

Dalle proposizioni I e II segue un'altra interessante proposizione:

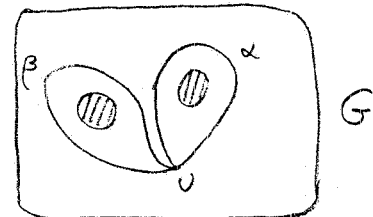
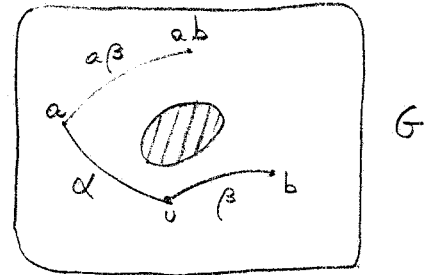
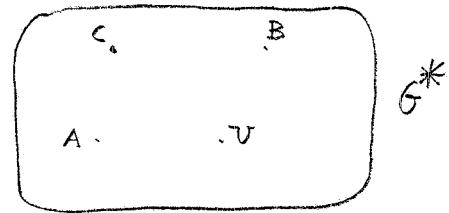
Teorema 10.2.

SE G È UN GRUPPO TOPOLOGICO DI HAUSDORFF LINEARMENTE CONNESSO, LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSO, LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO, IL GRUPPO FONDAMENTALE DI G RISULTA COMMUTATIVO.

Osserviamo infine che si può dimostrare la proposizione seguente:

Teorema 10.4.

SIANO G E G^* GRUPPI TOPOLOGICI DI HAUSDORFF LINEARMENTE CONNESSI, LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSI, LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSI. SE G^* È SEMPLICEMENTE CONNESSO E LOCALMENTE ISOMORFO A G ALLORA G^* È ISOMORFO AL GRUPPO DI RICOPRIMENTO UNIVERSALE G^* DI G .



Dalle proposizioni I e IV si ha allora:

Teorema 10. 5.

FISSATO UN GRUPPO TOPOLOGICO G DI HAUSDORFF LINEARMENTE CONNESSO, LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSO E LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO ESISTE ED E' UNICO, A MENO DI ISOMORFISMI, UN GRUPPO G^* SEMPLICEMENTE CONNESSO LOCALMENTE ISOMORFO A G .

CAP. VI - VARIETA' DIFFERENZIABILI -

1. - RICHIAMI SULLE FUNZIONI DIFFERENZIABILI -

Si consideri lo spazio \mathbb{R}^n dotato della topologia naturale. Un punto x di \mathbb{R}^n è una n -pla ordinata di numeri reali che si denoterà nel seguito con (x^1, x^2, \dots, x^n) . Ricordiamo che \mathbb{R}^n è uno spazio topologico linearmente connesso, di Hausdorff, a base numerabile, separabile, localmente compatto ma non compatto. Sia poi A un aperto di \mathbb{R}^n .

Si dice funzione a valori reali definita in A un'applicazione:

$$f : x \in A \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

che si denoterà anche con:

$$y = f(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

La funzione f sarà detta continua se essa è tale rispetto alla topologia naturale di \mathbb{R} ed alla topologia indotta in A da quella di \mathbb{R}^n (si osservi che in tale topologia indotta gli aperti sono tutti e soli gli aperti di \mathbb{R}^n contenuti in A).

La funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice differenziabile di classe C^k o C^k - differenziabile (ove k è un intero ≥ 1) se f è continua insieme con tutte le sue derivate parziali fino a quelle di ordine k incluso.

La funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice differenziabile di classe C^∞ o C^∞ - differenziabile o, semplicemente, differenziabile se f è continua insieme con tutte le sue derivate parziali di ordine comunque elevato.

La funzione C^∞ - differenziabile $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice analitica in A se per ogni punto x_0 di A esiste un intorno sferico di x_0 tutto contenuto in A in cui la f è sviluppabile in serie di Taylor cioè in cui la serie di Taylor di f , di origine x_0 , è convergente e converge a f . Non tutte le funzioni C^∞ - differenziabili sono però analitiche, come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 1. -

Sia $y(x)$ la funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} definita dalla relazione:

$$y(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La $y(x)$ è continua per ogni x di \mathbb{R} (si noti che $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = y(0) = 0$). Inoltre per $x \neq 0$ essa è analitica. Si prova subito invece che, per $x = 0$, la $y(x)$, pur essendo C^∞ - differenziabile, non è analitica (si noti che la derivata k -esima di $y(x)$, calcolata per $x = 0$ vale zero, e quindi se $y(x)$ fosse analitica in $x = 0$ dovrebbe esistere un intorno di $x = 0$ in cui

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right)_{x=0} x^k = 0$$

ma ciò non è perchè per $x \neq 0$ è chiaramente $y(x) > 0$).

Esempio 2. -

E' facile provare che la seguente funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è C^∞ - differenziabile ma non analitica:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}} & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - S \end{cases}$$

ove S è l'intorno sferico di \mathbb{R}^n con centro nell'origine e raggio 1.

Data una funzione continua $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice supporto di f la chiusura dell'aperto in cui f è diversa da zero. Nell'esempio 1 il supporto di $y(x)$ coincide con tutto \mathbb{R} ; nell'esempio 2 il supporto di $f(x)$ coincide con \bar{S} , chiusura di S . Se A è connesso ed $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è analitica si prova che il supporto di f coincide con tutto A (a meno che f non sia identicamente nulla in A).

2. - OMEOMORFISMI DIFFERENZIABILI. -

Sussiste il seguente teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) noto con il nome di teorema di invarianza della dimensione o teorema di Brower-Lebesgue:

Teorema 2.1. -

SIA A UN APERTO DI \mathbb{R}^m E UN APERTO DI \mathbb{R}^n . SE ESISTE UN OMEOMORFISMO TRA GLI APERTI A E B , ALLORA $m = n$.

Dati due aperti A e B di \mathbb{R}^n (dotati della topologia indotta per relativizzazione da quella naturale di \mathbb{R}^n) un omeomorfismo:

$$\varphi: x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in A \longrightarrow x' = (x'^1, x'^2, \dots, x'^n) \in B$$

potrà essere rappresentato da un gruppo di n equazioni del tipo:

$$(1) \quad \begin{aligned} x'^1 &= x'^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ x'^2 &= x'^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ &\dots \\ x'^n &= x'^n(x^1, x^2, \dots, x^n) \end{aligned}$$

dove le $x'^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ sono, come subito si prova, funzioni continue in tutto A .

Poichè $\varphi: A \rightarrow B$ è un omeomorfismo le equazioni (1) si potranno invertire nelle:

$$(2) \quad x^i = x^i(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$$

che rappresentano le equazioni dell'omeomorfismo $\varphi^{-1}: B \rightarrow A$. Le funzioni $x^i = x^i(x') = x^i(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$ sono continue in tutto B .

L'omeomorfismo $\varphi: A \rightarrow B$ è detto essere C^k -differenziabile se sia le funzioni $x^i(x)$ che le funzioni $x^i(x')$ sono C^k -differenziabili rispettivamente in A e B . L'omeomorfismo $\varphi: A \rightarrow B$ si dice C^∞ -differenziabile o diffeomorfismo se le suddette funzioni sono di classe C^∞ . Si dice poi analitico se le stesse funzioni sono analitiche rispettivamente in A e B (diffeomorfismo analitico).

Esempio. -

La funzione $y = x^3$ è un omeomorfismo di \mathbb{R} in \mathbb{R} . La sua inversa è $x = \sqrt[3]{y}$. Questo omeomorfismo non è differenziabile (anche se $y = x^3$ lo è) perchè $x = \sqrt[3]{y}$ non è differenziabile nell'origine.

Proviamo ora il:

Teorema 2.2. -

DATO UN OMEOMORFISMO C^k -DIFFERENZIABILE ($k \geq 1$) TRA DUE APERTI DI RAPPRESENTATO DALLE (1) E (2) LE MATRICI JACOBIANE DEI SISTEMI (1) E (2):

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right\| \quad J' = \left\| \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right\|$$

SONO AMBEDUE NON DEGENERI E L'UNA INVERSA DALL'ALTRA.

Dimostrazione. -

E' sufficiente provare che $JJ' = U$ (U matrice unitaria). Dalle (1) e (2) segue che:

$$(3) \quad x'^i = x^i \left[x'^1(x^1 x^2 \dots x^n), \dots, x'^m(x^1 x^2 \dots x^n) \right]$$

Derivando la (3) rispetto ad x^j ed applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte (e cioè è lecito perchè si tratta di funzioni di classe almeno C^1) si ricava:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta_{ij} = \sum_{h=1}^m \frac{\partial x'^i}{\partial x'^h} \frac{\partial x'^h}{\partial x^j}$$

e ciò sta a significare che il prodotto righe per colonne delle matrici J e J' è proprio la matrice unitaria U.

3. - SPAZI PARAMETRIZZABILI E VARIETA' TOPOLOGICHE. -

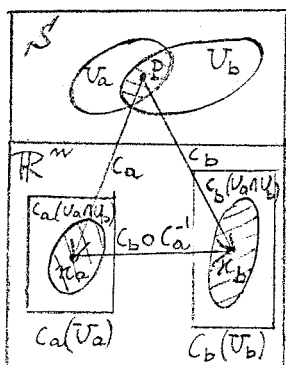
Uno spazio topologico S si dice parametrizzabile di dimensione n o parametrizzabile con n parametri se ammette un ricoprimento aperto $\{U_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ e per ogni a un omeomorfismo c_a di U_a in un aperto $c_a(U_a)$ di \mathbb{R}^m (dotato della topologia naturale). Gli omeomorfismo c_a vengono detti carte, U_a dominio (o dominio coordinato) e $c_a(U_a)$ codominio della carta c_a . L'insieme $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ di tutte le carte prende il nome di atlante dello spazio parametrizzabile S. Diremo che un punto $P \in S$ "appartiene alla carta c_a " se P è elemento del dominio U_a di c_a .

Se $P \in U_a$ ad esso corrisponde, mediante l'omeomorfismo c_a un punto $x_a = (x_a^1, x_a^2, \dots, x_a^n)$ di \mathbb{R}^m ; i numeri reali $x_a^1, x_a^2, \dots, x_a^n$ prendono il nome di coordinate del punto P nella carta c_a . Evidentemente può accadere che P appartenga a due o più carte (anche infinite); in tal caso ad esso sono associate più coordinate a seconda della carta che si considera.

Siano U_a ed U_b due aperti del ricoprimento $\{U_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ di S con $U_a \cap U_b \neq \emptyset$ e si considerino gli insiemi $c_a(U_a \cap U_b)$ e $c_b(U_a \cap U_b)$ che sono aperti non vuoti di \mathbb{R}^m . La corrispondenza

$$(1) \quad c_b \circ c_a^{-1} : c_a(U_a \cap U_b) \rightarrow c_b(U_a \cap U_b)$$

è un omeomorfismo (in quanto prodotto di due omeomorfismi) che associa ad un punto x_a del primo insieme un punto x_b del secondo insieme, ove $x_a = (x_a^1, x_a^2, \dots, x_a^n)$ ed $x_b = (x_b^1, x_b^2, \dots, x_b^n)$ sono le coordinate di uno stesso punto $P \in U_a \cap U_b$ nella carta c_a e nella carta c_b rispettivamente. Dunque la (1) si può rappresentare mediante equazioni:



$$(2) \quad x_b^i = x_b^i(x_a^1, x_a^2, \dots, x_a^n), \quad i=1 \dots m$$

ove le funzioni a secondo membro sono continue in tutto l'aperto $c_a(U_a \cap U_b)$. Le equazioni (2) danno il legame intercorrente tra le coordinate di P nelle due carte c_a, c_b . L'omeomorfismo inverso di (1):

$$(3) \quad c_a \circ c_b^{-1} : c_b(U_a \cap U_b) \rightarrow c_a(U_a \cap U_b)$$

sarà a sua volta rappresentato dalle equazioni:

$$(4) \quad x_a^i = x_a^i(x_b^1, x_b^2, \dots, x_b^n)$$

dove le funzioni a secondo membro sono continue in tutto $c_b(U_a \cap U_b)$. Gli omeomorfismo (1) e (3)

prendono il nome di cambiamenti di coordinate relativi alle carte c_a e c_b , mentre le equazioni (2) e (4) sono dette equazioni dei cambiamenti di coordinate (1) e (3).

Un atlante di uno spazio parametrizzabile viene detto C^k - differenziabile se tutti i suoi cambiamenti sono omeomorfi C^k - differenziabili; viene invece detto C^∞ - differenziabile o, semplicemente se tutti i suoi cambiamenti di coordinate sono diffeomorfismi. Viene infine detto analitico se tutti i suoi cambiamenti di coordinate sono diffeomorfismi analitici.

Osserviamo che la dimensione di uno spazio parametrizzabile S è un carattere intrinseco dello spazio nel senso che se ammette un atlante $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ su \mathbb{R}^m ogni altra carta (U', c') di S deve avere codomini in \mathbb{R}^m ; quindi ogni altro atlante di S è su \mathbb{R}^m (e non su \mathbb{R}^m con $m \neq n$).

Infatti se la carta (U', c') ha codominio in \mathbb{R}^m , detto U_a un dominio dell'atlante $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ su \mathbb{R}^m , ad intersezione non vuota con U' (un tale aperto U_a certamente esiste perchè $\{U_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ è un ricoprimento di S), l'omeomorfismo:

$$c' \circ c_a^{-1} : c_a(U_a \cap U') \rightarrow c'(U_a \cap U')$$

è tra l'aperto $c_a(U_a \cap U')$ di \mathbb{R}^m e l'aperto $c'(U_a \cap U')$ di \mathbb{R}^m (si osservi che $U_a \cap U'$ è un aperto di S ; mediante l'omeomorfismo c_a esso si muta nell'aperto $c_a(U_a \cap U') \subseteq c_a(U_a)$ di \mathbb{R}^m ; analogamente per $c'(U_a \cap U')$). Per il teorema di Brouwer-Lebesgue allora deve essere $m = n$.

Sia Σ un intorno sferico contenuto con la sua chiusura $\bar{\Sigma}$ nel codominio $c_a(U_a)$ della carta c_a di un atlante di S . Il sottoinsieme $c_a^{-1}(\Sigma)$ di S , la cui chiusura è contenuta in U_a è detto sferoide relativo alla carta considerata. Esso risulta linearmente connesso e quindi connesso, e semplicemente connesso. Inoltre la sua chiusura risulta compatta. Ciò perchè di tale proprietà gode l'intorno sferico Σ e l'applicazione

$$c_a : U_a \rightarrow c_a(U_a)$$

è un omeomorfismo.

Si prova facilmente il

Teorema 3.1. -

LA FAMIGLIA DI TUTTI I POSSIBILI SFEROIDI RELATIVI ALL'ATLANTE $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ DI S COSTITUISCE UNA BASE PER LA TOPOLOGIA DI S .

Dimostrazione:

Se A è un qualsiasi aperto di S per ogni $P \in A$ si consideri una carta (U_a, c_a) contenente P . In \mathbb{R}^m si consideri un intorno sferico Σ con centro $x_a = c_a(P)$ e contenuto con la sua chiusura nell'aperto $c_a(A \cap U_a)$. Lo sferoide $c_a^{-1}(\Sigma)$ è contenuto in A e contiene P . Dunque A si può ricoprire di sferoidi relativi all'atlante considerato e ciò prova l'asserto.

Dalla proposizione precedente segue subito che:

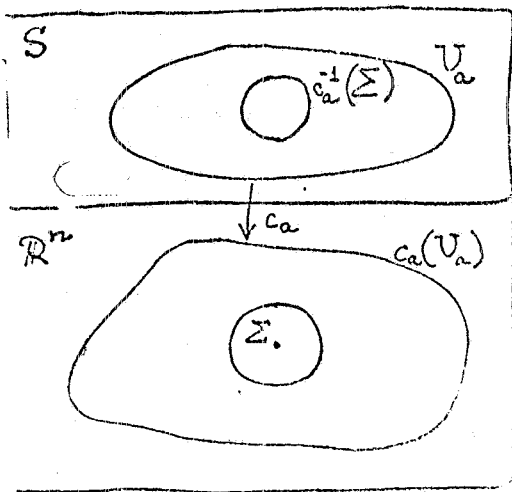
Teorema 3.2. -

UNO SPAZIO PARAMETRIZZABILE S RISULTA LOCALMENTE CONNESSO, LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSO LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO, LOCALMENTE COMPATTO.

Sia V uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile parametrizzabile di dimensione n . Dunque esiste almeno un atlante di V su \mathbb{R}^n . Si consideri allora la famiglia (non vuota) di tutti gli atlanti di V (essi sono tutti su \mathbb{R}^n per l'osservazione precedente sul carattere intrinseco

della dimensione di uno spazio parametrizzabile). L'unione di questi atlanti è ancora un atlante \mathcal{U} il quale contiene tutte le possibili carte di V .

La coppia costituita da V e da \mathcal{U} prende il nome di varietà topologica di dimensione n e si de-



nota semplicemente con V_n (l'indice n sta ad indicare la dimensione intrinsecamente legata a V). \mathcal{U} prende il nome di atlante universale della varietà topologica e V sostegno della varietà topologica. Per l'ipotesi fatta su V che sia a base numerabile si ha che il sostegno di una varietà topologica è separabile ed è uno spazio di _____ (cioè è tale che da ogni ricoprimento aperto se ne può estrarre uno numerabile). Questo ultimo fatto porta come conseguenza che da ogni atlante della varietà topologica se ne può estrarre uno numerabile. Ci si può quindi limitare nello studio di V_n alla considerazione di atlanti numerabili. Ciò costituisce chiaramente una notevole semplificazione.

4. - ESEMPI DI SPAZI PARAMETRIZZABILI E DI VARIETÀ TOPOLOGICHE. -

Esempio 0 -

La nozione di carta, atlante, varietà topologica trae origine dal fatto intuitivo seguente: in geografia si pone, come è ben noto, il problema di rappresentare sul piano la superficie terrestre che si può assimilare ad una superficie sferica Σ di \mathbb{R}^3 . E' noto che non si può rappresentare in modo biunivoco e bicontinuo tutta una superficie sferica in un aperto del piano. Il problema allora si risolve ricoprendo di aperti (nella topologia indotta su Σ da quella naturale di \mathbb{R}^3) ciascuno omeomorfo ad un aperto del piano. Questi omeomorfismi prendono il nome di carte (geografiche); l'insieme della carte costituisce un atlante (geografico). L'unione \mathcal{U} di tutti i possibili atlanti è l'atlante universale di Σ e la coppia (Σ, \mathcal{U}) è una varietà topologica di dimensione 2. Un punto P di Σ appartenente a due carte diverse ha in generale coordinate diverse nelle due carte. Il legame esistente tra queste coordinate è il cambiamento di coordinate tra una carta e l'altra.

