

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-74/72(R)
21 Dicembre 1974

V. Montelatici: LA MISURA DELLA INDUZIONE MAGNETICA
A VALORI SUPERIORI A 10.000 GAUSS.

V. Montelatici: LA MISURA DELLA INDUZIONE MAGNETICA A VALORI SUPERIORI A
10.000 GAUSS. -

INTRODUZIONE -

Il problema di misurare il valore della induzione magnetica è sorto, nei Laboratori di fisica ed ingegneria, sin dai tempi in cui Faraday e Biot-Savart trovarono il legame tra la corrente e l'induzione magnetica. Da allora l'uso di misurare l'induzione magnetica è la pratica comune di ogni laboratorio; mentre dal punto di vista ingegneristico è talvolta sufficiente una misura della corrente e la conoscenza delle caratteristiche geometriche del magnete per avere la costante dello stesso (Gauss/Amper), al contrario nel laboratorio di fisica si richiedono alte precisioni sino a frazioni di Gauss.

Chiaramente ci si vuol riferire a quei laboratori in cui il valore assoluto della induzione magnetica è necessario di conoscere poichè, tramite suo, si determinano altre grandezze fisiche legate direttamente al valore dell'induzione magnetica. Così nella spettroscopia magnetica delle più basse frequenze, qualche 10^6 Hertz, sino alle più alte, diciamo 10^{15} Hertz, i campi magnetici usati coprono l'intervallo da qualche migliaio di Gauss fino a valori di 100 e più KiloGauss, "che si ottengono con magneti superconduttori" che la moderna tecnica mette a disposizione del laboratorio di Fisica.

La misura del valore della induzione magnetica deve quindi essere di alta precisione, per cui deve usarsi un fenomeno che lega il valore del campo ad una grandezza direttamente misurabile tramite una costante pur essa misurata con alta precisione. Questo fenomeno è l'effetto Zeeman che lega la differenza di energia tra livelli energetici separati dal campo magnetico via un fattore costante noto.

Così nella spettroscopia di spin si usa la risonanza nucleare del protone per avere il valore del campo $H = h\nu (g\beta)^{-1}$, ove h è la costante di Planck, ν la frequenza (misurabile a frazioni di Hertz), g il fattore di separazione, β il magnetone di Bohr (noti con alta precisione).

E' noto che una tale misura, richiede: una alta stabilità temporale nella corrente che alimenta il magnete, ed una alta uniformità spaziale almeno sul volume del campione (quando si parla di valori alti intendiamo $1 : 10^5$)

Ora è da tenere presente che il rapporto frequenza/ campo è per il protone uguale a 4257HzG^{-1} per cui, ad alti campi la strumentazione è un pochino più complicata, non solo, ma non sempre si ha una buona uniformità di campo, per cui si preferisce usare un effetto Zeeman ottico.

Infine si deve notare che il metodo ottico è usabile con vantaggio per valori del campo superiori a 10.000 G, poichè la costante di proporzionalità, lunghezza d'onda/campo $\approx 10^{-4}\text{\AA G}^{-1}$,

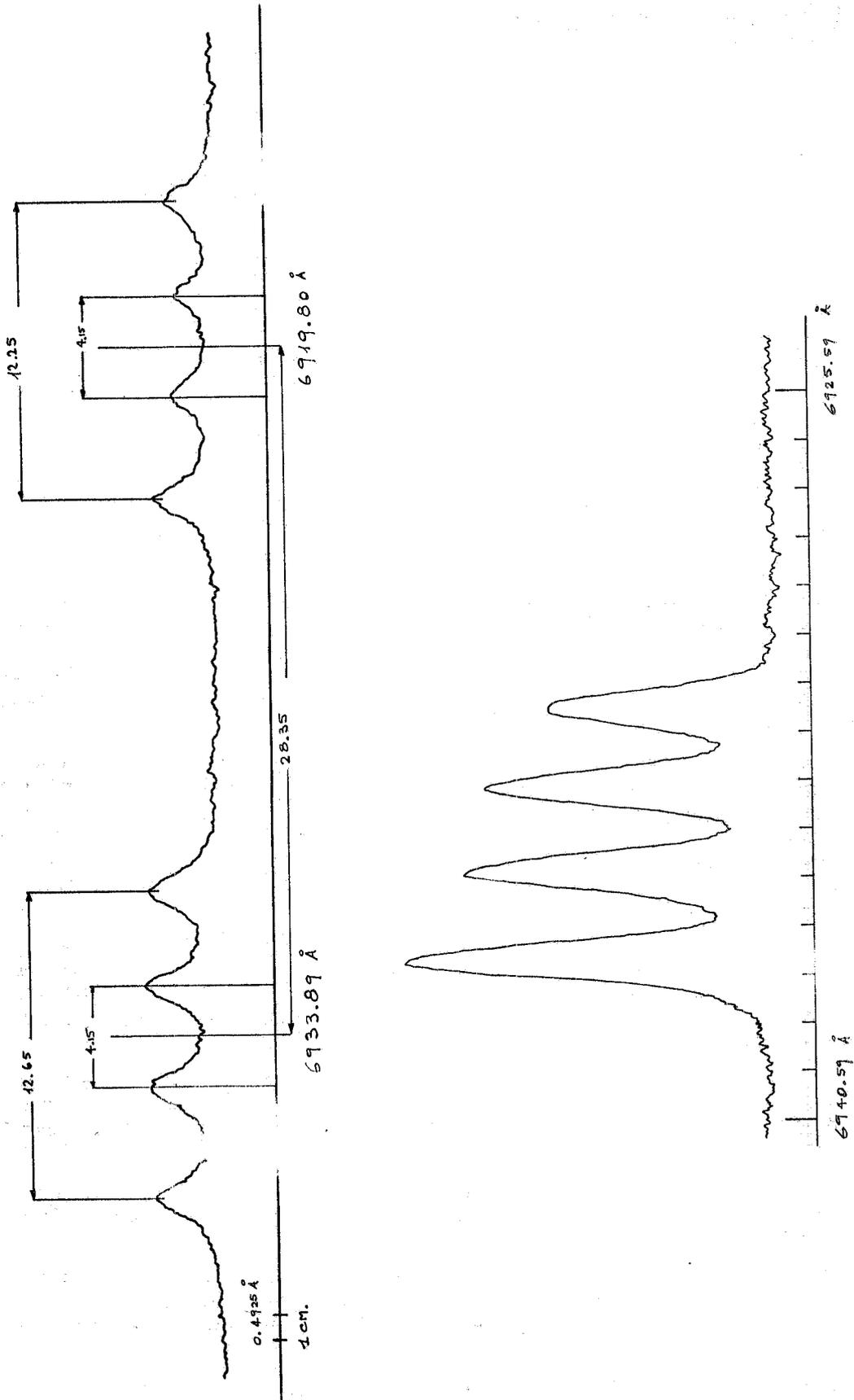


FIG. 1 - L'effetto Zeeman sulle righe R_1 e R_2 a ≈ 50.000 G la larghezza di riga è ≈ 0.75 Å; per la gentile collaborazione dei Dott. R. Bartiromo, E. Borsella, S. Mobilio (nota LNF-74/68). 1b) Effetto Zeeman sulla riga R_1 a ≈ 40.000 G e $\approx 2^\circ\text{K}$; per la gentile collaborazione del Dr. G. Baldacchini (L.N.F.-CNEN).

a valori inferiori del campo richiede misure di lunghezza d'onda molto piccole. La sostanza che si usa, per queste misure di risonanze ottiche, è il rubino con una impurità dello ione cromo, $\text{Al}_2\text{O}_3 + \% \text{Cr}^{3+}$.

