

LNF-74/28(R)
21 Maggio 1974

V. Montelatici: CALCOLI NUMERICI PER LA RADIAZIONE
DI SINCROTRONE: APPLICAZIONE AD ADONE. -

V. Montelatici: CALCOLI NUMERICI PER LA RADIAZIONE DI SIN-
CROTRONE: APPLICAZIONE AD ADONE. -

INTRODUZIONE. -

Nelle esperienze di spettroscopia "ottica", ed il termine "ottica" è di comodità poichè si debbono intendere le frequenze dai raggi X all'infrarosso, è utile conoscere almeno l'ordine di grandezza della potenza inviata sul campione e quindi riflessa o trasmessa da esso al primo rivelatore.

Le sorgenti convenzionali sono state, sino all'avvento delle macchine acceleratrici di elettroni, le lampade ad incandescenza od a scarica il cui spettro ha l'andamento della distribuzione di Planck od a righe e rispettivamente. Queste sorgenti convenzionali generalmente hanno una intensità spettrale che copre il campo di frequenze dal prossimo UV ed attraverso il visibile fino all'infrarosso; esse emettono una energia elettromagnetica ragionevolmente sufficiente ad eseguire le esperienze.

I metodi di studio delle proprietà ottiche dei materiali investigati ha raggiunto un alto grado di efficienza; così i metodi della spettroscopia "ottica" di modulazione permettono di rivelare proprietà fisiche che, usando altri metodi, non è possibile di ottenere; a questo proposito vedasi il libro di Cardona, Modulation spectroscopy, Solid State Physics, Vol. 11; Acc. Press; e la relazione LNF-73/65 la quale tratta il caso particolare della spettroscopia di modulazione magnetica.

Tali metodi di modulazione hanno la data di nascita alla fine degli anni '40 nel campo della spettroscopia di spin, ed una volta trasferiti

2.

al campo ottico hanno dato una larga massa di risultati, come ben può vedersi leggendo la letteratura.

I metodi di modulazione hanno due vantaggi immediati: l'uno di tipo sperimentale, l'altro di tipo teorico specialmente quando applicati al campo ottico. Il primo è dovuto al fatto che si rivelano grandezze alternate e non continue o quasi continue, il secondo è che le risposte integrate danno la derivata prima dello spettro di interesse fisico. Queste due proprietà sono di estrema utilità nella interpretazione degli spettri, poichè le strutture "fini" sono alcuni ordini di grandezza inferiori alla componente continua ed ambidue sono esibite contemporaneamente dal materiale in studio; non solo, ma le strutture "fini" il più delle volte non sono semplici per cui la derivata prima dello spettro "fine" evidenzia nettamente le risonanze.

Questi metodi, che non è qui il caso di esporre, implicano sorgenti di radiazione continua, come appunto certe sorgenti ottiche convenzionali.

Ora una macchina acceleratrice di elettroni di tipo non distruttivo, (storage ring), è una "lampada" con una intensità spettrale continua su di un intervallo di frequenze ben più esteso di una sorgente convenzionale. Inoltre il grande vantaggio di una tale "lampada" è che la radiazione emessa ha un alto grado di polarizzazione a tutte le lunghezze d'onda con il vettore elettrico dell'onda elettromagnetica giacente nel piano orbitale degli elettroni accelerati.

Poichè la potenza della radiazione e l'angolo entro cui è emessa sono una funzione della lunghezza d'onda oltre che della energia orbitale degli elettroni è necessario determinarne i valori.

Questo è lo scopo di questa relazione che espone un metodo grafico generale per la determinazione della intensità luminosa e lo applica al caso della macchina non distruttiva Adone dei Laboratori di Frascati. Le formule usate in questa relazione sono prese dalla nota LNF-72/56, il calcolo delle funzioni è stato eseguito usando: Tables of Bessel function of fractional order Vol. II; N. B. S. Columbia University 1949 ed il calcolatore HP 9820A.

DISTRIBUZIONE SPETTRALE MEDIA DELLA ENERGIA E DEL NUMERO DEI FOTONI IRRAGGIATO. -

L'energia media irraggiata da un elettrone, di carica e_0 , possedente l'energia E e che si muove su di una orbita circolare di raggio R con il modulo della velocità tangenziale all'orbita uguale a quella della luce, C , è data dalla formula di Scott come somma delle infinite onde piane, armoniche della frequenza di rotazione fondamentale,

$\omega_0 = C/R2\pi$. La formula di Scott è valida sia per il caso relativistico sia per il caso non relativistico; essa dà la distribuzione discreta di energia emessa alle singole armoniche, e può essere approssimata, a meno di termini di ordine superiore in $m_0 C^2/E = 5.12 \times 10^{-4}/E(\text{GeV})$, ad una distribuzione continua dalla formula:

$$(1) \quad \frac{dW(\lambda)}{d\lambda} = \left[\frac{9\sqrt{3}}{16\pi^2} \frac{C e_o^2}{R^3} \left(\frac{E}{m_0 C^2} \right)^7 \right] G(\lambda/\lambda_c) =$$

$$= (4\pi)^{1/3} (0.42)^{7/3} \frac{C e_o^2}{R^{2/3}} \frac{G(\lambda/\lambda_c)}{\lambda_m^{7/3}}$$

La (1) esprime la energia mediata in una rivoluzione completa sulla orbita dell'elettrone ed emessa su tutto l'angolo solido; λ è la lunghezza di onda e si ha:

$$\lambda_c = \frac{4\pi R}{3} \left(\frac{m_0 C^2}{E} \right)^3 = \frac{5.59 R(\text{m})}{E^3(\text{GeV})}$$

$$\lambda_m = 0.42 \lambda_c = \frac{2.35 R(\text{m})}{E^3(\text{GeV})}$$

$G(\lambda/\lambda_c)$ è una funzione universale, mentre λ_m è la lunghezza d'onda tale che $G(\lambda_m/\lambda_c = 0.42) = 1.22$ è massima.

Fissato R tutte le distribuzioni, funzioni del parametro E, hanno una curva asintotica per $\lambda \gg \lambda_m$ indipendente dalla energia orbitale espressa dalla relazione:

$$(2) \quad \frac{dW(\lambda \gg \lambda_m)}{d\lambda} = \left[\frac{9\sqrt{3}}{16\pi^2} \frac{C e_o^2}{R^3} \left(\frac{E}{m_0 C^2} \right)^7 \right] \Gamma(2/3) 4^{1/3} \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^{7/3}$$

$$= (4\pi)^{1/3} \frac{C e_o^2}{R^{2/3}} 2.12 \lambda^{-7/3} = 7.3 \times 10^{-6} R^{-2/3} (\text{m}) \lambda^{-7/3} (\text{Å}) \frac{\text{Watt}}{\text{Å elet.}}$$

La funzione che dà il massimo della radiazione emessa è

$$(3) \quad \frac{dW(\lambda_m)}{d\lambda} = (4\pi)^{1/3} (0.42)^{7/3} \frac{C e_o^2}{R^{2/3}} \frac{G(\lambda_m = 0.42 \lambda_c)}{\lambda_m^{7/3}} =$$

4.

$$(3) \quad = 5.4 \times 10^{-7} R^{-2/3} (m) \lambda_m^{-7/3} (A) \frac{\text{Watt}}{A \text{ elet.}}$$

E' importante conoscere anche il numero dei fotoni associati alle energie, cosicchè una volta trasformate le formule (1), (2), (3) si ha:

$$(4) \quad \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} = \frac{3^{1/6}}{2^{1/3} \pi^{2/3}} (0.70)^{4/3} \frac{e_o^2}{\hbar R^{2/3}} \frac{\Phi(\lambda/\lambda_c)}{\lambda_F^{4/3}}$$

ove la nuova funzione universale risulta definita da:

$$\Phi(\lambda/\lambda_c) = \frac{\lambda}{\lambda_c} G(\lambda/\lambda_c)$$

con il massimo $\Phi(\lambda_F = 0.70 \lambda_c) = 0.66$, e

$$\lambda_F = 0.70 \lambda_c = \frac{3.91 R(m)}{E^3(\text{GeV})}$$

Le corrispondenti funzioni alle (2) e (3) sono:

$$(5) \quad \frac{dn(\lambda \gg \lambda_c)}{d\lambda} = \frac{3^{1/6}}{2^{1/3} \pi^{2/3}} 2.12 \frac{e_o^2}{\hbar} R^{-2/3} \lambda^{-4/3}$$

$$= 4.55 \times 10^9 R^{-2/3} (m) \lambda^{-4/3} (A) \frac{\text{fot}}{\text{sec } A \text{ elet.}}$$

$$(6) \quad \frac{dn(\lambda_F)}{d\lambda} = \frac{3^{1/6}}{2^{1/3} \pi^{2/3}} (0.70)^{4/3} \frac{e_o^2}{\hbar R^{2/3}} \frac{\Phi(\lambda/\lambda_c = 0.70)}{\lambda_F^{4/3}}$$

$$= 8.42 \times 10^8 R^{-2/3} (m) \lambda_F^{-4/3} (A) \frac{\text{fot}}{\text{sec } A \text{ elet.}}$$

Infine il numero totale di fotoni emessi a tutte le armoniche ed a tutti gli angoli durante una rivoluzione completa, cioè durante il tempo $2\pi R/C$, è dato dalla relazione:

$$n(\text{ciclo}) = \frac{1}{137} \frac{\pi 5 \sqrt{3}}{3} \frac{E}{m_0 C^2} = 1.3 \times 10^2 E(\text{GeV}) \frac{\text{fot}}{\text{elettrone}}$$

Le Figg. (1) e (2) danno il grafico delle due funzioni universali.

Il tracciamento grafico delle distribuzioni di fotoni e di energia si compie nel modo seguente: Fissato il raggio sono tracciate, in scale log-log, le curve asintotica e dei massimi, cioè le (2) e (3) (oppure le (5) e (6)); dopodichè si sovrappone il massimo della funzione universale $G(\lambda / \lambda_c)$ (oppure $\Phi(\lambda / \lambda_c)$) con il massimo della curva (3) (oppure (6)) alla lunghezza d'onda λ_m (oppure λ_F) corrispondente alla energia E .

DISTRIBUZIONE ANGOLARE, RELAZIONE APPROSSIMATA DELLA FORMULA DI SCOTT. -

La distribuzione spettrale su tutto l'angolo solido, $[dW/d\lambda]_{\Omega}$ permette di ottenere la intensità spettrale raccolta da una fenditura larga w centrata, sul piano orbitale, su di una tangente all'orbita a distanza d da essa.

Infatti un arco di orbita lungo $R \Delta \kappa$, irradia una energia $E(\Delta \kappa)$ proporzionale a quella irradiata in una rivoluzione dell'elettrone sulla orbita, cioè $E(2 \pi R)$, per cui si ha:

$$E(\Delta \kappa) = R \Delta \kappa \frac{E(2 \pi R)}{2 \pi R} = E(\text{rivoluzione}) \frac{\Delta \kappa}{2 \pi}$$

e la fenditura sottende un arco $\Delta \kappa = w/d$. Questa relazione vale, naturalmente, per un'altezza infinita della fenditura; tuttavia una tale fenditura non è capace di raccogliere la piccola quantità di energia irradiata nelle direzioni formanti un angolo maggiore od uguale a $\pi/2$ con la direzione della velocità dell'elettrone. Le fenditure, nella pratica, hanno un'altezza finita, ne viene che si deve determinare l'angolo sotto cui è vista tale altezza in modo da ottimizzare l'energia raccolta alla lunghezza d'onda desiderata.

E' chiaro che necessitano curve che rappresentino la intensità a ciascuna lunghezza d'onda in funzione dell'angolo di elevazione.

L'angolo di elevazione, ψ , giace in un piano perpendicolare all'orbita passante per una sua tangente; ψ è l'angolo tra la tangente ed una retta passante per il punto di tangenza. La formula di Scott, scritta in forma di distribuzione continua, permette di ottenere la funzione di distribuzione angolare alle varie lunghezze d'onda nel caso approssimato $\psi \simeq 0$. La funzione di distribuzione angolare e spettrale è:

6.