Esempio 1. -

Sia \mathcal{C} la circonferenza di \mathbb{R}^2 con centro nell'origine e raggio 1, dotata della topologia indotta su \mathcal{C} da quella naturale di \mathbb{R}^2 . Indichiamo con O_1, O_2 i punti di coordinate $(0, 1)$ e $(0, -1)$ rispettivamente. Poniamo poi $U_1 = \mathcal{C} - O_1$ ed $U_2 = \mathcal{C} - O_2$. Gli aperti U_1, U_2 di \mathcal{C} costituiscono un ricoprimento di \mathcal{C} . La

applicazione di U_1 sull'asse x che consiste nel proiettare da O_1 i punti $P \in U_1$ sull'asse x , risulta evidentemente un omeomorfismo di U_1 su \mathbb{R} che denoteremo con c_1 . Analogamente la proiezione di U_2 da O_2 sull'asse x è un omeomorfismo che denoteremo con c_2 .

I due omeomorfismi:

$$c_1 : P \in U_1 \longrightarrow x_1 \in \mathbb{R}$$

$$c_2 : P \in U_2 \longrightarrow x_2 \in \mathbb{R}$$

costituiscono un atlante di \mathcal{C} su \mathbb{R} . Dunque \mathcal{C} è uno spazio parametrizzabile di dimensione 1.

Poichè \mathcal{C} è uno spazio di Hausdorff e a base numerabile, se ad esso si associa l'atlante costituito da tutte le possibili carte su \mathbb{R} si ottiene una varietà topologica di di-

mensione 1 che denoteremo con \mathcal{C}_1

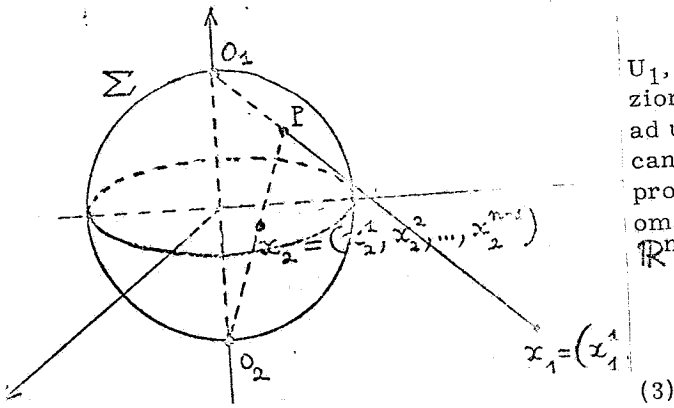
Osserviamo che il cambiamento di coordinate relativo alle carte c_1 e c_2 dell'atlante (1) risulta essere definito tra gli aperti $c_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} - 0$ e $c_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} - 0$ ed avere equazioni (come subito si prova):

$$(2) \quad x_2 = \frac{1}{x_1}$$

Poichè le equazioni (2) (definite in $\mathbb{R} - \{0\}$) sono analitiche si ha che il cambiamento di coordinate suddetto risulta analitico. Ne segue che l'atlante (1) è un atlante analitico.

Esempio 2. -

Sia Σ l'ipersuperficie sferica di \mathbb{R}^n con centro nell'origine e raggio 1, dotata della topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^n . Indichiamo con O_1 ed O_2 i punti di coordinate $(0, 0, \dots, 0, 1)$ e $(0, 0, \dots, 0, -1)$ rispettivamente.



Poniamo $U_1 = \Sigma - (O_1)$ ed $U_2 = \Sigma - (O_2)$. Gli aperti U_1, U_2 di Σ costituiscono un ricoprimento di Σ . L'applicazione di U_1 su $\mathbb{R}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})$ che fa corrispondere ad un punto $P \in U_1$ il punto $x_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ che si ottiene intersecando la retta O_1P con l' \mathbb{R}^{n-1} di equazione $x^n = 0$ (cioè la proiezione da O_1 di U_1 su \mathbb{R}^{n-1}) risulta manifestamente un omeomorfismo. Analogamente la proiezione da O_2 di U_2 su $\mathbb{R}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})$ risulta un omeomorfismo.

I due omeomorfismi:

$$c_1: P \in U_1 \rightarrow x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$c_2: P \in U_2 \rightarrow x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

costituiscono un atlante di Σ su \mathbb{R}^{n-1} . Dunque Σ è uno spazio parametrizzabile di dimensione $n-1$.

Poichè Σ è uno spazio topologico di Hausdorff e a base numerabile (perchè tale è \mathbb{R}^n), se ad esso si associa l'atlante costituito da tutte le possibili carte su \mathbb{R}^{n-1} si ottiene una varietà topologica di dimensione $n-1$ che denoteremo con Σ^{n-1} .

Osserviamo che il cambiamento di coordinate relativo alle carte c_1 e c_2 dell'atlante (3) risulta essere definito tra gli aperti $c_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^{n-1} - (0)$ e $c_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^{n-1} - (0)$ (dove (0) indica l'origine delle coordinate di \mathbb{R}^{n-1}) ed avere equazioni (come subito si prova):

$$(4) \quad x_2^i = \frac{x_1^i}{\sum_j (x_1^j)^2}$$

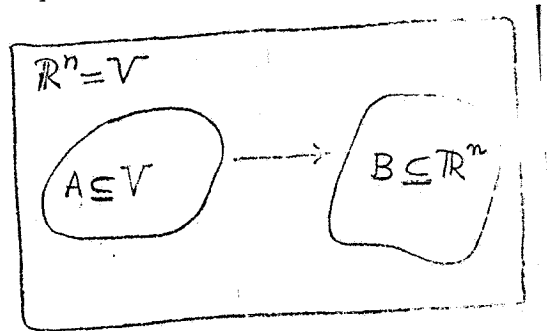
Poichè le equazioni (4) (definite in $\mathbb{R}^{n-1} - (0)$) sono analitiche, segue che l'atlante (3) è analitico.

co.

Si noti che per $n = 2$ si ottiene il caso dell'esempio precedente.

Esempio 3.

Sia $V = \mathbb{R}^n$ dotato della topologia naturale e sia \mathcal{U} l'insieme di tutti gli omeomorfismi tra due aperti A e B di \mathbb{R}^n (al variare comunque di A e B). La coppia $(\mathbb{R}^n, \mathcal{U})$ è una varietà topologica di dimensione n . Dunque \mathbb{R}^n si può considerare esso stesso come una varietà topologica rispetto agli omeomorfismi suddetti (si ricordi che $V = \mathbb{R}^n$ è di Hausdorff e a base numerabile).

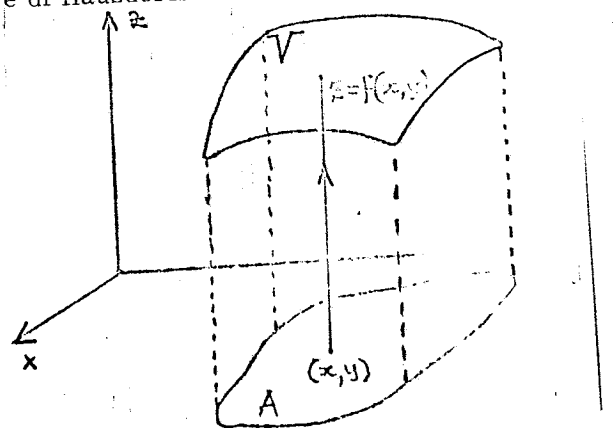


Esempio 4.

Sia V un aperto non vuoto di \mathbb{R}^n e sia \mathcal{U}_V l'insieme di tutti gli omeomorfismi tra un aperto $A \subseteq V$ (V è dotato della topologia relativa indotta da quella naturale di \mathbb{R}^n) ed un aperto B di \mathbb{R}^n al variare comunque di A in V e B in \mathbb{R}^n . La coppia (V, \mathcal{U}_V) è una varietà topologica di dimensione n (si ricordi che V è di Hausdorff e a base numerabile).

Esempio 5.

Sia V uno spazio topologico omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n . Esso è uno spazio parametrizzabile (un atlante essendo costituito da una sola carta data dall'omeomorfismo suddetto). Inoltre V è di Hausdorff e a base numerabile (perchè omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n). Se si associano a V tutte le possibili carte su \mathbb{R}^n si ottiene una varietà topologica di dimensione n .



Per esempio si consideri la funzione continua $z = f(x, y)$ definita in un aperto A di $\mathbb{R}^2(x, y)$ ed a

valori reali. L'insieme V dei punti di \mathbb{R}^3 di coordinate $(x, y, z = f(x, y))$, con $(x, y) \in A$ risulta essere uno spazio topologico, con la topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^3 , evidentemente omeomorfo ad A . Dunque V è uno spazio parametrizzabile e qualora lo si doti di tutte le possibili carte in \mathbb{R}^2 risulta una varietà topologica V_2 di dimensione 2.

Questo esempio si generalizza immediatamente se si considera una funzione $z = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ a valori reali, continua in un aperto A di \mathbb{R}^n .

Esempio 6. -

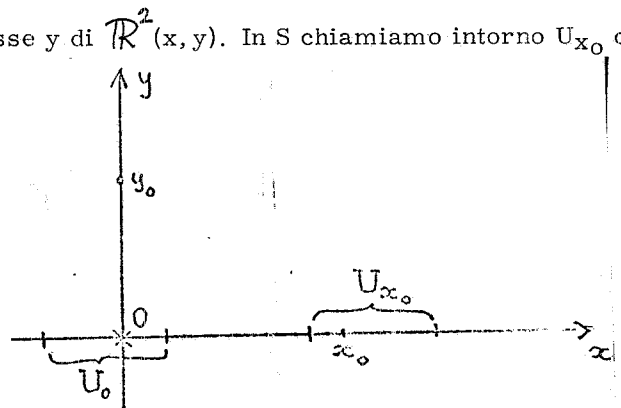
Sia S uno spazio topologico, A un aperto ($\neq \emptyset$) di \mathbb{R}^n ed $f: S \rightarrow A$ un omeomorfismo locale di S in A (cfr. § 11, Cap. V). S risulta essere parametrizzabile di dimensione n . Infatti, per ogni P di S esiste un intorno aperto U_P di P in S ed un intorno aperto $U_{P'}$ di $P' = f(P)$ in $A \subseteq \mathbb{R}^n$, tale che l'applicazione f , ristretta ad U_P , risulta un omeomorfismo tra U_P ed $U_{P'}$. Tale omeomorfismo è una carta di S su \mathbb{R}^n . Al variare di P in S si ottiene un atlante di S in \mathbb{R}^n e ciò prova l'asserto.

Se S è di Hausdorff e a base numerabile lo si può strutturare a varietà topologica dotandolo dell'atlante universale costituito da tutte le sue possibili carte su \mathbb{R}^n .

Esempio 7. - Sia S uno spazio di Hausdorff linearmente connesso, localmente linearmente connesso, localmente semplicemente connesso ed S^* il suo spazio di ricoprimento universale (cfr. § 13, Cap. V). Se S è parametrizzabile di dimensione n anche S^* è parametrizzabile di dimensione n , come subito si prova osservando che esiste un omeomorfismo locale $f: S^* \rightarrow S$ (cfr. § 13, Cap. V). Sia ora V_n una varietà topologica il cui sostegno V sia linearmente connesso. Per la proposizione II, § 3, Cap. VII, lo spazio V risulta localmente linearmente connesso localmente semplicemente connesso, oltre che di Hausdorff. Possiamo allora considerare il ricoprimento universale V^* di V , che, per quanto detto sopra, è parametrizzabile di dimensione n ed è inoltre di Hausdorff. Se esso è anche a base numerabile lo si può dotare di una struttura di varietà topologica su \mathbb{R}^n ; Si ottiene così una varietà topologica V_n^* che prende il nome di ricoprimento universale di V_n .

Esempio 8. -

Sia S l'insieme costituito dall'asse x e dall'asse y di $\mathbb{R}^2(x, y)$. In S chiamiamo intorno U_{x_0} di un punto x_0 dell'asse x un qualsiasi intervallo aperto dell'asse x contenente x_0 ; intorno U_{y_0} di un punto y_0 dell'asse y l'insieme $U_{y_0} = (U_0 - (0)) \cup (y_0)$, ove U_0 è un intorno dell'origine sull'asse x (nel senso anzidetto). Chiamiamo poi aperto di S un qualsiasi sottoinsieme A di S unione di intorno nel senso anzidetto (cioè tale che per ogni punto di A esiste un intorno suddetto del punto tutto contenuto in A). La famiglia degli aperti così definita in S costituisce, come subito si prova, una topologia per S .



Lo spazio topologico così ottenuto non è di Hausdorff. Infatti se y_1 ed y_2 sono due punti distinti dell'asse y e comunque si consideri un intorno U_{y_1} di y_1 ed uno U_{y_2} di y_2 , la loro intersezione non è mai vuota.

Lo spazio S non è a base numerabile. Infatti se \mathcal{B} è una base per gli aperti di tale spazio, per ogni y dell'asse y si consideri un intorno $U_y = (U_0 - (0)) \cup (y)$; poichè U_y è un aperto deve esistere un aperto $B_y \in \mathcal{B}$ contenente y e contenuto in U_y . Osserviamo che per quanto ora detto B_y interseca l'asse y solamente nel punto y (perchè U_y interseca l'asse y solamente nel punto y). Si ottiene così l'applicazione: $y \rightarrow B_y \in \mathcal{B}$ che è iniettiva per l'osservazione precedente. Ne segue che \mathcal{B} contiene un sottoinsieme che, essendo in corrispondenza biunivoca con i punti dell'asse y , ha la potenza del continuo che è maggiore di quella del numerabile. Onde \mathcal{B} non può essere numerabile.

Lo spazio S è separabile. Infatti, sia Q l'insieme (numerabile) dei punti a coordinata razionale dell'asse x . Evidentemente ogni punto x dell'asse x è di accumulazione per Q ; inoltre anche ogni punto y dell'asse y è di accumulazione per Q , in quanto, scelto comunque un intorno $U_y = (U_0 - (0)) \cup (y)$ di y esso contiene elementi di Q poichè $(U_0 - (0)) \cap Q \neq \emptyset$. Dunque Q , che è numerabile, è denso in S onde S è separabile.

Lo spazio S è parametrizzabile di dimensione 1. Infatti per ogni intorno U_x dell'asse x l'applicazione identica è un omeomorfismo di U_x in \mathbb{R} e per ogni intorno $U_y = (U_0 - (0)) \cup (y)$ l'applicazione che fa

corrispondere ad y lo zero di \mathbb{R} e si riduce alla identità in $(U_0, (0))$ è anche un omeomorfismo, essendo manifestamente biunivoca ed anche bicontinua (rispetto alla topologia di S e di \mathbb{R}). In tal modo dunque si costruisce un atlante di S che risulta essere addirittura analitico. S dotato dell'atlante costituito da tutte le possibili carte su \mathbb{R} non si può considerare una varietà topologica in quanto S non è di Hausdorff nè a base numerabile.

5. - VARIETA' DIFFERENZIABILI ED ANALITICHE. -

Sia V uno spazio parametrizzabile di dimensione n , (vedi par. 3) di Hausdorff e a base numerabile e che ammette un atlante differenziabile. Nell'insieme degli atlanti differenziabili di V (che non è vuoto per ipotesi) introduciamo la relazione \mathcal{R} dicendo che l'atlante $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ è in relazione mediante \mathcal{R} con l'atlante $\{U_b, c_b\}_{b \in \mathcal{B}}$ allorchè l'unione dei due atlanti considerati è ancora differenziabile (cioè se il cambiamento di coordinate tra carte dei due atlanti i cui domini siano ad intersezione non vuota sono dei diffeomorfismi). E' facile verificare che \mathcal{R} è una relazione d'equivalenza; essa determina perciò nell'insieme degli atlanti differenziabili di V una suddivisione in classi d'equivalenza. Ciascuna di tali classi prende il nome di struttura differenziabile di V . La coppia costituita da V e da una delle sue strutture differenziabili $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ viene detta varietà differenziabile di dimensione n e si denoterà semplicemente con V_n . Lo spazio V si dirà sostegno della varietà differenziabile; l'atlante unione di tutti gli atlanti della struttura differenziabile di V_n si dice atlante universale di V_n (esso ovviamente è un atlante differenziabile).

Una varietà differenziabile V_n si dice compatta o connessa se tale è il suo sostegno. Più in generale tutte le proprietà topologiche del sostegno si trasferiscono alla varietà.

Una varietà differenziabile V_n si dice orientabile se esiste un atlante $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ della sua struttura differenziabile tale che tutti i cambiamenti di coordinate:

$$x_b^i = x_b^i(x_a^1, x_a^2, \dots, x_a^n)$$

di tale atlante sono tali che:

$$\det J \equiv \det \left| \frac{\partial x_b^i}{\partial x_a^j} \right| > 0$$

Un tale atlante si dice orientato.

In modo del tutto analogo a quanto precede, pur di sostituire l'analiticità alla differenziabilità, si giunge alla nozione di struttura analitica e di varietà analitica di dimensione n .

Dal-teorema 2.2 e dall'ultimo capoverso del par. 3 si ha che:

I. - UNA VARIETA' DIFFERENZIABILE (O ANALITICA) V_n RISULTA LOCALMENTE CONNESSA, LOCALMENTE LINEARMENTE CONNESSA, LOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSA, LOCALMENTE COMPATTA, SEPARABILE.

6. - ESEMPI DI VARIETA' DIFFERENZIABILI ED ANALITICHE. -

Esempio 1. -

Sia \mathcal{C} la circonferenza di \mathbb{R}^2 di cui all'esempio 1 del par. 4. Essa, dotata della topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^2 , è uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile. L'atlante $\{U_i, c_i\}_{i=1,2}$ di \mathcal{C} , di cui sempre all'esempio 1 del par. 4, risulta analitico perchè il cambiamento di coordinate (2) dell'esempio è analitico. Tale atlante determina su \mathcal{C} una struttura analitica \mathcal{U} , costituita da tutti gli atlanti analitici di \mathcal{C} ciascuno dei quali è tale che l'unione di esso con l'atlante $\{U_i, c_i\}_{i=1,2}$ è ancora un atlante analitico. La coppia $(\mathcal{C}, \mathcal{U})$ risulta allora una varietà analitica che continueremo a denotare con \mathcal{C}_1 . Suddetta varietà è connessa e compatta perchè tale è lo spazio topologico.

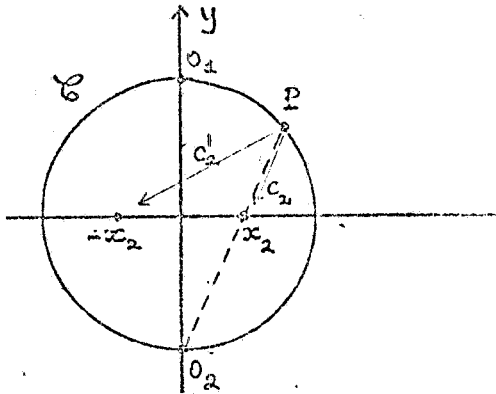
L'atlante $\{U_i, c_i\}_{i=1,2}$ non è orientato perchè $\det J = dx_2/dx_1 = -1/x_1^2 < 0$. Si ha invece che l'atlante $\{(U_1, c_1); (U_2, c_2)\}$ ove è:

$$c_2' : P \in U_2 \rightarrow -x_2 \in \mathbb{R} \quad x_2 = c_2(P)$$

è orientato in quanto il cambiamento di coordinate del suddetto atlante è $x_2' = -1/x_1$ e quindi $\det J' = +1/x_1^2 > 0$. Dunque \mathcal{C}_1 ammette un atlante orientato e pertanto è una varietà orientabile.