Le righe spettroscopiche rosse del rubino emesse o assorbite sono state studiate in grande dettaglio con e senza il campo magnetico esterno da Sugano e collaboratori. Il loro lavoro è diviso in due parti l'una teorica, l'altra sperimentale, poichè nella misura della induzione magnetica interessano solo alcune grandezze tra l'ampia messe di dati presentati negli articoli originali, ci sembra opportuno presentare in una nota quelli strettamente utili.

Infine prenderemo in considerazione solo lo spettro delle righe alla temperatura dell'elio liquido, ciò può sembrare una limitazione del metodo, ma se tiene presente che esso è utile nelle misure di induzione magnetica a valori superiori i 10.000 G, e che in tal caso i magneti superconduttori impiegano elio liquido, la limitazione cade.

Inoltre, poichè sarà bene rivelare le righe liberate dal rumore e con ampiezza sufficiente, sarà necessario modulare in ampiezza il flusso emergente dal campione in modo da operare in rivelazione sincrona; perciò esporremo un metodo di modulazione di flusso. Comunque la rivelazione delle righe spettroscopiche è estremamente semplice, per dare un esempio si riportano in fig. (1) le righe R_1 e R_2 separate per effetto Zeeman a $\approx 4^\circ\text{K}$ e ≈ 50.000 G, senza usare accorgimenti particolari.

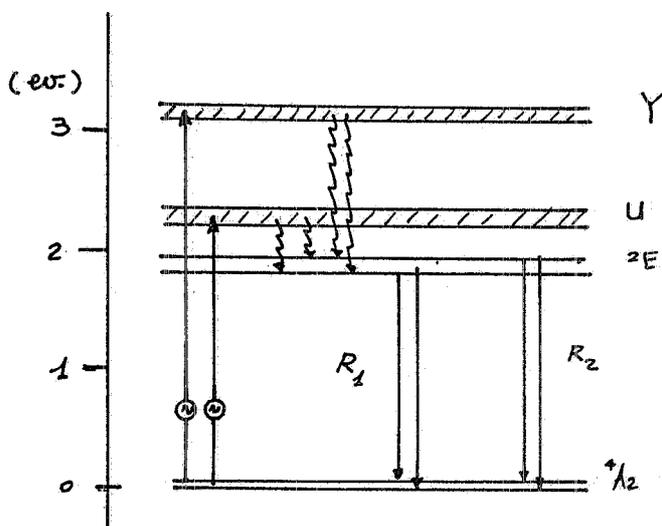
Il segnale era ricevuto direttamente dal fototubo su di un recorder con sensibilità pari a $2\text{mV}/\text{pollice}$ e con il monocromatore avente una larghezza di fenditura di $\approx 1/2 \text{ \AA}$, in questo modo la misura del campo ha un errore piuttosto elevato $\approx 10\%$; è chiaro che tale errore può essere grandemente ridotto usando particolari attenzioni.

In particolare la separazione può essere letta con uno strumento di alta precisione (per es. Fabry-Perot), e rivelando il segnale in maniera sincrona.

Un esempio di quanto può migliorare la misura è dato nella fig. (1b) lo spettro Zeeman della riga R_1 a $\approx 2^\circ\text{K}$ in un campo di ≈ 40.000 G. Lo spettro era rivelato sincronamente modulando l'ampiezza del flusso luminoso emesso. La taratura dello spettro era compiuta con le due righe del sodio a $\lambda_1 = 5881.89 \text{ \AA}$ e $\lambda_2 = 5852.49 \text{ \AA}$ la cui lunghezza a metà ampiezza è inferiore a 0.5 \AA e sono molto intense.

1. - LO SPETTRO DEL RUBINO IN ASSENZA DI CAMPO MAGNETICO -

Lo schema grossolano dei livelli energetici del sequiossido di alluminio, Al_2O_3 , con impurità dello ione cromo, Cr^{3+} , (concentrazione tipica $\approx 0.05\%$ in peso) è rappresentato in fig. 2.



Si nota che la posizione energetica dei livelli, rispetto al livello fondamentale, è tale da permettere l'inversione di popolazione tra il livello eccitato, $2E$, ed il livello fondamentale $4A_2$.

La inversione di popolazione è effettuata con il pompaggio alle bande Y ed U che per emissione spontanea popolano il doppietto $2E$ che ha un tempo di rilassamento $\approx 5 \cdot 10^{-3}$ sec., superiore al tempo di rilassamento delle transizioni non radiative di trasferimento dalle bande al livello eccitato. Perciò si deve pompare, per esempio la banda Y tenendo presente che la concentrazione tipica è $10^{19} \text{ Cr}^{3+} \text{ atomi/cm}^3$,

FIG. 2 - Schema livelli energetici dello ione cromo nel Al_2O_3 .

4.

una energia poi a $\approx 3 \cdot 10^{19} \times 1.6 \times 10^{-12} \text{ Joule/cm}^3 \approx 5 \text{ Joule/cm}^3$ in un tempo pari al tempo di rilassamento. Cossicchè la potenza minima per effettuare l'inversione di popolazione è 1000 Watt/cm^3 . Con potenze di pompaggio crescenti il processo di emissione stimolata è sempre più efficiente e la riga tende a diminuire in larghezza fino a valori di $\approx 10^{-3} + 10^{-4} \text{ \AA}$; mentre la potenza emessa aumenta.

Ne viene, da queste considerazioni, che otterremo uno spettro di fluorescenza piuttosto che uno spettro di emissione stimolata, e quindi la larghezza delle righe sarà maggiore di quelle ottenute in assorbimento; quest'ultima è 0.3 \AA .

E' chiaro che potendo effettuare un'azione stimolata, mediante una potenza di pompaggio sufficiente, la definizione delle righe spettroscopiche è grandemente aumentata a beneficio della precisione nella misura di separazione.

Da queste considerazioni qualitative si ha che conviene osservare lo spettro di assorbimento anzichè quello di fluorescenza in modo da avere la larghezza minima.