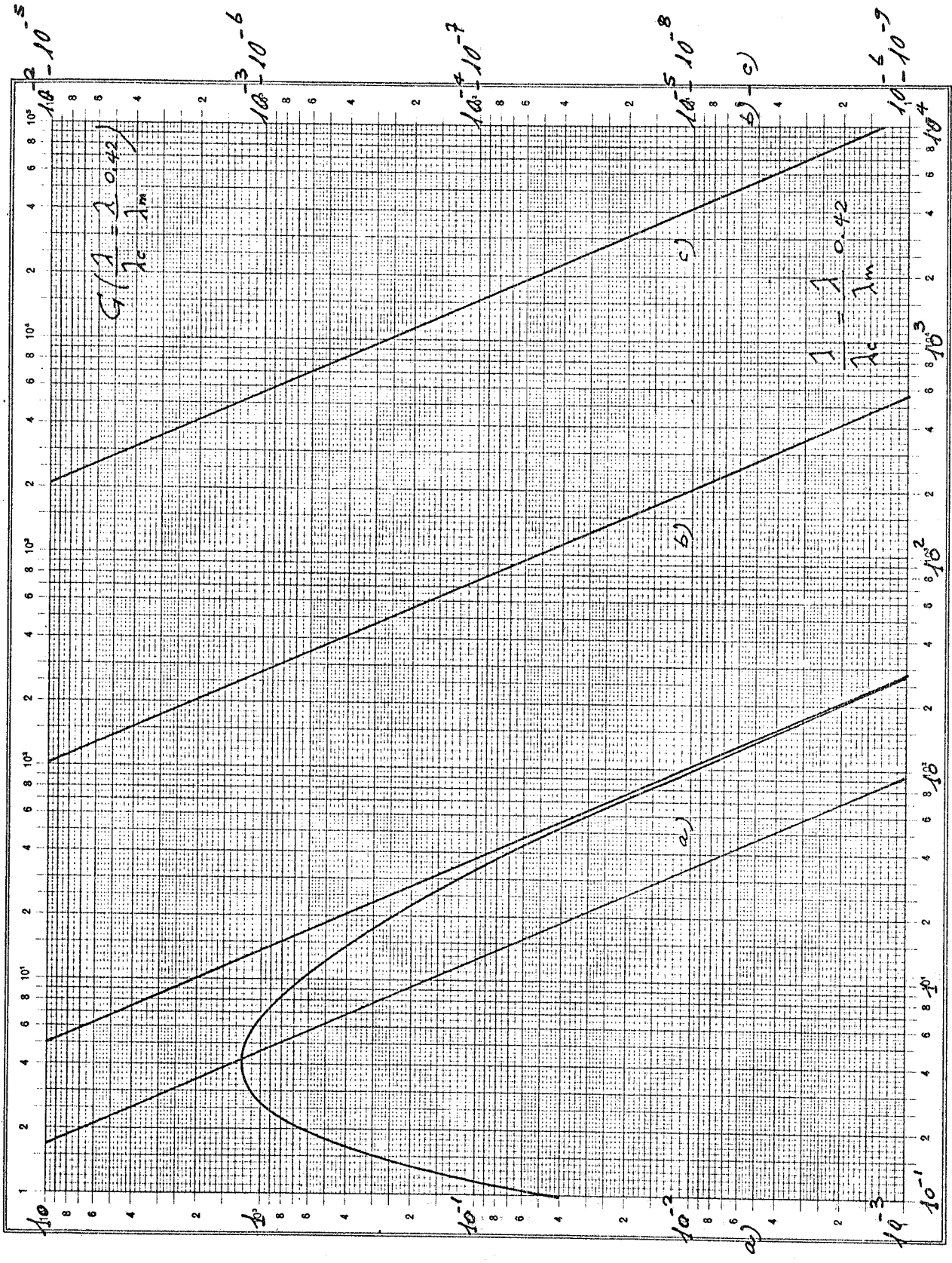


FIG. 1

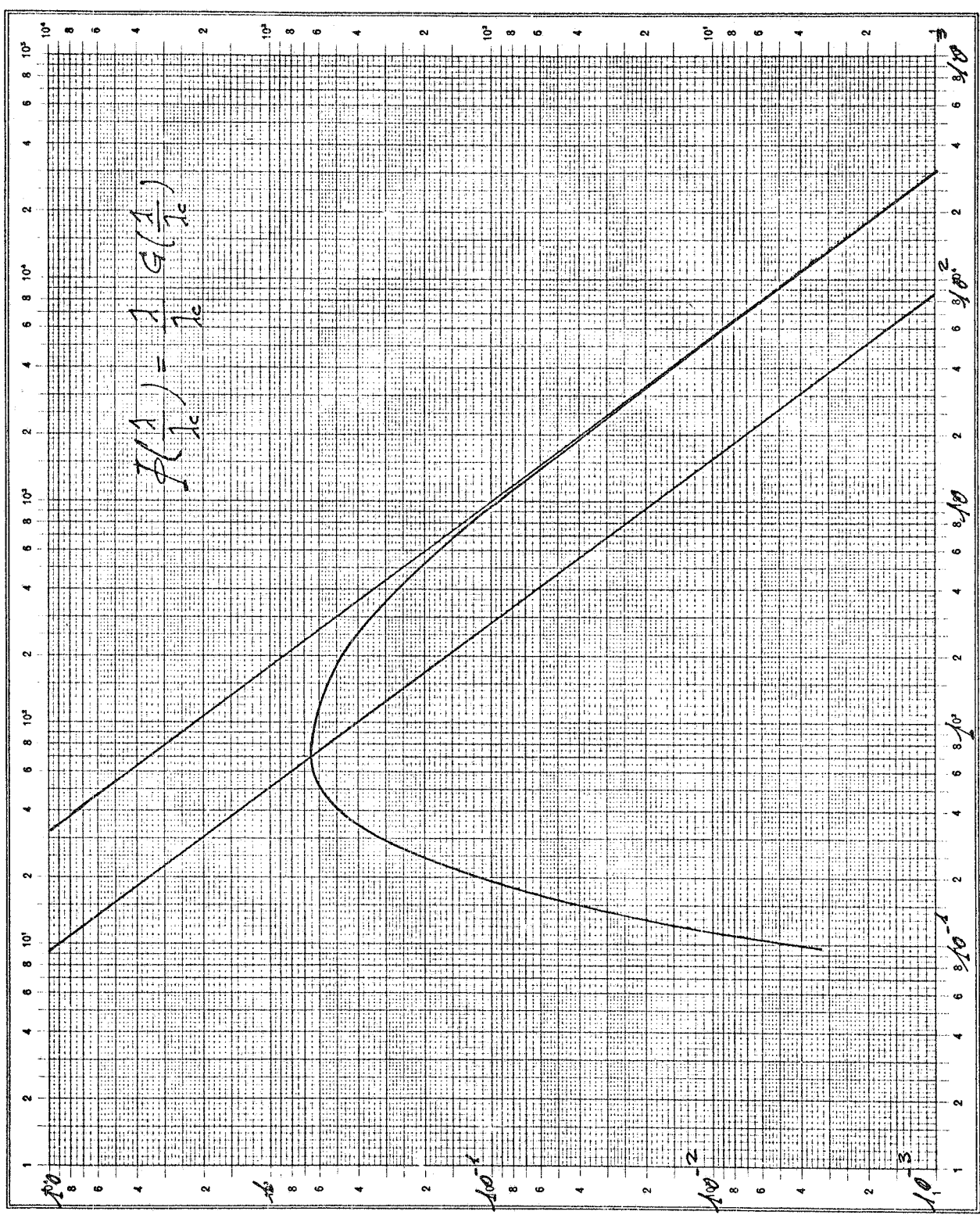


FIG. 2

8.

$$\frac{dW(\lambda/\lambda_m, \eta)}{d\lambda d\psi} = \frac{27}{32\pi^3} \frac{C e_o^2}{R^3} \left(\frac{E}{m_o C^2}\right)^8 x$$

$$(7) \quad x \left[1 + \eta^2\right]^2 \left(\frac{\lambda c}{\lambda}\right)^4 \left\{ K_{2/3}^2(x) + \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} K_{1/3}^2(x) \right\} =$$

$$= \frac{9}{32\pi} \frac{C e_o^2}{R^3} \left(\frac{E}{m_o C^2}\right)^8 x \left[1 + \eta^2\right]^2 \left(\frac{2.38}{\lambda/\lambda_m}\right)^4 \left\{ I_{2/3}^2(x) + \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} I_{1/3}^2(x) \right\}$$

che risulta essere la somma di due componenti, l'una (termine $I_{2/3}^2(x)$) è la componente con il vettore elettrico dell'onda elettromagnetica giacente nel piano orbitale; l'altra (termine $I_{1/3}^2(x)\eta^2/(1+\eta^2)$), è la componente con il vettore elettrico ortogonale al piano orbitale: componente σ e π rispettivamente.

Inoltre si hanno le seguenti relazioni:

$$\eta = \frac{E}{m_o C^2} \quad \psi = \frac{E(\text{GeV})}{5.12 \cdot 10^{-4}} \psi$$

$$x = 1.19 \frac{\lambda_m}{\lambda} (1 + \eta^2)^{3/2}$$

$$I_{\alpha/3}^2(x) = \frac{3}{\pi^2} K_{\alpha/3}^2(x) = \frac{3}{\pi^2} \frac{\pi^2}{3} \left[i^{\alpha/3} J_{-\alpha/3}(ix) - i^{-\alpha/3} J_{\alpha/3}(ix) \right]^2$$

$$\alpha = 1, 2.$$

Infine, poichè sarà utile nel seguito, il valore asintotico della funzione di Bessel è:

$$K_\mu(x) = \frac{2^{\mu-1} \Gamma(\mu)}{x^\mu}$$

L'ultima funzione rappresenta le funzioni di Bessel di ordine fatto, i cui valori sono tabulati nel libro del N.B.S. La costante moltiplicativa nella (7) vale:

$$A = \frac{9}{32\pi} \frac{C e_o^2}{(m_o C^2)^8} \frac{E^8}{R^3} = 1.31 \times 10^{-7} \frac{E^8 (\text{GeV})}{R^3 (\text{m})} \frac{\text{Watt}}{\text{Å mrad elet.}}$$

La funzione adimensionale:

$$(8) \quad Z(\eta) = (1 + \eta^2)^2 \left(\frac{2.38}{\lambda / \lambda_m} \right)^4 \left\{ I_{2/3}^2(x) + \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} I_{1/3}^2(x) \right\}$$

è stata graficata per alcuni valori nel rapporto λ / λ_m nelle Figure (3, 4, 5, 6, 7, 8), mentre la Fig. 9 da la (8) per $\eta = 0$ in funzione di λ / λ_m , insieme alla funzione $G(\lambda / \lambda_c) = 0.42 (\lambda / \lambda_m)$.

La (7) può essere trasformata in termini di distribuzione angolare di fotoni alle diverse lunghezze d'onda, si ottiene:

$$\begin{aligned} dn(\lambda = \text{cost.}, \psi) &= \frac{dW(\lambda = \text{cost.}, \psi)}{\hbar \omega} = \frac{e_o^2}{\hbar \pi C} \frac{3}{16} \frac{C}{R^2} \left(\frac{E}{m_o C^2} \right)^5 \left(\frac{2.38 \lambda_m}{\lambda} \right)^3 x \\ &\times \left[1 + \left(\frac{E}{m_o C^2} \psi^2 \right) \right]^2 \left\{ I_{2/3}^2(x) + \frac{\left(\frac{E}{m_o C^2} \psi \right)^2}{1 + \left(\frac{E}{m_o C^2} \psi \right)} I_{1/3}^2(x) \right\} d\lambda d\psi = \\ &= \frac{e_o^2}{\hbar C} \frac{3}{16\pi} \frac{C}{R^2} \left(\frac{E}{m_o C^2} \right)^5 \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} \frac{1}{2.38} \right) Z(\eta) d\lambda d\psi \end{aligned}$$

Le funzioni adimensionali $Z' = (\lambda / 2.38 \lambda_m) Z(\eta)$ sono state graficate in Fig. 10 mentre nella Fig. 11 sono riunite le funzioni $Z(\lambda / \lambda_m, \eta)$.

Il valore della costante moltiplicativa è:

$$\frac{e_o^2}{\hbar C} \frac{3}{16\pi} \frac{C}{R^2} \left(\frac{E}{m_o C^2} \right)^5 = 3.71 \times 10^8 \frac{[E(\text{GeV})]^5}{[R(\text{m})]^2} \frac{\text{fot}}{\text{sec Å mRAD elet.}}$$

10.

