

LNF-73/66

6 Dicembre 1973

G. Pasotti e M. Spadoni: PROGETTO DI UN DIPOLO SUPER-
CONDUTTORE IN CORRENTE CONTINUA.

G. Pasotti e M. Spadoni: PROGETTO DI UN DIPOLO SUPERCONDUTTORE IN CORRENTE CONTINUA; -

INTRODUZIONE. -

Esporremo qui il progetto del magnete dipolare superconduttore, il cui studio preliminare è già stato oggetto di una precedente nota interna⁽¹⁾. Tale magnete verrà usato per la deflessione del fascio di elettroni dell'elettrosincrotrone di Frascati.

Tra le soluzioni possibili per la realizzazione di un campo dipolare, un magnete con avvolgimento a settori risulta costruttivamente più semplice, consentendo inoltre una trattazione analitica delle aberrazioni armoniche⁽¹⁾.

Per limitare le aberrazioni nel tratto rettilineo del magnete è sufficiente realizzare un avvolgimento con due settori per semipolo, ma si è deciso di costruirlo con tre settori onde ottenere una maggiore riduzione delle distorsioni di campo integrato generate alle testate.

In Tab. I riportiamo l'elenco dei principali simboli usati nel testo. Il sistema di unità di misura utilizzato è l'M.K.S.

TABELLA I

B_0	= induzione al centro del magnete
J	= densità di corrente media nell'avvolgimento
R_1	= raggio interno dell'avvolgimento
R_2	= raggio esterno dell'avvolgimento
R_0	= raggio massimo di utilizzazione
R_f	= raggio interno dello schermo di ferro
L_f	= lunghezza del ferro
L_b	= lunghezza del tratto rettilineo del blocco 1 dell'avvolgimento (v. fig. 1a)
N	= numero totale di spire
I_0	= corrente di lavoro
L	= induttanza
E	= energia magnetica
W	= campo integrato lungo l'asse del magnete

1. - PROGETTO DEL TRATTO RETTILINEO -

1.1. - Cenni teorici e criteri di scelta. -

Il problema può essere trattato in termini di elettromagnetismo classico, sviluppando la densità di corrente J in serie di Fourier e risolvendo con le opportune condizioni al contorno l'equazione "Poisson-like" per il vettore potenziale A :

$$(1) \quad \nabla^2 A = - \sum_n \mu_0 J_n(r) \cos n\theta$$

La soluzione della (1) nel tratto rettilineo di un avvolgimento dipolare è resa agevole dal fatto che in questa zona $A_x = A_y = 0$ perchè $J_x = J_y = 0$, per cui, per $r < r_a$, si ha:

$$(2) \quad A_z = \sum_n \frac{\mu_0 J_n}{2n} \frac{R_2^{2-n} - R_1^{2-n}}{(2-n)} r^n \cos n\theta$$

La conoscenza dei termini A_{nz} permette di risalire facilmente alle

corrispondenti componenti $B_{\theta n}$ e B_{rn} dell'induzione⁽¹⁾.

Alle testate J_x e $J_y \neq 0$ da cui A_x e $A_y \neq 0$; ciò complica enormemente la soluzione della equazione (1) e rende praticamente impossibile una soluzione analitica per il campo alle testate e per le varie componenti di multipolo integrato.

Un metodo per il calcolo del campo generato da un conduttore di forma qualsiasi percorso da corrente è stato originariamente proposto e sviluppato da Beth⁽²⁾. Esso si basa su un elegante uso del formalismo complesso. Green⁽³⁾ ha specializzato tale metodo al calcolo di magneti dipolari e quadrupolari. Per esemplificare il metodo daremo qui una breve descrizione della trattazione complessa per un conduttore filamentare rettilineo infinito, percorso da una corrente I perpendicolare al piano x, y . Consideriamo il campo bidimensionale H e le sue componenti $H_x(x, y)$ e $H_y(x, y)$. Consideriamo poi una regione S del piano nella quale siano soddisfatte le equazioni di Laplace:

$$(3) \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$$

Nella regione S il campo può essere calcolato conoscendo il potenziale scalare $\Psi(x, y)$ o il potenziale vettore $A(x, y)$.

$$(4) \quad H_x(x, y) = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}; \quad H_y(x, y) = - \frac{\partial \Psi}{\partial y} = - \frac{\partial A}{\partial x}$$

Se Ψ ed A e le loro derivate parziali sono funzioni continue e ad un solo valore, le equazioni (4) possono essere considerate condizioni di Cauchy-Riemann che garantiscono che $(A + i\Psi)$ è una funzione analitica della variabile complessa $Z = x + iy$. D'altra parte il campo può essere espresso in termini complessi:

$$(5) \quad H = H_x + i H_y$$

4.

Il potenziale complesso $F(Z)$ per il caso considerato risulta essere:

$$(6) \quad F(Z) = (A + i\Phi) = \frac{I}{2\pi} \log(Z - Z_0)$$

dove Z_0 è il punto di intersezione del conduttore col piano Z . Le componenti del campo si possono ora ottenere derivando il potenziale complesso rispetto a Z .

Se una funzione $f(Z)$ è analitica, deve essere:

$$(7) \quad \frac{df}{dZ} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ciò, applicato alla funzione analitica $F(Z)$, fornisce:

$$\frac{dF(Z)}{dZ} = \frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - i \frac{\partial A}{\partial y}$$

Dalla (6)

$$(8) \quad \frac{dF}{dZ} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{Z - Z_0}$$

Ricordando le (4) si può scrivere:

$$(9) \quad H^* = H_x - i H_y = \frac{Ii}{2\pi} \frac{1}{Z - Z_0}$$

dove H^* è il complesso coniugato del campo H .

Dalla (9) con semplici passaggi si ritrova il classico risultato:

$$(10) \quad H_{\text{reale}} = (H_x^2 + H_y^2)^{1/2} = I/2\pi r$$

Il metodo qui riportato per il caso semplice del filo rettilineo può essere applicato a qualunque geometria, in particolare al caso di un avvolgimento che deve generare un campo dipolare. Come è noto, un campo multipolare puro può essere generato all'interno di un cilindro di lunghezza infinita se la distribuzione della densità di corrente

te J alla superficie del cilindro varia secondo la legge:

$$(11) \quad J = J_0 \cos n\theta$$

dove θ rappresenta la posizione angolare misurata da un antipolo ed n il numero di coppie polari. Tra i vari metodi coi quali si può approssimare questa legge con avvolgimenti praticamente realizzabili, i due più usati sono quello a strati concentrici e quello a blocchi, illustrati in fig. 1.