Le righe^(1, 2) sono denominate R_1 e R_2 , ciascuna doppia a seconda della direzione del vettore elettrico dell'onda incidente rispetto all'asse C_3 del cristallo, esse sono:

$$\begin{aligned} R_1(E \perp C_3) &= 6933.93 \text{ \AA}; & R_2(E \perp C_3) &= 6919.98 \text{ \AA} \\ R_1(E \parallel C_3) &= 6934.03 \text{ \AA}; & R_2(E \parallel C_3) &= 6919.83 \text{ \AA} \end{aligned}$$

con un errore sulla misura pari a 0.02 \AA , la distanza tra le righe è $(\Delta\lambda)^\perp = 13.95 \text{ \AA}$ e $(\Delta\lambda)^\parallel = 14.20 \text{ \AA}$. La ampiezza (A) delle righe è grosso modo espressa dalle seguenti relazioni:

$$A [R_2^\perp] = 2 A [R_2^\parallel]; \quad A [R_1^\perp] = 5/3 A [R_2^\perp]; \quad A [R_1^\parallel] = 1/3 A [R_2^\parallel].$$

Perciò la misura della separazione è comoda mediante la riga R_1 , la figura (3) mostra l'ampiezza relativa delle quattro righe.

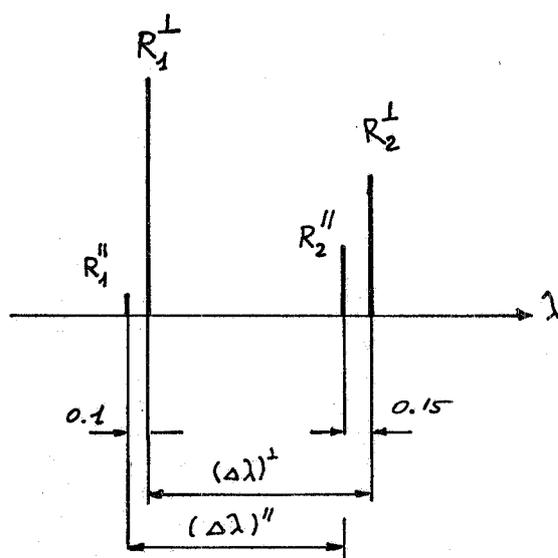


FIG. 3 - Ampiezze relative delle righe rosse del rubino.

2. - EFFETTO ZEEMAN SULLE RIGHE R_1 ed R_2 -

2.1. - Caso, asse cristallo perpendicolare al campo. -

La separazione del livello fondamentale e dello stato eccitato dipendono dalla direzione

del campo con quella dell'asse cristallino c , ed il risultato dello studio teorico da lo schema di livelli della fig. (4). E' questo il caso più favorevole, per la misura della induzione magnetica, in quanto le righe sono più intense e maggiormente separate, inoltre la separazione dipende da un solo parametro di separazione⁽³⁾, $g_0 = 1.9867 \pm 0.0006$.

I livelli eccitati (A_4, A_3) sono ciascuno molto poco sdoppiati, la loro separazione è minore di 0.06 praticamente non osservabile, perciò le righe Zeeman sono doppie sia per $E \perp C_3$ che $E \parallel C_3$. Operando con luce non polarizzata incidente il cristallo nella direzione parallela al campo, ed indicando con $R_\alpha^{(i)}$: ($i = 1, 2, 3, 4$; $\alpha = 1, 2$) le righe osservate sono:

$$R_\alpha^{(1)} = (\lambda^{-1})_\alpha^{(1)} = -n \frac{3}{2} g_0 \frac{\beta H}{hC} + \lambda_\alpha (A_3 - A_1)$$

$$R_\alpha^{(2)} = (\lambda^{-1})_\alpha^{(2)} = -n \frac{1}{2} g_0 \frac{\beta H}{hC} + \lambda_\alpha (A_3 - A_2)$$

$$R_\alpha^{(3)} = (\lambda^{-1})_\alpha^{(3)} = n \frac{1}{2} g_0 \frac{\beta H}{hC} + \lambda_\alpha (A_3 - A_2)$$

$$R_\alpha^{(4)} = (\lambda^{-1})_\alpha^{(4)} = n \frac{3}{2} g_0 \frac{\beta H}{hC} + \lambda_\alpha (A_3 - A_1)$$

La differenza in lunghezza d'onda tra le righe che ci interessano è:

$$(\lambda^{-1})^{(2)} - (\lambda^{-1})^{(3)} = n g_0 \frac{\beta H}{hC}$$

$$\lambda^{(2)} - \lambda^{(3)} = n \lambda_*^2 g_0 \frac{\beta H}{hC} \quad (\text{c. g. s.})$$

ove $n = 1 + 2.75 \cdot 10^{-4}$ è l'indice di rifrazione dell'aria e $\lambda_*^2 \approx \lambda^{(2)} \lambda^{(3)}$ avendo fatto l'approssimazione:

$$\lambda_* = \frac{\lambda^{(2)} + \lambda^{(3)}}{2} \approx [\lambda^{(2)} \lambda^{(3)}]^{1/2}$$

ove λ_* è il centro delle due righe interne dello spettro di righe $R_\alpha^{(i)}$, misurata.

$$\lambda_* (R_1) = 6933.89 \text{ \AA} = 14417.96 \text{ cm}^{-1}$$

$$\lambda_* (R_2) = 6919.80 \text{ \AA} = 14447.31 \text{ cm}^{-1}$$

con un errore assoluto pari a $\pm 0.04 \text{ cm}^{-1}$. Il valore della induzione magnetica risulta:

$$H(G.)_{R_1} = \left[\frac{1}{1+2.75 \cdot 10^{-4}} \frac{1}{(14417.96)^2} 4.6685 \cdot 10^5 \cdot 1.9867 \right]^{-1} \Delta \lambda$$

$$\frac{10^5}{4.4600} \Delta \lambda (\text{\AA}) = 2.24214 \cdot 10^4 \Delta \lambda (\text{\AA})$$

$$H(G.)_{R_2} = \frac{10^5}{4.441988} \Delta \lambda (\text{\AA}) = 2.25128 \cdot 10^4 \Delta \lambda (\text{\AA})$$