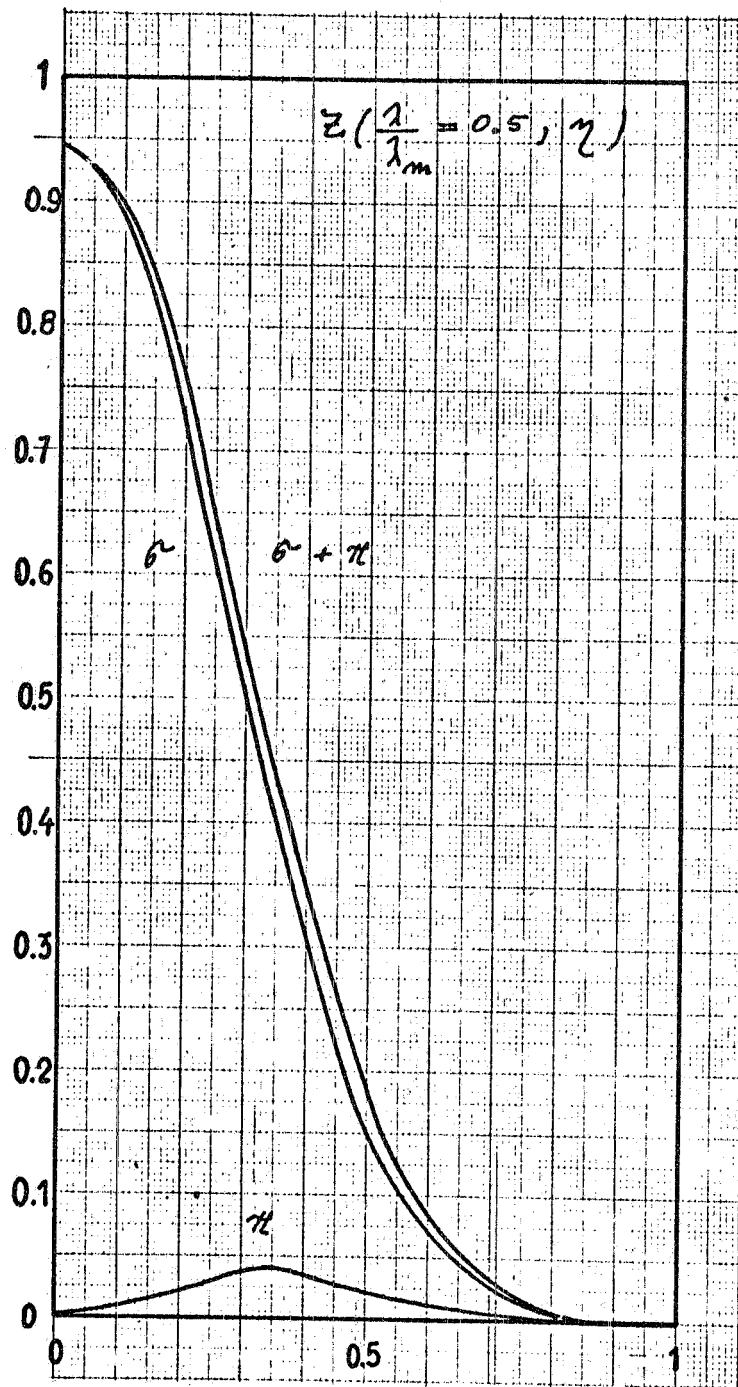


FIG. 3

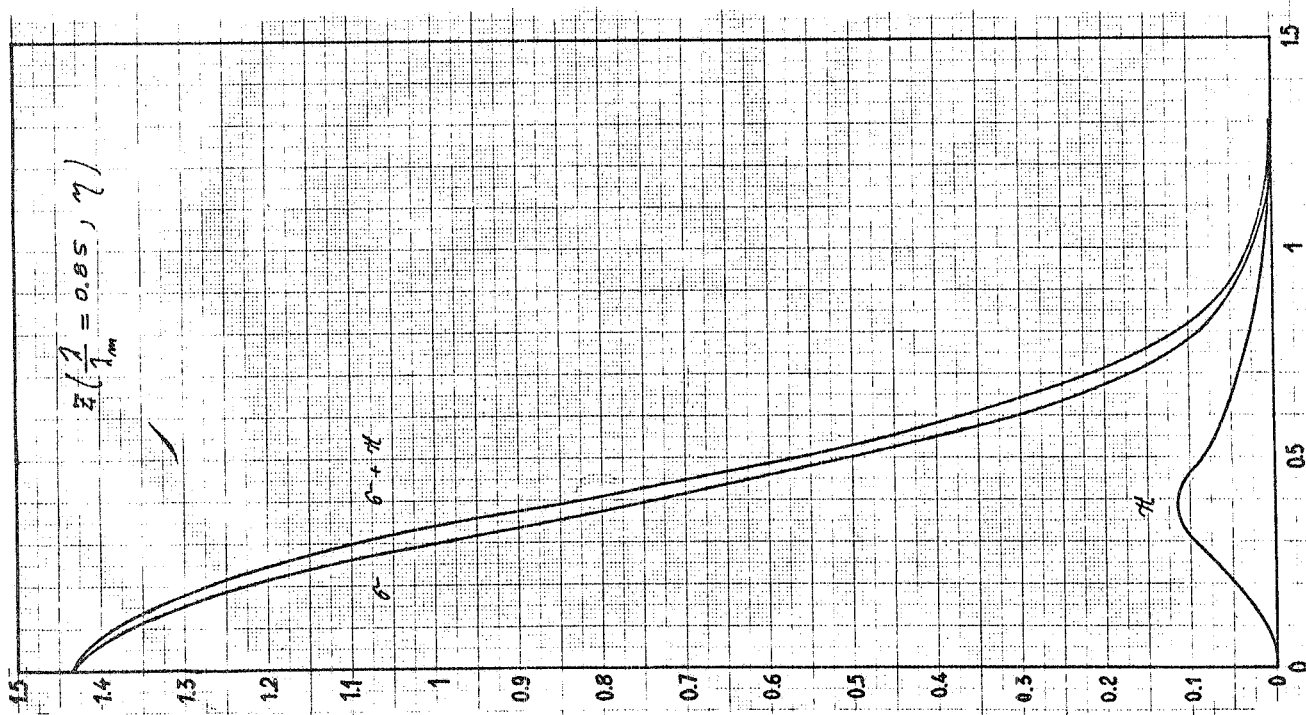


FIG. 4

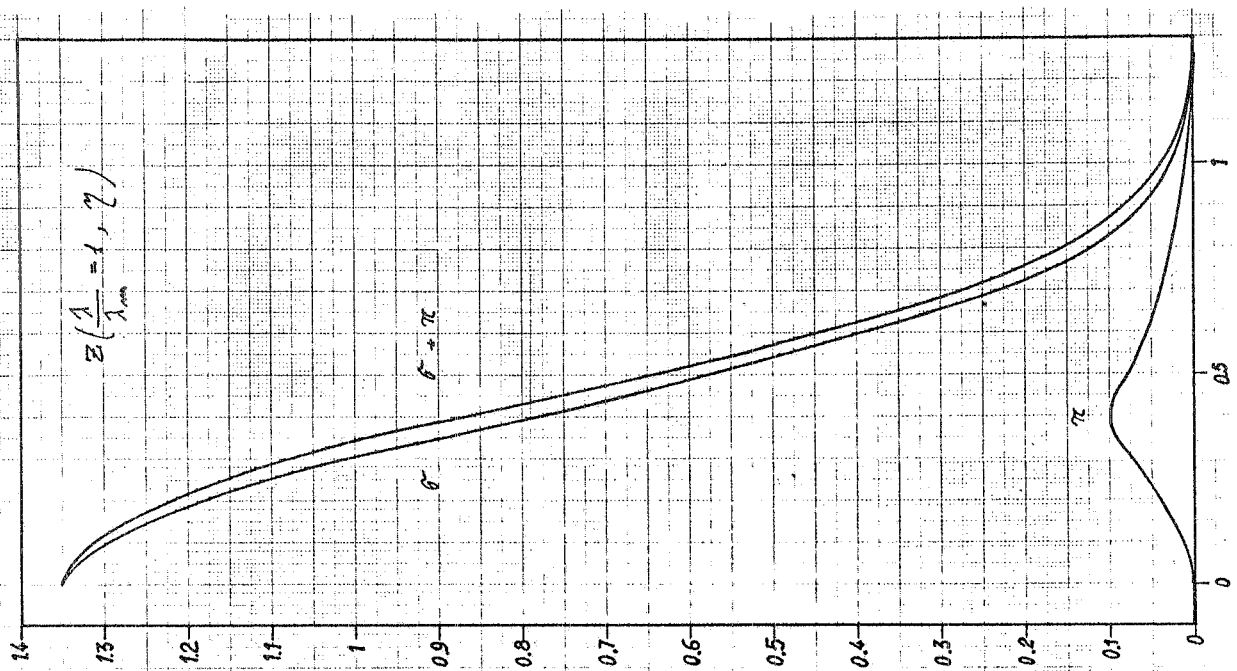


FIG. 5

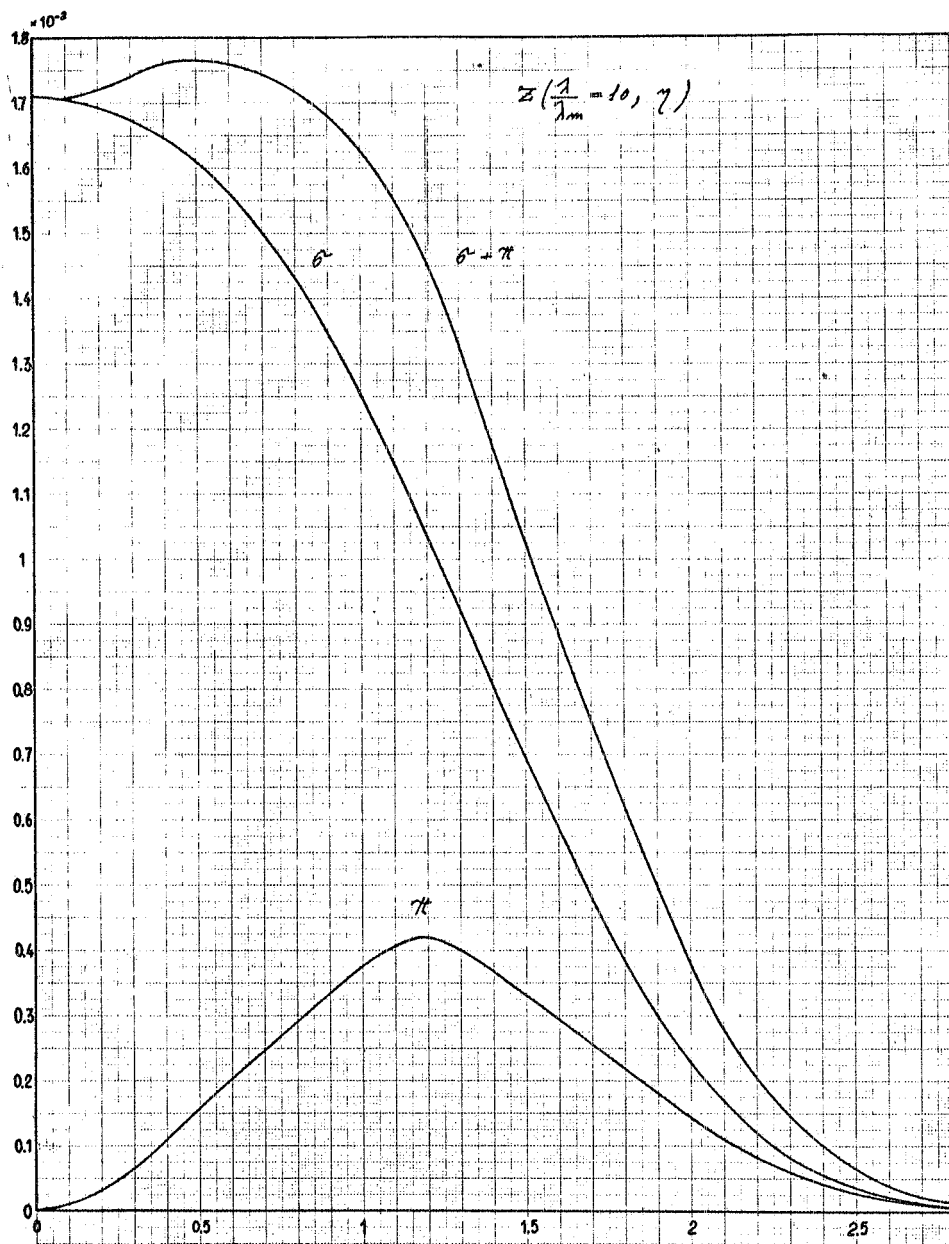


FIG. 6

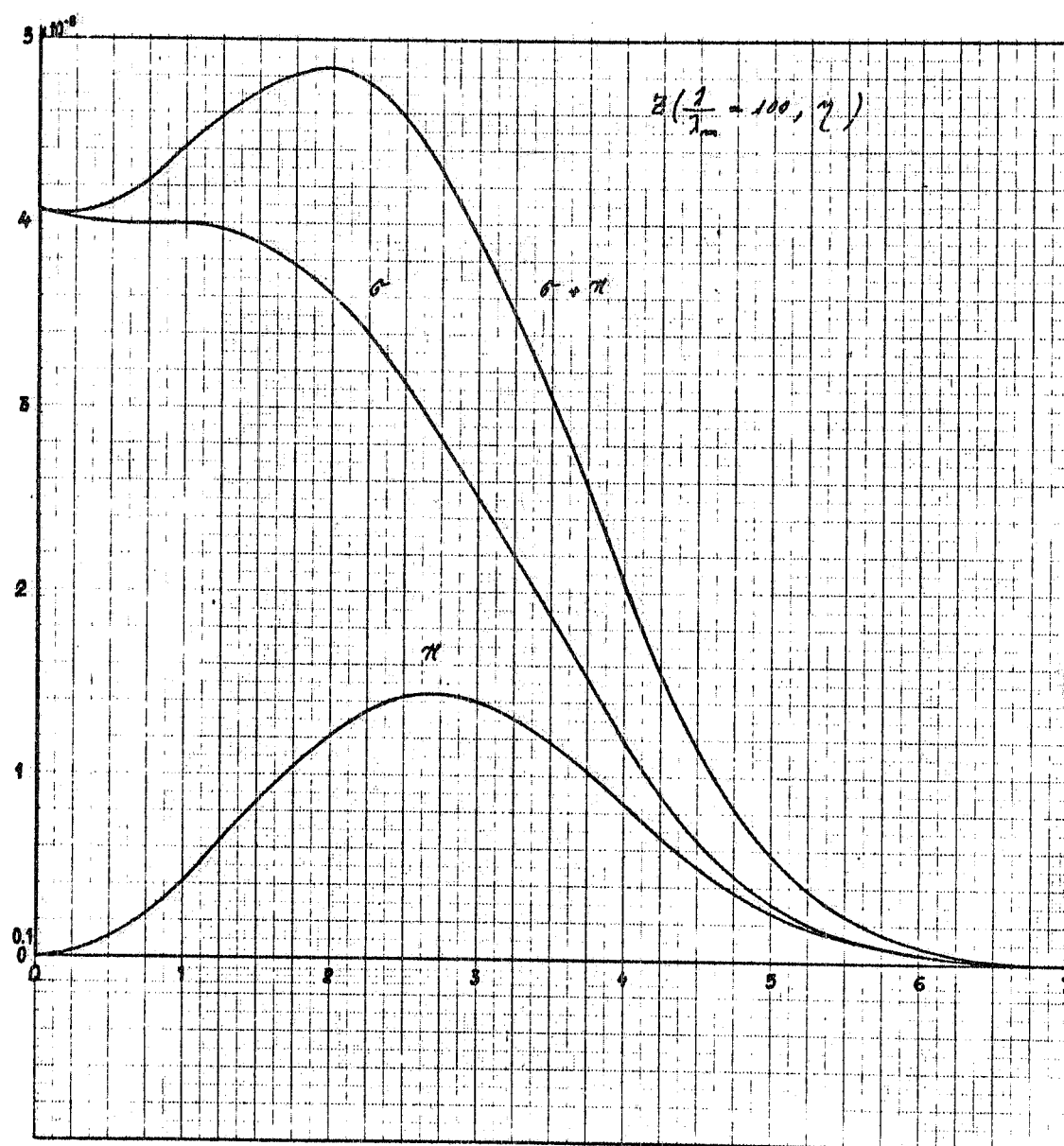


FIG. 7

14.