Esempio 2. -

Sia Σ l'ipersuperficie sferica di \mathbb{R}^n di cui all'esempio 2 del par. 4. Essa, dotata della topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^n , è uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile. L'atlante $\{U_i, c_i\}_{i=1,2}$ di Σ di cui sempre all'esempio 2 risulta analitico perchè il cambiamento di coordinate (4) dell'esempio è analitico. Tale atlante determina su Σ una struttura analitica \mathcal{U} costituita da tutti gli atlanti analitici di Σ ciascuno dei quali è tale che l'unione di esso con l'atlante $\{U_i, c_i\}_{i=1,2}$ è ancora un atlante analitico. La coppia (Σ, \mathcal{U}) risulta allora una varietà analitica che indicheremo con Σ_{n-1} . Tale varietà è connessa e compatta perchè tale è lo spazio topologico Σ . E' facile provare che tale varietà è orientabile.



Esempio 3. -

Sia $V = \mathbb{R}^n$ dotato della topologia naturale e sia \mathcal{U} l'insieme di tutti gli omeomorfismi differenziabili tra due aperti A e B di \mathbb{R}^n (al variare comunque di A e B). \mathcal{U} risulta una struttura differenziabile di \mathbb{R}^n e la coppia $(\mathbb{R}^n, \mathcal{U})$ è una varietà differenziabile di dimensione n (perchè \mathbb{R}^n è uno spazio di Hausdorff e a base numerabile). Quando nel seguito si parlerà di \mathbb{R}^n come varietà differenziabile si alluderà a tale varietà. Suddetta varietà è orientabile perchè l'atlante costituito dall'identità di \mathbb{R}^n è orientato.

La coppia costituita da \mathbb{R}^n e dall'insieme \mathcal{U} di tutti gli omeomorfismi analitici tra aperti di \mathbb{R}^n risulta una varietà analitica e quando in seguito si parlerà di \mathbb{R}^n come varietà analitica si riferirà a tale varietà.

Esempio 4. -

Sia V_n una varietà differenziabile linearmente connessa e sia $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ il suo atlante universale. Indichiamo con V^* il ricoprimento universale del sostegno V di V_n ed $f: V^* \rightarrow V$ l'omeomorfismo locale di cui alla proposizione I, par. 13, Cap. V. Supponendo che V^* sia a base numerabile, siano $P^* \in V^*$, $P = f(P^*) \in V_n$ e U_a un dominio dell'atlante universale di V_n contenente P. Poichè f è un omeomorfismo locale esiste un intorno aperto A^* di P^* in V^* ed un intorno aperto A di P in V_n tale che f, ristretta ad A^* risulta un omeomorfismo tra A^* ed A. Mediante l'inverso di tale omeomorfismo l'aperto $U_a \cap A$ si muta in un aperto U^* di A^* . L'applicazione:

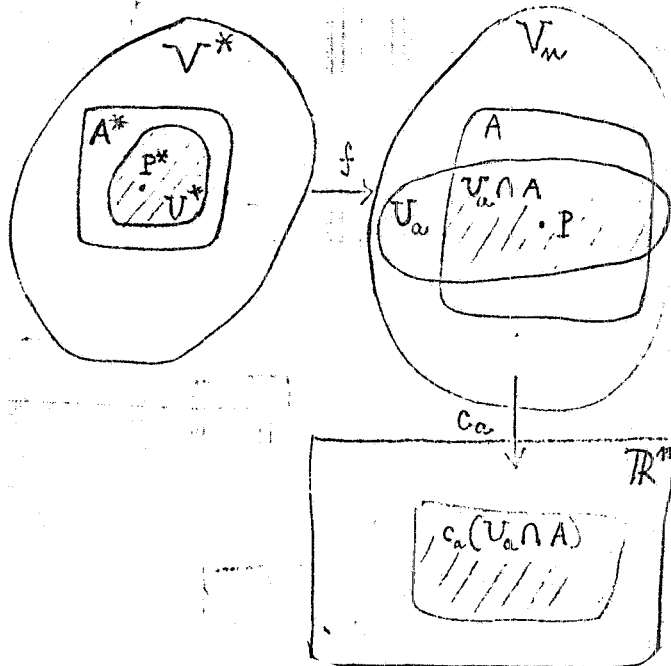
$$K = c_a \circ f : U^* \rightarrow c_a(U_a \cap A)$$

con

$$c_a(U_a \cap A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

è un omeomorfismo di U^* in un aperto di \mathbb{R}^n (in quanto prodotto di due omeomorfismi).

Dunque per ogni P^* di V^* siamo in grado di costruire un intorno aperto U^* di P^* ed un omeomorfismo k di U^* in un aperto di \mathbb{R}^n . In tal modo, al variare di P^* in V^* si costruisce un atlante di V^* su \mathbb{R}^n . Esso risulta differenziabile (in quanto i cambiamenti di coordinate sono opportune restrizioni dei cambiamenti di coordinate dell'atlante di V_n) e determina una struttura differenziabile \mathcal{U} su V^* . La coppia (V^*, \mathcal{U}) è una varietà differenziabile di dimensione n che denoteremo con V_n^* e che prende il nome di ricoprimento universale della varietà V_n .



Osserviamo che quanto detto si estende subito ad caso di uno spazio topologico S che sia di Hausdorff e a base numerabile e che ammette tra un omeomorfismo locale $f: S \rightarrow V_n$ con la varietà differen

ziabile V_n .

Esempio 5. -

Sia A un aperto di \mathbb{R}^m , $z = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ una funzione differenziabile su A . Indichiamo con V lo insieme dei punti di A in cui risulti $f(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$ e non si annullino tutte le derivate parziali della f , cioè

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \text{ tale che } f(x) = 0, \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ non tutte nulle in } x \right\}$$

Supponiamo inoltre che sia $V \neq \emptyset$. Allora V risulta uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile con la topologia relativa indotta da quelle di \mathbb{R}^m . Il teorema di Dini afferma che se in un punto $P \in V$ è $\partial f / \partial x^k \neq 0$, allora l'equazione $f(x^1, \dots, x^k, \dots, x^n) = 0$ si può esplicitare rispetto alla variabile x^k in un opportuno intorno aperto del punto P su V . Da ciò segue che per ogni punto P di V si può trovare un intorno aperto U_P di P ed un omeomorfismo c_P di V_P in un aperto $c_P(U_P)$ di \mathbb{R}^{n-1} .

L'insieme $\{U_P, c_P\}_{P \in V}$ costituisce un atlante di V su \mathbb{R}^{n-1} che risulta differenziabile in virtù del fatto che la funzione $f(x^1, \dots, x^n)$ è differenziabile in A . Tale atlante determina una struttura differenziabile \mathcal{U} . La coppia (V, \mathcal{U}) è una varietà differenziabile V_{n-1} di dimensione $n-1$. Gli esempi 1 e 2 sono casi particolari di questo esempio.

Per illustrare quanto precede si consideri in $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ il cono con vertice nell'origine, di equazione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Si ha subito che f è differenziabile (anzi analitica) ed inoltre che, esclusa l'origine (vertice del cono) le derivate di f non sono mai tutte nulle. Dunque V nel caso attuale è costituito da tutti i punti della superficie del cono tranne il vertice. Per quanto precede V si può dotare di una struttura differenziabile ottenendosi così una V_2 .

Questo esempio 5 arricchisce di molto la famiglia delle varietà differenziabili in quanto insegna a costruire una varietà a partire da una qualsiasi funzione differenziabile definita in un aperto di \mathbb{R}^m .

7. - SOTTOVARIETA' APERTE DI V_n . -

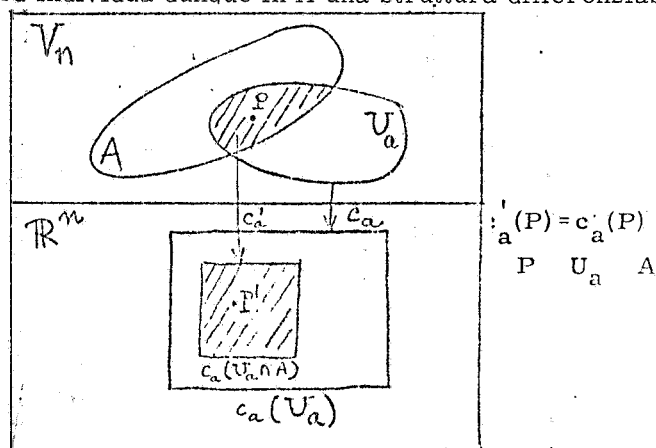
Sia V_n una varietà differenziabile di dimensione n e sia $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ il suo atlante universale. Un aperto $A (\neq \emptyset)$ dello spazio topologico V (sostegno di V_n), dotato della topologia indotta per relativizzazione da quella di V , è anch'esso uno spazio topologico di Hausdorff e a base numerabile. Se si considerano tutti gli aperti U_a tali che $U_a \cap A \neq \emptyset$ si ottiene un ricoprimento aperto $\{U_a \cap A\}_{a \in \mathcal{A}'}$, dove \mathcal{A}' è definito dalla condizione seguente

$$a \in \mathcal{A}' \iff a \in \mathcal{A} \quad U_a \cap A \neq \emptyset$$

Associando ad ogni aperto di questo ricoprimento la restrizione c_a di c_a ad $U_a \cap A$, che è un omeomorfismo di $U_a \cap A$ nell'aperto $c_a(U_a \cap A)$ di \mathbb{R}^m , si determina un atlante $\{U_a \cap A, c'_a\}_{a \in \mathcal{A}'}$ di A .

Questo atlante è evidentemente differenziabile ed individua dunque in A una struttura differenziabile che prende il nome di struttura differenziabile per relativizzazione in A da quella di V_n . La coppia formata da A e da questa struttura è una varietà differenziabile, avente come sostegno A , che viene detta sottovarietà aperta di V_n .

Nel modo precedentemente esposto si possono costruire svariati esempi di varietà differenziabili a partire da varietà differenziabili note. Per esempio, un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^m può essere dotato di una struttura differenziabile: quella indotta per relativizzazione dalla struttura differenziabile di \mathbb{R}^m (vedi esempio 3, par. 6).



Osserviamo che in quanto precede è essenziale che A sia un aperto di V . In caso contrario $U_a \cap A$ non sarebbe un aperto di V e quindi $c_a(U_a \cap A)$ non sarebbe un aperto di \mathbb{R}^m (in quanto c_a è un omeomorfismo).

Una varietà differenziabile V_n non è in generale connessa (anche se è localmente connessa, cfr. proposizione I, par. 5). Le componenti connesse di V_n sono però dei sottoinsiemi aperti di V_n . Infatti se A è una tale componente connessa, per ogni $P \in A$ esiste almeno un intorno connesso di P in quanto V_n è localmente connesso. Tale intorno è contenuto in A perchè A , essendo la componente connessa di P , è l'unione di tutti i connessi contenenti P . Dunque ogni punto di A è punto interno, cioè A è un aperto.

Le componenti connesse di V_n possono dunque essere considerate come sottovarietà aperte di V_n . Una V_n è dunque l'unione di un numero finito od infinito di sottovarietà aperte connesse a due a due prive di elementi a comune. Per questo motivo lo studio delle varietà differenziabili può limitarsi a quello delle varietà connesse.

8. - VARIETA' PRODOTTO. -

Siano V_n e V'_m due varietà differenziabili di dimensioni n ed m rispettivamente e siano $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ ed $\{U'_a, c'_a\}_{a' \in \mathcal{A}'}$ i loro rispettivi atlanti universali. Lo spazio topologico $V \times V'$ prodotto dei sostegni delle due varietà è di Hausdorff e a base numerabile in quanto sono tali gli spazi V e V' .

Si considerino gli aperti di $V \times V'$ dati da $U_a \times U'_a$ al variare comunque di a in \mathcal{A} ed a' in \mathcal{A}' . Essi costituiscono un ricoprimento aperto $\{U_a \times U'_a\}_{(a,a') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}'}$ di $V \times V'$.

Per ogni $a \in \mathcal{A}$, $a' \in \mathcal{A}'$ si consideri l'applicazione

$$(1) \quad c_a \times c'_a : (P, P') \in U_a \times U'_a \longrightarrow (c_a(P), c'_a(P')) \in c_a(U_a) \times c'_a(U'_a) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

tra l'aperto $U_a \times U'_a$ di $V \times V'$ e l'aperto di \mathbb{R}^{n+m} prodotto dell'aperto $c_a(U_a)$ di \mathbb{R}^n e l'aperto $c'_a(U'_a)$ di \mathbb{R}^m . Essa è evidentemente un omeomorfismo. Al variare di a in \mathcal{A} e di a' in \mathcal{A}' si ottiene così un atlante di $V \times V'$ dato da:

$$(2) \quad \{U_a \times U'_a, c_a \times c'_a\}_{(a,a') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}'}$$

Tale atlante risulta differenziabile. Infatti se il cambiamento di coordinate tra le carte (U_a, c_a) ed (U_b, c_b) di V_n ha equazioni:

$$(3) \quad x_b^i = x_a^i(x_a^j)$$

ed il cambiamento di coordinate tra le carte (U'_a, c'_a) ed $(U'_{b'}, c'_{b'})$ di V'_m ha equazioni:

$$(4) \quad y_{b'}^h = y_{a'}^h(y_{a'}^k)$$

il cambiamento di coordinate tra le carte $(U_a \times U'_a, c_a \times c'_a)$ ed $(U_b \times U'_{b'}, c_b \times c'_{b'})$ dell'atlante (2) ha equazioni date dall'insieme delle (3) e (4) e quindi è differenziabile.

L'atlante differenziabile (2) individua in $V \times V'$ una struttura differenziabile che prende il nome di struttura differenziabile prodotto di quelle di V_n e V'_m . La coppia costituita da $V \times V'$ e da questa struttura differenziabile è una varietà differenziabile di dimensione $n + m$ si indica con $V_n \times V'_m$. Essa viene detta varietà prodotto delle varietà V_n e V'_m .

A partire da varietà differenziabili note, mediante l'operazione di prodotto sopra definito, si possono ottenere svariati esempi di varietà differenziabili. Per esempio il prodotto di una retta per una circonferenza è una V_2 differenziabile (superficie cilindrica). Il prodotto di due circonferenze dotate di

struttura differenziabile è una V_2 differenziabile (superficie torica). Il prodotto di n circonferenze è una V_n differenziabile (n -toro).

9. - L'ALGEBRA DELLE FUNZIONI DIFFERENZIABILI SU V_n .

Sia f una funzione continua di una varietà differenziabile V_n in \mathbb{R} e sia $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ l'atlante universale di V_n . Per ogni $a \in \mathcal{A}$ la funzione:

(1)
$$f_a = f \circ c_a^{-1}$$

definite nell'aperto $c_a(U_a)$ di \mathbb{R}^m ed a valori in \mathbb{R} è continua perchè composta mediante le due funzioni c_a^{-1} ed f (ristretta ad U_a).

Una funzione f di V_n in \mathbb{R} è detta differenziabile se, per ogni $a \in \mathcal{A}$, la funzione f_a definita in (1) è differenziabile in tutto l'aperto $c_a(U_a)$.

L'insieme $\mathcal{F} = \mathcal{F}(V_n)$ delle funzioni differenziabili su V_n è certo non vuoto perchè ad esso appartengono almeno le funzioni costanti su V_n . In $\mathcal{F}(V_n)$ si può definire l'operazione di somma ponendo:

(2)
$$(f+g)(P) = f(P) + g(P)$$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, \forall P \in V_n$$

Infatti la funzione $(f+g)$ sopra definita è differenziabile perchè risulta ovviamente:

(3)
$$(f+g)_a = f_a + g_a \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

e quindi $(f+g)_a$ è differenziabile perchè somma delle funzioni differenziabili f_a e g_a . Così pure si può definire in \mathcal{F} un'operazione di moltiplicazione ed un'operazione di prodotto per un numero reale ponendo rispettivamente:

(4)
$$(fg)(P) = f(P) \cdot g(P)$$

(5)
$$(cf)(P) = c f(P)$$

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall c \in \mathbb{R}, \forall P \in V_n$$

Si verifica infatti anche in questi casi che le funzioni fg e cf sono differenziabili perchè si ha:

(6)
$$(fg)_a = f_a g_a \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

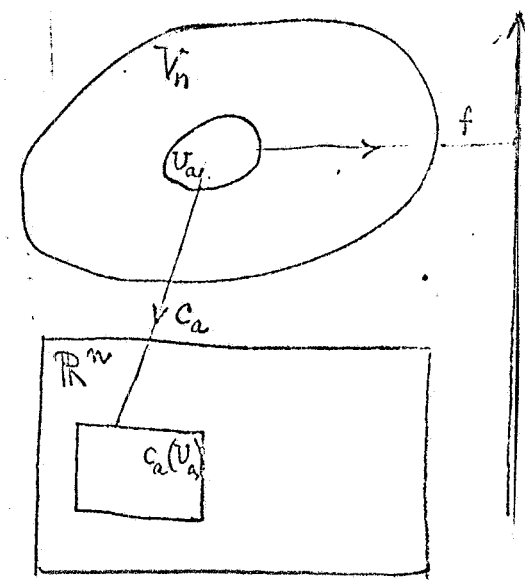
(7)
$$(cf)_a = c f_a$$

L'insieme \mathcal{F} dotato delle operazioni di somma, prodotto e prodotto per un coefficiente sopra definite costituisce un'algebra sui reali come subito si prova. Essa viene detta algebra delle funzioni differenziabili su V_n .

Si prova facilmente la seguente proposizione caratterizzante le funzioni differenziabili su V_n :

Teorema 9.1.

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÉ UNA FUNZIONE CONTINUA f DI V_n IN \mathbb{R} SIA DIFFERENZIABILE SU V_n È CHE ESSA SIA LOCALMENTE DIFFERENZIABILE, CIOÈ CHE PER OGNI PUNTO P DI V_n ESISTA UN INTORNO W_P DI P IN CUI f SIA DIFFERENZIABILE (ove W_P è considerato come sottovarietà aperta di V_n).



Anche per le funzioni differenziabili su V_n possiamo definire la nozione di supporto. Precisamente l'insieme dei punti di V_n in cui la funzione differenziabile f è diversa da zero è un aperto di V_n , perchè controimmagine dell'aperto $\mathbb{R} - \{0\}$ di \mathbb{R} e perchè la f è continua. La chiusura di tale insieme viene detta supporto della funzione f ed indicata con $SUPP f$.

Su una varietà analitica si definisce in modo del tutto analogo l'algebra delle funzioni analitiche.