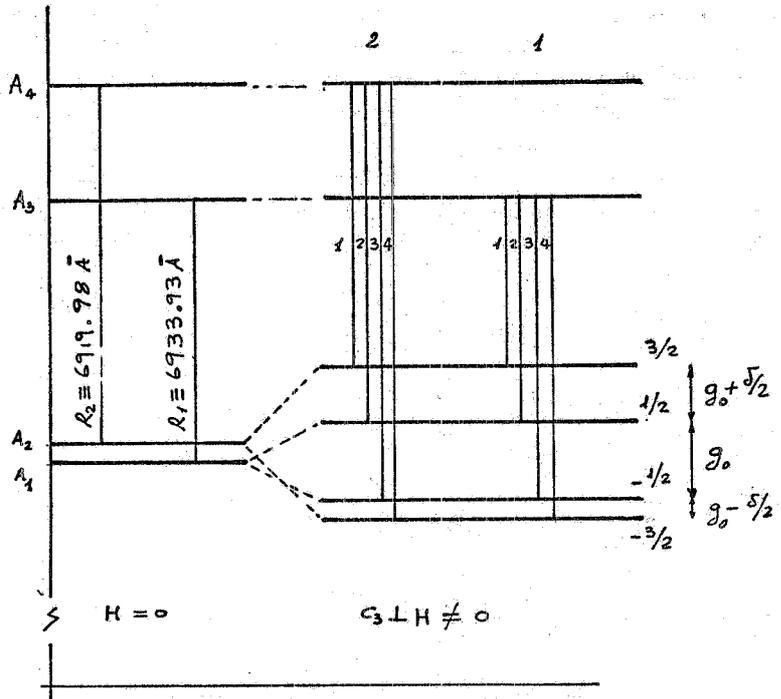


FIG. 4 - Effetto Zeeman sulle righe R_1 ed R_2 nel caso $C_3 \perp H$.

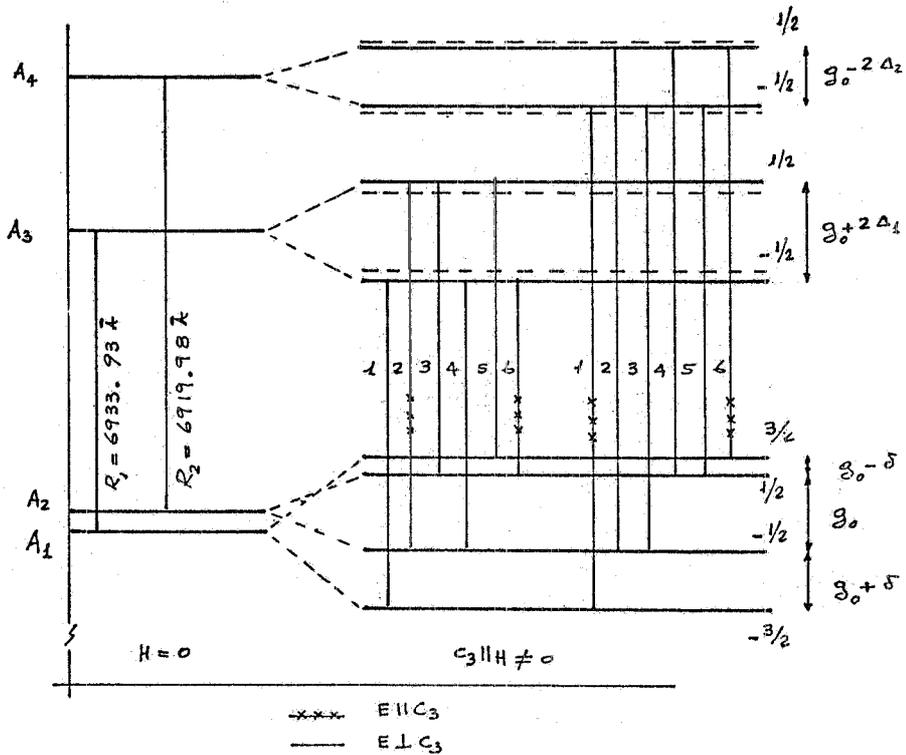


FIG. 5 - Effetto Zeeman sulle righe R_1 e R_2 nel caso $C_3 \parallel H$.

ovvero prendendo il valore medio:

$$H(G.) = \Delta \lambda (\text{\AA}) \left[2.24691 \pm 0.00477 \right] 10^4$$

l'errore relativo nella indeterminazione è:

$$2 \times \frac{4.77 \cdot 10^{-3}}{2.24691} \approx 1.95 \cdot 10^{-3} \times 2$$

E' chiaro che qualora si usino le righe ($i = 1, 4$) la indeterminazione aumenta, precisamente si ottiene:

$$H(G.) = \Delta \lambda (\text{\AA}) \left[7.48904 \pm 0.015 \right] 10^3$$

E' altresì chiaro che queste indeterminazioni possono essere eliminate qualora si misurino direttamente le lunghezze d'onda delle righe $R_a^{(i)}$ e si usi la formula senza l'approssimazione.

2.2. - Caso, asse cristallo parallelo al campo. -

In questo caso il livello eccitato è sdoppiato dal campo magnetico per cui le righe osservate seguiranno le regole di selezione e polarizzazione di Rubinowicz e Bohr.

Inoltre ciascun doppietto è separato di una quantità $2\Delta_1$ in aumento per la riga R_1 ed in diminuzione di $2\Delta_2$ per la riga R_2 . La configurazione dei livelli è mostrata in fig. (5).

Nel caso in cui la luce incidente sia parallela al campo saranno osservate le righe di polarizzazione σ_a^\pm , cioè:

$$R_1^{(1)} = \lambda_1^{(1)} = n(g_0 - \Delta_1) \frac{\beta H}{hC} + \lambda(A_3 - A_1)$$

$$R_1^{(5)} = \lambda_1^{(5)} = -n(g_0 - \Delta_1) \frac{\beta H}{hC} + \lambda(A_3 - A_1)$$

$$R_2^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = n(g_0 - \Delta_2) \frac{\beta H}{hC} + \lambda(A_4 - A_2)$$

$$R_2^{(5)} = \lambda_2^{(5)} = -n(g_0 - \Delta_2) \frac{\beta H}{hC} + \lambda(A_4 - A_2)$$

La differenza tra le righe è:

$$(\lambda^{-1})_1^{(1)} - (\lambda^{-1})_1^{(5)} = n 2 (g_0 - \Delta_1) \frac{\beta H}{hC}$$

$$(\lambda^{-1})_2^{(2)} - (\lambda^{-1})_2^{(5)} = n 2 (g_0 - \Delta_2) \frac{\beta H}{hC}$$

Ora la misura della separazione del livello eccitato eseguita con il minore errore assoluto è quella propria della riga R_1 cioè Δ_1 . E' stato misurato⁽⁴⁾ $g_0 + 2\Delta_1 = 2.445 \pm 0.001$ è poichè $g_0 = 1.9867 \pm 0.0006$ si ha:

$$2(g_0 - \Delta_1) = 2 \times 1.9867 - 0.4583 \pm 0.0016 = 3.4151 \pm 0.002$$

In definitiva otteniamo:

8.

$$H(G.)_{R_1} = \left[\frac{1}{1+2.75 \cdot 10^{-4}} \frac{1}{[14417.66]^2} 4.6685 \cdot 10^{-5} \times 3.4151 \right]^{-1} \Delta \lambda$$

$$= \frac{10^5}{7.6678} \Delta \lambda (\text{\AA}) = 1.30415 \cdot 10^4 \Delta \lambda (\text{\AA})$$

avendo preso ν_* il centro delle righe estreme misurato, $\nu_* = 14417.66 \text{ cm}^{-1} \pm 0.04 \text{ cm}^{-1}$.