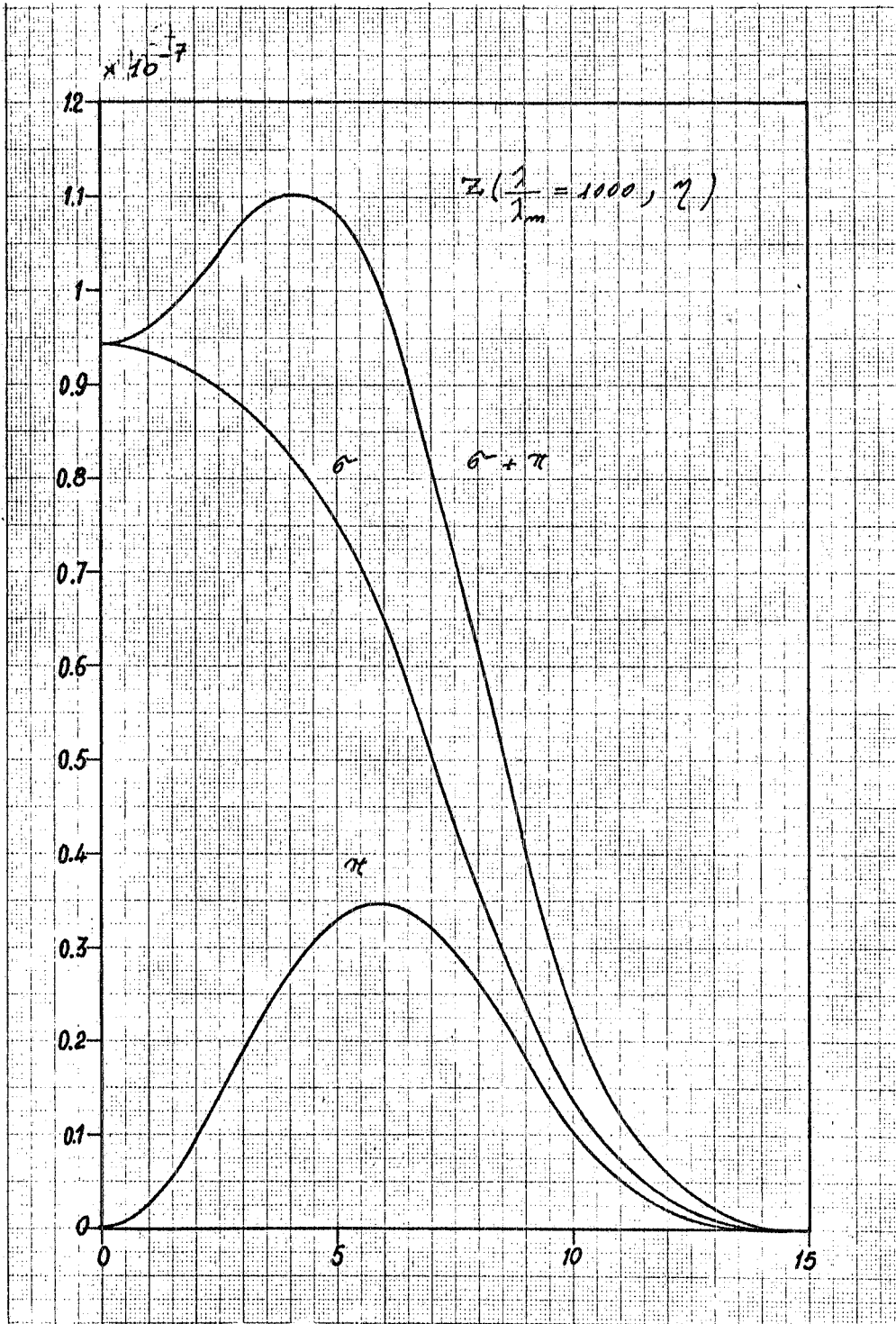


FIG. 8

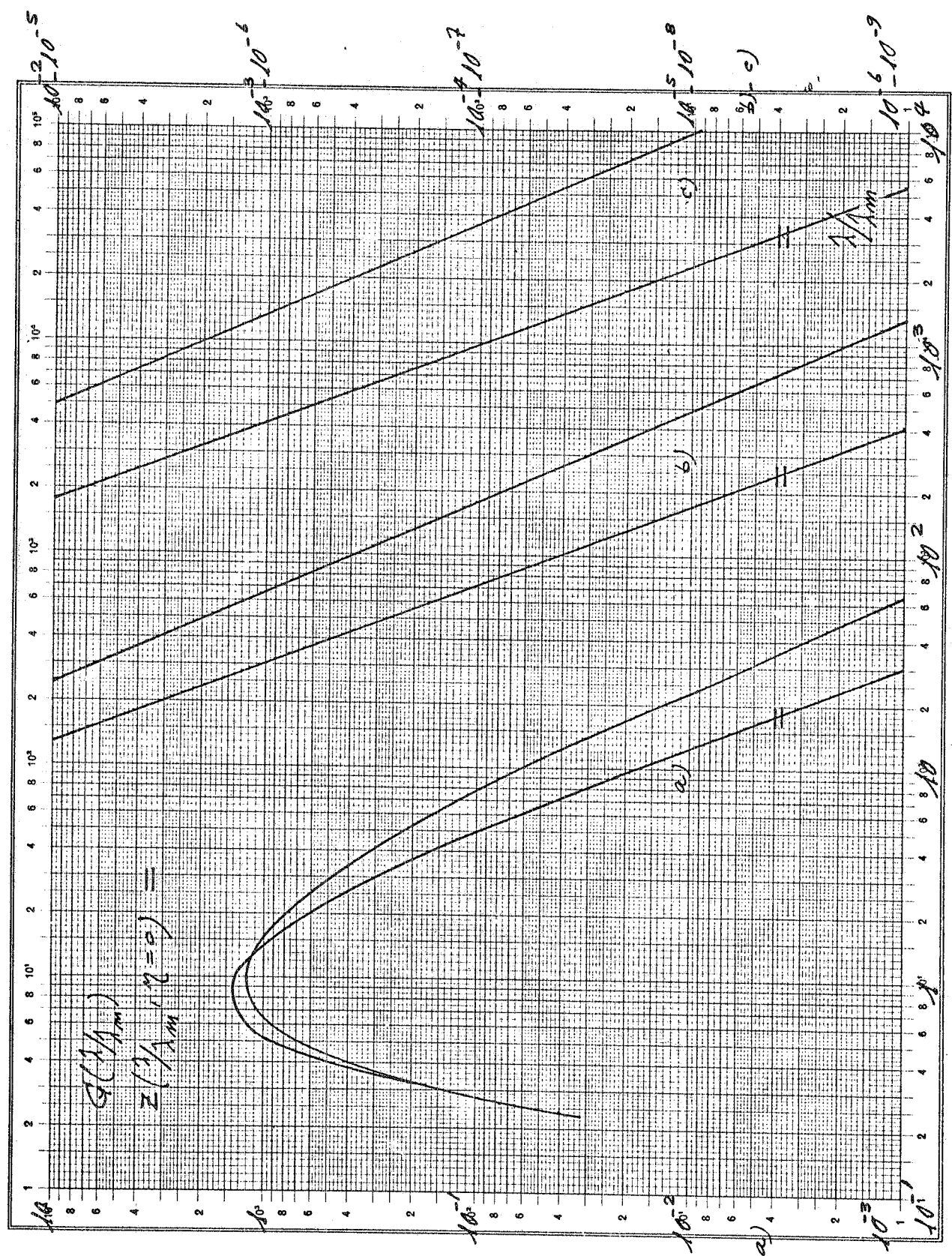


FIG. 9

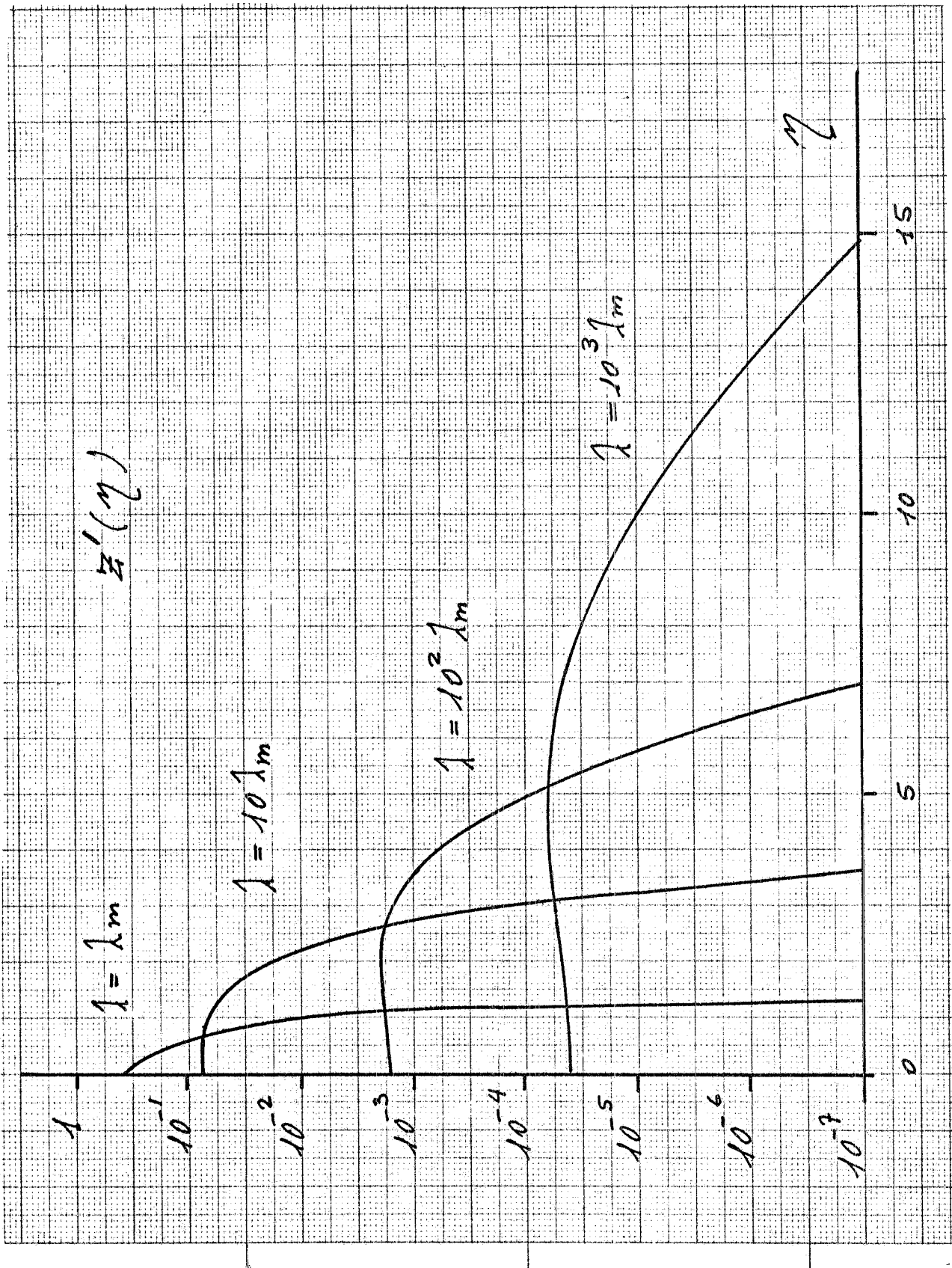


FIG. 10

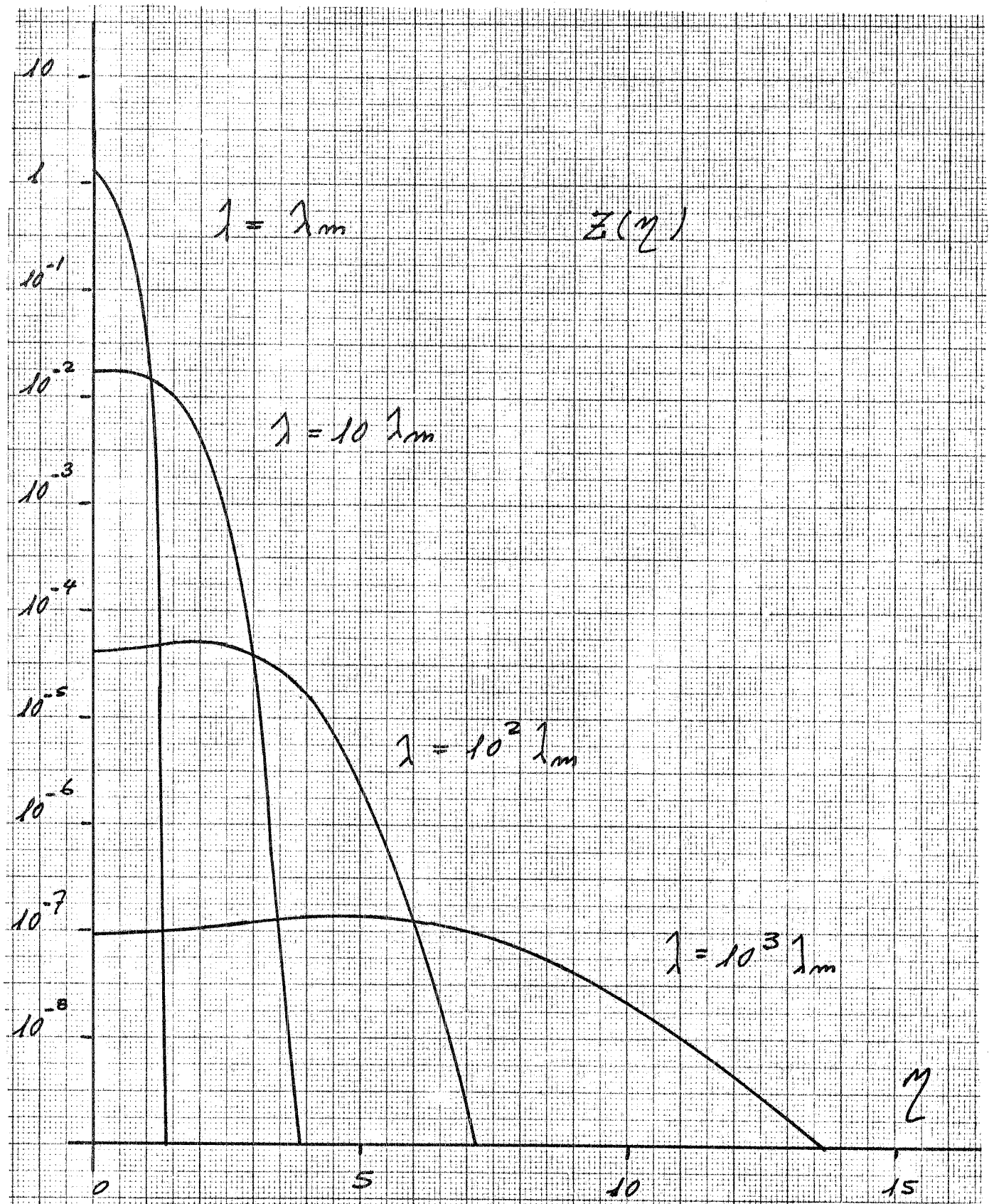


FIG. 11

APPROSSIMAZIONE PER LA DETERMINAZIONE DELL'ANGOLO DI ELEVAZIONE. -

Invece di calcolare la funzione di distribuzione angolare a tutte le lunghezze d'onda diamo un criterio approssimato con il quale è possibile determinare il valore dell'ampiezza angolare in cui la intensità di radiazione è praticamente tutta quella emessa alla lunghezza d'onda scelta. Poichè la distribuzione spettrale su tutto l'angolo solido, Ω , è nota potremo scrivere l'identità:

$$\left[\frac{dW(\lambda/\lambda_c)}{d\lambda} \right]_{\Omega} = 2 \int_0^{\Delta\psi} A Z(\lambda/\lambda_m, \psi) d\psi$$

Ora eseguiamo la seguente approssimazione:

$$(9) \quad \left[\frac{dW(\lambda/\lambda_c)}{d\lambda} \right]_{\Omega} = 2 A Z(\lambda/\lambda_m, \eta = \psi = 0) \frac{m_0 C^2}{E} \Delta\eta$$

da cui otteniamo

$$\Delta\eta = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{G(\lambda/\lambda_c = \lambda/\lambda_m^{0.42})}{Z(\lambda/\lambda_m, \eta = 0)} = 0.552 \frac{G(\lambda/\lambda_m^{0.42})}{Z(\lambda/\lambda_m, \eta = 0)}$$

$$\Delta\psi = \frac{m_0 C^2}{E} 0.552 \frac{G}{Z}.$$

Il valore $\Delta\eta$, così calcolato, rappresenta il valore dell'ascissa delle curve di distribuzione angolare; moltiplicato per 2 dà il valore $2\Delta\eta = \Delta\eta_0$ doppio dell'angolo di elevazione, centrato rispetto al piano orbitale per il quale è valida l'approssimazione (9). E' chiaro che l'approssimazione è per difetto, ma se si ha l'accortezza di raddoppiare il valore $\Delta\eta_0$ si nota, dall'andamento delle funzioni $Z(\lambda/\lambda_m, \eta)$, che ora tutta la radiazione è raccolta nell'angolo $2\Delta\eta_0$, ovvero $2\Delta\psi_0$.

Comunque, si può dire, che per valori $\lambda/\lambda_m \simeq 1$ le funzioni G e Z sono circa uguali per cui:

$$\Delta\psi = 0.552 \frac{m_0 C^2}{E} = \frac{0.28}{E(\text{GeV})} \text{ mRAD}$$

Mentre per valori $\lambda / \lambda_m \gg 1$ la approssimazioni (9), introducendo le curve asintotiche, da:

$$\Delta \eta = (0.42 \frac{\lambda}{\lambda_m})^{1/3} \frac{\Gamma(1/3)}{2} = 1.035 (\frac{\lambda}{\lambda_m})^{1/3}$$

$$\Delta \psi = \frac{m_0 C^2}{E} \Delta \eta = \frac{0.53}{E(\text{GeV})} (\frac{\lambda}{\lambda_m})^{1/3} \text{ mRAD.}$$

La Fig. 12 mostra l'andamento del parametro di elevazione, $\Delta \eta$, calcolato in approssimazione asintotica ed il valore dello stesso quando la funzione Z assume il valore 10^{-2} alle varie lunghezze d'onda.