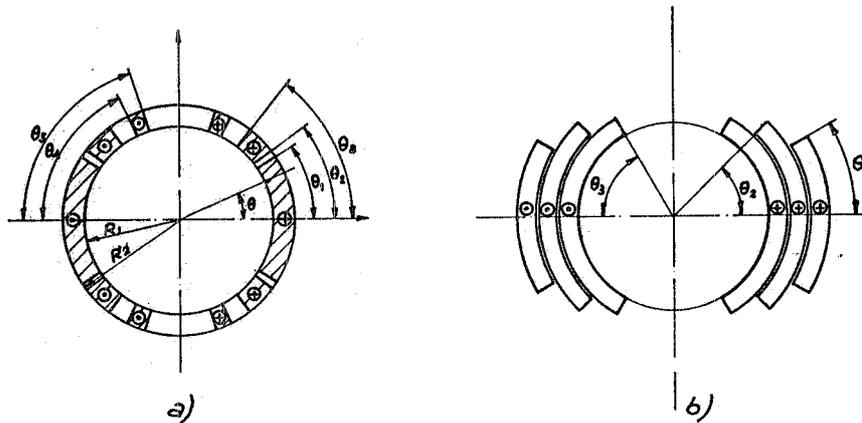


FIG. 1 - Avvolgimenti in grado di approssimare la legge $J = J_0 \cos \theta$: a) disposizione a blocchi; b) disposizione a strati concentrici.

Gli avvolgimenti ora descritti non sono in grado di generare un campo dipolare puro, ed è quindi necessario esprimere il campo totale in termini delle sue componenti multipolari. Ciò può essere ottenuto sviluppando il potenziale $F(Z)$ in serie di Taylor nella regione occupata dai conduttori:

$$(12) \quad F(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} C'_n Z^n$$

Derivando la (12) si ottiene:

$$(13) \quad H^* = \sum_{n=1}^{\infty} i \cdot n \cdot C'_n \cdot Z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot Z^{n-1}$$

6.

Nel caso in cui uno schermo di ferro venga posto concentricamente intorno ad un avvolgimento dipolare, risulta:

$$(14) \quad C_n = a_n + b_n$$

dove a_n è il coefficiente dovuto al solo avvolgimento e b_n è il contributo del ferro:

$$(15) \quad a_n = \frac{i}{2\pi} \int J Z_c^{-n} d\sigma$$

$$(16) \quad b_n = \frac{i}{2\pi} \int \frac{J Z_c^{*n}}{R_f^{2n}} d\sigma$$

Z_c rappresenta il punto del piano complesso dove scorre la densità di corrente J , mentre $d\sigma$ è l'areola attorno a Z_c . Una espressione esplicita di a_n e b_n si ottiene una volta stabilita la configurazione geometrica dei conduttori.

La formula dei coefficienti C_n per un dipolo a strati concentrici permette di tener conto direttamente di eventuali canali di raffreddamento inseriti tra uno strato e l'altro; ciò è particolarmente importante per dipoli superconduttori in corrente alternata dove la continua dissipazione richiede un raffreddamento estremamente efficace. Inoltre le aberrazioni che nascono in un dipolo a strati concentrici sono diverse a seconda che sia presente o meno uno schermo esterno in ferro e dipendono pure dalla sua posizione relativa alla bobina. Viceversa in un dipolo a blocchi le aberrazioni sono indipendenti dalla presenza del ferro e quindi dalla sua posizione, offrendo così una maggiore flessibilità di progetto e di operazione. Notiamo infine che i requisiti di raffreddamento sono meno stringenti dovendo il nostro dipolo operare in corrente continua.

Queste sono le principali ragioni che ci hanno indotto a scegliere il tipo di avvolgimento a blocchi.

Per un dipolo, i cui blocchi siano delimitati dagli angoli θ_1 , si può dimostrare che:⁽³⁾

$$(17) \quad a_n = -\frac{2}{\pi i} \frac{1}{n(2-n)} (R_2^{2-n} - R_1^{2-n}) \sum_{l=1}^m J_l \sin(n\theta_1)$$

$$(18) \quad b_n = -\frac{2}{\pi i} \frac{1}{n(2+n)} R_f^{-2n} (R_2^{2+n} - R_1^{2+n}) \sum_{l=1}^m J_l \sin(n\theta_1)$$

L'indice di sommatoria m rappresenta il numero di angoli che definiscono i blocchi; per un dipolo a 3 blocchi come in fig. 1 a, si ha perciò $m = 5$. La (18) è stata ottenuta in maniera semplice sfruttando il risultato valido per un dipolo ad un solo blocco, delimitato dall'angolo θ_0 ; ciò richiede però l'introduzione di densità di corrente fittizie J_1 .

Il campo reale si ottiene per sovrapposizione di l blocchi, ciascuno con densità di corrente J_1 , aventi estensione angolare tra 0 e θ_1 , definendo:

$$J_l = J_{0l} - J_{0(l+1)}$$

$$J_5 = J_{05}$$

dove J_{0l} sono le densità di corrente reali di ciascun blocco.

1.2. - Eliminazione dei multipoli spurii. -

Dalle (17) e (18) si vede chiaramente che per eliminare un multipolo di ordine n è sufficiente porre $\sum_{l=1}^m J_l \sin n \theta_1 = 0$. Un avvolgimento con tre settori per semipolo permette, con una opportuna scelta dei 5 angoli che delimitano i settori, di eliminare altrettante armoniche spurie. Ricordiamo che per un dipolo simmetrico tutte le armoniche di ordine pari vengono automaticamente eliminate⁽⁴⁾. Le armoniche che più conviene eliminare sono quelle di ordine più basso poichè forniscono un maggior contributo nella zona di campo utile, come si può vedere dalla (13).

8.

Un sistema di 5 equazioni fornisce gli angoli che permettono una tale eliminazione:

$$\theta_1 = 33,33^\circ, \quad \theta_2 = 37,12^\circ, \quad \theta_3 = 53,14^\circ, \quad \theta_4 = 63,38^\circ$$
$$\theta_5 = 71,84^\circ.$$

1.3. - Calcolo del tratto rettilineo. -

Per ragioni sia costruttive, che di utilizzazione del magnete, si è scelto:

$$R_0 = 3,5 \text{ cm}$$

$$R_1 = 6 \text{ cm}$$

$$B_0 = 3 \text{ T (senza ferro)}$$

$$B_0 \approx 4 \text{ T (con ferro)}$$

$$\frac{\Delta B}{B_0} \leq 1\% \text{ nella zona utile}$$

Per la costruzione verrà utilizzato un materiale superconduttore in Nb-Ti, fornito dalla I.M.I., avente le seguenti caratteristiche:

sezione mm² 2 x 1

n° filamenti 361

diametro di ogni
filamento 48 μm

rapporto Cu/super-
conduttore 2 : 1

isolamento P. V. A.

I_c (corrente critica) = 635 A a 5T e 4.8°K
(massima temperatura di funzio-
zionamento prevista).