3) VALUTAZIONE ERRORI -

La formula che da il valore del campo magnetico è

$$H = n \nu_o^2 \frac{hC}{\beta g_o} \Delta \beta$$

prendendo il fattore $\beta/hC = 4.6685 \cdot 10^{-5}$ e l'indice di rifrazione con errori trascurabili rimangono gli errori relativi delle altre grandezze, cioè:

$$\frac{dH}{H} = \frac{2d\nu_o}{\nu_o} + \frac{dg_o}{g_o} + \frac{dl}{l} + \frac{dL}{L} + \frac{d\lambda(R_1) + d\lambda(R_2)}{\lambda(R_1) - \lambda(R_2)}$$

ove dl e dL sono gli errori assoluti nella misura della distanza $R_1^{(2)} - R_1^{(3)} = l$ ed $R_1 - R_2 = L$ rispettivamente. Ora le grandezze non direttamente misurabili hanno errori relativi così determinati da vari autori:

$$\frac{d\nu_o}{\nu_o} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{1.4417 \cdot 10^4} \approx 2 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{dg_o}{g_o} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{2} = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{d\lambda(R_1) + d\lambda(R_2)}{\lambda(R_1) - \lambda(R_2)} \approx \frac{4 \cdot 10^{-2}}{14} = 3 \cdot 10^{-3}$$

Gli errori nella misura delle distanze dipendono dalla bontà della misura sulla traccia delle righe, ciò dipende da come vengono rivelate (emissione o assorbimento) e da come è determinato il massimo di ciascuna riga.

Tentativamente si può porre un errore assoluto di 1 mm sulla determinazione dei massimi, per cui si ha:

$$dl = 2 \text{ mm}; \quad dL = 2 \text{ mm}$$

se poi si tiene presente che si può fare per esempio

$$L \approx 300 \text{ mm}, \quad l \approx 100 \text{ mm}.$$

a 50.000 Gauss otteniamo

$$\frac{dL}{L} = 2 \cdot 10^{-2} \quad \frac{dL}{L} = 7 \cdot 10^{-3}$$

In definitiva $dH/H \approx 0.03$ che è un errore relativo essenzialmente dovuto alla misura sperimentale che è maggiore della indeterminazione notata. Risulta infine che a parità di campo magnetico la maggiore separazione si ha per $C_3 \perp H$ sulle righe estreme. Riuscendo ad eseguire una misura assoluta delle lunghezze d'onda in giuoco ed usando la formula non approssimata l'errore relativo diminuisce, si ha

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta g_0}{g_0} + \frac{\Delta \lambda_1}{\lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\Delta \lambda_2}{\lambda_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

supponendo $\lambda_2 - \lambda_1 = 10 \text{ \AA}$, $\lambda_2 \approx \lambda_1$ e riuscendo a fare $\Delta \lambda_1 = \Delta \lambda_2 = 10^{-3} \text{ \AA}$ otteniamo:

$$\frac{\Delta H}{H} \approx \frac{\Delta g_0}{g_0} + \frac{2 \Delta \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1} = 5 \cdot 10^{-4}$$

4. - MODULAZIONE DI FLUSSO -

Negli spettri ottici si ha a che fare con segnali luminosi la cui intensità è relativamente piccola e spesso sommersa dal rumore di fondo. Questi segnali $I(\lambda)$ sono una funzione della lunghezza d'onda, ed hanno forme che sono simili a Lorentziane, non solo, ma lo stato di polarizzazione è ben definito; per esempio possono essere polarizzati rettilineamente o circolarmente. Viene, perciò, il problema di rivelare questi segnali rappresentabili mediante funzioni continue rispetto alla variabile lunghezza d'onda. Ora questi segnali non è pensabile di rivellarli mediante semplice amplificazione per ovvi motivi. Una tecnica di largo impiego, non ancora superata, è quella di trasformare il segnale continuo, per ciascun valore della variabile indipendente, in un segnale alternato di frequenza fissa e sincronizzare uno "strumento" con tale segnale. Cosicché all'uscita dello "strumento" si ha una ampiezza di segnale rigorosamente proporzionale all'ampiezza del segnale continuo originale a quel valore della variabile. Spostando la variabile indipendente si ottiene il segnale originale come involuppo delle varie tensioni. In definitiva si deve introdurre una modulazione di ampiezza del flusso luminoso al particolare valore della variabile.

Poichè questo segnale modulato in ampiezza darà, all'uscita del rivelatore sincrono, un segnale proporzionale al segnale continuo ne viene che la modulazione di ampiezza deve avere una profondità del 100%, cioè la modulazione di ampiezza è del tipo interruttore, SI + NO.

Ora per modulare in ampiezza un flusso luminoso si possono usare metodi meccanici tipo disco rotante, ma essi permettono al più qualche KH_z come frequenza fondamentale e non sempre sono rigorosamente stabili e ripetibili.

Al contrario il metodo elettro-ottico, che descriveremo permette la utilizzazione di alte frequenze (50 + 100 KH_z) ed una ottima ripetibilità e stabilità.

Fra l'altro questo metodo ha il vantaggio di operare la modulazione di flusso alle frequenze Ω e 2Ω a seconda del montaggio ottico; con la tensione di eccitazione a frequenza Ω . Questo è basato sulla proprietà di una lamina in quarto d'onda capace di produrre onde polarizzate circolarmente in un senso e nel senso opposto quando sia sottoposta ad una tensione alternata.

In particolare, un'onda polarizzata rettilineamente, è ridotta ad un'onda polarizzata circolarmente dalla lamina sottoposta a tensione ed ad un'onda polarizzata circolarmente opposta quando la lamina è sottoposta a tensione opposta.

In definitiva la tensione applicata opera una rotazione di $\pi/2$ degli assi neutri della lamina.