Si nota che per valori della lunghezza d'onda $\lambda / \lambda_m < 10^2$ il fattore ottimo moltiplicativo è 2 ciò implica che vicino al massimo irraggiamento $\Delta \psi = 2 \times 0.552 (m_0 C^2 / E) \cong (m_0 C^2 / E)$, come è ben noto. A valori $\lambda / \lambda_m > 10^2$ il fattore può essere ridotto al valore 1.6, per cui

$$\Delta \psi = 1.6 \frac{m_0 C^2}{E} 1.035 (\lambda / \lambda_m)^{1/3} = \frac{0.85}{E(\text{GeV})} (\lambda / \lambda_m)^{1/3}$$

In definitiva gli angoli totali, cioè il doppio dell'angolo di elevazione, entro cui è emessa la radiazione sono:

$$\Delta \psi_0 (\lambda < 10^2 \lambda_m) = \frac{1.024}{E(\text{GeV})} \text{ mRAD}$$

$$\Delta \psi_0 (\lambda > 10^2 \lambda_m) = \frac{1.70}{E(\text{GeV})} (\frac{\lambda}{\lambda_m})^{1/3} \text{ mRAD}$$

IL FATTORE DI ALLUNGAMENTO. -

L'orbita che gli elettroni percorrono in una macchina acceleratrice può pensarsi generata da una circonferenza di raggio R divisa in n settori uguali, i quali sono spostati lungo i loro assi mediani di una certa quantità.

Cosicchè si hanno i vertici dei settori siti su di una circonferenza concentrica a quella originale. L'orbita effettiva è, allora, costituita

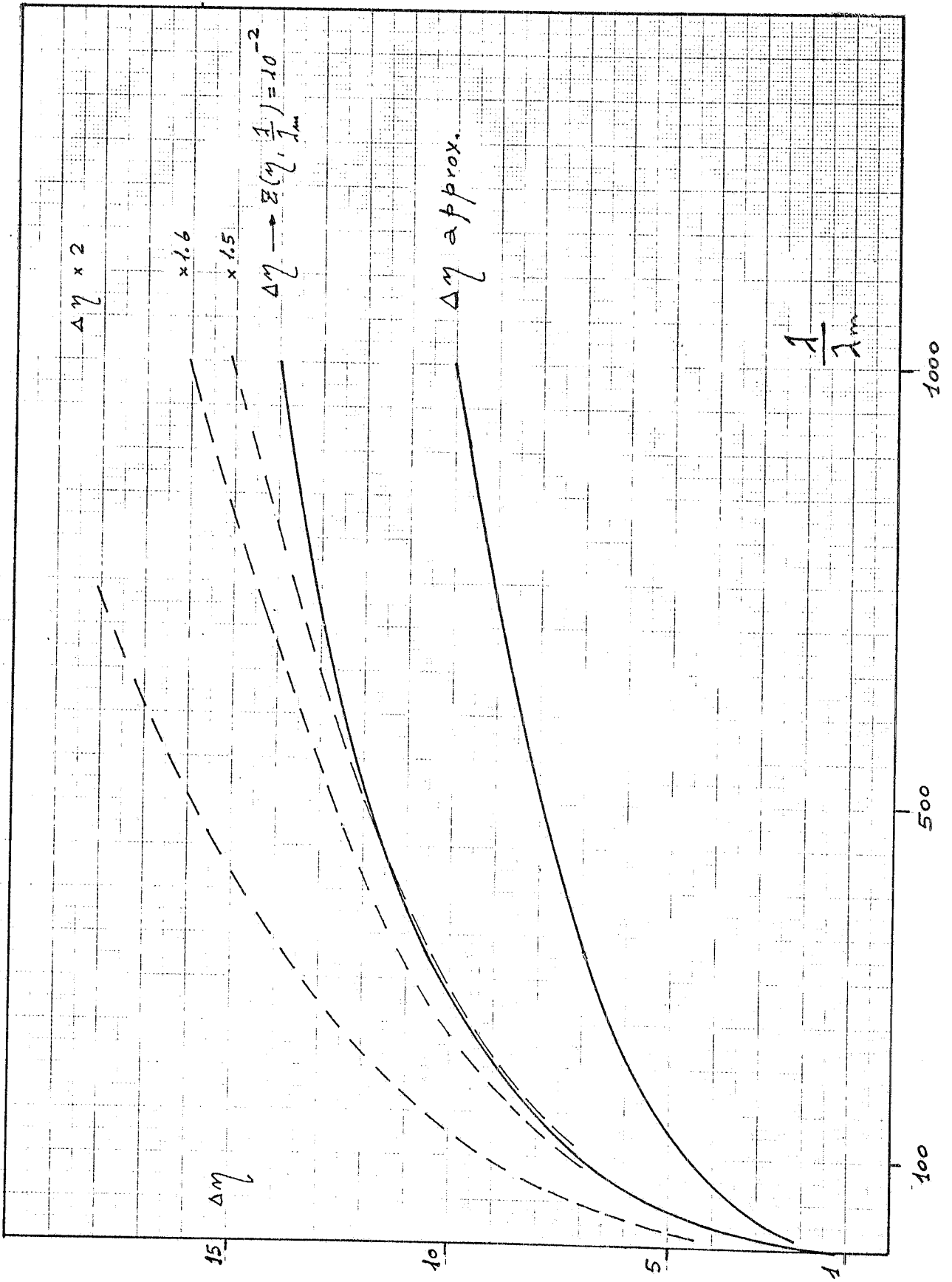


FIG. 12

da segmenti rettilinei tangenti agli estremi a due settori adiacenti. Ciascun settore sia φ_0 rad. e ciascun segmento sia lungo L , allora la lunghezza dell'orbita è:

$$n \varphi_0 R + nL = 2\pi R + nL$$

ed il tempo impiegato a percorrerla è:

$$T^x = \frac{2\pi R}{C} \left(1 + \frac{nL}{2\pi R}\right) \equiv \Lambda \frac{2\pi R}{C} \equiv \Lambda T$$

ove T è il periodo di rivoluzione di un elettrone sull'orbita originale.

Se $E(t) d\Omega$ è il valore dell'energia irradiata al tempo t nello angolo solido $d\Omega$, la sua media nel tempo T^x è:

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{T^x} \int_0^{T^x} E(t) d\Omega dt \\ &= \frac{1}{\Lambda} \frac{\omega_0}{2\pi} \left\{ \int_0^T E(t) d\Omega dt + n \int_0^{T(L)} E(t) d\Omega dt \right\} \end{aligned}$$

ove $T^x = T + nT(L)$ essendo $T(L)$ il tempo impiegato a percorrere un segmento rettilineo.

Poichè l'ultimo integrale è zero, l'energia media irradiata è:

$$dW = \frac{1}{\Lambda} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T E(t) d\Omega dt$$

che rappresenta, a parte il fattore Λ^{-1} , la distribuzione discreta data per la prima volta da Scott nel 1907. Perciò tutte le formule già scritte, quando applicate ad un caso reale, debbono essere divise per il fattore di allungamento.

Ovviamente una volta nota la corrente elettronica circolante nello anello acceleratore, il numero di elettroni è espresso dalla relazione:

$$N = I(A) \frac{2\pi R \Lambda}{1.6 \times 10^{-19} \text{ Coulomb} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/sec}} =$$

$$= I(A) R(m) \Lambda 1.31 \times 10^{11} \text{ elettroni}$$

ALCUNE CONSIDERAZIONI. -

La caratteristica fondamentale della radiazione emessa da un elettrone in moto circolare uniforme è quella di possedere due sole componenti del campo elettrico: l'una, σ , parallela al piano orbitale, l'altra, π , perpendicolare al piano orbitale.

Lo studio della intensità di queste componenti mostra che la prima è sempre molto più grande della seconda, non solo ma la π ha valori diversi da zero solo per valori crescenti dell'angolo di elevazione e della lunghezza d'onda. In particolare la totale energia irradiata a tutti gli angoli ed a tutte le lunghezze d'onda è così distribuita tra le due esponenti σ e π :

$$W_o = \frac{2}{3} \frac{C e_o^2}{(1-\beta^2)^2} \frac{\beta^4}{R^2} \left\{ \left(\frac{7}{8}\right) \sigma + \left(\frac{1}{8}\right) \pi \right\}$$

che è la formula classica di Liénard.

Le componenti σ e π in funzione dell'angolo di elevazione sono:

$$dW_\sigma = \frac{C e_o^2}{8 \pi R^2} \beta^4 \frac{4+3\beta^2 \cos^2 \psi}{(1-\beta^2 \cos^2 \psi)^{5/2}} \cos \psi \, 2 \pi \, d\psi$$

$$dW_\pi = \frac{C e_o^2}{8 \pi R^2} \beta^4 \frac{\sin \psi (4+\beta^2 \cos^2 \psi)}{(1-\beta^2 \cos^2 \psi)^{7/2}} \cos \psi \, 2 \pi \, d\psi$$

Cioè si ha il risultato interessante che all'aumentare della energia la componente σ aumenta, del resto questo risultato è ricavabile dallo andamento delle funzioni $Z(\eta)$.

Chiaramente, eccetto che per $\psi = 0$ per cui si ha la sola componente σ , per valori $\psi \neq 0$ le due componenti ortogonali danno luogo, a ciascuna lunghezza d'onda, ad una polarizzazione ellittica, come può verificarsi (la loro differenza di fase essendo pari a $|\pi/2|$). La possibilità di avere una intensa componente è di estrema utilità nella sperimentazione

della fisica dello stato solido in quanto le proprietà fisiche dipendono fortemente dallo stato di polarizzazione. Cosicché, nelle esperienze, dovendo usarsi prima un collimatore seguito da un monocromatore, quest'ultimo deve avere l'elemento dispersivo posizionato in modo tale da non affettare lo stato di polarizzazione e possedere una buona riflettività.

La collimazione si ottiene ponendo il monocromatore ad una distanza dall'orbita tale da poter considerare i raggi quasi paralleli.

Ora le formule di Fresnel, sulla riflettività, mostrano che i requisiti voluti si ottengono per incidenza quasi normale o quasi radente, mentre i tratti del reticolo dispersivo debbono essere paralleli al vettore elettrico.

Avendo il reticolo i tratti paralleli al piano orbitale, che è sempre orizzontale, ne viene che i sistemi ottici si sviluppano nel piano verticale, al contrario dei monocromatori convenzionali.

E' dato che la fenditura ha una dimensione verticale, la cui larghezza determina l'intervallo di lunghezza d'onda centrato ad un valore prescelto, la larghezza della fenditura in orizzontale determina solo l'arco di orbita radiante, cioè w/d ovvero la potenza raccolta.

Ora le risoluzioni richieste nelle esperienze sono generalmente dell'ordine di qualche \AA e dato che un buon monocromatore ha una dispersione lineare di circa $8 \text{\AA} / \text{mm}$, la larghezza della fenditura in verticale è dell'ordine dei decimi di millimetro. Con ciò la potenza raccolta è un valore inferiore al caso in cui il reticolo sia un elemento focalizzante la radiazione. In questo caso la radiazione elettromagnetica incide il reticolo concavo direttamente senza passare per alcuna fenditura, dopodichè focalizza sulla fenditura di uscita. Ora si ha un w ed un angolo di elevazione maggiori e quindi una potenza maggiore. Cosicché viene utile il metodo approssimato sviluppato.

LE MACCHINE NON DISTRUTTIVE (ANELLI DI ACCUMULAZIONE). -

E' chiaro che coloro i quali intendano costruire una macchina acceleratrice a elettroni da usarsi come "lampada", debbono porsi alcuni criteri di scelta. Essi, sulla base delle possibili esperienze da compiersi nei vari campi della fisica che usano sorgenti dai raggi X fino allo infrarosso (vedi: Rendiconti del Congresso sugli impieghi Scientifici della luce di sincrotrone; Scuola Normale Superiore Pisa - 9 Aprile 1973), sono:

1) la corrente elettronica circolante, ovvero il numero di elettroni orbitanti.

2) La più corta lunghezza d'onda ottenibile alla quale la intensità irraggiata è utile.

3) Macchine acceleratrici; distruttive o NON distruttive.

Le condizioni ideali potrebbero essere 1 Amp. di corrente con una intensità massima ad 1 A e quindi una intensità ragionevole fino a 0.5 A. Tali richieste non sono al di fuori della realtà se alcuni gruppi stranieri vi pensano concretamente (vedi: A Plan for future Research with Synchrotron Radiation based on a dedicated Storage Ring; Science Research Council, 2 Aprile 1974). A questo proposito, cioè ottenere intensità alte a lunghezze d'onda più corte, sarebbe interessante poter applicare alla struttura magnetica di Adone un dispositivo tale che, ferma restando l'energia orbitale, sposti la lunghezza d'onda a valori più piccoli.

Ciò potrebbe realizzarsi introducendo magneti produttori intensi campi magnetici in regioni di spazio nelle quali la curvatura dell'orbita è più piccola. Poichè la lunghezza d'onda, alla intensità massima, è proporzionale al raggio di curvatura dell'orbita, un fattore di riduzione in questo riduce in conseguenza la lunghezza d'onda.

E' altresì chiaro che un tale "attrezzo" dovrebbe usare un magnete superconduttore poichè i campi magnetici raggiungerebbero valori di alcuni tesla.

Un esempio potrebbe essere quello di uno speciale magnete superconduttore per Adone che riducesse, in una certa regione, il raggio di curvatura dell'orbita ad 1 mt per cui avremmo la massima intensità irraggiata a $\lambda_m = 0.7 \text{ \AA}$. Non solo, ma essendo la intensità irraggiata inversamente proporzionale $R^{2/3} \lambda_m^{7/3}$ guadagneremmo in proporzione, secondo la (1), il fattore:

$$\frac{dW(R=1\text{mt})}{dW(R=5\text{mt})} = \left[\frac{R(=5\text{mt})}{R(=1\text{mt})} \right]^3 = \left[\frac{\lambda_m(=3.5 \text{ \AA})}{\lambda_m(=0.7 \text{ \AA})} \right]^3 = 5^3 \quad \text{nell'intensità;}$$

mentre per i fotoni emessi avremmo secondo la (4) il fattore:

$$\frac{dn(R=1\text{mt})}{dn(R=5\text{mt})} = \left[\frac{R(=5\text{mt})}{R(=1\text{mt})} \right]^2 = \left[\frac{\lambda_F(=5\text{mt})}{\lambda_F(1\text{mt})} \right]^2 = 5^2$$

Un esempio, all'università del Wisconsin presso "The Synchrotron Radiation Center", di un simile attrezzo (Wavelength shifter) applicato allo anello di accumulazione da 240 MeV sposta la lunghezza d'onda da $\simeq 180 \text{ \AA}$ a $\simeq 100 \text{ \AA}$ con un guadagno di circa un fattore 3 nel numero di fotoni emessi alla massima emissione. A parte lo studio degli specialisti in macchine acceleratrici, un tale "attrezzo" richiederebbe un non indif-

ferente impegno tecnologico per altri gruppi interessati alle competenze criogeniche e superconduttive.

Comunque, nei Laboratori di Frascati, esiste una macchina acceleratrice, Adone, con caratteristiche non disprezzabili. La massima intensità irraggiata è $\approx 300 \text{ Watt}/\text{\AA}$ a 3.5 \AA (energia orbitale 1.5 GeV , 10^{11} elettroni). Adone è una macchina non distruttiva ed indubbiamente, ai fini delle esperienze, essa è superiore rispetto ad una macchina distruttiva (sincrotrone).