Per aumentare l'isolamento fra i vari strati e rendere più uniforme la distribuzione di temperatura, si è deciso di inserire tra ogni strato di avvolgimento un foglio di alluminio dello spessore di 0.15 mm, anodizzato da entrambe le parti.

Poichè il campo massimo sul conduttore sarà di circa 5 T, prendendo $I_0 = 80\% I_c$, si ha $I_0 = 508 \text{ A}$ e $J = 2,17 \times 10^8 \text{ A/m}^2$ (media-

to su tutto l'avvolgimento).

Dalla (17) si può ora ricavare:

$$R_2 = 8.21 \text{ cm}$$

Le dimensioni finite del materiale superconduttore non permettono di rispettare rigidamente gli angoli teorici.

Si è reso quindi necessario elaborare un programma per computer che permetta di:

- a) approssimare all'intero più vicino il numero di spire per strato.
- b) calcolare gli angoli che risultano dal punto a
- c) calcolare le aberrazioni multipolari introdotte da queste variazioni rispetto agli angoli teorici.

In tabella II riportiamo i risultati di tali calcoli. Come si può vedere la somma di tutte le aberrazioni multipolari non supera l'1‰ su R_0 .

TABELLA II

Contenuto armonico del campo bidimensionale nel tratto rettilineo

n = ordine di armonica	3	5	7	9	11	13	15
$\frac{B_n}{B_0} \times 10^3$ per $R=R_0=3.5 \text{ cm}$	-1.63	-0.40	-0.10	-0.035	-0.012	-0.054	-0.017

Per ottenere il duplice scopo di incrementare il campo al centro e di schermare l'ambiente dai flussi dispersi, si è deciso di porre uno schermo in ferro attorno all'avvolgimento. Evidentemente l'aumento di campo è tanto maggiore quanto più vicino all'avvolgimento viene posto il ferro. Ciò però comporta una saturazione alla superficie interna del ferro, che introduce due effetti: a) la non linearità campo-corrente, b) aberrazioni di multipolo.

Il primo effetto è importante solo per i dipoli in corrente alternata per macchine acceleratrici, mentre il secondo ci interessa direttamente. Perchè il ferro introduca aberrazioni non superiori all'1%, è necessario che $\mu_r \geq 15$, come si può vedere dalla formula⁽³⁾:

$$(19) \quad \frac{|\Delta H_n|}{|H|} \leq \frac{2}{n\pi} \left(\frac{R_o}{R_1}\right)^{n-1} \frac{|b_1|}{|c_1|} \left(\frac{1}{\mu_r}\right)$$

L'induzione alla superficie interna del ferro vale⁽³⁾:

$$(20) \quad B = \frac{4\mu_o}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{R_f}\right)^{n+1} (R_2^{2+n} - R_1^{2+n}) \sum_{l=1}^m \frac{J_l \sin n\theta_l}{n(n+2)}$$

Introducendo nella (18) il valore di B cui per il ferro C 10 UNI da noi scelto corrisponde $\mu_r = 15$, si ottiene immediatamente $R_f = 12,7$ cm. Siamo ora in grado tramite la (18) di calcolare l'incremento di campo dovuto al ferro, che risulta:

$$\Delta B_f = 0,97 \text{ T}$$

Lo spessore S_f del ferro è stato calcolato secondo la formula⁽³⁾

$$S_f = R_f |\cos\theta|$$

onde evitare la saturazione all'interno.

In fig. 2 riportiamo una sezione del tratto rettilineo del dipolo.

Tutti i calcoli precedenti sono stati eseguiti nell'ipotesi che la lunghezza del ferro sia infinita; dal punto di vista pratico è sufficiente che la lunghezza L_f sia⁽³⁾:

$$(21) \quad L_f = 1,4(R_f - R_1) + L_b + \frac{\pi}{2}(R_2 + R_1)$$

dove L_b è la lunghezza del tratto rettilineo dell'avvolgimento.

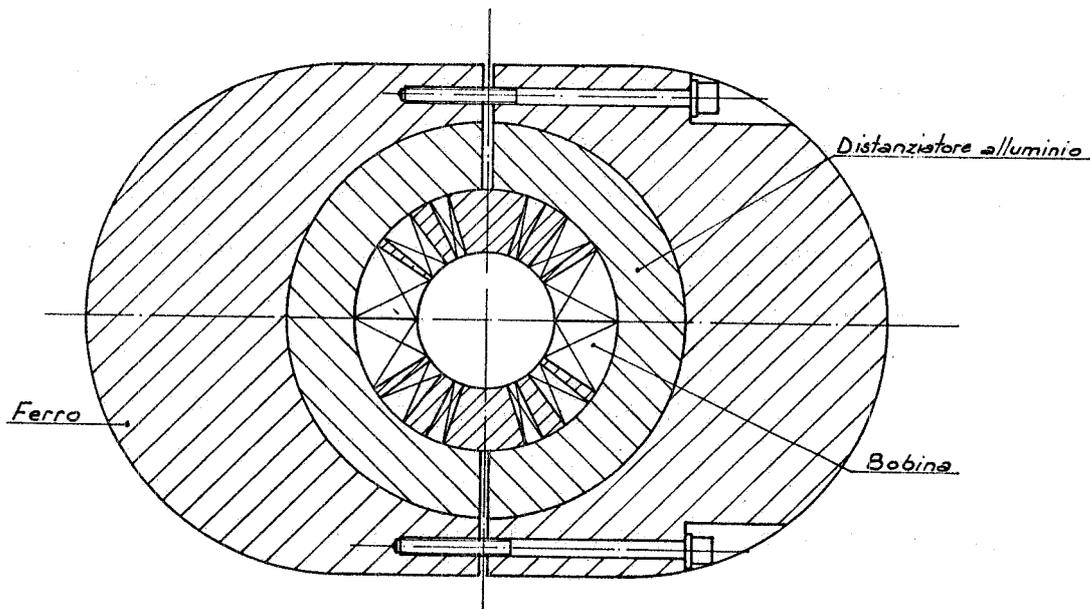


FIG. 2 - Sezione del tratto rettilineo del dipolo.