Nella fig. (6) la polarizzazione rettilinea R del flusso uscente dal polarizzatore rettilineo

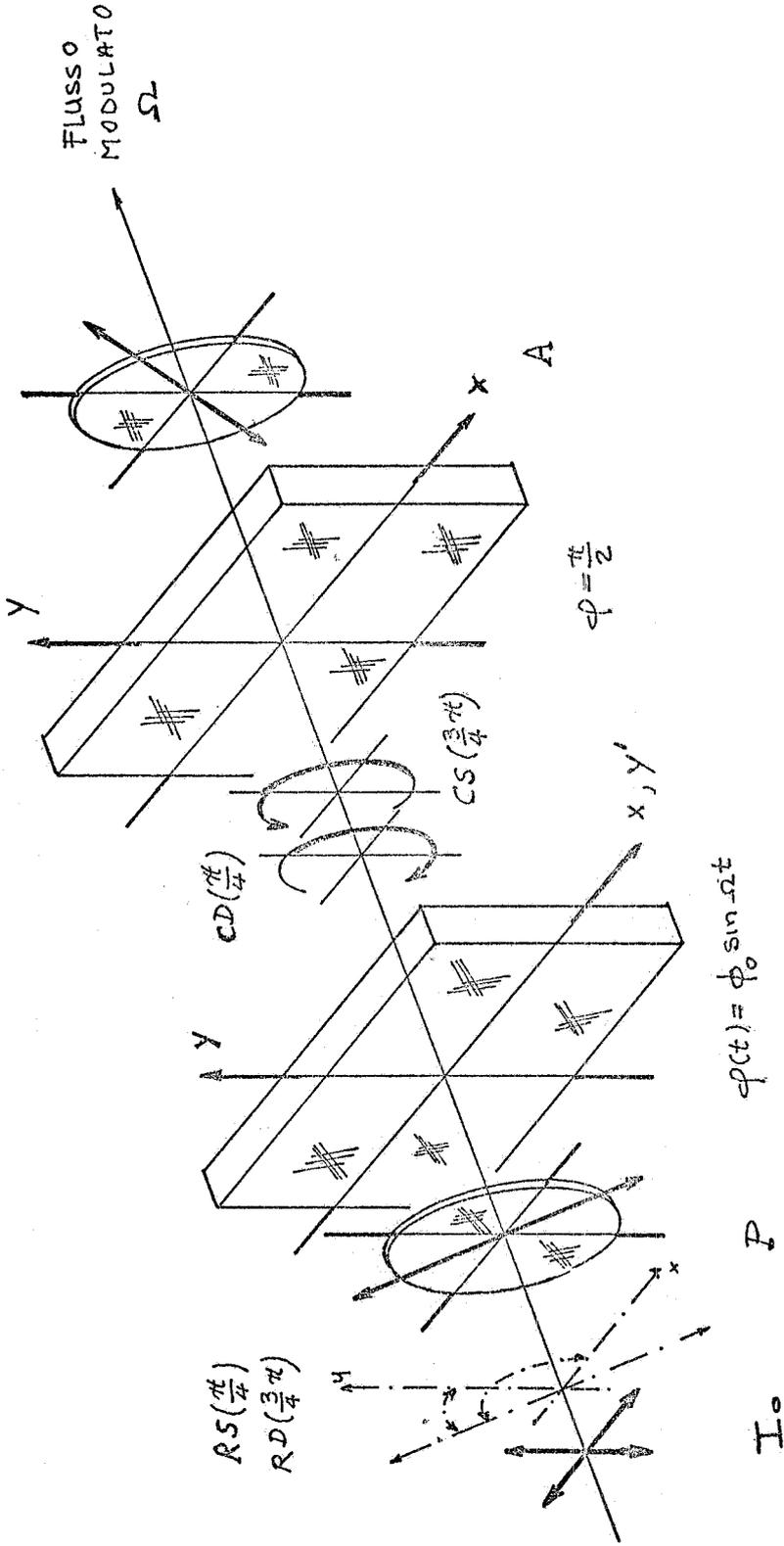


FIG. 6 - Disposizione ottica del modulatore a frequenza Ω : I_0 : luce non polarizzata; P: polarizzatore rettilineo; $\varphi(t)$: lamina piezoelettrica; φ : lamina costante; A: analizzatore rettilineo.

$$I = \frac{I_0}{4} \left\{ 1 - J_0(\Phi_0) - 2J_2(\Phi_0)\cos 2\Omega t - 2J_4(\Phi_0)\cos 4\Omega t + \dots \right\}$$

ove I_0 indica l'intensità del flusso luminoso non polarizzato all'ingresso del polarizzatore.

Se infine si interpone una lamina quarto d'onda di sfasamento costante tra la lamina di sfasamento variabile e l'analizzatore lo sfasamento totale è $\varphi = \varphi + \pi/2$, essendo $\pi/2$ lo sfasamento della lamina fissa, fig. (8).

Perciò la intensità che l'analizzatore lascia passare è ora:

$$I = \frac{I_0}{4} \left[1 - \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{I_0}{4} [1 + \sin\varphi]$$

e poichè:

$$\sin\varphi = \sin[\Phi_0 \sin\Omega t] = 2 \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K-1}(\Phi_0) \sin(2K-1)\Omega t$$

si ha:

$$I = \frac{I_0}{4} \left\{ 1 + 2J_1(\Phi_0) \sin\Omega t + 2J_2(\Phi_0) \sin 3\Omega t + \dots \right\}$$

ove nelle formule J_{2K} e J_{2K-1} sono le funzioni di Bessel di ordine intero.

Cosicchè, mediante due diverse disposizioni ottiche ed una frequenza di eccitazione, si ottengono due frequenze di modulazione del flusso.

E' chiaro che i contributi di ordine superiore al primo ed al secondo rispettivamente nelle frequenze dipendono dal valore del parametro Φ_0 , il quale a sua volta dipende dalla tensione applicata alla lamina di quarzo.

Infine notiamo che, se inizialmente il flusso è costituito di due onde polarizzate circolarmente opposte simultanee l'effetto del modulatore d'ampiezza porta ad avere le quantità di flusso simultanee:

$$I^+ = I_0^+ / 4 (1 + \sin\varphi)$$

$$I^- = I_0^- / 4 (1 - \sin\varphi)$$

per cui l'intensità totale è:

$$I = I^+ + I^- = \frac{I_0^+ + I_0^-}{4} \left[1 + \frac{I_0^+ - I_0^-}{I_0^+ + I_0^-} \sin\varphi \right]$$

d'onde la modulazione di flusso si ha solo se $I_0^+ \neq I_0^-$, (in questo caso il montaggio ottico può essere semplificato).

La realizzazione pratica del modulatore di flusso è sufficientemente semplice, si rimanda alla referenza (5).

BIBLIOGRAFIA -

- (1) - S. Sugano and Y. Tanabe, J. Phys. Soc. Japan 13, 880 (1958).
- (2) - S. Sugano and I. Tsujikawa, J. Phys. Soc. Japan 13, 899 (1958).
- (3) - A.A. Manenko and A.M. Prokhorov, J. Exp. Teoret. Phys. 762 (1955); Soviet Phys. JETP 1, 611 (1955); S. Sugano and M. Peter, Phys. Rev. 122, 381 (1961).
- (4) - S. Geschwind, R.J. Collins and A.L. Schalow, Phys. Rev. Lett. 3, 545 (1959).
- (5) - G. Baldacchini and L.F. Mollenauer, Applied Optics 11, 2676 (1972).