A causa della legge sinusoidale della energia orbitale degli elettroni, un sincrotrone può usarsi al più solo per metà del suo periodo; non solo, mano mano che si scende con la lunghezza d'onda sino a quella di massimo irraggiamento il tempo di uso diviene sempre più piccolo. Così per portare un esempio alla lunghezza d'onda di $\approx 8 \text{ \AA}$, ove si ha il massimo irraggiamento nel sincrotrone di Frascati, il duty-cycle è dell'ordine di $1/50$, mentre a 5000 \AA esso sarà dell'ordine di $1/5$, comunque sempre minore di $1/2$ periodo, cioè 25 msec .

In una macchina non distruttiva, a parte il tempo di iniezione di diversi minuti, gli elettroni circolano in moto stazionario per ore, per cui la radiazione emessa è continua, a parte la modulazione introdotta dalla radiofrequenza la quale rifornisce l'energia agli elettroni.

Questi due fatti competitivi si ripercuotono direttamente nell'intensità irraggiata, nel primo caso essa è drasticamente ridotta rispetto al secondo.

Altro fatto di non trascurabile interesse è quello della pericolosità radiativa di una macchina distruttiva, che in $1/2$ periodo perde in decelerazione $10^{11} \div 10^{10}$ elettroni. Ciò comporta complicazioni in schermature e impossibilità di lavorare relativamente vicino all'arco di orbita irraggiante, e di conseguenza all'apparato sperimentale. Infine non deve dimenticarsi che ogni impulso, in un sincrotrone, è inevitabilmente diverso in intensità, sezione ed ampiezza delle oscillazioni, da ogni altro; ciò disturba e complica le esperienze. Fra l'altro le esperienze sono condotte con tecniche che necessitano di fasci luce continui o quasi e non pulsati per raggiungere quel grado di sofisticazione che le rende capaci di rivelare fenomeni che altrimenti non lo sono.

Infine è utile conoscere una stima delle fluttuazioni nell'energia orbitale. A causa della emissione di radiazione, essenzialmente concen-

trata nella direzione del moto, l'elettrone orbitale subisce, per reazione; una forza nella direzione opposta. Essa tende a frenarlo ma un opportuno rifornimento di energia mediante un campo elettrico alternato lo mantiene su di un'orbita che non è più fissa, ma ha una sua oscillazione caratteristica con una ampiezza ed una costante di tempo ben definite. Ciò comporta l'insorgere di fluttuazioni nella energia dell'elettrone orbitante.

Fluttuazione, ΔE , nella energia che può essere identificata nella energia perduta durante un tempo, τ , uguale a quello necessario e smorzare le oscillazioni.

In una rivoluzione, di durata $\Delta 2\pi R/C$ l'energia perduta per irraggiamento è

$$W(\text{rivoluz.}) = \frac{1}{A} \frac{2}{3} \frac{C e_o^2}{R^2} \left(\frac{E}{m_o C^2} \right)^4 \Delta \frac{2\pi R}{C} = 88.5 \times 10^3 \frac{[E \text{ GeV}]^4}{R(\text{m})} \text{ ev.}$$

Se f_o è la frequenza di rivoluzione, durante il tempo τ sarà persa per irraggiamento l'energia:

$$\Delta W = \frac{4\pi}{3} \frac{e_o^2}{R} \left(\frac{E}{m_o C^2} \right)^4 f_o \tau$$

Sia $\langle h\nu \rangle$ l'energia media dei fotoni emessi, il numero medio di fotoni sarà:

$$\bar{n} = \frac{\Delta W}{\langle h\nu \rangle}$$

Perciò la fluttuazione quadratica media nel numero di fotoni, seguendo la distribuzione di Poisson, è: $(\Delta n)^2 = \bar{n}$; di conseguenza la fluttuazione nella energia perduta sarà:

$$\Delta E = \sqrt{(\Delta E)^2} = \langle h\nu \rangle \sqrt{\bar{n}} = \sqrt{\langle h\nu \rangle \Delta W}$$

e questa sola fluttuazione tiene conto della fluttuazione dell'energia degli elettroni; mentre l'energia perduta $\Delta W = \bar{n} \langle h\nu \rangle$ è compensata dal campo alternato.

Se ora assumiamo il valore medio dell'energia dei fotoni come quello corrispondente al valore della frequenza critica, cioè $\langle h\nu \rangle \simeq \hbar c/R (E/m_o C^2)^3$, otteniamo:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E^{5/2}}{R} \left[f_o \tau \right]^{1/2} \frac{\left[\hbar C \frac{4}{3} \pi \right]^{1/2} e_o}{(m_o C^2)^{7/2}} =$$

$$= \frac{[E(\text{GeV})]^{5/2}}{R(\text{m})} \left[f_o \tau \right]^{1/2} 1.12 \times 10^{-5}$$

APPLICAZIONE AD ADONE. -

L'anello di accumulazione, Adone, dei Laboratori di Frascati ha le seguenti caratteristiche:

numero elettroni accelerati	$10^{11} \leq n \leq 310^{11}$
settore magnetico	$R = 5 \text{ m}; \varphi_o = \pi/6$
sezione diritta	$L = 6.13 \text{ m}$
numero settori + sezioni	$12 + 12$
energia orbitale	$E(\text{GeV}) \leq 1.5$

Dati gli ingombri dei magneti focalizzanti alle testate delle sezioni diritte è libero un'arco di orbita, all'inizio del settore magnetico, di circa $8^\circ \cong 0.14 \text{ rad}$. Ad una distanza di 20 m ed una larghezza di fenditura di 1 mm il fattore geometrico è $w/2\pi d = 10^{-3}/12.56 \cong 8 \cdot 10^{-5}$, usando un elemento focalizzante si può maggiorare il fattore geometrico di un fattore 10^2 , la potenza raccolta non sarà in proporzione a causa della riflettività diversa dall'unità.

Le lunghezze d'onda alla massima emissione sono:

$$\lambda_m(\text{\AA}) = \frac{2.35 \times R(\text{m})}{E^3(\text{GeV})} = \frac{11.75}{E^3(\text{GeV})} \geq 3.49 \text{\AA}$$

$$\lambda_F(\text{\AA}) = \frac{3.91 R(\text{m})}{E^3(\text{GeV})} = \frac{19.55}{E^3(\text{GeV})} \geq 5.82 \text{\AA}$$

mentre il fattore di allungamento è:

$$A = 1 + \frac{nL}{2\pi R} = 3.34 \cong \frac{10}{3}$$

Le curve necessarie al tracciamento grafico della intensità e del numero

di fotoni emessi, in termini del numero di elettroni $N = 10^{11}$, sono:

$$\frac{dW(\lambda_m)}{d\lambda} = \frac{5.4}{A} 10^{-7} [R(m)]^{-2/3} [\lambda_m(\text{\AA})]^{-7/3} N = 5.51 \times 10^3 [\lambda_m(\text{\AA})]^{-7/3} \frac{\text{Watt}}{\text{\AA}}$$

$$\frac{dW(\lambda \gg \lambda_m)}{d\lambda} = \frac{7.3}{A} 10^{-6} [R(m)]^{-2/3} [\lambda(\text{\AA})]^{-7/3} N = 7.5 \times 10^4 [\lambda(\text{\AA})]^{-7/3} \frac{\text{Watt}}{\text{\AA}}$$

$$\frac{dn(\lambda_F)}{d\lambda} = \frac{8.42}{A} 10^8 [R(m)]^{-2/3} [\lambda_F(\text{\AA})]^{-4/3} N = 8.65 \times 10^{17} [\lambda_F(\text{\AA})]^{-4/3} \frac{\text{fot}}{\text{sec \AA}}$$

$$\frac{dn(\lambda \gg \lambda_F)}{d\lambda} = \frac{4.55}{A} 10^9 [R(m)]^{-2/3} [\lambda(\text{\AA})]^{-4/3} N = 3.67 \times 10^{18} [\lambda(\text{\AA})]^{-4/3} \frac{\text{fot}}{\text{sec \AA}}$$

Le Figure 13 e 14 danno la intensità ed il numero di fotoni emessi nello anello di accumulazione Adone per $N = 10^{11}$ elettroni a varie energie in funzione della lunghezza d'onda.

L'intensità ed il numero dei fotoni emessi sempre per lo stesso numero di elettroni, in funzione dell'angolo di elevazione sono dati nelle Figure 15, 16, 17 e 18. Le funzioni graficate sono:

$$\frac{dW(\lambda/\lambda_m, \psi)}{d\lambda d\psi} = \frac{1.31}{A} 10^{-7} \frac{[E(\text{GeV})]^8}{[R(m)]^3} Z(\psi = \frac{5.12 \cdot 10^{-4}}{E(\text{GeV})} \eta, \frac{\lambda}{\lambda_m}) N =$$

$$= \begin{cases} (E=1.5 \text{ GeV}) = 8.07 \times 10^2 Z \frac{\text{Watt}}{\text{\AA MRAD}} \\ (E=1 \text{ GeV}) = 3.15 \times 10 Z \frac{\text{Watt}}{\text{\AA MRAD}} \end{cases}$$

$$\frac{dn(\lambda/\lambda_m, \psi)}{d\lambda d\psi} = \frac{3.71}{A} 10^8 \frac{[E(\text{GeV})]^5}{[R(m)]^2} Z'(\psi = \frac{5.12 \cdot 10^{-4}}{E(\text{GeV})} \eta, \frac{\lambda}{\lambda_m}) N =$$