2. - PROGETTO DELLE TESTATE -

2.1. - Cenni teorici. -

Poichè il dipolo superconduttore verrà usato come deflettore di particelle cariche, è importante che il campo integrato lungo l'asse w (perpendicolare al piano $x y$) sia della stessa qualità del campo al centro del magnete. Il campo integrato W è definito come segue:

$$(22) \quad W(x, y, w,) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, y, w) dw$$

Si può facilmente dimostrare che W non dipende da w .⁽³⁾

L'importanza di questa considerazione risiede nel fatto che il calcolo del campo integrato torna ad essere un problema bidimensionale, come lo era quello del campo nel tratto rettilineo. L'integrale (22) converge uniformemente nella regione in cui $H(x, y, w)$ è continuo, cioè all'interno del ferro. All'interno dell'avvolgimento sono continue anche le sue derivate; ciò assicura che in questa zona valgono le condizioni di Cauchy-Riemann,

Si può inoltre dimostrare che campi integrati da $-\infty$ a $+\infty$ sono dovuti solo a correnti parallele all'asse w . Le condizioni precedenti permettono di calcolare il campo integrato mediante la stessa tecnica delle variabili complesse usata per il calcolo del campo nel tratto rettilineo. Il campo integrato viene quindi sviluppato in serie di multipoli

$$(23) \quad W^*(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Z^{n-1}$$

Analogamente al caso del tratto rettilineo sarà

$$(24) \quad f_n = d_n + e_n$$

dove d_n rappresenta il coefficiente di campo integrato dovuto al solo avvolgimento ed e_n quello dovuto al ferro.

$$(25) \quad d_n = \frac{i}{2\pi} \int Q(Z_c) Z_c^{-n} d\sigma$$

$$(26) \quad e_n = \frac{i}{2\pi} \int \frac{Q(Z_c) Z_c^{*n}}{R_f^{2n}} d\sigma$$

dove

$$(27) \quad Q(Z_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_w d_w \quad \text{per } Z = Z_c$$

J_w è la componente di J nella direzione w . Se la densità di corrente è costante, $J = J_0$:

$$(28) \quad Q(Z_c) = Q(r, \theta) = J_0 L + Q_T(r, \theta)$$

dove L è la lunghezza del solo tratto rettilineo dell'avvolgimento e Q_T è la densità di corrente J_w integrata nella zona di testata. Se si assume che lo spessore dell'avvolgimento ($R_2 - R_1$) sia sufficiente-

mente sottile, si può trascurare la dipendenza di Q_T da r , $Q_T = Q_T(\theta)$.

Confrontando le (25) e (26) rispettivamente con le (15) e (16) si nota che esse differiscono solo per la sostituzione di J con $Q(Z_c)$. Inoltre le (15) e (16) sono state risolte nella ipotesi di $J = J_0 = \text{cost}$, dando luogo alle (17) e (18). Per poter sfruttare per la soluzione di (25) e (26) i risultati delle integrazioni già compiute sulle (15) e (16) occorre poter portar fuori dall'integrale il termine $Q(Z_c)$ che è invece funzione di θ . Ciò può essere ottenuto calcolando gli integrali su angoli $\Delta\theta_s = \theta_1/K$ sufficientemente piccoli da poter considerare $Q_T(Z_c)$ costante in tale regione e uguale alla media dei valori assunti agli estremi di $\Delta\theta$. Sommando questi contributi si otterrà l'effetto totale della testata.

Analogamente al caso del tratto rettilineo occorre definire delle densità di corrente integrata fittizie DJL_s onde ottenere per sovrapposizione l'effetto totale di testata per il blocco in esame:

$$(29) \quad \begin{aligned} DJL_s &= 0 && \text{per } s = 0 \\ DJL_s &= \overline{Q}_{T,s} - \overline{Q}_{T,s+1} && 1 \leq s \leq K \\ DJL_s &= \overline{Q}_{TK} && s = K \end{aligned}$$

Per un dipolo a tre blocchi si ottiene in definitiva:

$$(30) \quad \begin{aligned} d_n &= -\frac{2}{\pi i} \frac{1}{n(2-n)} (R_2^{2-n} - R_1^{2-n}) \cdot \sum_{l=1}^5 (J_1 L_{1l} \sin n\theta_{1l} + \\ &+ \sum_{s=0}^K DJL_{1s} \sin n\theta_{1s}) \end{aligned}$$

$$(31) \quad \begin{aligned} e_n &= -\frac{2}{\pi i} \frac{1}{n(n+2)} \left(\frac{1}{R_f}\right)^{2n} (R_2^{2+n} - R_1^{2+n}) \cdot \\ &\sum_{l=1}^5 (J_1 L_{1l} \sin n\theta_{1l} + \sum_{s=0}^K DJL_{1s} \sin n\theta_{1s}). \end{aligned}$$

Nelle (30) e (31) il termine $J_1 L_1 \sin n \theta_1$ è il contributo del tratto rettilineo mentre $\sum_{l=0}^K D J L_{1s} \cdot \sin n \theta_{1s}$ è il contributo della testata del blocco l - esimo.

2.2. - Calcolo del campo integrato. -

Le principali geometrie di testata sono:

- a) testata senza contributo al campo integrato (testata perpendicolare all'asse w), v. fig. 3;
- b) testata che produce un campo integrato puramente dipolare ($Q_{T1} \propto \cos \theta_1$), v. fig. 4;
- c) testata rotonde (v. fig. 5).

La soluzione a) presenta un notevole ingombro trasversale; ciò obbliga a porre lo schermo di ferro molto lontano dall'asse, diminuendone l'efficacia e aumentandone il peso. La soluzione di porre uno schermo in ferro compreso tra i risvolti delle testate permetterebbe di avvicinarlo all'asse ma invaliderebbe i calcoli basati sull'assunzione che il ferro sia di lunghezza infinita.

La soluzione b) presenta difficoltà costruttive notevolissime come si può vedere dalla fig. 4.

La soluzione c) è quella costruttivamente più semplice, anche se fornisce un campo integrato con aberrazioni multipolari. Tali aberrazioni possono però essere calcolate ed in parte eliminate variando la lunghezza del tratto rettilineo di ciascun blocco (v. fig. 6). Abbiamo scelto questa soluzione poichè dai calcoli eseguiti le aberrazioni residue sono risultate accettabili.

Daremo ora il procedimento per il calcolo di $Q_T(\theta)$ nel caso di testate rotonde.

In fig. 5 è rappresentata la testata del blocco l sviluppata su un piano. Dalla figura si vede che:

$$(32) \quad \delta = \frac{R_1 + R_2}{4} (\pi - 2\theta); \quad a = \frac{(R_1 + R_2)}{4} (\pi - 2\theta_1); \quad b = \frac{(R_1 + R_2)}{4} \pi$$

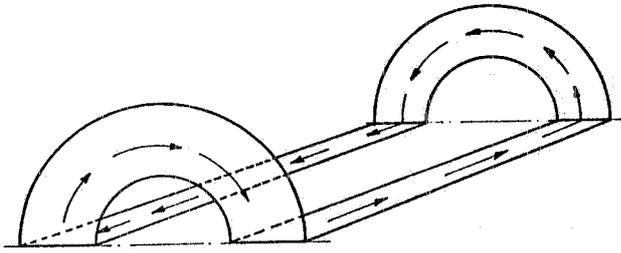


FIG. 3 - Avvolgimento con testate che non danno contributo al campo integrato.