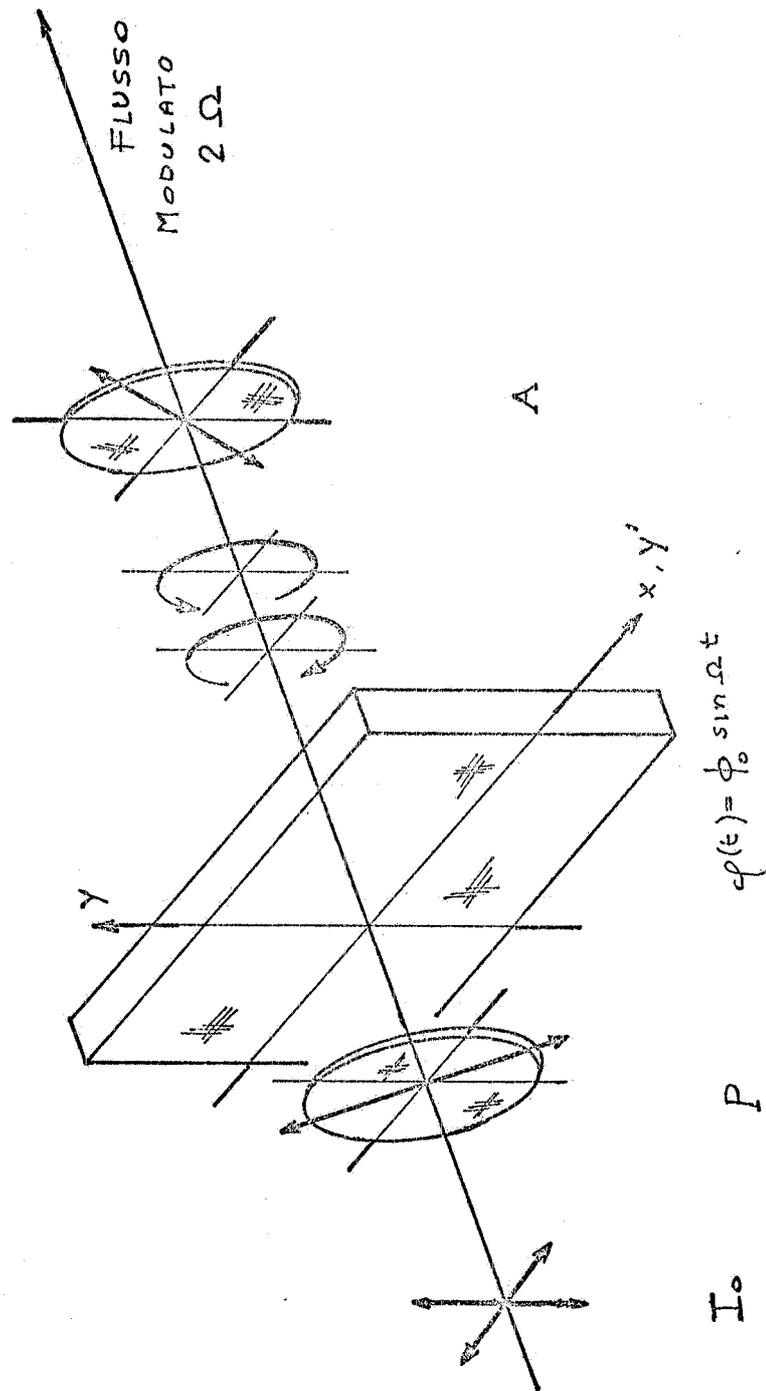


FIG. 8 - Disposizione ottica del modulatore a frequenza 2Ω

APPENDICE -

LA RIVELAZIONE SINCRONA -

Nella spettroscopia di modulazione, sia essa di alta frequenza ($\approx 10^{15}$ sec⁻¹) o bassa frequenza ($\approx 10^6$ sec⁻¹), si rivelano le modulazioni di ampiezza dell'onda e.m. portante di frequenza ω_0 .

Il sistema di rivelazione è, quindi, fornito di uno strumento che funge da primo rivelatore, ovvero esso è capace di rivelare le sole componenti alla frequenza di modulazione, Ω , e rigetta le frequenze della portante e armoniche.

Questo primo rivelatore possiede una caratteristica corrente-tensione che può essere lineare o quadratica; ci interessano solo i rivelatore di caratteristica lineare, il particolare un fotomoltiplicatore (F. M. T.).

Il (F. M. T.) è uno strumento che da una corrente generata da elettroni emessi da un fotocatodo quando quest'ultimo è investito da un'onda e.m. ottica (il termine ottica vuol significare intervallo di frequenze ben più ampio di quello proprio del visibile). Ora il fotocatodo è insensibile al verso del vettore elettrico che opera la emissione elettronica, per cui gli elettroni emessi seguono la legge $|\sin \omega_0 t|$.

Supponiamo che l'onda e.m. portante sia modulata in ampiezza con profondità di modulazione m , allora la corrente in uscita dal (F. M. T.) è:

$$Z = \sigma A(1 + m \sin \Omega t) \cdot |\sin \omega_0 t|$$

ove A è l'ampiezza dell'onda portante e σ è il coefficiente di linearità del rivelatore.

Sviluppando in serie di Fourier si ha:

$$Z = \frac{2}{\pi} \sigma A \left[(1 + m \sin \Omega t) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega_0 t}{4k^2 - 1} - 2m \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin \Omega t \cdot \cos 2K\omega_0 t}{4K^2 - 1} \right]$$

Si nota che lo spettro di frequenza è costituito dalle componenti pari nelle armoniche della portante ciascuna con due bande laterali spostate di $\pm \Omega$, in oltre si ha la componente a frequenza Ω ed una componente continua.

Prima della rivelazione si aveva l'onda

$$Z' = A(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t$$

che possiede una componente a frequenza ω_0 e due bande laterali spostate di $\pm \Omega$ rispetto alla fondamentale, $-\omega_0$.

Questa è la risposta di un rivelatore avente caratteristica lineare, o come si dice un rivelatore lineare; un rivelatore di risposta quadratica darebbe uno spettro totalmente diverso. Il procedimento per determinare lo spettro di frequenza è analogo, ma si deve tenere presente che ora la caratteristica è del tipo $Z = \sigma U^2$ anzichè $I = \sigma U$ ove U è l'onda portante. Troveremo uno spettro discreto e illimitato al contrario della rivelazione lineare che è discreto e illimitato.

In definitiva il primo rivelatore da una componente continua ed una componente a frequenza Ω e armoniche pari della portante con bande laterali. Il primo rivelatore viene montato in modo da dare la funzione:

$$Z^* = Z_0 m \sin \Omega t$$

ove $Z_0 = (2/\pi) \sigma A$, ove la profondità di modulazione varia a seconda del punto di lavoro, ovvero varia in funzione della frequenza della portante che è variata linearmente nel tempo in modo da coprire un certo intervallo di frequenze (in genere la strumentazione è tale da eseguire un attraversamento di frequenze, ciò è più comodo alle frequenze ottiche, ma nel campo delle radio frequenze è comodo l'opposto).