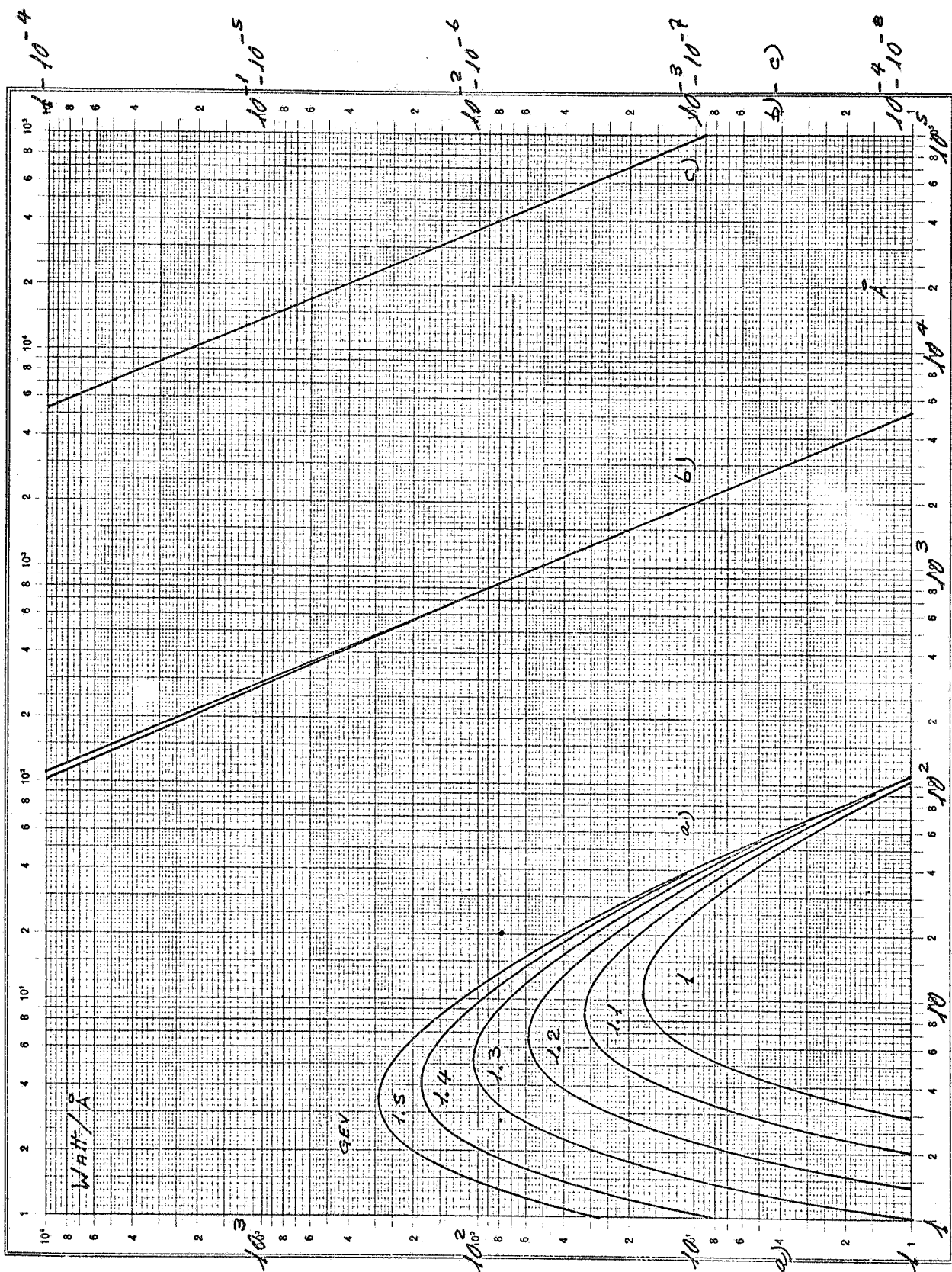


FIG. 13

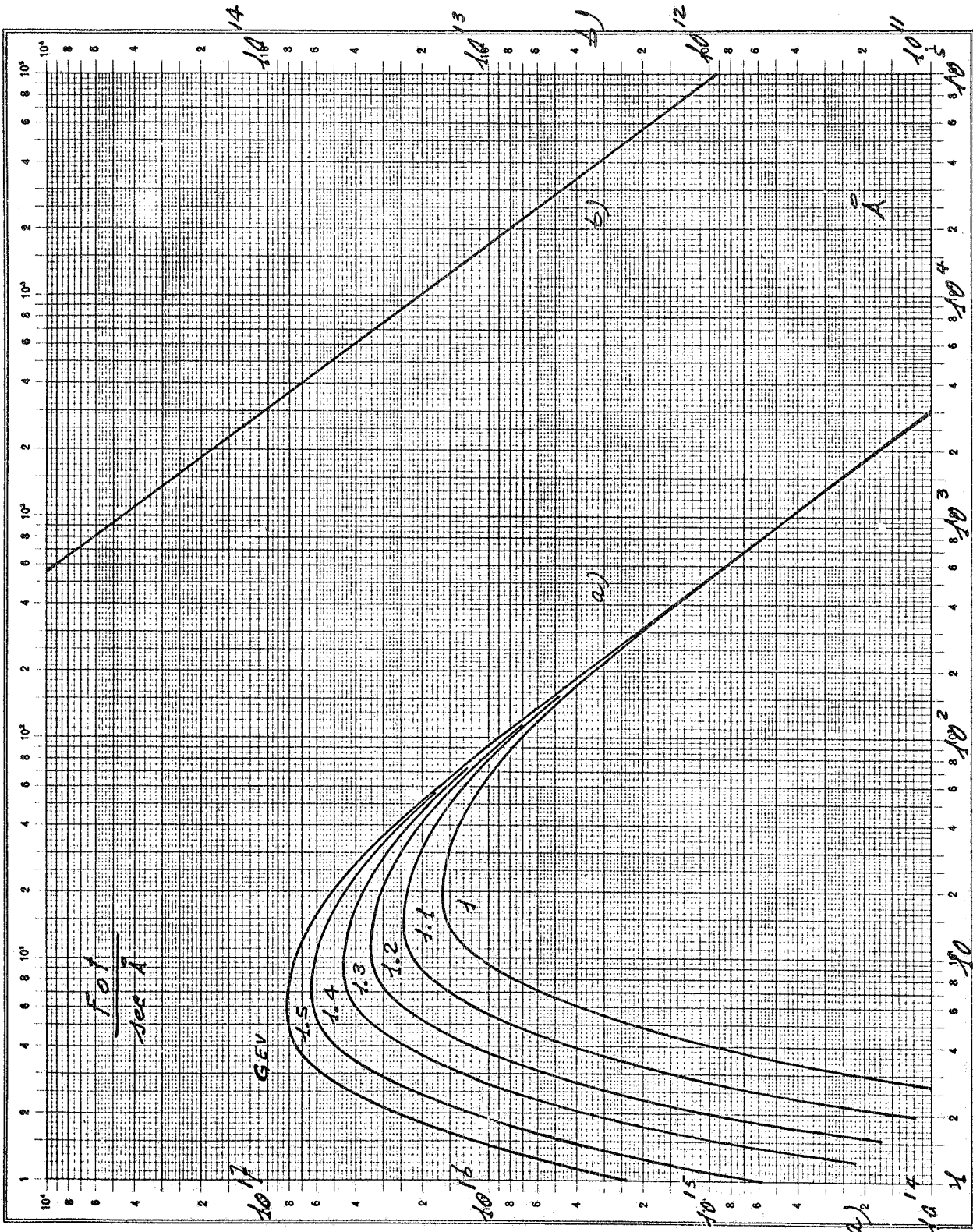


FIG. 14

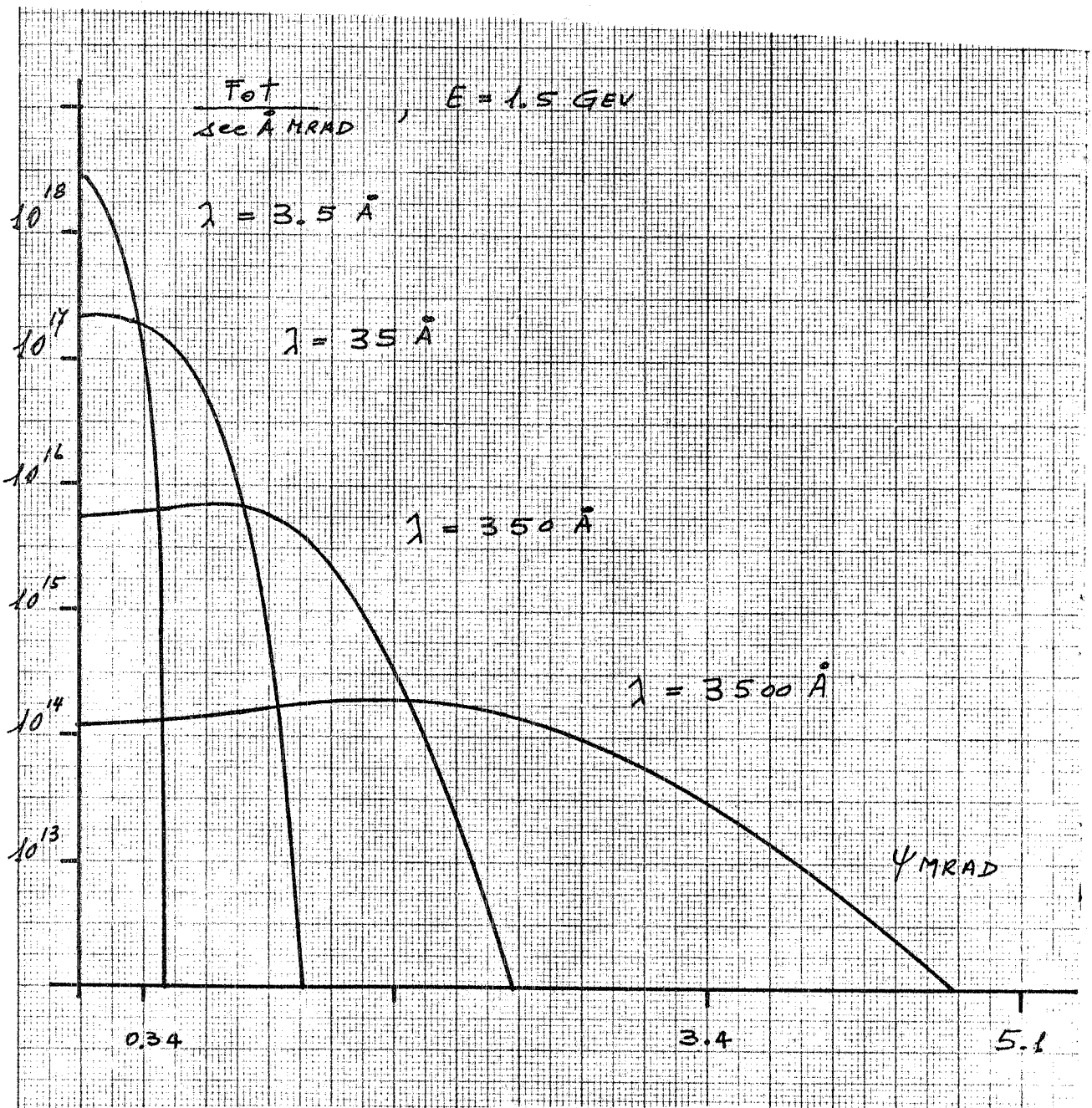


FIG. 15

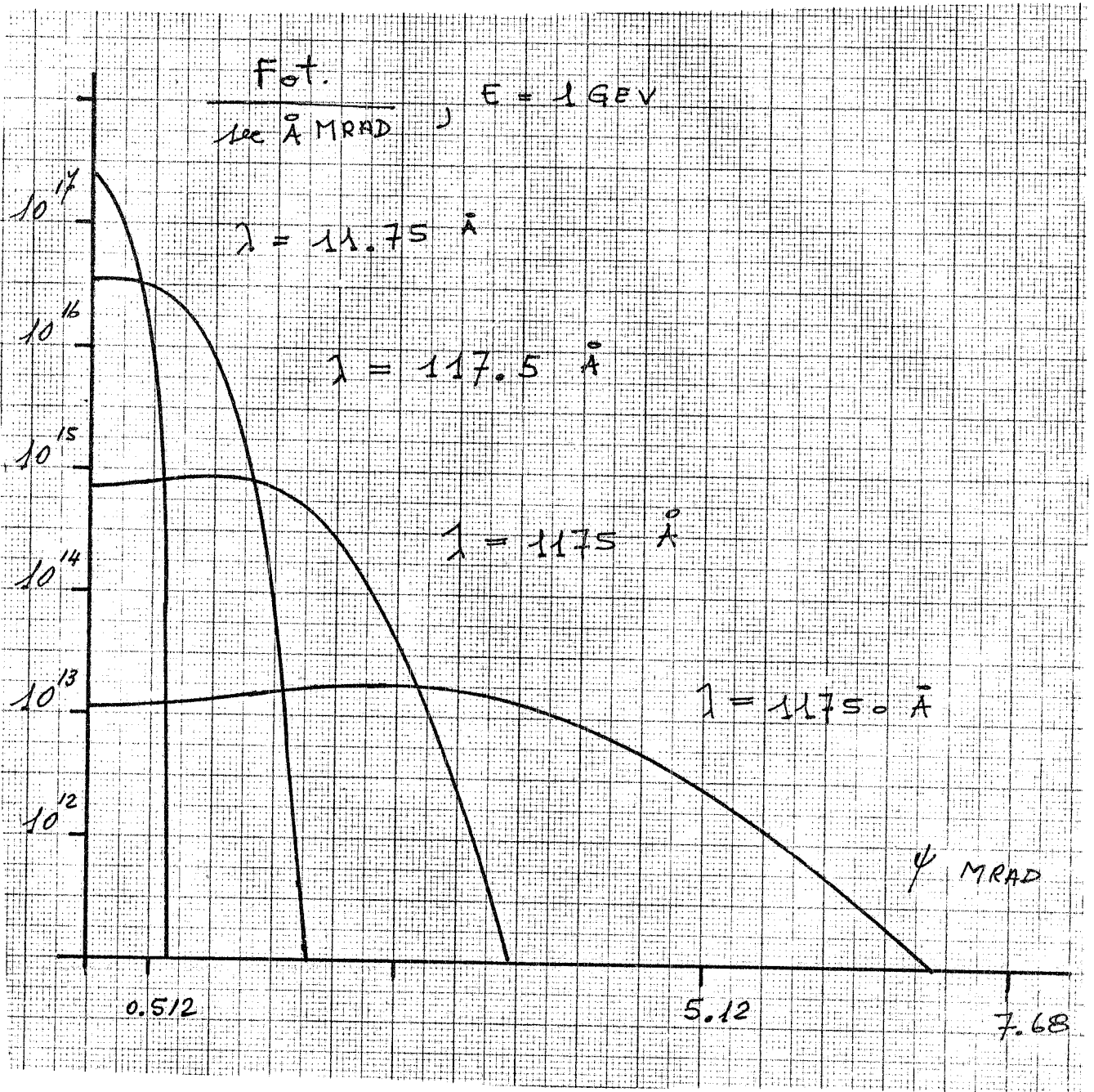


FIG. 16

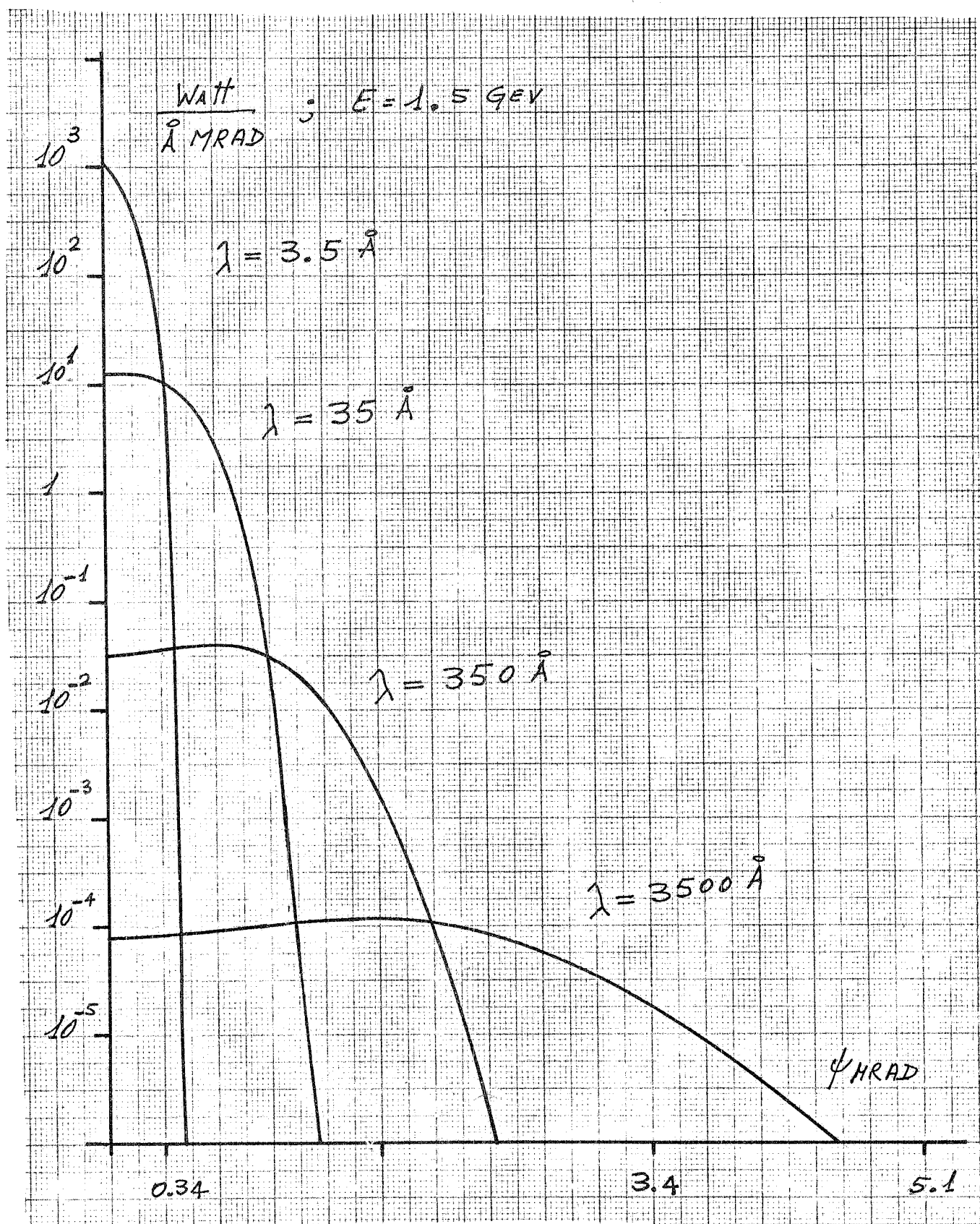


FIG. 17

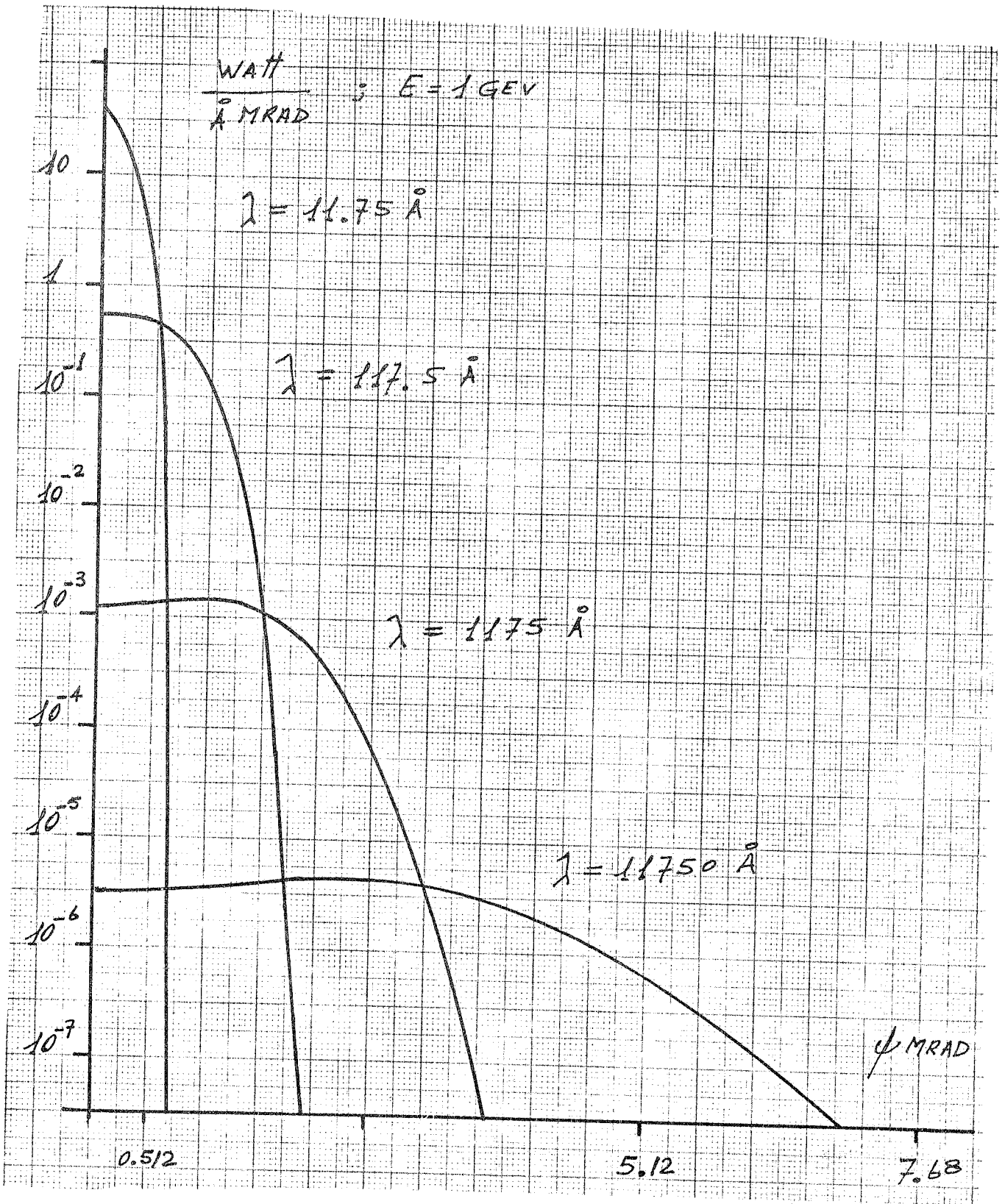


FIG. 18

$$= \begin{cases} (E = 1.5 \text{ GeV}) = 3.37 \times 10^{18} Z' \frac{\text{fot}}{\text{sec } \overset{0}{A} \text{ MRAD}} \\ (E = 1 \text{ GeV}) = 4.45 \times 10^{17} Z' \frac{\text{fot}}{\text{sec } \overset{0}{A} \text{ MRAD}} \end{cases}$$

Le curve per Adone sono state graficate per un numero di elettroni uguale a 10^{11} .

Esso corrisponde ad una corrente data dalla relazione:

$$N = \frac{I 2 \pi R A}{q \times C}$$

ove $q = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb ed I è la corrente espressa in Ampere; introducendo i parametri della macchina si ha:

$$N = I(A) 2.28 \times 10^{12} \text{ elettroni}$$

La Fig. 19 dà il numero di elettroni in funzione della corrente, mentre le Figure 20 e 21 danno le distribuzioni della intensità e del numero di fotoni per multipli interi del numero di elettroni, cioè correnti fino a ≈ 250 mA., alla massima emissione.

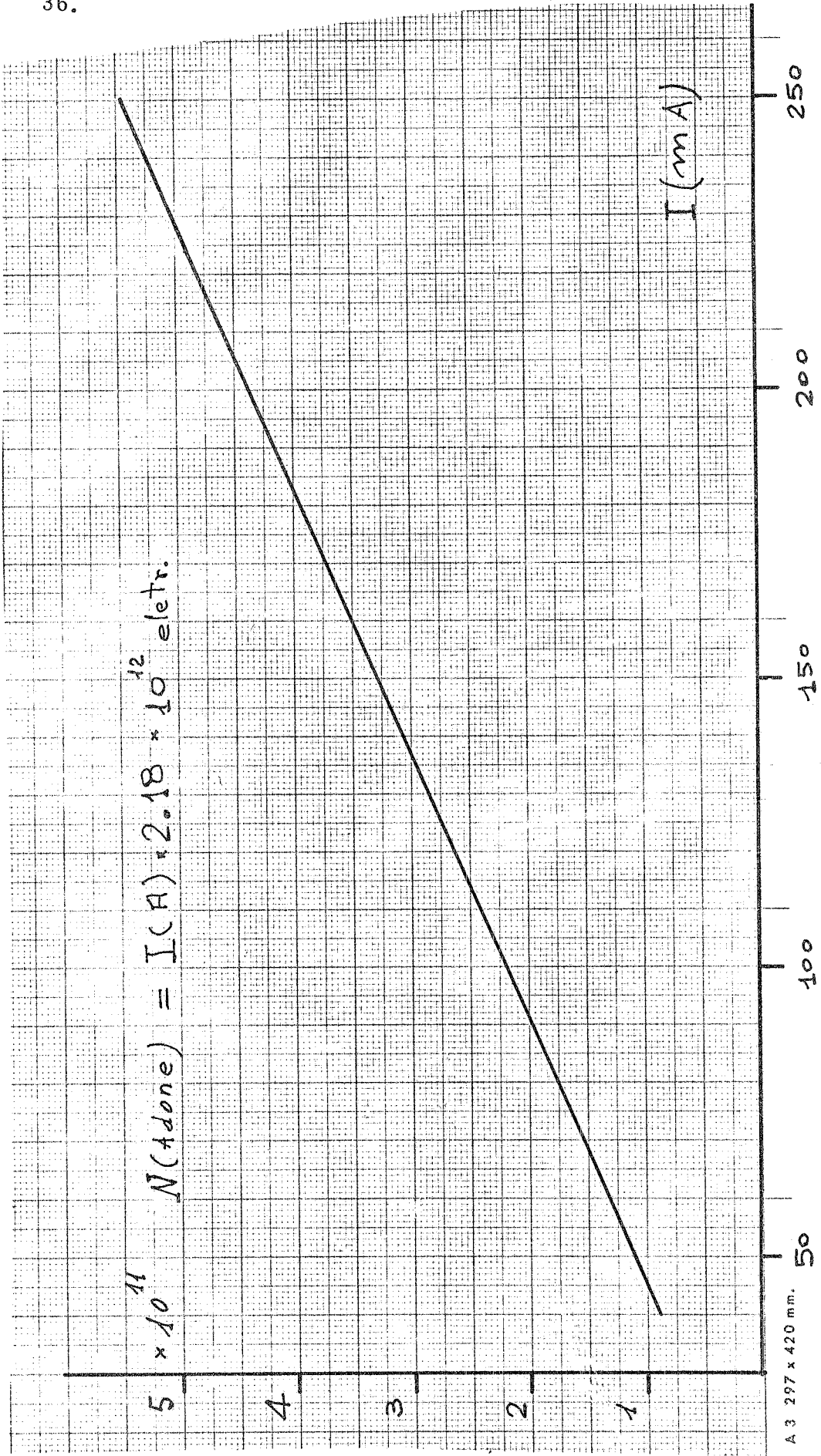
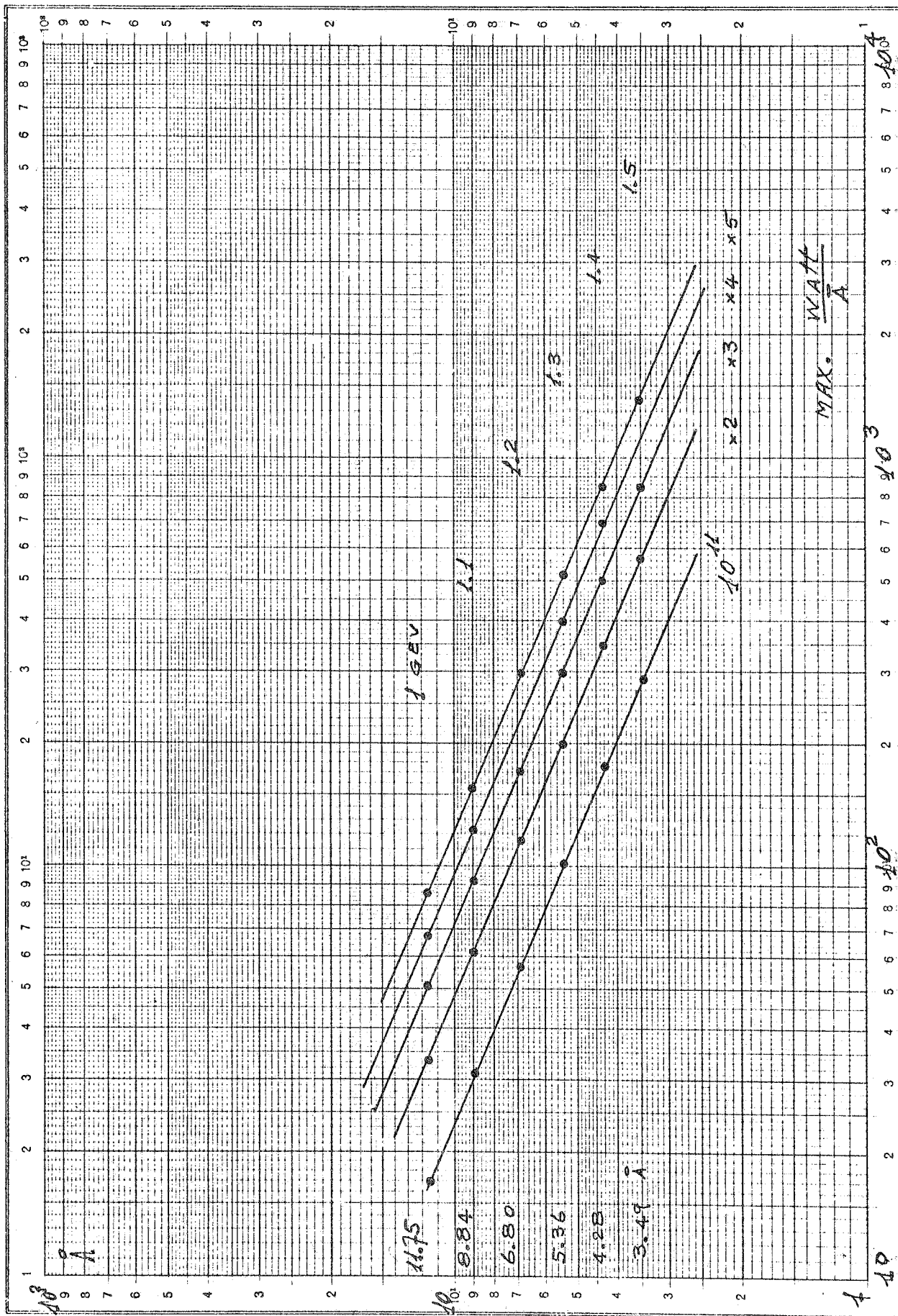


FIG. 19

A 3 297 x 420 mm.



Ed. Aermi-Lauch Rom Nr. 552

Finheit

FIG. 20

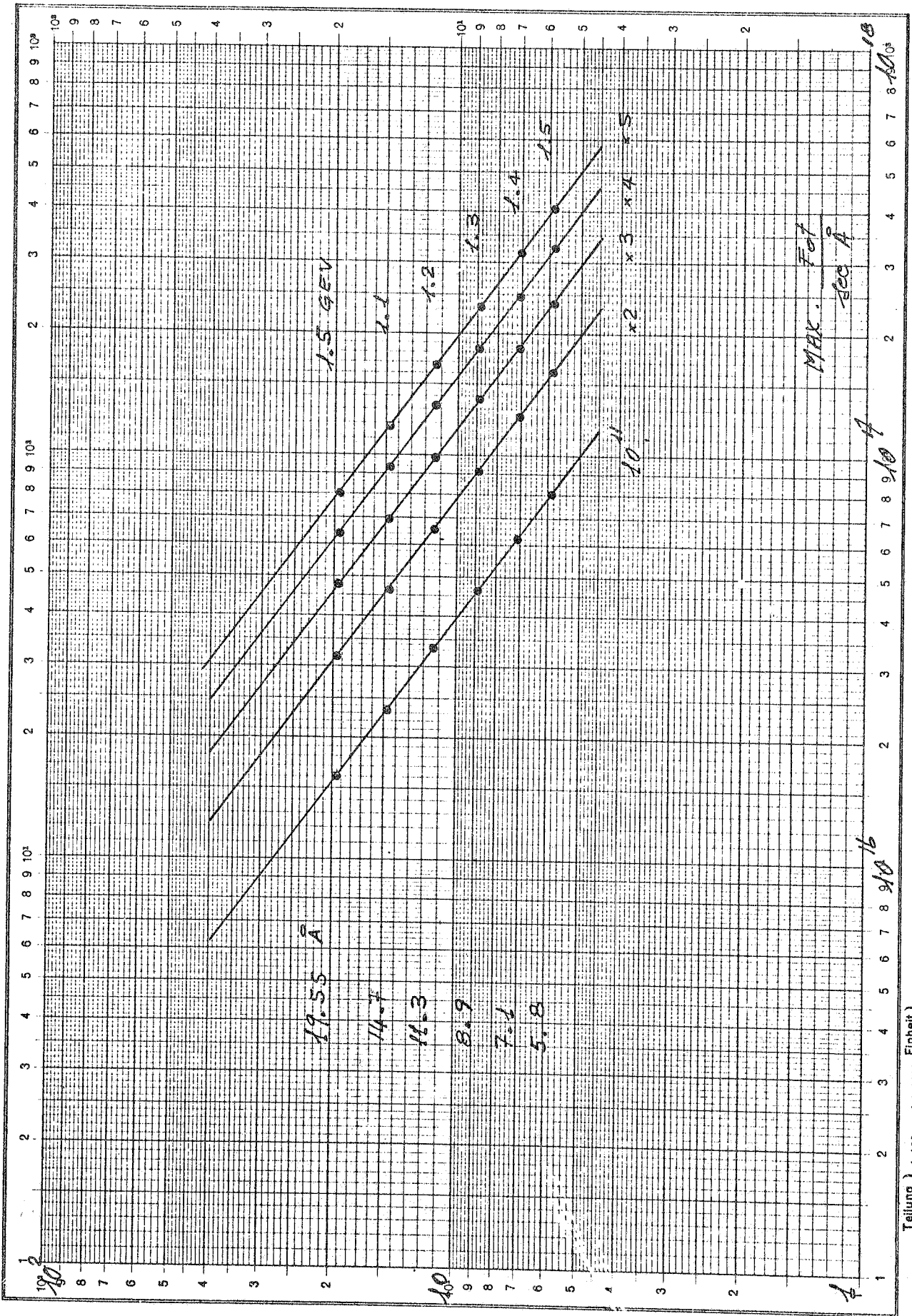


FIG. 21