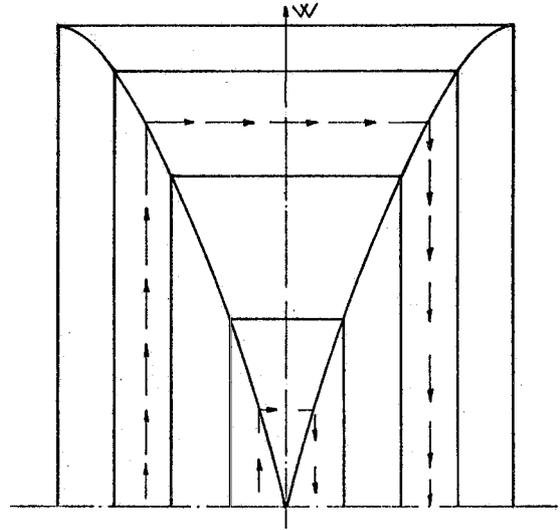


FIG. 4 - Testata in grado di produrre un campo integrato puramente dipolare ($Q_T \cos \theta$).

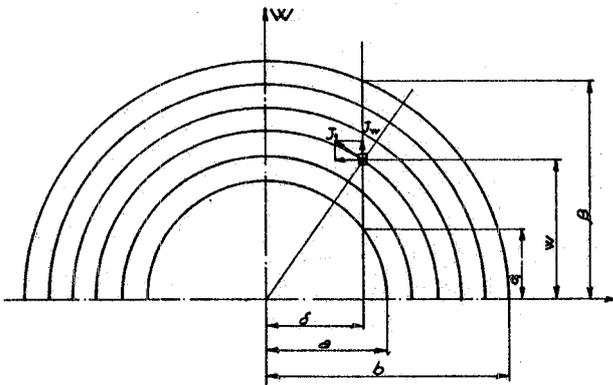


FIG. 5 - Testata del tipo rotondo sviluppata su di un piano (blocco 1 di fig. 1a).

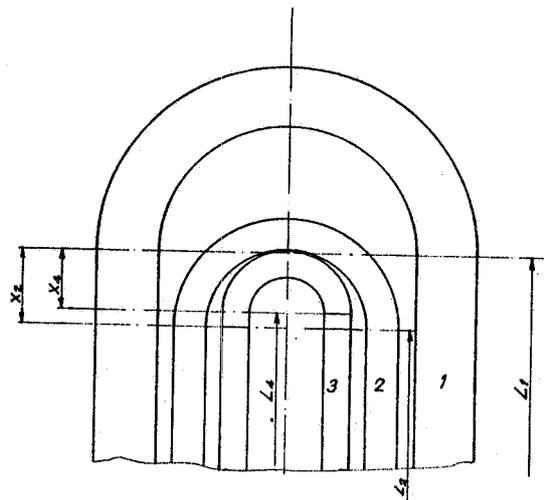


FIG. 6 - Testata rotonda sviluppata su di un piano con spostamenti longitudinali dei blocchi 2 e 3 per ridurre le aberrazioni.

16.

La componente J_{1w} di densità di corrente vale:

$$(33) \quad J_{1w}(w, \theta) = J_1 \frac{\delta}{(w^2 + \delta^2)^{1/2}}$$

$$(34) \quad Q_{T1}(\theta) = J_1 \int_a^\beta \frac{\delta}{(w^2 + \delta^2)^{1/2}} dw$$

dove:

$$\beta = (b^2 - \delta^2)^{1/2}$$

$$a = (a^2 - \delta^2)^{1/2} \quad \text{per } -a \leq \delta \leq a$$

$$a = 0 \quad \text{per } -b \leq \delta \leq -a \quad \text{e} \quad a \leq \delta \leq b$$

Integrando si ottiene:

per $-a \leq \delta \leq a$

$$(35) \quad Q_{T1}(\theta) = J_1 \delta \ln \left[\frac{(b^2 - \delta^2)^{1/2} + b}{(a^2 - \delta^2)^{1/2} + a} \right]$$

per

$$-b \leq \delta \leq -a \quad \text{e} \quad a \leq \delta \leq b$$

$$(36) \quad Q_{T1}(\theta) = J_1 \delta \ln \left[\frac{(b^2 - \delta^2)^{1/2} + b}{|\delta|} \right]$$

2.3. - Eliminazione dei multipoli integrati. -

Per eliminare i multipoli spuri nel tratto rettilineo, come si è già visto, i parametri liberi erano gli angoli che delimitavano i vari blocchi. Per i multipoli integrati i parametri liberi sono rappresentati dalla lunghezza di ogni blocco.

Detto m il numero di blocchi, in linea teorica il massimo numero di multipoli che possono essere eliminati è $(m-1)$, ma in pra

tica, a causa dell'interferenza geometrica delle testate, si riuscirà ad eliminarne un numero inferiore.

Il principio sul quale si basa la eliminazione dei multipli integrati è il seguente: una volta stabilita la geometria della testata si è in grado di calcolare il suo contributo f_n al campo integrato. Variando la lunghezza del tratto rettilineo dei blocchi si produce una variazione al campo integrato, $-f_n$, tale da cancellare quella dovuta alle testate.

In formula:

$$(37) \quad \sum_1 C_{nl} X_l = -f_n$$

Le X_l rappresentano le variazioni di lunghezza dei blocchi, prendendo come riferimento la lunghezza del blocco definito dall'angolo più piccolo.

Ricordiamo che i C_{nl} sono i coefficienti dei blocchi fittizi aventi ciascuno estensione angolare da θ_1 a 0.

Ragioni costruttive consigliano di conservare anche in testata lo stesso spessore che i blocchi reali hanno nel tratto rettilineo; ciò comporta che i due blocchi fittizi definiti da θ_2 e θ_3 hanno uguale lunghezza L_2 nel tratto rettilineo, così come L_4 sarà la lunghezza comune della coppia di blocchi fittizi θ_4 e θ_5 (v. fig. 6). Così facendo i 4 parametri liberi della (37) si riducono a due soli, X_2 e X_4 . La soluzione della (37) nel nostro caso porterebbe ad una sovrapposizione dei conduttori dei blocchi reali 2 e 3.

Ci si deve quindi limitare ad eliminare la 3^a armonica e minimizzare la 5^a ponendo tangenti tra loro i suddetti blocchi. Ciò fornisce $X_2 = 4,93$ cm, $X_4 = 3,93$ cm.

In tabella III riportiamo il contenuto armonico residuo del campo integrato, calcolato, come per il tratto rettilineo, con la distribuzione reale dei conduttori. I valori ottenuti sono sufficientemente

TABELLA III

Contenuto armonico del campo integrato totale.

n = ordine di n armonica	3	5	7	9	11	13	15
$\frac{B_n \cdot l}{B_0 \cdot l} \times 10^3$ per $R=R_0=3,5$ cm	-1.36	-0.67	-0.54	-0.08	-0.03	0	0

ridotti da soddisfare ai requisiti di progetto del dipolo.