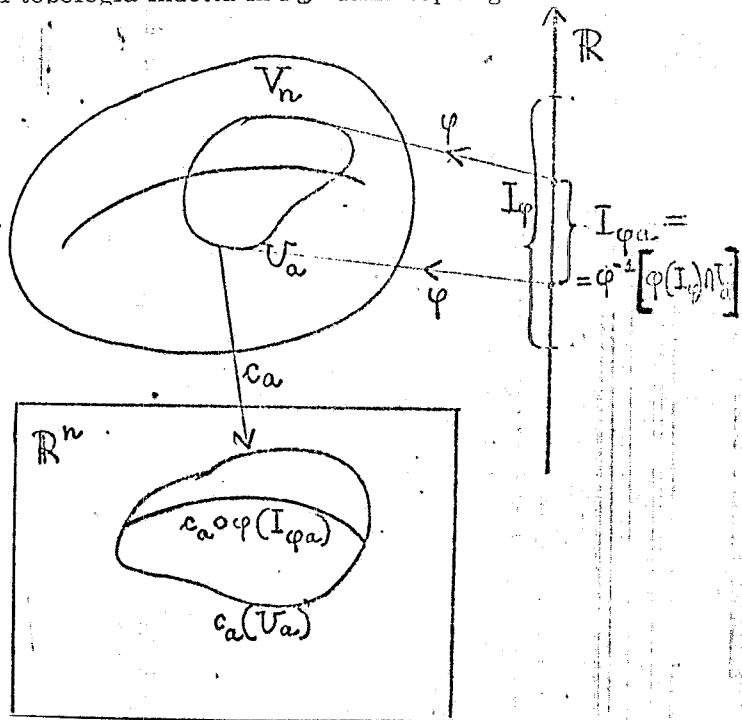
10. - CAMMINI DIFFERENZIABILI SU UNA VARIETA'.

Sia V_n una varietà differenziabile $\{U_a, c_a\}_{a \in A}$ il sup atlante universale. Un'applicazione φ continua di un intervallo aperto I_φ dell'asse reale \mathbb{R} in V_n viene detta cammino di V_n avente come dominio di definizione l'intervallo I .

Se (U_a, c_a) è una carta di V_n tale che $U_a \cap \varphi(I_\varphi) \neq \emptyset$ allora:

$$(1) \quad I_{\varphi_a} = \varphi^{-1} [\varphi(I_\varphi) \cap U_a]$$

risulta essere un aperto, contenuto in I_φ , dell'asse reale \mathbb{R} (in quanto, essendo φ continua, I_{φ_a} risulta un aperto di I_φ nella topologia indotta in I_φ dalla topologia naturale



in \mathbb{R} ed I_φ è un intervallo aperto di \mathbb{R}).

Rimane allora determinata l'applicazione:

$$(2) \quad c_a \circ \varphi : t \in I_{\varphi_a} \rightarrow c_a [\varphi(t)] \in \mathbb{R}^n$$

Essa si rappresenta mediante equazioni:

$$(3) \quad x_a^i = \varphi_a^i(t) \quad t \in I_{\varphi_a} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ove le $\varphi_a^i(t)$ sono n funzioni reali e continue della variabile reale t .

Le equazioni (3) prendono il nome di equazioni del cammino φ nella carta considerata.

Il cammino φ si dice differenziabile ^{se} alle sue equazioni sono differenziabili per ogni carta (U_a, c_a)

tale che $\varphi(I_\varphi) \cap U_a \neq \emptyset$

Siano ora

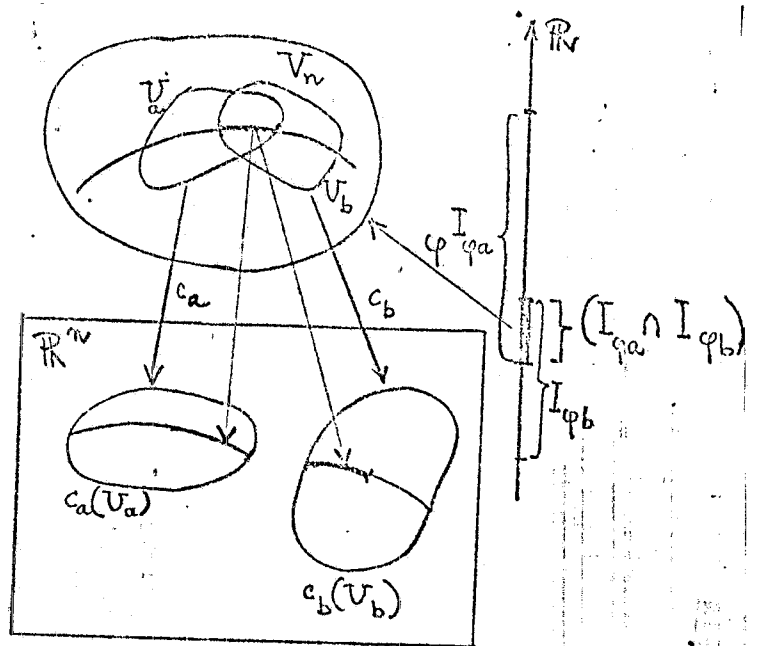
$$(4) \quad x_b^i = X_b^i(x_a^j), \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

le equazioni del cambiamento di coordinate tra le carte (U_a, c_a) ed (U_b, c_b) ove $U_a \cap U_b \neq \emptyset$. Nel caso in cui $\varphi(I_\varphi) \cap U_a \cap U_b = \emptyset$ se si hanno le:

$$(5) \quad x_b^i = \varphi_b^i(t)$$

come equazioni del cammino φ nella carta (U_b, c_b) il legame tra le (3) e le (5) è dato dalle seguenti equazioni:

$$(6) \quad x_b^i = \varphi_b^i(t) = X_b^i(\varphi_a^j(t)) \quad t \in I_{\varphi_a} \cap I_{\varphi_b}$$



Si ha inoltre che:

$$(7) \quad \frac{d\varphi_b^i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_b^i}{\partial x_a^j} \frac{\partial \varphi_a^j}{\partial t}$$

11. - SPAZIO DEI VETTORI TANGENTI IN UN PUNTO DI UNA VARIETA'. -

Sia P_0 un fissato punto di V_n . Denotiamo con \mathcal{D}_{P_0} l'insieme dei cammini differenziabili di V_n tali che:

$$(1) \quad 0 \in I_\varphi \quad \varphi(0) = P_0$$

Due elementi φ e ψ di \mathcal{D}_{P_0} si dicono tangenti in P_0 se accade che relativamente ad una carta (U_a, c_a) , con $P_0 \in U_a$ risulta:

$$(2) \quad \left(\frac{d\varphi_a^i}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{d\psi_a^i}{dt} \right)_{t=0}$$

Tale definizione non dipende dalla carta considerata perchè se (U_b, c_b) è una altra carta con $P_0 \in U_b$ risulta anche:

$$(3) \quad \left(\frac{d\varphi_b^i}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{d\psi_b^i}{dt} \right)_{t=0}$$

in forza della (2) e della (7) del par. 10 (scritta per φ e per ψ)

La relazione di tangenza in P_0 tra cammini di \mathcal{D}_{P_0} è chiaramente una relazione d'equivalenza. La classe di equivalenza determinata dal cammino $\varphi \in \mathcal{D}_{P_0}$ (cioè l'insieme dei cammini di \mathcal{D}_{P_0} tangenti a φ in P_0) prende il nome di vettore tangente in P_0 al cammino φ . Esso sarà denotato con $\underline{v}_{P_0}(\varphi)$ o semplicemente con $v(\varphi)$ ove ciò non dia luogo ad equivoci.

L'insieme dei vettori sopra considerati, cioè l'insieme delle classi di cammini tra loro tangenti, si dice insieme dei vettori tangenti in P_0 alla varietà.

Sia dato un vettore $\underline{v}_{P_0}(\varphi)$. Fissata una carta (U_a, c_a) con $P_0 \in U_a$ rimane determinata la n-pla ordinata di numeri reali data da:

$$(4) \quad v_a^i = \left(\frac{d\varphi_a^i}{dt} \right)_{t=0}$$

Tali numeri dipendono soltanto dal vettore $\underline{v}_{P_0}(\varphi)$ e dalla carta (U_a, c_a) ma non dal particolare cammino che individua quel vettore. I numeri v_a^i prendono il nome di componenti di $\underline{v}_{P_0}(\varphi)$ nella carta (U_a, c_a) . E' da osservare che vettori distinti danno origine ad n-ple di componenti distinte in forza della stessa definizione che si è data di vettore tangente in P_0 alla varietà V_n .

Se (U_b, c_b) è un'altra carta tale che $P_0 \in U_b$, in virtù delle (7) del par. 10 calcolate in P_0 , le componenti v_b^i di $\underline{v}_{P_0}(\varphi)$ nella carta (U_b, c_b) sono legate alle componenti v_a^i dalle relazioni:

$$(5) \quad v_b^i = \sum_j \left(\frac{\partial x_b^i}{\partial x_a^j} \right) v_a^j$$

Proviamo ora il seguente:

Teorema 11.1. -

DATA COMUNQUE UNA n-pla DI NUMERI REALI v^i ($i = 1, \dots, n$) ed una carta di $V_n(U_a, c_a)$ CON $P_0 \in U_a$, ESISTE UN VETTORE TANGENTE IN P_0 A V_n CHE NELLA CARTA (U_a, c_a) HA COME COMPONENTI LE v^i .

Dimostrazione. -

Se le v^i ($i = 1, \dots, n$) sono tutte nulle, il cammino costante:

$$\varphi: t \in I_\varphi \rightarrow P_0 \in V_n$$

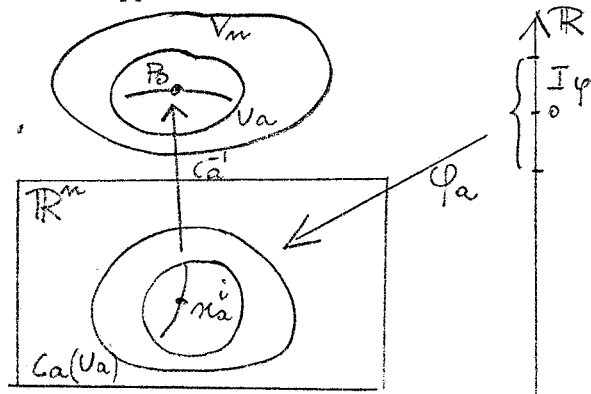
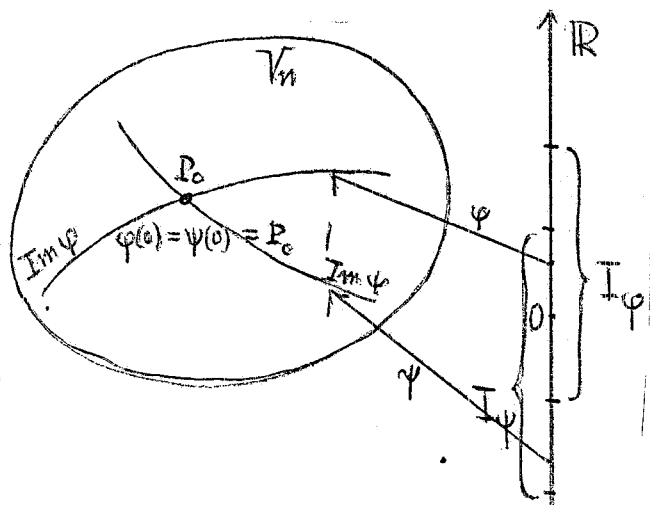
(dove I_φ è un qualsiasi fissato intervallo dell'asse \mathbb{R} contenente 0, è tale che il vettore tangente in P_0 a φ ha nella carta (U_a, c_a) componenti tutte nulle cioè coincidenti con le v^i .

Supponiamo ora che le v^i ($i = 1, \dots, n$) non siano tutte nulle, cioè che sia:

$$\sum_i (v_i)^2 > 0$$

Denotate con (x_a^i) le coordinate di P_0 nella carta (U_a, c_a) si consideri un fissato intorno sferico Σ di \mathbb{R}^n di centro in (x_a^i) tutto contenuto $c_a(U_a)$ (certo esistente perchè $c_a(U_a)$ è un aperto di \mathbb{R}^n) e sia r il suo raggio. Denotiamo poi con I_φ l'intervallo dell'asse reale di centro 0 e raggio ρ :

$$(6) \quad \rho = \frac{r}{\sqrt{\sum v_i^2}}$$



cioè

$$(7) \quad I_\varphi = \{ t \in \mathbb{R} \quad |t| < \rho \}$$

Sia $\varphi_a : I_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione continua di I_φ in \mathbb{R}^n di equazioni:

$$(8) \quad x_a^i = \dot{x}_a^i + v^i t$$

L'immagine di tale applicazione è contenuta in Σ e quindi in $c_a(U_a)$; infatti dalle (6), (7) ed (8) si ha:

$$\sum_{i=1}^n (x_a^i - \dot{x}_a^i)^2 = \sum_{i=1}^n (v^i)^2 t^2 = \frac{r^2}{\rho^2} t^2 < r^2$$

Si consideri infine l'applicazione continua:

$$\varphi : c_a^{-1} \circ \varphi_a \quad \text{di} \quad I_\varphi \quad \text{in} \quad U_a$$

Essa è un cammino differenziabile che, nella carta (U_a, c_a) , ha equazioni date dalle (8) ed è tale quindi che $\varphi(0) = P_0$. Dalle (8) si ha anche infine:

$$\left(\frac{dx_a^i}{dt} \right)_0 = v^i$$

onde l'asserto.

Dalla proposizione I e da quanto detto nel sesto capoverso di questo paragrafo si ha il:

Teorema 11.2. -

VI E' CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA I VETTORI TANGENTI IN P_0 A V_n E LE n-ple DI NUMERI REALI, COMPONENTI DI TALI VETTORI IN UNA DATA CARTA.

Proviamo ora che:

Teorema 11.3. -

DATE DUE CARTE (U_a, c_a) ED (U_b, c_b) CON $P_0 \in U_a \cap U_b$ PER LE QUALI IL CAMBIAMENTO DI COORDINATE SIA ESPRESSO DALLE:

$$x_b^i = x_a^j \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

SE (v_a^i) E (v_b^i) SONO DUE n-ple DI NUMERI REALI LEGATE DALLE (5), IL VETTORE \underline{v} DI COMPONENTI (v_a^i) NELLA CARTA (U_a, c_a) COINCIDE CON IL VETTORE \underline{v}' DI COMPONENTI (v_b^i) NELLA CARTA (U_b, c_b) .

Dimostrazione. -

Il vettore \underline{v} , di componenti (v_a^i) nella carta (U_a, c_a) , nella carta (U_b, c_b) , per la (5), ha componenti v_b^i e quindi coincide con il vettore \underline{v}' (in forza anche della proposizione II).

Siano \underline{u} , e \underline{v} due vettori tangenti in P_0 a V_n le cui componenti nella carta (U_a, c_a) siano rispettivamente (u_a^i) e (v_a^i) . Si consideri il vettore \underline{w} che nella carta (U_a, c_a) ha componenti (w_a^i) con:

$$w_a^i = u_a^i + v_a^i$$

(tale vettore certamente esiste in virtù della proposizione I).

Il vettore \underline{w} , che non dipende dalla carta (U_a, c_a) considerata in virtù della proposizione III, prende il nome di vettore somma di \underline{u} e \underline{v} e si denota con:

$$\underline{w} = \underline{u} + \underline{v}$$

Se \underline{v} è un vettore di componenti (v_a^i) nella carta (U_a, c_a) e k è un numero reale, il vettore che, nella carta (U_a, c_a) ha componenti $(k v_a^i)$, in virtù della proposizione III non dipende dalla carta considerata e si denota con $k \underline{v}$.

Nell'insieme dei vettori tangenti in P_0 a V_n rimane così definita l'operazione di somma e di prodotto per un numero reale. Rispetto a tali operazioni siffatto insieme di vettori costituisce evidentemente uno spazio vettoriale sui reali che denoteremo con T_{P_0} . Esso viene detto lo spazio dei vettori tangenti in

P_0 a V_n .

Denoteremo nel seguito con $\vec{\mathbb{R}}^m$ lo spazio vettoriale della n-ple di numeri reali somma diretta di \mathbb{R} (pensato come spazio vettoriale) n volte per se stesso.

Fissata la carta (U_a, c_a) con $P_0 \in U_a$ si consideri l'applicazione:

$$(9) \quad c_a : \underline{v} \in T_{P_0} \rightarrow (v_a^i) \in \vec{\mathbb{R}}^m$$

che associa ad ogni vettore le sue componenti nella carta (U_a, c_a) . Tale applicazione, per il teorema 11.12, risulta biunivoca. Inoltre essa conserva l'operazione di somma e di prodotto per un coefficiente (per come sono state definite tali operazioni in T_{P_0}). Quindi è un isomorfismo di T_{P_0} su $\vec{\mathbb{R}}^m$. Ne segue che T_{P_0} ha dimensione n.

Definizione: base naturale.

Si considerino gli n vettori:

$$\underline{e}_{1a}, \underline{e}_{2a}, \dots, \underline{e}_{na}$$

che nella carta (U_a, c_a) hanno rispettivamente componenti $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, \dots, 1)$. Essi costituiscono una base di T_{P_0} in quanto hanno come corrispondenti nell'isomorfismo (9) i vettori $(1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, \dots, 1)$ di $\vec{\mathbb{R}}^m$ che costituiscono una base di $\vec{\mathbb{R}}^m$.

La base di T_{P_0} data da $\underline{e}_{1a}, \dots, \underline{e}_{na}$ a prende il nome di base naturale relativa alla carta (U_a, c_a) . Stante l'isomorfismo (9) le componenti di un vettore $\underline{v} \in T_{P_0}$ nella carta (U_a, c_a) coincidono con le componenti di \underline{v} nella base naturale $(\underline{e}_{1a}), \dots, (\underline{e}_{na})$.

Osserviamo che il vettore \underline{e}_{1a} , in forza della proposizione I (vedi (8)) risulta essere il vettore tangente in P_0 al cammino di equazioni:

$$\begin{aligned} x_a^1 &= \overset{\circ}{x}_a^1 + t & |t| < \varepsilon \\ x_a^i &= \overset{\circ}{x}_a^i & (i = 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Tale cammino prende il nome di prima linea coordinata per P_0 relativa alla carta (U_a, c_a) . In modo analogo si definiscono le altre linee coordinate per P_0 e si ha che i vettori della base naturale relativa alla carta (U_a, c_a) coincidono con i vettori tangenti alle n linee coordinate per P_0 della carta (U_a, c_a) .