Si deve notare che quanto esposto si riferisce ad una onda portante modulata in ampiezza che risulta tale poichè è stata eseguita una operazione sull'onda.

A seconda che l'operazione è eseguita in un modo od in un altro il significato della funzione risultante è diverso.

Così la modulazione dell'onda portante, mediante un modulatore di flusso, porta per esempio alla fine alla riproduzione dello spettro di assorbimento come involuppo delle varie ampiezze ottenute al variare della lunghezza d'onda (per esempio una Lorentziana).

Al contrario se la modulazione è prodotta da una operazione eseguita dal campione tramite la modulazione, per esempio dei livelli energetici, allora la portante vede assorbimento e nessun assorbimento in un periodo, il risultato è ancora un'onda modulata in ampiezza, ma l'involuppo delle ampiezze è la derivata dell'assorbimento (per esempio la derivata di una Lorentziana).

Non si deve dimenticare che il segnale è totalmente affogato nel rumore, tanto che il rapporto segnale rumore può raggiungere valori estremamente bassi. Lo scopo è di invertire questo rapporto, cosicchè interviene ora la rivelazione sincrona, la cui operazione consiste in una opportuna amplificazione e conseguente riduzione della banda di rumore. Dopodichè uno strumento, il rivelatore di fase (R. F.) seguito da un filtro RC (F. R. C.), opera la riduzione finale del rumore con conseguente aumento del rapporto segnale/rumore a valori molto maggiori dell'unità.

Con ciò al rivelatore di fase giunge un segnale della forma

$$S = S_0 \sin \omega t$$

Ciò che interessa il valore S_0 , od un valore ad esso proporzionale, per cui si deve trasformare il segnale sinusoidale in un segnale continuo con la massima efficienza ed il minimo rumore.

Ciò è eseguibile con il raddrizzamento della sinusoide ed il filtraggio di tutte le componenti armoniche di qualunque natura esse siano.

Il (R. F.) esegue una operazione per cui all'uscita si ha la forma d'onda $|\sin \Omega t|$; esso è un interruttore, fig. (9) che durante mezzo periodo $T/2 = \pi/\Omega$ opera il contatto (a + b) e nel successivo mezzo periodo opera il contatto (a' + b').

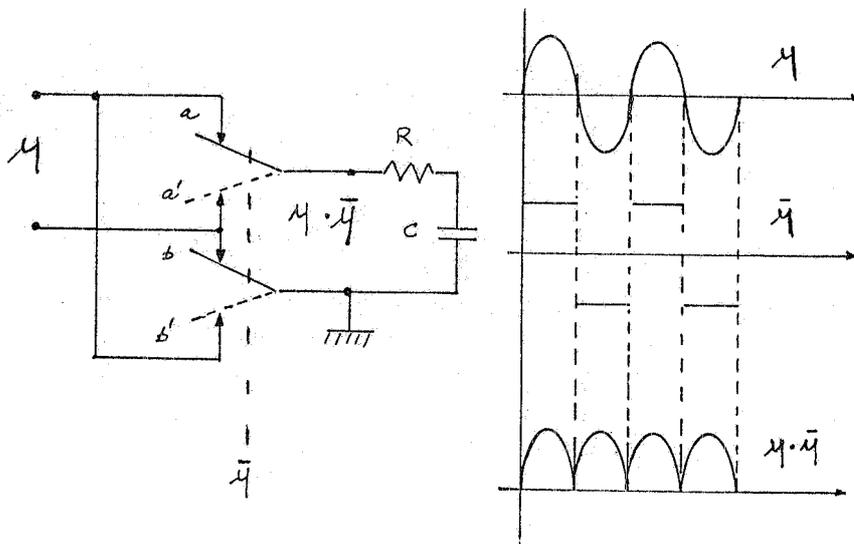


FIG. 9

In definitiva il (R.F.) opera il prodotto tra la funzione $\eta = \sin \Omega t$ e la funzione

$$\bar{\eta} = \frac{\sin \Omega t}{|\sin \Omega t|},$$

chiaramente $\eta \cdot \bar{\eta} = |\sin \Omega t|$, cosicchè la forma d'onda in uscita è

$$\eta \cdot \bar{\eta} = |\sin \Omega t| = \frac{2}{\pi} \left[1 - 2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\cos 2K\Omega t}{4K^2 - 1} \right]$$

L'azione del filtro RC riduce lo spettro di frequenza secondo la funzione:

$$F(j\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega RC}$$

La forma d'onda all'uscita del filtro ha la forma d'onda:

$$\eta_u = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} [F(j\Omega)F(-j\Omega)]^{1/2} \left[2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\cos(2K\Omega t + \phi)}{4K^2 - 1} \right]$$

od anche si ha il segnale:

$$S = \frac{2}{\pi} S_0 - \frac{4}{\pi} S_0 [1 + \Omega^2 \theta^2]^{-1/2} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\cos(K\Omega t + \phi)}{4K^2 - 1}$$

il quale possiede una componente continua, mentre le componenti armoniche sono ridotte del fattore $(1 + \Omega^2 R^2 C^2)^{-1/2}$ e facendo $\Omega \theta \gg 1$ la riduzione è notevole; per esempio se $\Omega = 10^4 \text{ sec}^{-1}$, basta una costante di tempo $\theta = 1 \text{ sec}$ per ridurre di $1:10^4$ le armoniche. Questa possibilità di riduzione delle armoniche ha una importanza fondamentale: infatti tenendo presente che l'ammontare di rumore bianco è proporzionale alla banda dell'amplificatore $(\Delta f)^{1/2}$ ne viene che un amplificatore da un rapporto segnale/rumore direttamente proporzionale a $(\Delta f)^{-1/2}$. Ora mentre in un normale amplificatore non può ridursi la banda oltre un certo limite, in un sistema di rivelazione sincrona, o come si dice un "Lock-in amplifier" la banda è ridotta secondo l'inverso della costante di tempo, ovvero il sistema Amplificatore + R.F. + F. RC ha una banda passa basso pari a $1/\theta$. Ne viene che il rapporto segnale rumore R(rivelazione sincrona) $S_0 \theta^{1/2}$.

E poichè le costanti di tempo $\theta = RC \text{ sec}$ possono essere fatte lunghe a piacere, almeno in via di principio, ne risulta chiara l'utilità, tanto che possono trovarsi strumenti con banda equivalente dell'ordine di $\Delta f = 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$ cosa impossibile a farsi volendo costruire un amplificatore di tale banda centrata ad una frequenza $\Omega = 10^4 \text{ sec}^{-1}$.

NOTA - A volte il rivelatore di fase viene considerato un "Mixer", cioè uno strumento che esegue il prodotto tra la forma d'onda all'ingresso e quello di riferimento. Per cui si hanno forme d'onda aventi frequenze sommae differenza delle iniziali. Anche se il risultato è circa uguale, esso concettualmente è completamente diverso, l'approssimazione viene fatta in vista della semplificazione.