3. - CALCOLO INDUTTANZA ED ENERGIA IMMAGAZZINATA. -

Consideriamo un dipolo di lunghezza infinita. Da $B = \text{rot } A$ segue che il flusso $\Delta \Phi$ concatenato con un fascio di conduttori di sezione $da = r dr d\theta$ è, per unità di lunghezza assiale:

$$(38) \quad \Delta \Phi = -2A \frac{N}{a} da = -2 \frac{NA}{a} r dr d\theta$$

dove N/a = numero di conduttori per unità di area.

D'altronde, nella regione occupata dai conduttori di un avvolgimento dipolare con schermo in ferro, la soluzione della (1) con le opportune condizioni al contorno fornisce:

$$(39) \quad A = \sum_{n \text{ dispari}} A_n = \sum_{n \text{ dispari}} (K_n r^2 + a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta$$

dove:

$$K_n = -\frac{\mu_0 J_n}{4-n^2}; \quad a_n = \frac{\mu_0 J_n}{2n} \left(\frac{R_2^{2-n}}{2-n} + \frac{R_2^{n+2} - R_1^{n+2}}{(n+2)R_f^{2n}} \right);$$

(40)

$$b_n = -\frac{\mu_0 J_n}{2n(n+2)} R_1^{n+2}; \quad J_n = J \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} f_n(\theta)$$

Integrando la (38) si ha:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= -4 \frac{N}{a} \sum_{\text{dis.}} \int_0^{\pi/2} \int_{R_1}^{R_2} (K_n r^3 + a_n r^{n+1} + b_n r^{1-n}) \cos n\theta \, dr \, d\theta = \\
 (41) \quad &= -4 \frac{N}{a} \sum_{n \text{ dispari}} \frac{1}{n} f_n(\theta) \left[\frac{K_n}{4} (R_2^4 - R_1^4) + \frac{a_n}{n+2} (R_2^{n+2} - R_1^{n+2}) + \right. \\
 (41) \quad &\left. + \frac{b_n}{2-n} (R_2^{2-n} - R_1^{2-n}) \right]
 \end{aligned}$$

Sostituendo le (40) nella (41) si ha:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \sum_{n \text{ dispari}} \frac{2\mu_o NJ f_n(\theta)}{a \cdot n^2 (2+n)} \left[\frac{\frac{n}{2} (R_2^4 - R_1^4) - (R_1^4 + R_2^4) + 2R_1^{2+n} \cdot R_2^{2-n}}{(2-n)} + \right. \\
 (42) \quad &\left. - \frac{(R_2^{n+2} - R_1^{n+2})^2}{(2+n) R_f^{2n}} \right]
 \end{aligned}$$

D'altronde

$$(43) \quad L = \sum_n L_n = \frac{\Phi}{I} = \frac{\Phi}{J \cdot \frac{a}{N}} = \frac{N\Phi}{J a}$$

e poichè l'unico termine significativo sarà quello dovuto alla prima armonica:

$$\begin{aligned}
 L &\simeq \frac{8}{3} \frac{\mu_o N^2 f_1^2(\theta)}{\pi a} \left[-\frac{1}{2} (R_2^4 + 3R_1^4) + 2R_1^3 R_2 + \right. \\
 (44) \quad &\left. - \frac{(R_2^3 - R_1^3)^2}{3 R_f^2} \right] \text{ H/metro}
 \end{aligned}$$

La lunghezza efficace del nostro dipolo è stata calcolata come

20.

$$l_e = \frac{\int B dl}{B_0} = 0,6 \text{ m.}$$

Risulta quindi $L = 0,633 \text{ H}$ ed $E = (1/2) L I^2 = 81,7 \times 10^3 \text{ J}$.

4. - FORZE SUGLI AVVOLGIMENTI -

Le forze elettromagnetiche radiale ed azimutale, dF_r e dF_θ , che agiscono su un tratto rettilineo di lunghezza unitaria e sezione $da = r dr \cdot d\theta$ sono:

$$(45) \quad dF_r = J da \sum \frac{\partial A_n}{\partial r}; \quad dF_\theta = J \frac{da}{r} \sum \frac{\partial A_n}{\partial \theta}$$

Anche qui, come nel precedente calcolo della induttanza, il termine dominante sarà quello dovuto alla prima armonica. Ricordando la (39) si ha, per una sezione di avvolgimento di raggi R_1 e R_2 , definita dagli angoli φ_1 e φ_2 :

$$(46) \quad F_r(\varphi_1, \varphi_2) = J \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial r} \right) r dr d\theta =$$

$$= J \left[\frac{2}{3} K(R_2^3 - R_1^3) + \frac{a_1}{2}(R_2^2 - R_1^2) - b_1 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right] \cdot (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

Analogamente si avrà:

$$(47) \quad F_\theta(\varphi_1, \varphi_2) = J \left[\frac{K}{3}(R_2^3 - R_1^3) + \frac{a_1}{2}(R_2^2 - R_1^2) + b_1 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right] (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1).$$

Sostituendo nelle (46) e (47) i parametri del nostro dipolo si ha:

$$F_r(\varphi_1, \varphi_2) = 0,35 \times 10^6 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \text{ N/m}$$

$$F_{\theta}(\varphi_1, \varphi_2) = 1,26 \times 10^6 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \text{ N/m}$$

Per una lunghezza efficace di 60 cm si ha:

$$\begin{array}{l} \text{blocco 1} \\ \text{blocco 2} \\ \text{blocco 3} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} F_r = 1,15 \times 10^5 \text{ N} \\ F_{\theta} = -1,24 \times 10^5 \text{ N} \\ F_r = 0,42 \times 10^5 \text{ N} \\ F_{\theta} = -1,49 \times 10^5 \text{ N} \\ F_r = 0,12 \times 10^5 \text{ N} \\ F_{\theta} = -1,03 \times 10^5 \text{ N} \end{array} \right.$$

La fig. 7 indica la direzione delle forze.