Siano (U_a, c_a) e (U_b, c_b) due carte di V_n tali che $P_0 \in U_a \cap U_b$ ed il cambiamento di coordinate tra le due carte sia dato da:

$$(10) \quad x_b^i = x_b^i(x_a^j) \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

Denotate con $(\underline{e}_{1a}, \underline{e}_{2a}, \dots, \underline{e}_{na})$ e $(\underline{e}_{1b}, \underline{e}_{2b}, \dots, \underline{e}_{nb})$ le basi naturali di T relative alle due carte risulterà:

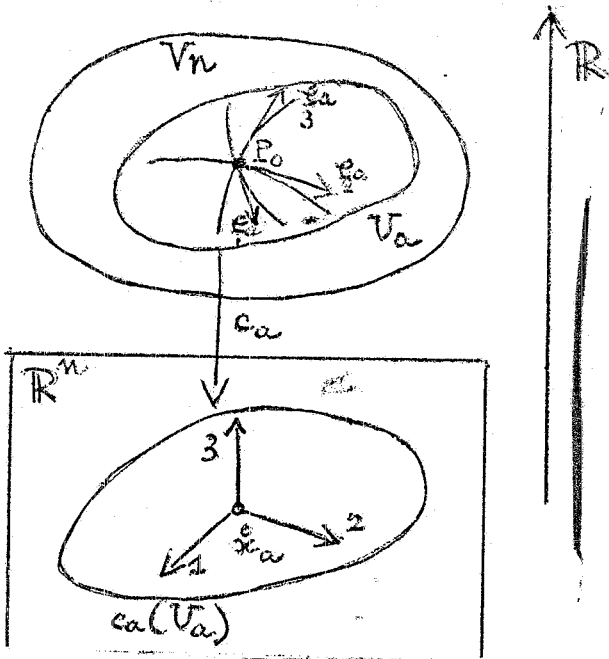
$$(11) \quad \underline{e}_{ja} = \sum \lambda_{bj}^i \underline{e}_{ib}$$

ove λ_{bj}^i è la componente i-esima di \underline{e}_j a nella base $(\underline{e}_{1b}, \dots, \underline{e}_{nb})$. Osservato che la componente s-esima di $(\underline{e}/j)_a$ nella base $(\underline{e}/1)_a, \dots, (\underline{e}/n)_a$ è data da $\delta_{j^s}^s$, in forza della (5) (che rappresenta la legge del cambiamento delle componenti quando si passa dalla carta (U_a, c_a) a quella (U_b, c_b)) si ha che:

$$(12) \quad \lambda_{bj}^i = \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial x_b^i}{\partial x_a^s} \right)_{P_0} \delta_{j^s}^s = \left(\frac{\partial x_b^i}{\partial x_a^j} \right)_{P_0}$$

Dalle (11) e (12) si ricava allora:

$$(13) \quad \underline{e}_{ja} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial x_b^i}{\partial x_a^j} \right)_{P_0} \underline{e}_{ib}$$



che esprime i vettori della base naturale relativa alla carta (U_a, c_a) , in funzione dei vettori relativi alla base naturale nella carta (U_b, c_b) .

Le (13) si invertono (pur di scambiare la carta (U_a, c_a) con la (U_b, c_b)) nelle:

$$(14) \quad \underline{e}_j^b = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_a^i}{\partial x_b^j} \right) \underline{e}_{i_a}$$

Le (13) e le (14) danno le leggi di cambiamento delle basi naturali relative alle due carte considerate.

12. - VETTORI TANGENTI LUNGO UN CAMMINO. -

Sia dato un cammino φ differenziabile di V_n il cui dominio di definizione I_φ sia l'intervallo $]$ a, b[di \mathbb{R} :

$$(1) \quad \varphi: t \in I_\varphi \rightarrow \varphi(t) \in V_n$$

Sia inoltre $P_0 = \varphi(t_0)$ ($t_0 \in I_\varphi$) un punto fissato del suddetto cammino. Ci proponiamo di definire il vettore tangente in P_0 al cammino φ .

Si consideri l'intervallo aperto I_ψ definito in \mathbb{R} come:

$$I_\psi =]a - t_0, b - t_0[$$

e l'applicazione ψ di I_ψ in V_n data da:

$$(2) \quad \psi: \tau \in I_\psi \rightarrow \psi(\tau) = \varphi(\tau + t_0) \in V_n$$

Essa risulta essere manifestamente un cammino differenziabile tale che:

$$0 \in I_\psi \quad \psi(0) = \varphi(t_0) = P_0$$

Possiamo allora considerare il vettore tangente in P_0 al cammino ψ . Tale vettore (cfr. par. 11) prende il nome di vettore tangente in P_0 al cammino φ . Al variare di P_0 sul cammino φ si ottiene in tal modo una famiglia di vettori tangenti lungo il cammino.

Se (U_a, c_a) è una carta tale che U_a contenga l'immagine del cammino φ e se in tale carta le equazioni del cammino φ sono date da:

$$(3) \quad x^i = \varphi_a^i(t)$$

Le componenti v_a^i nella carta considerata del vettore tangente \underline{v} in un punto $P_0 = \varphi(t_0)$ al cammino φ sono date da:

$$(4) \quad v_a^i(t) = \left(\frac{d\varphi_a^i}{dt} \right)_{t_0}$$

13. - CAMPI DI VETTORI TANGENTI AD UNA V_n . -

Si dice che è definito su V_n un campo di vettori tangenti \underline{v} quando è data una legge che associa ad ogni punto P di V_n un vettore \underline{v}_P tangente in P alla V_n , cioè $\underline{v}_P \in T_P$. Il vettore \underline{v}_P dicesi valore del campo di vettori in P .

Se \underline{v} e \underline{w} sono due campi di vettori tangenti definiti su V_n rimane determinato il campo di vettori $\underline{v} + \underline{w}$ che in ogni punto P di V_n assume il valore $\underline{v}_P + \underline{w}_P$. Esso prende il nome di somma dei due campi \underline{v} e \underline{w} .

In modo analogo si definisce prodotto di un numero reale e per un campo di vettori \underline{w} e si denota con $c \underline{w}$ il campo di vettori che per ogni punto P di V_n assume il valore $c \underline{w}_P$.

Rispetto all'operazione di somma e di prodotto per un numero reale sopra definito, l'insieme dei campi di vettori definiti su V_n costituisce uno spazio vettoriale (esso risulta essere il prodotto diretto della famiglia $\{T_P\}_{P \in V_n}$ di spazi vettoriali). Tale spazio prende il nome di spazio dei campi di vettori tangenti definiti su V_n .

Sia $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ l'atlante universale di V_n , e sia \underline{v} un campo di vettori tangenti definito su V_n . Per ogni carta (U_a, c_a) e per ogni P di (U_a, c_a) rimangono definite le componenti di \underline{v}_P nella carta:

$$(1) \quad v_a^i = v_a^i(x_a^1, x_a^2, \dots, x_a^m)$$

ove x_a^1, x_a^2, \dots sono le coordinate di P nella carta considerata.

Se accade che le n funzioni reali $v_a^i(x_a^j)$ risultano differenziabili e ciò per ogni carta (U_a, c_a) dell'atlante universale, si dice che \underline{v} è un campo di vettori differenziabile sulla V_n .

Manifestamente la somma di due campi di vettori differenziabili ed il prodotto di un numero reale per un campo di vettori differenziabili sono ancora campi di vettori differenziabili. Dunque l'insieme dei campi di vettori differenziabili costituisce uno spazio vettoriale $\mathcal{V} = \mathcal{V}(V_n)$ (sottospazio di quello dei vettori definiti su V_n). Lo spazio \mathcal{V} prende il nome di spazio dei campi di vettori tangenti differenziabili su V_n .

Si dice supporto di un campo di vettori differenziabile \underline{v} di V_n la chiusura dell'aperto in cui \underline{v} è diverso da zero. Esso si denoterà con supp \underline{v} .

Notiamo che se \underline{v} è un campo di vettori differenziabile su V_n e $(U_a, c_a), (U_b, c_b)$ sono due carte di V_n ad intersezione non vuota, in ogni punto di $U_a \cap U_b$ tra le componenti v_a^i e v_b^i di \underline{v} nelle due carte sussistono le relazioni:

$$(2) \quad v_b^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_b^i}{\partial x_a^j} v_a^j$$

Osserviamo infine che dare un campo di vettori differenziabile su V_n significa dare un atlante $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ di V_n e per ogni a di \mathcal{A} una n -pla di funzioni $v_a^i(x_a)$ differenziabili in $c_a(U_a)$ con la condizione che, se $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, le funzioni relative in $c_a(U_a \cap U_b)$ siano legate dalla (2). Infatti, fissato allora un punto P di V_n ed una carta (U_a, c_a) il cui dominio contenga P , risulta determinato il vettore tangente in P a V_n , le cui componenti nella base naturale associata ad (U_a, c_a) sono date dalle $v_a^i(x_a)$. La condizione (2) ci assicura che se si cambia la carta il vettore tangente in P a V_n così definito non cambia; si ottiene così di fatto un campo differenziabile di vettori su V_n che ha come componente in (U_a, c_a) le funzioni $v_a^i(x_a)$ date.

14. - CROCHET ED ALGEBRA DI LIE SU UNA VARIETA' DIFFERENZIABILE. -

Nel presente paragrafo e nei successivi adotteremo la notazione di Einstein secondo la quale quando in un'espressione compaiono uno o più indici (la cui variabilità risulti nota dal contesto) ripetuti in alto ed in basso si sottintende la somma rispetto ad essi.

Sia V_n una varietà differenziabile e \mathcal{V} lo spazio vettoriale sui reali dei campi di vettori differenziabili su V_n e sia inoltre $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ l'atlante universale di V_n .

Se $\underline{u}, \underline{v}$ sono due qualsivoglia fissati campi di vettori differenziabili su V_n , per ogni data carta

(U_a, c_a) dell'atlante di V_n rimangono determinate le componenti $u_a^i(x_a)$ e $v_a^i(x_a)$ di \underline{u} e \underline{v} nella data carta.

Si consideri allora la n-pla di funzioni differenziabili in $c_a(U_a)$ data da:

$$(1) \quad W_a^i = V_a^s \frac{\partial V_a^i}{\partial x_a^s} - V_a^s \frac{\partial V_a^i}{\partial x_a^s}$$

Ci proponiamo di provare che se (U_b, c_b) è una carta ad intersezione non vuota con (U_a, c_a) in $U_a \cap U_b$ risulta:

$$(2) \quad W_b^i = \frac{\partial x_b^i}{\partial x_a^j} W_a^j$$

Ne seguirà, in forza dell'osservazione finale del paragrafo precedente che le w_a^i date dalla (1) sono le componenti nella carta (U_a, c_a) di campo di vettori \underline{w} differenziabile su V_n . Esso prende il nome di crochet dei campi di vettori \underline{u} , e \underline{v} e si denota con:

$$(3) \quad \underline{W} = [\underline{u}, \underline{v}]$$

Risulta (cfr. formula (2) del paragrafo precedente) che:

$$(4) \quad V_a^j = \frac{\partial x_a^j}{\partial x_b^t} V_b^t$$

da cui, osservato che:

$$\frac{\partial^2 x_a^j}{\partial x_a^s \partial x_b^i} = \frac{\partial}{\partial x_b^i} \left(\frac{\partial x_a^j}{\partial x_a^s} \right) = \frac{\partial}{\partial x_b^i} \delta_s^j = 0$$

si ottiene subito la relazione

$$(5) \quad \frac{\partial V_a^j}{\partial x_a^s} = \frac{\partial x_a^j}{\partial x_b^t} \frac{\partial V_b^t}{\partial x_b^r} \frac{\partial x_b^r}{\partial x_a^s}$$

Analogamente si ha:

$$(6) \quad \frac{\partial V_a^i}{\partial x_a^s} = \frac{\partial x_a^i}{\partial x_b^t} \frac{\partial V_b^t}{\partial x_b^r} \frac{\partial x_b^r}{\partial x_a^s}$$

Dalle (1), (5), (6) e dalla (2) del paragrafo precedente si ottiene con facili calcoli:

$$\frac{\partial x_b^i}{\partial x_a^j} \left[V_a^s \frac{\partial V_a^i}{\partial x_a^s} - V_a^s \frac{\partial V_a^i}{\partial x_a^s} \right] = V_b^s \frac{\partial V_b^i}{\partial x_b^s} - V_b^s \frac{\partial V_b^i}{\partial x_b^s}$$

onde l'asserto.

Nello spazio vettoriale \mathcal{V} rimane dunque definito, per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in \mathcal{V}$, il prodotto $[\underline{u}, \underline{v}]$. Rispetto a tale operazione di prodotto lo spazio vettoriale costituisce un'algebra in quanto si verificano immediatamente le seguenti proprietà :

$$(7) \quad [\underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{v}] = [\underline{u}_1, \underline{v}] + [\underline{u}_2, \underline{v}]$$

$$(8) \quad [\underline{v}_1, \underline{v}_1 + \underline{v}_2] = [\underline{v}_1, \underline{v}_1] + [\underline{v}_1, \underline{v}_2]$$

$$(9) \quad [a\underline{v}, \underline{v}] = a[\underline{v}, \underline{v}]$$

L'algebra \mathcal{V} sopra definita risulta essere un'algebra di Lie perchè si verifica subito che:

$$(10) \quad [\underline{v}, \underline{v}] = 0$$

$$(11) \quad [\underline{v}, [\underline{y}, \underline{w}]] + [\underline{w}, [\underline{v}, \underline{y}]] + [\underline{y}, [\underline{w}, \underline{v}]] = 0$$

\mathcal{V} prende il nome di algebra di Lie della varietà differenziabile V_n .

Esercizio. -

Si consideri \mathbb{R}^3 (oppure un aperto di $\mathbb{R}^3 \neq \emptyset$) dotato della sua struttura differenziabile naturale (vedi esempio 3 di paragrafo 6) e sia \mathcal{V} l'algebra di Lie dei campi di vettori differenziabili di V_3 . Considereremo coordinate dei punti e componenti dei vettori nella carta naturale di \mathbb{R}^3 .

Come è noto si definiscono per un campo differenziabile di vettori \underline{v} (v_x, v_y, v_z) di \mathbb{R}^3 la funzione divergenza:

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

ed il valore rotore:

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Si dice inoltre che un campo di vettori \underline{v} di \mathbb{R}^3 è solenoidale se $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ su tutto \mathbb{R}^3 .

a) Dimostrare che l'insieme Σ dei campi dei vettori solenoidali di \mathbb{R}^3 costituisce una sottoalgebra di \mathcal{V} (cioè che Σ è un sottospazio vettoriale di \mathcal{V} ed è chiuso rispetto al crochet).

b) Provare inoltre che se $\underline{u}, \underline{v} \in \Sigma$ risulta

$$[\underline{u}, \underline{v}] = \operatorname{rot} (\underline{u} \wedge \underline{v})$$

c) I campi di vettori armonici (cioè tali che $\operatorname{div} \underline{v} = 0, \operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$) costituiscono una sottoalgebra di Σ ?

15. - APPLICAZIONI DIFFERENZIABILI TRA VARIETA'. -

Siano V_n e W_m due varietà differenziabili i cui atlanti universali siano rispettivamente $\{U_a, c_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ e $\{U_b, k_b\}_{b \in \mathcal{B}}$. Un'applicazione continua:

$$(1) \quad F: V_n \longrightarrow W_m$$

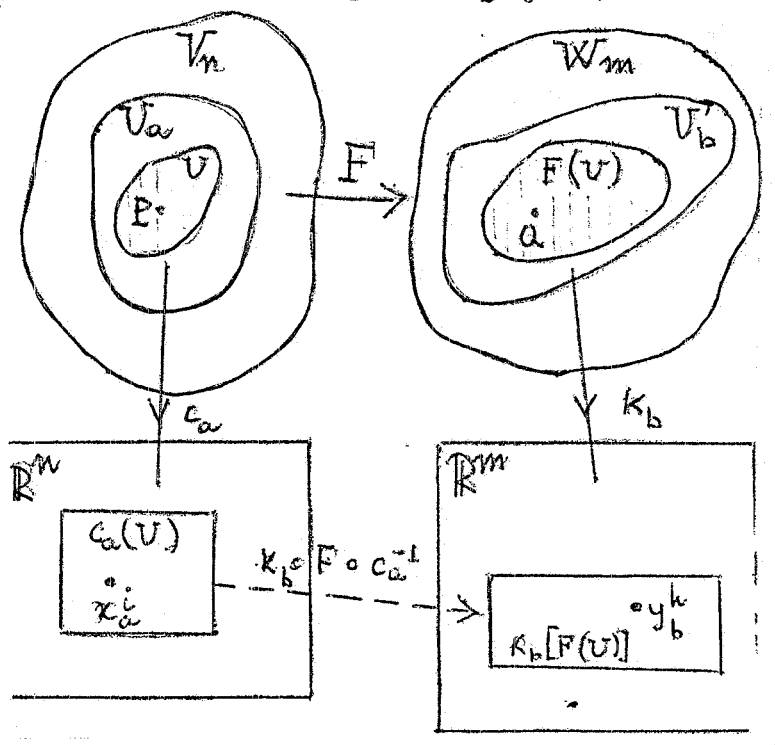
di V_n in W_m si dirà differenziabile se è localmente differenziabile. Cioè se accade che per ogni punto P di V_n esiste un intorno aperto U di P , contenuto in un dominio di una carta (U_a, c_a) di V_n tale che $F(U)$ sia contenuto in un dominio di una carta (U_b, k_b) di W_m ed inoltre l'applicazione continua:

$$(2) \quad k_b \circ F \circ c_a^{-1}: c_a(U) \longrightarrow k_b[F(U)]$$

dell'aperto $c_a(U)$ di \mathbb{R}^n nell'aperto $k_b[F(U)]$ di \mathbb{R}^m sia espressa da funzioni differenziabili del tipo:

(3)

$$y_b^h = F_b^h(x_a^i) \quad (h = 1 \dots m, i = 1 \dots n)$$



Le (3) prendono il nome di equazioni locali dell'applicazione differenziabile F .

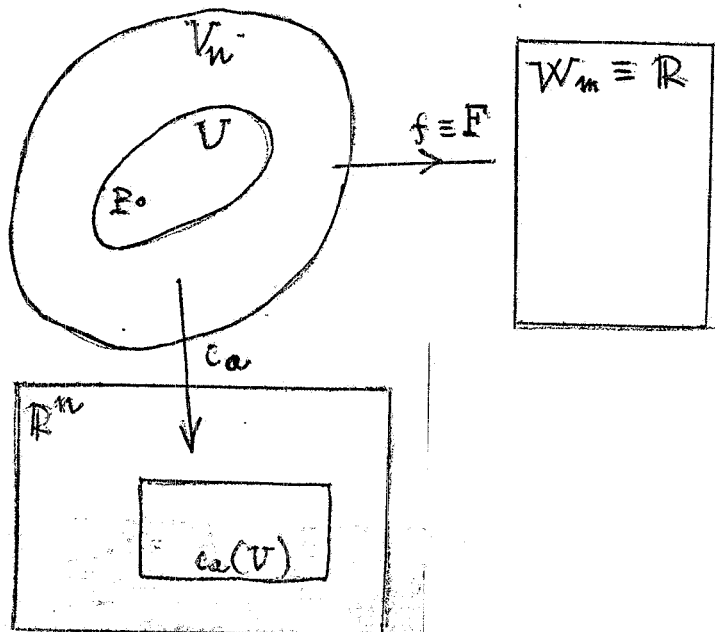
Diamo ora alcuni esempi di applicazioni differenziabili tra varietà.

Esempio 1. -

Ogni applicazione costante di V_n in W_m è differenziabile in quanto le equazioni locali (3) si riducono a delle costanti date dalle coordinate del punto di W_m immagine di tutta V_n in W_m .

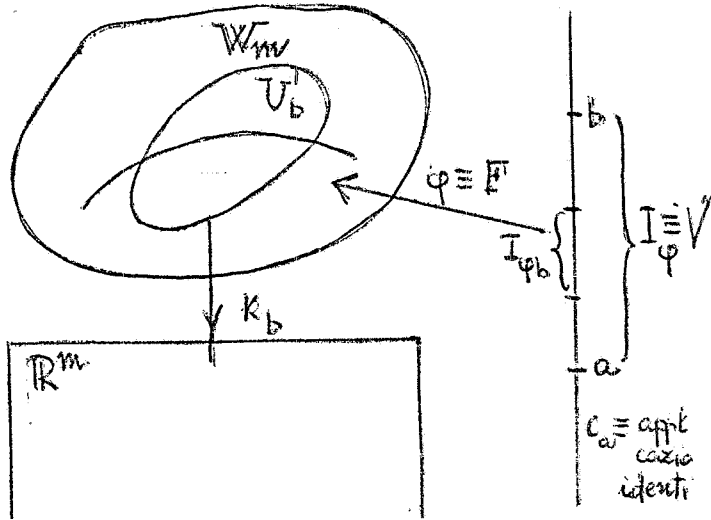
Esempio 2. -

Secondo la definizione data al par. 10 un cammino differenziabile di V_n è un'applicazione differenziabile dell'intervallo $]a, b[$ (dominio di definizione di φ) in V_n . (vedi figura).



Esempio 3. -

Una qualsiasi funzione f (a valori reali) differenziabile su V_n risulta essere un'applicazione differenziabile di V_n in \mathbb{R} (dotato della struttura differenziabile naturale) (vedi figura).

Esempio 4. -

Una qualsiasi funzione differenziabile $y = f(x)$ di un intervallo aperto $]a, b[$ dell'asse reale x nell'asse reale y è un'applicazione differenziabile nella quale V_n e W_m coincidono rispettivamente con l'intervallo $]a, b[$ dell'asse x e con l'asse y (dotati della struttura differenziabile naturale).

Dalla definizione di applicazione differenziabile e dal teorema sulla differenziabilità di funzioni composte mediante funzioni differenziabili segue subito la proposizione seguente:

Proposizione I. - Date due applicazioni differenziabili:

$$F : V_m \rightarrow W_m, \quad F' : W_m \rightarrow Z_l$$

il prodotto

$$F' \circ F : V_m \rightarrow Z_l$$

è ancora un'applicazione differenziabile tra V_n e Z_l .

L'applicazione identica di una varietà V_n risulta essere un'applicazione differenziabile.

Un omeomorfismo tra due varietà che sia differenziabile insieme al suo inverso prende il nome di omeomorfismo differenziabile oppure diffeomorfismo tra le due varietà. Due varietà si dicono diffeomorfe se esiste un diffeomorfismo tra di loro.

Osserviamo che se due varietà sono diffeomorfe esse hanno la stessa dimensione in virtù del teorema di Brouwer-Bebesgue (vedi par. 2). Si ha subito che il prodotto di due diffeomorfismi e l'inverso di un diffeomorfismo sono dei diffeomorfismi. Inoltre l'applicazione identica di V_n è un diffeomorfismo. Da ciò segue che la relazione di diffeomorfismo tra varietà risulta di equivalenza.

Nello studio delle varietà differenziabili le proprietà che si prendono in considerazione sono quelle invarianti rispetto a diffeomorfismi.

Da quanto precede si ha anche che l'insieme dei diffeomorfismi di una varietà V_n risulta essere un gruppo rispetto al prodotto operatorio che si dice gruppo dei diffeomorfismi di V_n .

Quanto detto per le applicazioni differenziabili tra varietà differenziabili si ripete immediatamente nel caso di varietà analitiche.

Diamo ora altri esempi di applicazioni differenziabili tra varietà.

Esempio 5. -

Sia dato un cammino differenziabile della varietà V_n :

$$\varphi : I_\varphi \subset \mathbb{R} \rightarrow V_n$$

Esso risulta essere un'applicazione differenziabile dell'intervallo I_φ di \mathbb{R} in V_n (vedi esempio 2). Sia poi

$$F : V_n \rightarrow W_m$$

un'applicazione differenziabile di V_n in W_m . Per la proposizione I il prodotto delle due applicazioni differenziabili F e φ :

$$F \circ \varphi : I_\varphi \rightarrow W_m$$

risulta essere un'applicazione differenziabile di I_φ in W_m , cioè un cammino differenziabile di W_m . Esso prende il nome di cammino trasformato di φ mediante F .

Esempio 6. -

Sia $F: V_n \rightarrow W_m$ un'applicazione differenziabile di V_n in W_m ed f una funzione differenziabile (a valori reali) definita su W_m . La f risulta allora un'applicazione differenziabile di W_m in \mathbb{R} (cfr. esempio 3). Dunque per la proposizione I il prodotto delle due applicazioni differenziabili f ed F dato da:

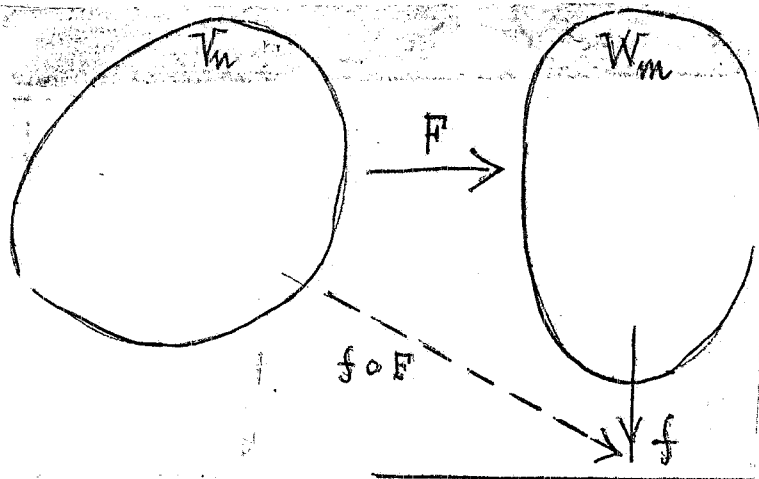
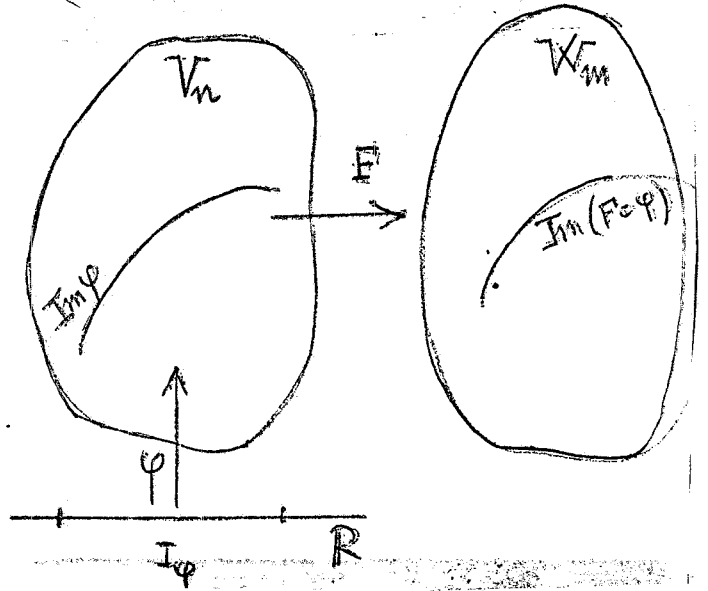
$$f \circ F : V_n \rightarrow \mathbb{R}$$

risulta essere un'applicazione differenziabile di V_n in \mathbb{R} cioè una funzione differenziabile su V_n .

Fissata l'applicazione F risulta determinata in questo modo un'applicazione dell'algebra $\mathcal{F}(W_m)$ delle funzioni differenziabili su W_m (vedi § 9) nell'algebra $\mathcal{F}(V_n)$ delle funzioni differenziabili su V_n data da:

$$f \in \mathcal{F}(W_m) \rightarrow f \circ F \in \mathcal{F}(V_n)$$

Si dimostra che tale applicazione è un omomorfismo dell'algebra $\mathcal{F}(W_m)$ nell'algebra $\mathcal{F}(V_n)$



16. - DIFFERENZIALE DI UN'APPLICAZIONE. -

Sia

$$F : V_n \rightarrow W_m$$

un'applicazione differenziabile di V_n in W_m . Fissato comunque un punto P_0 di V_n , sia $P'_0 = F(P_0)$. Denoteremo (cfr. § 11) con $\mathcal{D}_{P_0}(V_n)$ l'insieme dei cammini differenziabili φ di V_n tali che:

$$(1) \quad 0 \in I_\varphi \quad \varphi(0) = P_0$$

Analogamente denoteremo con $\mathcal{D}_{P'_0}(W_m)$ l'insieme dei cammini φ' differenziabili su W_m tali che:

$$(2) \quad 0 \in I_{\varphi'} \quad \varphi'(0) = P'_0$$

Ad ogni cammino $\varphi \in \mathcal{D}_{P_0}(V_n)$ rimane associato il cammino $F \circ \varphi$ di W_m trasformato mediante F di φ (cfr. esempio 5 del § 15). Dalla (1) si ha che $[F \circ \varphi](0) = F(P_0) = P'_0$. Dunque per la (2), il cammino $F \circ \varphi$ è un elemento di $\mathcal{D}_{P'_0}(W_m)$. Nasce in tal modo la seguente applicazione $D_{P_0}^F$ dell'insieme $\mathcal{D}_{P_0}(V_n)$ in $\mathcal{D}_{P'_0}(W_m)$:

$$(3) \quad D_{P_0}^F : \varphi \in \mathcal{D}_{P_0}(V_n) \longrightarrow F \circ \varphi \in \mathcal{D}_{P'_0}(W_m)$$

Dimostriamo ora il seguente:

Teorema 16.1. -

SE $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_{P_0}(V_n)$ HANNO LO STESSO VETTORE TANGENTE IN P_0 A V_n . I CORRISPONDENTI CAMMINI $\varphi' = F \circ \varphi$ E $\psi' = F \circ \psi$, MEDIANTE $D_{P_0}^F$, HANNO LO STESSO VETTORE TANGENTE IN P'_0 A W_m .

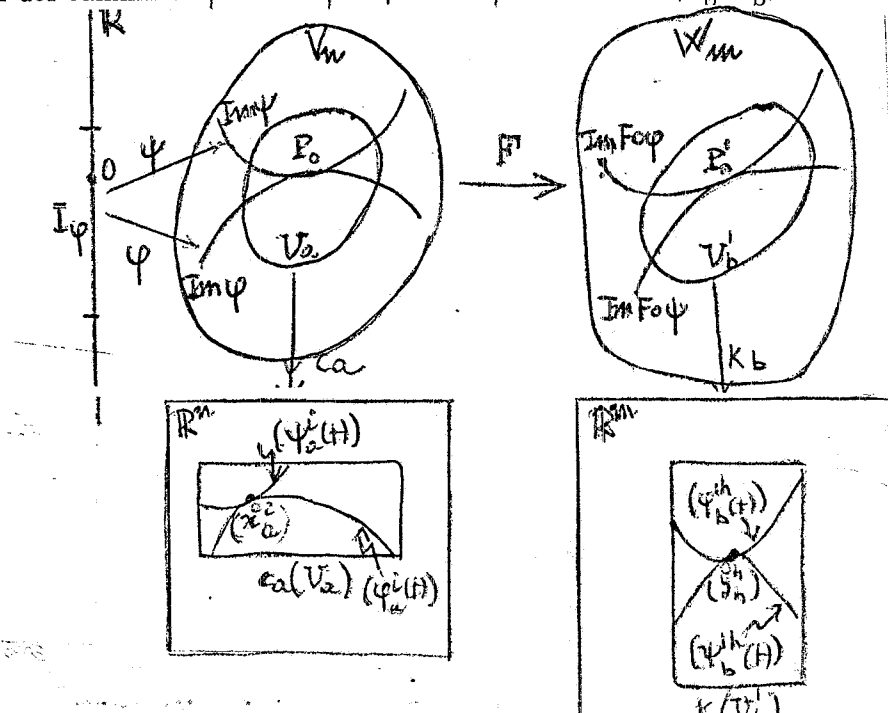
Le equazioni locali di F relative alle carte (U_a, c_a) di V_n e (U'_b, k_b) di W_m siano date dalle equazioni (3) del par. 15 e cioè:

$$y_b^h = F_b^h(x_a^i) \quad (h = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n)$$

Poichè φ e ψ hanno lo stesso vettore tangente in P_0 si ha (cfr. par. 1):

$$(4) \quad \left(\frac{d\varphi_a^i(t)}{dt} \right)_0 = \left(\frac{d\psi_a^i(t)}{dt} \right)_0$$

dove $\varphi_a^i(t)$ e $\psi_a^i(t)$ sono le equazioni dei cammini φ e ψ nella carta (U_a, c_a) . Siano $\varphi'_b(t)$ e $\psi'_b(t)$ le equazioni dei cammini $\varphi' = F \circ \varphi$ e $\psi' = F \circ \psi$ nella carta (U'_b, k_b) .



Tenuto conto delle equazioni locali di F (cfr. (3) par. 15) risulta:

$$(5) \quad \varphi_b'^h(t) = F_b^h(\varphi_a^v(t)) \quad \psi_b'^h(t) = F_b^h(\psi_a^i(t))$$

Di qui si ricava:

$$(6) \quad \left(\frac{d\varphi_b^s(t)}{dt} \right)_0 = \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial F_b^h}{\partial x_a^s} \right)_{P_0} \left(\frac{d\varphi_a^s(t)}{dt} \right)_0$$

$$(6') \quad \left(\frac{d\psi_b^s(t)}{dt} \right)_0 = \sum \left(\frac{\partial F_b^h}{\partial x_a^s} \right)_{P_0} \left(\frac{d\psi_a^s(t)}{dt} \right)_0$$

da cui subito segue l'asserto in forza delle (4).

Si consideri il vettore $\underline{v}_{P_0}(\varphi)$ tangente in P_0 a V_n individuato dal cammino φ . (cfr. par. 11), cioè la classe dei cammini $\psi \in \mathcal{D}_{P_0}(V_n)$ tangenti in P_0 al cammino φ . In forza della proposizione I, tutti i cammini ψ appartenenti alla classe $\underline{v}_{P_0}(\varphi)$ si trasformano mediante F in cammini $\psi' = F \circ \psi$ contenuti in $\mathcal{D}_{P_0'}(W_m)$ tangenti in P_0' a $\varphi' = F \circ \varphi$ e quindi appartenenti alla classe $\underline{v}_{P_0'}(\varphi')$ costituita dai cammini, elementi di $\mathcal{D}_{P_0'}(W_m)$, tangenti in P_0' a W_m individuati da φ' . Rimane così individuato tramite F a partire dal vettore $\underline{v}_{P_0}(\varphi)$ il vettore $\underline{v}_{P_0'}(\varphi')$. Nasce allora l'applicazione dello spazio dei vettori tangenti in P_0 a V_n , $TP_0(V_n)$, nello spazio dei vettori tangenti in P_0' a W_m , $TP_0'(W_m)$ data da:

$$(7) \quad d_{P_0}^F : \underline{v}_{P_0}(\varphi) \in TP_0(V_n) \longrightarrow \underline{v}_{P_0'}(\varphi') \in TP_0'(W_m)$$

Dalla (6) si ha che se $v_a^i = \left(\frac{d\varphi_a^i}{dt} \right)_0$ sono le componenti nella carta (U_a, c_a) del vettore tangente in P_0 a φ e se $v_b'^h$ sono le componenti del vettore tangente in P_0' a $\varphi' = F \circ \varphi$ nella carta (U_b', k_b) , risulta che:

$$(8) \quad v_b'^h = \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial F_b^h}{\partial x_a^s} \right)_{P_0} v_a^s$$

ove le:

$$(9) \quad y_b^h = F_b^h(x_a^i)$$

sono le equazioni locali della F .

Ne segue che l'applicazione (7) relativamente alle carte (U_a, c_a) , (U_b', k_b) si esplicita mediante le equazioni (8). Poichè tali equazioni sono lineari l'applicazione (7) risulta essere un omomorfismo. Sifatto omomorfismo dello spazio $TP_0(V_n)$ nello spazio $TP_0'(W_m)$ prende il nome di differenziale dell'applicazione F in P_0 .

Un'applicazione differenziabile $F: V_n \rightarrow W_m$ è detta regolare in un punto P_0 di V_n se il corrispondente differenziale $d_{P_0}^F : TP_0(V_n) \rightarrow TP_0'(W_m)$ risulta un monomorfismo (cioè è iniettivo), per la qual cosa occorre e basta, come subito si prova in forza del teorema di Jordan, che la matrice $\| \partial F_b^h / \partial x_a^s \|$ dei coefficienti della (8) abbia rango massimo uguale ad n . L'applicazione F è detta regolare se essa è regolare in ogni punto.

Per esempio se F è un diffeomorfismo tra V_n e W_m allora esso risulta senza altro regolare in quanto, essendo F invertibile, la matrice quadrata (d'ordine n) $\| \partial F_b^h / \partial x_a^s \|$ è anch'essa invertibile, cioè non degenera, ossia ha rango massimo pari ad n . In tal caso il differenziale $d_{P_0}^F$ risulta essere un isomorfismo tra i due spazi vettoriali $TP_0(V_n)$ e $TP_0'(W_m)$.

Sia \underline{v} , un campo di vettori differenziabile su V_n ed $F: V_n \rightarrow W_m$ un diffeomorfismo tra le va-

rietà V_n e W_n . Ogni punto P' di W_n proviene mediante F da un unico punto P di V_n . Il vettore \underline{v}_P del campo \underline{v} in P si trasforma mediante il differenziale d_P^F in un ben determinato vettore $\underline{v}'_{P'}$, tangente in P' a W_n . Inoltre se v_a^i sono le componenti di \underline{v}_P nella carta (U_a, c_a) (funzioni differenziabili delle coordinate x_a), le componenti v_b^h di $\underline{v}'_{P'}$ sono date dalle (8). Quindi le v_b^h sono funzioni differenziabili delle coordinate y_b^h . Ne segue che in tal modo rimane determinato su W_n un campo di vettori differenziabile \underline{v}' che prende il nome di trasformato mediante F del campo di vettori \underline{v} di V_n .

17. - VARIETA' IMMERSE. -

Date due varietà V_n e W_m si dice che W_m è immersa in V_n se valgono le seguenti due proprietà:

- I. - Lo spazio topologico sostegno di W_m è un sottospazio dello spazio topologico sostegno di V_n .
- II. - L'applicazione identica

$$i : W_m \rightarrow V_n$$

è un'applicazione differenziabile regolare.