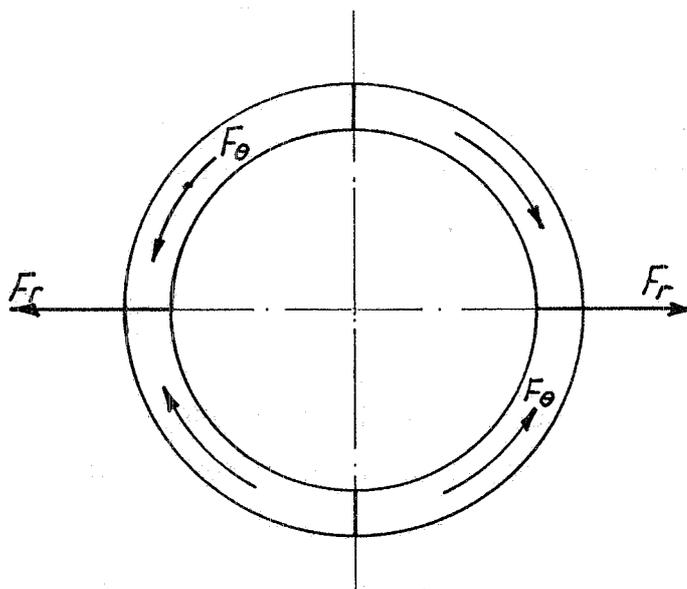


FIG. 7 - Direzione delle forze sugli avvolgimenti.

Bisogna notare che nella F_r la forza di attrazione tra schermo in ferro ed avvolgimento costituisce $\sim 93\%$ dei valori qui riportati.

A causa delle forze in gioco uno spostamento dei conduttori anche di pochi centesimi di millimetro causerebbe, per attrito, la produzione di quantità di calore sufficienti a provocare la transizione del superconduttore. Per evitare ciò è necessario bloccare rigidament

te le spire dell'avvolgimento mediante un opportuno collante. Tale collante dovrebbe idealmente avere lo stesso coefficiente di contrazione termica del filo sperconduttore ed una buona adesione. Paraffina ed olio minerale sembrano essere i migliori materiali per questo scopo; la prima però tende a polverizzarsi dopo ripetuti cicli termici, mentre il secondo complica molto la costruzione a causa della necessità di un contenitore stagno. Per tali ragioni i collanti più usati sono alcuni tipi di resine epossidiche, anche se il loro coefficiente di contrazione risulta maggiore. Dopo aver eseguito misure del coefficiente di contrazione, del potere di incollaggio e della resistenza ai ripetuti ciclaggi termici su parecchi tipi di miscele, abbiamo scelto le seguenti due della ditta C. I. B. A. :

resina	CY 221, 100 parti	}	trattamento termico:80°C per 12 ore.
indurente	HY 956, 23 parti		
resina	CY 221, 100 parti	}	trattamento termico:80°C per 12 ore + 120°C per 12 ore.
indurente	HY 920, 120 parti		
accelerante	DY 062, 2 parti		

5. - PROTEZIONI -

Nel caso di transizione di un magnete superconduttore nascono solitamente due problemi: a) l'energia magnetica dissipata sull'avvolgimento può provocare un innalzamento di temperatura tale da danneggiare il materiale; b) la tensione indotta può essere superiore a quella di isolamento e provocare archeggiamenti tra spira e spira o verso massa.

Se l'energia magnetica del nostro dipolo venisse dissipata tutta sull'avvolgimento si otterrebbe una temperatura finale di $\sim 60^{\circ}\text{K}$. Per ottenere una temperatura finale dell'ordine di 300°K , l'energia magnetica dovrebbe dissiparsi tutta su una porzione di avvolgimento pari a $\sim 4\%$ del totale. Questa eventualità, ancora del tutto accettabile, è assai improbabile perchè, come vedremo in seguito, la velocità di propagazione della transizione è assai elevata.

Tra i vari metodi utilizzabili per contenere entro valori accettabili la tensione indotta sul magnete^(5, 6, 7) abbiamo scelto quello schematizzato in fig. 8. La transizione del magnete, rilevata dal

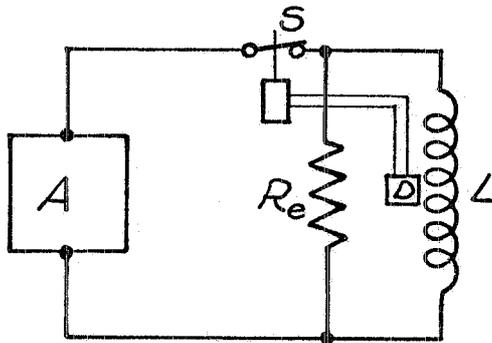


FIG. 8 - Circuito di protezione del magnete.

rivelatore $D^{(8)}$ provoca un'immediata apertura dell'interruttore S e la conseguente scarica attraverso il circuito RL . Se il magnete è cortocircuitato ($R_e = 0$), si è visto sperimentalmente^(5, 6) che il decadimento della corrente ha la forma di una mezza gaussiana e può essere rappresentata da:

$$(48) \quad I = I_0 \exp(-t^2/\tau^2)$$

dove:

$$(49) \quad \tau = \left(\frac{2L}{g v_0}\right)^{1/2}$$

g = resistenza per unità di lunghezza del filo allo stato normale

v_0 = velocità di propagazione della zona normale.

La (48) implica che la resistenza della zona già transita R_N cresce linearmente con il tempo, $R_N = g v_0 t$.

Se $R_e \neq 0$ si avrà:

$$(50) \quad I = I_0 \exp\left(-\frac{R_e t}{L} - \frac{t^2}{\tau^2}\right)$$

La tensione V_L indotta ai capi del magnete sarà:

24.

$$(51) \quad V_L = -L \frac{dI}{dt} = LI \left(\frac{R_e}{L} + \frac{2t}{\tau^2} \right)$$

Il valor massimo di V_L si avrà all'istante:

$$(52) \quad t^* = \frac{\tau}{\sqrt{2}} - \frac{R_e \tau^2}{2L}$$

e varrà:

$$(53) \quad V_{MAX} = \sqrt{2} \frac{L}{\tau} I(t^*)$$

Resta ora da valutare V_{MAX} in base ai parametri del nostro dipolo.

Il valore di g è una funzione della temperatura del filo; dalle formule precedenti si può vedere che valori di g elevati portano a tensioni maggiori.

Per tale ragione abbiamo scelto il valore $g = 1,3 \times 10^{-3} \Omega/m$ relativo alla temperatura finale $T_f = 600K$.

La velocità v_0 rappresenta l'effetto complessivo della propagazione della zona normale dovuta alla conduzione termica sia lungo il filo che trasversalmente alle spire contigue.

Il valore di v_0 dipende dalle caratteristiche geometriche e strutturali del filo e dell'eventuale isolante interposto; si è visto sperimentalmente che v_0 è dell'ordine di $10^3 + 10^4$ m/s.

Poichè, analogamente a quanto già detto per g , la tensione V_{MAX} cresce all'aumentare di v_0 , abbiamo scelto per i calcoli $v_0 = 10^4$ m/s.