Se W_m è immerso in V_n in ogni punto P di W_m sono definiti gli spazi tangenti $T_P(W_m)$ e $T_P(V_n)$. Inoltre $T_P(W_m)$ è isomorfo, mediante il differenziale d_P^i della applicazione identica $i: W_m \rightarrow V_n$ in P , alla sua immagine in $T_P(V_n)$ (in quanto, essendo $i: W_m \rightarrow V_n$ regolare d_P^i risulta essere un monomorfismo). Si può quindi identificare $T_P(W_m)$ con tale immagine alla quale viene dato il nome di spazio tangente di immersione in P a W_m .

Da quanto detto nel penultimo capoverso del paragrafo precedente segue subito il:

Teorema 17.1. -

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÉ LA VARIETA' W_m SIA IMMERSA NELLA VARIETA' V_n È CHE IL SOSTEGNO DI W_m SIA UN SOTTOSPAZIO DEL SOSTEGNO DI V_n , CHE SIA $n > m$ E CHE W_m SI POSSA RAPPRESENTARE LOCALMENTE MEDIANTE UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIABILI:

$$(1) \quad y^h = y^h(x^i) \quad (h = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m)$$

LA CUI MATRICE JACOBIANA ABBA SEMPRE RANGO MASSIMO E TALE CHE AD n -PLE DISTINTE DEI VALORI DELLE (x^i) CORRISPONDANO m -PLE DISTINTE DI VALORE DELLE (y^h) .

Una sottovarietà aperta A di V_n (cfr. par. 7, Cap. VI) risulta essere una varietà di dimensione n immersa in V_n secondo la precedente definizione. Infatti la sottovarietà aperta A ha come sostegno un sottospazio topologico sostegno di V_n ; inoltre l'applicazione identica $i: A \rightarrow V_n$ si esprime localmente mediante le equazioni $y^i = x^i$ ($i = 1, \dots, n$) che sono manifestamente differenziabili e regolari.

CAP. VII - GRUPPI DI LIE -

1. - NOZIONE DI GRUPPO DI LIE. -

Sia G_n una varietà differenziabile di dimensione n dotata di una struttura di gruppo in modo che risulti differenziabile l'applicazione:

$$(1) \quad f: (x, y) \in G_m \times G_m \rightarrow xy^{-1} \in G_m$$

della varietà prodotto $G_n \times G_n$ (cfr. Cap. VI, par. 8) nella varietà G_n .

Diremo allora che G_n , dotata di siffatta struttura di gruppo, è un gruppo di Lie (differenziabile).

Dalla differenziabilità dell'applicazione (1) segue subito che sono differenziabili le due applicazioni seguenti (essendo $G_n \times G_n$, come sopra, dotato della struttura differenziabile prodotto, cfr. Cap. VI, par. 8):

$$(2) \quad g: (x, y) \in G_m \times G_m \rightarrow xy \in G_m$$

$$(3) \quad h: x \in G_m \rightarrow x^{-1} \in G_m$$

Viceversa dalla differenziabilità delle applicazioni g ed h segue facilmente la differenziabilità dell'applicazione f . Se ne deduce che un gruppo di Lie si può definire anche nel modo seguente:

Un gruppo di Lie di dimensione n è una varietà differenziabile G_n dotata di una struttura di gruppo tale che le applicazioni g ed h risultino differenziabili.

La condizione che l'applicazione f risulti differenziabile equivale a dire che se (x_a^h) ed (y_b^k) sono le coordinate di x ed y nelle carte (U_a, c_a) ed (U_b, c_b) rispettivamente, il punto $z = xy^{-1}$ ha coordinate (z_c^j) nella carta (U_c, c_c) che risultano funzioni differenziabili delle (x_a^h) ed (y_b^k) .

Analogamente per la differenziabilità delle applicazioni g ed h .

Osserviamo che poichè in un gruppo di Lie l'applicazione f è differenziabile essa è certamente continua e dunque un gruppo di Lie risulta essere un gruppo topologico (cfr. Cap. V, par. 1) relativamente allo spazio topologico sostegno della varietà differenziabile G_n . Di conseguenza molte nozioni definite per i gruppi topologici si estendono al caso dei gruppi di Lie. Per esempio un gruppo di Lie G_n si dice compatto o connesso se tale è la struttura topologica del sostegno di G_n . Si dice che G_n è abeliano, semplice ecc. se tale è la struttura gruppale di G_n .

Si osservi che, per definizione di varietà differenziabile, un gruppo di Lie è a base numerabile cioè per esso vale il II assioma di numerabilità. Inoltre esso è localmente compatto e localmente connesso.

Tutto quanto sopra esposto nel caso differenziabile si trasporta immediatamente al caso analitico.

2. - PRIMI ESEMPI DI GRUPPI DI LIE. -

Esempio 1. -

Si consideri l'asse reale \mathbb{R} dotato della struttura differenziabile naturale (cioè di quella individuata dall'atlante costituito dalla carta identica). In \mathbb{R} si consideri poi la struttura di gruppo data dall'operazione di somma ordinaria. La varietà differenziabile rispetto alla struttura di gruppo suddetta costituisce un gruppo di Lie di dimensione 1 in quanto l'applicazione:

$$f: (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (a - b) \in \mathbb{R}$$

risulta differenziabile perchè $f(a, b) = a - b$ è funzione manifestamente differenziabile delle coordinate a, b di a, b .

Generalizzando, consideriamo \mathbb{R}^n dotato della struttura differenziabile naturale (individuata dall'atlante costituito dalla carta identica). In \mathbb{R}^n si consideri la struttura di gruppo data dall'operazione di somma seguente:

$$(x^i) + (y^i) = (x^i + y^i)$$

Rispetto a tale struttura gruppare la varietà differenziabile \mathbb{R}^n costituisce un gruppo di Lie di dimensione n in quanto l'applicazione:

$$f: ((x^i), (y^i)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow (x^i - y^i) \in \mathbb{R}^n$$

è manifestamente differenziabile.

Esempio 2. -

Le matrici quadrate d'ordine n sui reali si possono identificare con i punti dello spazio \mathbb{R}^{n^2} , qualora si associ la matrice $A = \|a_{ij}\|$ al punto di coordinate $(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$. Le matrici degeneri costituiscono un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n^2} che indicheremo con Δ . Il sottospazio $\mathbb{R}^{n^2} - \Delta$ dello spazio topologico si può dotare della struttura differenziabile naturale. La varietà differenziabile $\mathbb{R}^{n^2} - \Delta$ così ottenuta si identifica con $GL(n, \mathbb{R})$. In $GL(n, \mathbb{R})$ l'operazione di prodotto righe per colonne determina una struttura di gruppo.

Si ha così la varietà differenziabile $GL(n, \mathbb{R})$ dotata di una struttura di gruppo. Inoltre l'applicazione:

$$f: (A, B) \in GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow AB^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$$

risulta evidentemente differenziabile in quanto gli elementi della matrice AB^{-1} (cioè le coordinate del punto AB^{-1} di $\mathbb{R}^{n^2} - \Delta$) si esprimono differenziabilmente in funzione degli elementi della matrice A e della matrice B (cioè delle coordinate della matrice A e della matrice B). Dunque $GL(n, \mathbb{R})$ con le strutture differenziabile e gruppare suddette costituisce un gruppo di Lie di dimensione n^2 . Nel seguito $GL(n, \mathbb{R})$ denoterà sempre il gruppo di Lie sopra menzionato.

Si osservi che $GL(n, \mathbb{R})$ non è connesso, ma è costituito da due componenti connesse di cui una formata dalle matrici quadrate a determinante positivo e l'altra da quelle a determinante negativo (vedi esempio 3, par. 2, Cap. V).

Esempio 3. -

Le matrici quadrate d'ordine n sui complessi si possono identificare con i punti dello spazio \mathbb{R}^{2n^2} , qualora si identifichi la matrice $A = \|a'_{hk} + ia''_{hk}\|$ con il punto di coordinate $(a'_{11}, a''_{11}, a'_{12}, a''_{12}, \dots, a'_{nn}, a''_{nn})$. Denotato con Δ il sottoinsieme di \mathbb{R}^{2n^2} costituito dalle matrici degeneri, il sottospazio $\mathbb{R}^{2n^2} - \Delta$ dello spazio topologico \mathbb{R}^{2n^2} si può dotare della struttura differenziabile naturale. La varietà differenziabile $\mathbb{R}^{2n^2} - \Delta$ ottenuta in tal modo si identifica con $GL(n, \mathbb{C})$. In $GL(n, \mathbb{C})$ l'operazione prodotto righe per colonne determina una struttura di gruppo.

La varietà differenziabile $GL(n, \mathbb{C})$ rispetto a tale struttura di gruppo risulta essere un gruppo di Lie di dimensione $2n^2$ in quanto l'applicazione

$$f: (A, B) \in GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow AB^{-1} \in GL(n, \mathbb{C})$$

risulta evidentemente differenziabile perchè gli elementi della matrice AB^{-1} (cioè le coordinate del punto AB^{-1}) si esprimono differenziabilmente in funzione degli elementi della matrice A e della matrice B (cioè delle coordinate della matrice A e della matrice B). Nel seguito $GL(n, \mathbb{C})$ denoterà sempre il gruppo di Lie anzidetto.

Si osservi che $GL(n, \mathbb{C})$ è connesso (vedi esempio 2, par. 2, Cap. V).

3. - SOTTOGRUPPI DI LIE DI UN GRUPPO DI LIE. -

Sia G_n un gruppo di Lie. Chiameremo sottogruppo di Lie G_n un gruppo di Lie H_m ($m \leq n$) che soddisfa alle seguenti condizioni:

- 1) La varietà differenziabile di H_m risulta una varietà immersa (vedi par. 17, Cap. VI) della varietà differenziabile di G_n ;
- 2) H_m rispetto alla sua struttura grupale risulta un sottogruppo di G_n . Proviamo il:

Teorema 3.1. -

SIA H UN APERTO (NON VUOTO) DI UN GRUPPO DI LIE G_n CHE RISULTI ESSERE UN SOTTOGRUPPO DELLA STRUTTURA GRUPPALE DI G_n . DOTANDO H DELLA STRUTTURA DIFFERENZIABILE DI SOTTOVARIETA' APERTE (cfr. par. 7, Cap. V) E DELLA STRUTTURA DI GRUPPO INDOTTA DA QUELLA DI G_n , SI OTTIENE UN SOTTOGRUPPO DI LIE DI DIMENSIONI DI G_n .

Dimostrazione:

L'applicazione

$$f_H : (x, y) \in H \times H \rightarrow xy^{-1} \in H$$

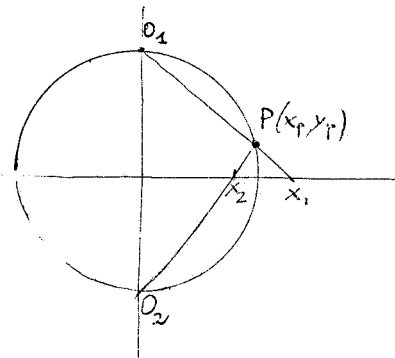
restrizione della (1) del par. 1 alla varietà differenziabile $H = H_n$ (sottovarietà aperta di G_n) è evidentemente differenziabile. Dunque H_n è un gruppo di Lie. Poiché H_n è una sottovarietà aperta di G_n essa risulta immersa in G_n (cfr. par. 17, Cap. VI). Inoltre H_n è per ipotesi un sottogruppo della struttura grupale di G_n , onde l'asserto.

Come esempio si consideri l'insieme $GL^+(n, \mathbb{R})$ delle matrici d'ordine n sui reali con determinante positivo. Esso è un aperto del gruppo di Lie $GL(n, \mathbb{R})$ (infatti l'applicazione $\det: A \in GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \det A \in \mathbb{R}$ è continua e la controimmagine dell'asse reale positivo \mathbb{R}^+ è $GL^+(n, \mathbb{R})$; essendo \mathbb{R}^+ un aperto di \mathbb{R} risulta $GL^+(n, \mathbb{R})$ un aperto di $GL(n, \mathbb{R})$). Inoltre esso è un sottogruppo rispetto alla struttura grupale di $GL(n, \mathbb{R})$. Per la proposizione precedente $GL^+(n, \mathbb{R})$ dotato della struttura differenziabile indotta e della struttura grupale indotta da quella di $GL(n, \mathbb{R})$ risulta essere un sottogruppo di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$, manifestamente normale. Nel seguito con $GL^+(n, \mathbb{R})$ intenderemo sempre il suddetto gruppo di Lie.

Osserviamo che la proposizione I permette di costruire dei sottogruppi di Lie di un gruppo G_n i quali però sono solamente particolari sottogruppi di Lie di G_n (se non altro perchè hanno la stessa dimensione di G_n). Possono cioè esistere sottogruppi di Lie di un gruppo di Lie di dimensione inferiore ad n (i cui sostegni non sono aperti di G_n) e che quindi non rientrano nel caso della proposizione I.

Per questo consideriamo l'esempio seguente: Si consideri il piano reale $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Esso risulta una varietà differenziabile di dimensione 2 con la struttura differenziabile naturale. Inoltre esso si può identificare con $\mathcal{C} - \{0\}$ (qualora si associ al punto $z = x + iy$ di $\mathcal{C} - 0$ il punto P di coordinate (x, y) di $\mathbb{R}^2 - \{0\}$). Poiché $\mathcal{C} - \{0\}$ rispetto al prodotto ordinario risulta un gruppo, si ha che $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ risulta dotato di una struttura di gruppo (mediante la suddetta identificazione) relativamente alla quale risulta un gruppo di Lie, che coincide con $GL(1, \mathcal{C})$ (cfr. esempio 3 del par. 2). In $GL(1, \mathcal{C})$ si consideri il sottoinsieme \mathcal{E} costituito dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, cioè dai numeri complessi di norma 1. \mathcal{E} è un sottogruppo di $GL(1, \mathcal{C})$ (in quanto il prodotto di due numeri complessi di norma 1 è l'inverso di un numero complesso di norma 1 è ancora un numero complesso di norma 1). D'altra parte \mathcal{E} è una varietà differenziabile di dimensione 1 (cfr. esempio 1 del par. 4, Cap. VI). Anzi, essa è una varietà immersa nella varietà $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (cfr. par. 17 del Capitolo precedente) le equazioni che esprimono l'immersione soddisfano alle condizioni della proposizione I del par. 17, Cap. VI, essendo date da (vedi fig. 1):

$$\begin{cases} x_P = \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} \\ y_P = \frac{x_1^2 - 1}{x_1^2 + 1} \end{cases} \quad \begin{cases} x_P = \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} \\ y_P = \frac{1 - x_2^2}{x_2^2 + 1} \end{cases}$$



Concludendo \mathcal{C} risulta un sottogruppo differenziabile di $GL(1, \mathbb{C})$. In questo caso \mathcal{C} ha dimensioni 1 e $GL(1, \mathbb{C})$ ha dimensione 2. Questo esempio si generalizza qualora si consideri il gruppo $GL(n, \mathbb{C})$ (cfr. esempio 3 del par. 2) e il sottogruppo v_n delle matrici unitarie non degeneri complesse (cfr. Cap. II del par. 10).

Diamo ora alcuni esempi notevoli di sottogruppi di Lie del gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ e del gruppo $GL(n, \mathbb{C})$.

Esempio 1.

Si consideri il gruppo di Lie $GL(n, \mathbb{R})$. In esso le matrici ortogonali costituiscono un sottogruppo, $O(n)$, della struttura gruppale di $GL(n, \mathbb{R})$ (vedi par. 10 del Cap. II).

Inoltre $O(n)$ risulta un sottogruppo topologico di $GL(n, \mathbb{R})$ con la topologia relativa che è separata e a base numerabile essendo un sottospazio di \mathbb{R}^{n^2} .

Rispetto a tale struttura topologica e alla suddetta struttura di gruppo risulta un gruppo topologico (cfr. esempio del par. 5, Cap. V).

Se $A = \| a_{ij} \| \in O(n)$ per definizione di matrice ortogonale: $AA^T = U$ si ha:

$$(1) \quad \sum_{s=1}^n a_{is} a_{js} = \delta_{ij}$$

Delle n^2 equazioni (1) sono indipendenti solamente quelle relative agli indici i, j ($= 1, \dots, n$) per cui $i \leq j$ (in quanto scambiando l'indice i con l'indice j la (1) si muta in sè). Tali relazioni indipendenti sono dunque in numero di $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n(n+1)/2$. Si può facilmente provare che, essendo $\det A \neq 0$, il sistema

$$(2) \quad F_{ij} \equiv \sum_{s=1}^n a_{is} a_{js} - \delta_{ij} = 0$$

di $n(n+1)/2$ equazioni nelle n^2 incognite a_{ij} è tale che la sua matrice jacobiana ha rango massimo.

Dal teorema di Dini segue allora che per ogni $A \in O(n)$ si può trovare un opportuno intorno aperto di A nella topologia di $O(n)$ nel quale il sistema (2) può essere esplicitato rispetto a $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ variabili. Da ciò segue che per ogni $A \in O(n)$ si può trovare un intorno aperto U_A di A , nella topologia di $O(n)$ ed un omeomorfismo C_A di U_A in un aperto $C_A(U_A)$ di $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

L'insieme $\{U_A, C_A\}$ costituisce un atlante di $O(n)$ su $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ che risulta differenziabile in virtù del fatto che le frazioni F_{ij} che compaiono nel sistema (2) sono differenziabili. Tale atlante determina una struttura differenziabile dello spazio topologico $O(n)$. Lo spazio topologico O_n , con tale struttura differenziabile, è allora una varietà differenziabile di dimensione $n(n-1)/2$. Essa è immersa nella varietà differenziabile $GL(n, \mathbb{R})$ (cfr. proposizione I del par. 17, Cap. VII) le equazioni di immersione essendo date dal teorema di Dini.

La varietà differenziabile $O(n)$ immersa in $GL(n, \mathbb{R})$, dotata della struttura di gruppo, indotta da $GL(n, \mathbb{R})$ risulta allora un sottogruppo di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$. Nel seguito con $O(n)$ si intenderà sempre tale sottogruppo.

Osserviamo che $O(n)$ è un gruppo di Lie compatto in quanto il sostegno di $O(n)$ è compatto (cfr. par. del Cap.).

Il sottoinsieme $GL^+(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$, costituito dalle matrici con $\det > 0$, risulta un aperto dello spazio topologico di $GL(n, \mathbb{R})$. Esso dunque interseca $O(n)$ in un aperto di $O(n)$ nella topologia relativa. Tale aperto risulta il sottogruppo di $O(n)$ della natura ortogonale con $\det > 0$, cioè il gruppo speciale ortogonale $SO(n)$. In forza della proposizione I^a, $SO(n)$ è un sottogruppo di Lie di $O(n)$, di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

4. - PROPRIETA' DI CONNESSIONE DI UN GRUPPO DI LIE. -

Sia G_n un gruppo di Lie ed e sia la sua unità. Dalla proposizione I del par. 8, Cap. VI si ha, considerando G_n rispetto alla sua struttura di gruppo topologico, che la componente connessa $H = [e]$ dell'unità risulta un sottogruppo normale (o invariante) di G_n ed inoltre che le altre componenti connesse di G_n risultano le classi laterali indotte da H in G_n .

D'altra parte ogni componente connessa di G_n risulta un aperto se si pensa G_n come varietà dif

ferenziabile (in quanto ogni componente connessa di una varietà differenziabile risulta un aperto; cfr. ultimo capoverso del par. 7, Cap. VII). Dunque H , essendo un aperto di G_n , sottogruppo della struttura grupale di G_n , risulta un sottogruppo di Lie di G_n (cfr. proposizione I del par. 3) di dimensione n e sarà perciò denotato con H_n . Infine il gruppo topologico quoziente G_n/H_n (se si pensa solamente alla struttura di gruppo topologico di G_n e H_n) risulta discreto in quanto ogni suo punto essendo una componente connessa di G_n è un aperto di G_n (cfr. par. del Cap.).

Concludendo si ha il:

Teorema 4.1. -

SIA G_n UN GRUPPO DI LIE ED H LA COMPONENTE CONNESSA DELL'UNITA' DI G_n . LE COMPONENTI CONNESSE DI G_n RISULTANO APERTE. H RISULTA UN SOTTOGRUPPO DI LIE H_n DI DIMENSIONE n DI G_n . IL GRUPPO QUOZIENTE G_n/H_n RISULTA DISCRETO.

CAP. VIII - ALGEBRA DI LIE ASSOCIATA A UN GRUPPO DI LIE. -

1. - INTRODUZIONE -

Sia G_K un gruppo di Lie di dimensione K , cioè una varietà differenziabile dotata di struttura di gruppo in modo che l'operazione di prodotto e di passaggio all'elemento inverso siano differenziabili.

Ricordiamo che (cfr. Cap. VI, par. 14) data una varietà differenziabile V_K ad essa si può associare un'algebra di Lie i cui elementi sono i campi di vettori differenziabili su V_K e il prodotto è dato dal "crochet", la somma e il prodotto per uno scalare essendo definiti nel modo solito.

A G_K pensata come varietà differenziabile, rimane associata, dunque, nel modo anzidetto, una algebra di Lie \mathcal{L} . Tale algebra, in generale, non avrà dimensione finita. In questo capitolo faremo vedere che \mathcal{L} contiene una sottalgebra, di dimensione finita K , canonicamente associata al gruppo di Lie, che prende il nome di algebra di Lie $\mathcal{L}_K(G_K)$ associata al gruppo G_K . Essa ha un'importanza fondamentale nello studio dei gruppi di Lie, anzi è atta a caratterizzare i gruppi di Lie nel senso che se due gruppi hanno algebra di Lie associate isomorfe esiste tra i due gruppi un omomorfismo grupपालe che è anche un diffeomorfismo locale (cioè che ristretto a due intorni, per esempio, degli elementi neutri dei due gruppi risulta un diffeomorfismo). Ne segue (cfr. Cap. V, par. 9) che due gruppi di Lie che abbiano algebre di Lie associate isomorfe, risultano localmente isomorfi.

2. - DEFINIZIONE DI ALGEBRA DI LIE ASSOCIATA A UN GRUPPO DI LIE. -

Siano G_K un gruppo di Lie di dimensione K , \underline{u} la sua unità, $T_K(\underline{u})$ lo spazio dei vettori tangenti in \underline{u} a G_K pensata come varietà differenziabile (cfr. Cap. VI par. 11, 13).

Per ogni $\underline{a} \in G_K$ si consideri la traslazione sinistra (o destra) (cfr. Capt. V par. 3)

$$(1) \quad t_a^s : y = ax \quad \left(T_a^d : y = xa \right)$$

Essa è un diffeomorfismo di G_K su se stesso (cioè un omeomorfismo differenziabile della varietà su se stessa), che muta l'elemento \underline{v} nell'elemento \underline{a} e quindi induce un isomorfismo tra lo spazio $T_K(\underline{v})$ e lo spazio $T_K(\underline{a})$ dei vettori tangenti in \underline{a} alla varietà G_K : tale isomorfismo è dato dal differenziale dt_a^s dell'applicazione $y = ax$.

Fissato un vettore \underline{v}_v , tangente in \underline{v} a G_K , si consideri il vettore (cfr. Capt. VI, par. 16)

$$(2) \quad \underline{v}_a = dt_a^s(\underline{v}_v)$$

Al variare di $\underline{a} \in G_K$ il vettore \underline{v}_a , così costruito a partire dal fissato vettore \underline{v}_v , descrive un campo di vettori $\mathcal{V}(\underline{v}_v)$ evidentemente differenziabili sulla varietà, cioè un elemento di \mathcal{V} .

Rimane così determinata un'applicazione

$$(3) \quad f : \underline{v}_v \in T_K(\underline{v}) \longrightarrow \mathcal{V}(\underline{v}_v) \in \mathcal{V}$$

Facilmente si prova che f conserva l'operazione di somma e di prodotto per uno scalare, cioè che f è un omomorfismo dello spazio vettoriale $T_K(\underline{v})$ nello spazio vettoriale \mathcal{V} . Tale omomorfismo è chiaramente iniettivo, (nel senso che se $\underline{v}(\underline{v}) \neq \underline{v}'(\underline{v})$, i campi vettoriali $\mathcal{V}(\underline{v}_v)$ e $\mathcal{V}(\underline{v}'_v)$ sono diversi).

Posto

$$(4) \quad \mathcal{L}_K = f \left(T_K(\underline{v}) \right)$$

si ha che \mathcal{L}_K è un sottospazio vettoriale di \mathcal{V} , in quanto è l'immagine, mediante l'omomorfismo f , di $T_K(\mathcal{V})$. Inoltre, l'omomorfismo

$$(5) \quad F: \underline{v}_0 \in T_K(\mathcal{V}) \longrightarrow V(\underline{v}_0) \in \mathcal{L}_K$$

è un isomorfismo. Ne segue che \mathcal{L}_K è uno spazio vettoriale di dimensione K .

Siano ora $V(\underline{v}_0)$ e $V(\underline{v}'_0)$ due elementi di \mathcal{L}_K , cioè i due campi di vettori generati da \underline{v}_0 e \underline{v}'_0 , e sia W il loro crochet (cfr. Cap. VI, par. 14). Si prova facilmente che W è un elemento di \mathcal{L}_K , cioè che esiste un vettore $\underline{w}_0 \in T_K$ tale che

$$F \underline{w}_0 = W$$

Ne segue che \mathcal{L}_K è chiuso rispetto all'operazione di crochet e quindi risulta una sottoalgebra dell'algebra di Lie \mathcal{V} .

L'algebra di Lie \mathcal{L}_K associata al gruppo di Lie G_K risulta quindi costituita dai campi di vettori tangenti a G_K , ciascun campo ottenuto da un vettore \underline{v}_0 , tangente nell'unità a G_K , attraverso il differenziale del diffeomorfismo $Y = aX$ (o $Y = Xa$) della varietà su stessa, al variare di \underline{v}_0 . Essa costituisce, come s'è detto, uno spazio vettoriale di dimensione K sui reali o sui complessi dotato di prodotto interno dato dal crochet

Mediante l'inverso dell'isomorfismo F , l'operazione di crochet definita in \mathcal{L}_K può essere definita in $T_K(\mathcal{V})$ nel senso che, dati due vettori \underline{v}_0 e $\underline{v}'_0 \in T_K(\mathcal{V})$ si considerano i due campi di vettori $F(\underline{v}_0)$ e $F(\underline{v}'_0)$, se ne fa il crochet, ottenendo un elemento di \mathcal{L}_K e si calcola il valore del campo così ottenuto in \underline{v} . Tale vettore \underline{w} , tangente in \underline{v} , si definisce prodotto interno di \underline{v}_0 e \underline{v}'_0 e si scrive $[\underline{v}_0, \underline{v}'_0]$.

$T_K(\mathcal{V})$ stesso, cioè lo spazio dei vettori tangenti nell'unità a G_K risulta allora, con tale prodotto interno, un'algebra di Lie K -dimensionale, isomorfa a \mathcal{L}_K , che può identificarsi con l'algebra di Lie associata al gruppo di Lie.

Ricordiamo (cfr. Capit. III, par. 3) che un'algebra di Lie K -dimensionale è uno spazio vettoriale sui reali o sui complessi dotato di prodotto interno $[X, Y]$ che soddisfa le condizioni:

a) condizione di antisimmetria

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

o equivalentemente

$$[X, X] = 0$$

b) la condizione di Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y]$$

c) le usuali condizioni di linearità

$$[aX, Y] = a[X, Y]$$

$$[X+Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$$

Esempio 1. - Sia \mathbb{R} il gruppo di Lie dei reali rispetto alla somma. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, la traslazione sinistra

$$F_a \equiv T_a^s: y = ax$$

è un diffeomorfismo di \mathbb{R} in sè.

Il differenziale dell'applicazione dF_a muta il vettore tangente alla varietà $X_0 \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)_0$, nell'unità \mathcal{V} (l'unità è qui l'elemento $x = 0$) nel vettore tangente alla varietà, $X_a \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)_a$, nel punto $x = a$ (cfr. le (8) di Cap. VI, par. 16).

Si noti che $X_a x = X_0 x = 1$, per ogni a . Ne segue che $X \equiv \frac{d}{dx}$ è un vettore di base dell'al

gebra di Lie di \mathbb{R} , algebra che consiste di tutti i vettori del tipo λX , con λ un numero reale qualsiasi.

Esempio 2. - Algebra di Lie di $GL(n, \mathbb{C})$.

Abbiamo già visto che le matrici quadrate di ordine n sia complessi, non degeneri, costituiscono un gruppo topologico $GL(n, \mathbb{C})$ di dimensione $2n^2$, ove si identifichi la matrice

$$\| \kappa_{ij} \| = \| \kappa'_{ij} + i \kappa''_{ij} \|$$

con il punto di coordinate $(\kappa'_{11}, \kappa'_{12}, \dots, \kappa''_{nn})$ dello spazio \mathbb{R}^{2n^2} .

Convorrà considerare gli elementi della matrice $\| \kappa_{ij} \|$ come delle funzioni analitiche di certi parametri $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ coordinate dell'elemento A di GL , in una data carta dell'atlante della varietà. (x) L'elemento neutro \underline{U} del gruppo abbia per coordinate $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$.

Sia X un campo di vettori tangente alla varietà, invariante a sinistra (o destra). Indichiamo con X_v il vettore tangente nell'elemento neutro \underline{U} di $GL(n, \mathbb{C})$ e poniamo

$$\| \tilde{\kappa}_{ij} \| = \| X_v \kappa_{ij} \| = \left\| \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial \alpha_\lambda} \right\|_{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0}$$

Coincidendo X con l'operazione di deviazione, le matrici $\| \tilde{\kappa}_{ij} \|$ sono le matrici ottenute derivando le matrici originarie $\| \kappa_{ij} \|$ rispetto ai parametri $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda, \alpha_m)$ e calcolandole per $\alpha = 0$.

Si ottiene così una corrispondenza biunivoca dell'algebra di Lie $gl(n, \mathbb{C})$ del gruppo $GL(n, \mathbb{C})$ con lo spazio vettoriale T (di dimensione $2n^2$ sui reali) che consiste di tutte le matrici quadrate $\| \kappa_{ij} \|$ di ordine n a coefficienti reali o complessi, dotato di prodotto interno.

Tale corrispondenza è un isomorfismo e la matrice che corrisponde a $[X, Y]$ è la matrice $[\tilde{\kappa}, \tilde{y}] = \tilde{y} \tilde{\kappa} - \tilde{\kappa} \tilde{y}$.

Esempio 3. - Sia F una funzione analitica definita su un dato gruppo di Lie, G_K , pensato come una varietà differenziabile e analitica V_K (cfr. Cap. VI, par. 9); siano $\{V_\alpha, C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ l'atlante universale di G_K e $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ le coordinate, in una data carta, di un "punto" P della varietà. L'elemento neutro \underline{U} del gruppo abbia coordinate $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Esaminiamo la f in un intorno dell'elemento neutro. Sarà

$$F(\alpha) - F(0) = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} \right)_{\alpha=0} \alpha_j = \sum_{j=1}^k (X_j F(\alpha))_{\alpha=0} \alpha_j$$

avendo posto

$$X_j = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}$$

Gli operatori X_j (vettori tangenti alla varietà nell'origine) sono operatori differenziali linearmente indipendenti nello spazio dei parametri $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Questi operatori agiscono come generatori di trasformazioni infinitesime del gruppo e obbediscono alle relazioni di commutazione

$$[X_i, X_j] = \sum_l c_{ij}^l X_l$$

(x) - In realtà la condizione che $GL(n, \mathbb{C})$ sia un gruppo di Lie richiede che siano analitiche le applicazioni (2) e (3) del Capitolo VIII, par. 1 e non necessariamente che gli elementi κ_{ij} siano funzioni analitiche dei parametri $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

dove le C_{ij}^l sono certi coefficienti numerici detti costanti di struttura.

Per il gruppo di Lie G_K , infatti, pensato come varietà differenziabile, si può scrivere

$$F(x'') F(x') = F(x(x', x''))$$

Derivando rispetto a x''_b

$$\frac{\partial F(x'')}{\partial x''_b} F(x') = \sum_{i=1}^K \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x''_b}$$

e poi rispetto a x'_a

$$\frac{\partial F(x'')}{\partial x''_b} \frac{\partial F(x')}{\partial x'_a} = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^K \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x''_b} + \sum_{i=1}^K \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_a \partial x''_b}$$

Ripetendo la doppia derivazione, ma rispetto ad x''_b e x'_a si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x''_a} \frac{\partial F}{\partial x''_b} = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^K \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x''_a} + \sum_{i=1}^K \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_a \partial x''_a}$$

Dalle due relazioni precedenti, calcolate per $x' \rightarrow 0$, $x'' \rightarrow 0$ si ottiene,

$$X_b X_a - X_a X_b = \sum_l C_{ab}^l X_l$$

posto

$$C_{ab}^l = \lim_{x', x'' \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x''_a \partial x'_b} - \frac{\partial^2}{\partial x''_b \partial x'_a} \right\} x(x', x'')$$

Si noti che per un gruppo abeliano le C_{ab}^l risulterebbero nulle.

3. - COSTANTI DI STRUTTURA. -

Indichiamo con

$$\{X_1, X_2, \dots, X_K\}$$

una base dello spazio vettoriale \mathfrak{h}_K .

Come abbiamo detto, in \mathfrak{h}_K si può definire un prodotto interno, "crochet", $[X_i, X_j]$, per cui \mathfrak{h}_K risulta un'algebra (algebra di Lie) di dimensione K (Cap. III, Par. 3 e Cap. VI, par. 14).

Per dare a \mathfrak{h}_K una struttura di algebra sarà sufficiente dare le espressioni dei prodotti interni ponendo

$$[X_i, X_j] = \sum_l C_{ij}^l X_l$$

Le costanti C_{ij}^l prendono il nome di costanti di struttura dell'algebra di Lie rispetto alla base $\{X_1, \dots, X_K\}$

Dalla condizione di antisimmetria

$$[X_i, X_j] + [X_j, X_i] = 0$$

segue

$$C_{ij}^l + C_{ji}^l = 0$$

Dall'identità di Jacobi

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] = 0$$

segue

$$\sum_h (c_{ij}^h c_{hk}^l + c_{jk}^h c_{hi}^l + c_{ki}^h c_{hj}^l) = 0$$

Se K è la dimensione del gruppo le costanti di struttura sono in numero di $K^2(K-1)/2$

La costruzione delle algebre di Lie, di data dimensione, ove siano date le K^3 costanti di strutture soddisfacenti le condizioni precedenti è così ridotta a un problema puramente algebrico.

La dimostrazione, invero molto difficile, che a ogni algebra di Lie corrisponde un gruppo di Lie nel senso detto al par. 1, non verrà data, qui, bensì nella II^a parte di queste lezioni, dove discuteremo la classificazione delle algebre di Lie, la teoria delle rappresentazioni dei gruppi e le rappresentazioni dei gruppi più interessanti la Fisica.

Come vedremo, infatti un gruppo di Lie G_K , può mettersi in corrispondenza omomorfica con il gruppo degli automorfismi $A(V)$ (cioè delle trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale su se stesso) di uno spazio vettoriale V eventualmente di dimensione infinita.

Se poi V ha dimensione finita n , $V = V_n$ e $B = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ è una sua fissata base rimane definito un isomorfismo tra $A(V_n)$ e il gruppo delle matrici $n \times n$ cioè il gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$. In questo caso, una rappresentazione ("darstellung") del gruppo G_K in V_n è un omomorfismo di G nel gruppo delle matrici $n \times n$.

Così pure una applicazione lineare $X \rightarrow A$ dell'algebra di Lie \mathfrak{L}_K di un gruppo di Lie nel gruppo degli automorfismi $A(S)$ di uno spazio vettoriale S in sé è detta una rappresentazione dell'algebra di Lie se

$$[X, X'] \longrightarrow [A, A'] = A'A - AA' \quad \text{con}$$

$$X, X' \in \mathfrak{L}_K \quad \text{e} \quad A, A' \in A(S)$$

Esercizi. -

1) Sia T_2 il gruppo (a due parametri) delle traslazioni in un piano definito dalle relazioni

$$T_a : \vec{X}' = \vec{X} + \vec{a}$$

dove \vec{X}, \vec{X}' ed \vec{a} sono vettori del piano. Gli elementi del gruppo obbediscono alla regola di moltiplicazione

$$T_{a+a'} = T_a + T_{a'}$$

e l'inverso di T_a è T_{-a} .

Introducendo coordinate omogenee $(y_1 y_2 y_3)$ con $X_1 = \frac{y_1}{y_3}$ e $X_2 = \frac{y_2}{y_3}$ è possibile scrivere

$$y_1' = y_1 + a_1 y_3$$

$$y_2' = y_2 + a_2 y_3$$

$$y_3' = y_3$$

e dare quindi al gruppo T_2 una forma matriciale al gruppo.

Si dimostri che il vettore base dell'algebra di Lie associata a T_2 è rappresentato dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- 2) Si consideri il gruppo di ordine 3, SU_2 delle matrici unitarie unimodulari U , tali che
 $VV^\dagger = 1$ e $\det V = 1$

Si dimostri che i vettori base dell'algebra di Lie associata sono le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e che gli elementi dell'algebra sono tutte le matrici hermitiane 2×2 a traccia nulla.

- 3) Si consideri il gruppo delle rotazioni tridimensionali, d'ordine 3.

Si dimostri che i generatori dell'algebra di Lie associata sono le matrici:

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Gli elementi dell'algebra sono le matrici 3×3 antisimmetriche a traccia nulla.

- 4) Si consideri il gruppo di Lorentz omogeneo (cfr. Capitolo II), cioè il gruppo delle trasformazioni da un sistema inerziale all'altro del tipo

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu$$

che conservano la quantità

$$x^2 = \sum g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

con $g_{00} = 1$ $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ $g_{0i} = g_{ij} = 0$ ($i \neq j$)

Trovare i generatori dell'algebra di Lie associata a questo gruppo di Lie, a 6 parametri.