Un altro parametro che influenza V_{MAX} è la resistenza esterna R_e ; per estrarre una forte percentuale dell'energia del magnete R_e dovrebbe essere elevata, ma ciò comporterebbe un innalzamento di V_{MAX} . Un buon compromesso si ha scegliendo $R_e = 1 \Omega$ da cui segue $V_{MAX} \simeq 900$ V ed una estrazione di energia pari al 20% del totale. Notiamo per inciso che per una $v_0 = 10^3$ m/s otterremmo $V_{MAX} = 508$ V ed un'estrazione pari al 70%.

I calcoli precedenti sono stati eseguiti trascurando le capacità dell'avvolgimento, le quali comportano⁽⁹⁾ un transiente iniziale con sovratensioni dell'ordine di $1,5 \pm 2$ volte il valore iniziale V_i della tensione, ricavabile dalla (51). Nel nostro caso per ognuno dei due valori di v_0 considerati si ha $V_i = R_e I_0 = 508$ V e quindi le sovratensioni sono circa uguali al V_{MAX} precedentemente considerate.

L'attuazione pratica del sistema di protezione prevede inoltre il collegamento a terra del punto centrale dell'avvolgimento, permettendo di dimezzare le tensioni verso massa.

6. - CRIOGENIA -

Il dipolo dovrà funzionare nelle vicinanze dell'anello del Sincrotrone ed il fabbisogno di elio liquido verrà fornito da un refrigeratore a ciclo chiuso della potenza di 27 W a 4,5°K; esso verrà posto a circa 10 m di distanza a causa del limitato spazio disponibile vicino al magnete. La linea di collegamento tra questo ed il criostato, in progettazione presso il gruppo criogenico del LNF, sarà costituito da due tubi sotto vuoto, uno per l'immissione di elio liquido e l'altro per il recupero del gas di evaporazione.

Il criostato è schematicamente rappresentato in Fig. 9. Si tratta di un criostato orizzontale in cui la zona di campo utile è a temperatura ambiente e sarà collegata al tubo a vuoto in cui passa il fascio di particelle. Come si vede dalla figura il contenitore dell'elio ed il magnete sono sostenuti da due complessi di tubi, ciascuno dei quali è composto da 2 tubi di INVAR ed uno in rame; le differenti contrazioni termiche dei due materiali permettono di ridurre le variazioni di quota del magnete all'atto del raffreddamento.

L'isolamento termico viene realizzato mediante una camicia in vuoto dinamico e l'uso di strati multipli di mylar alluminato. Fra il contenitore dell'elio liquido e la parete esterna è inoltre disposto uno schermo in rame, raffreddato con il gas elio che esce dai conduttori di alimentazione del magnete. Questi ultimi infatti so

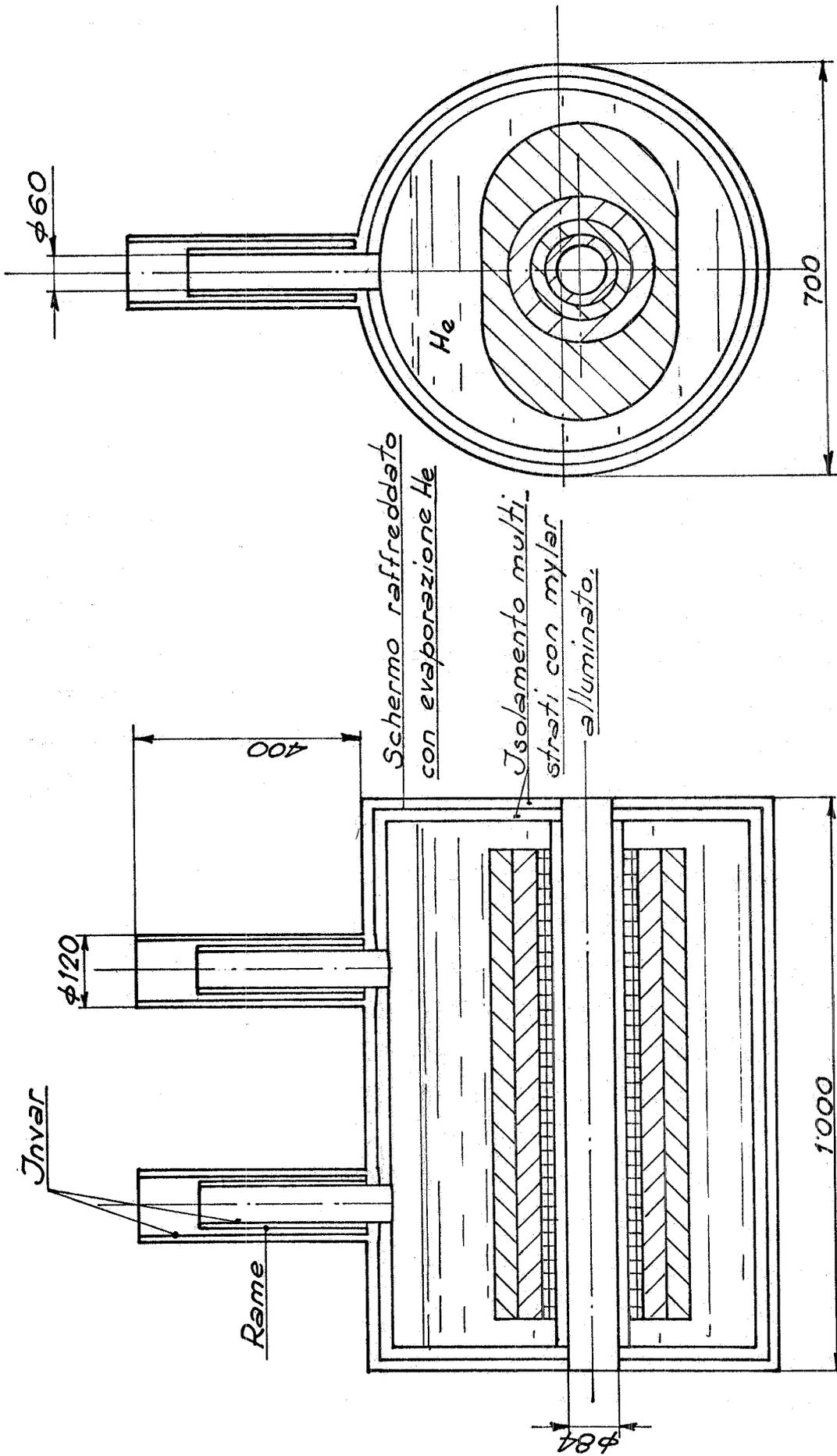


FIG. 9 - Criostato.

no del tipo a raffreddamento in controflusso di elio gas^(10,11), il che permette di contenere entro limiti accettabili l'ingresso termico dei conduttori. Tale ingresso termico provoca, alla corrente massima, l'evaporazione di 1,5 lt/h di elio liquido. Il gas ottenuto da tale evaporazione, dopo aver raffreddato lo schermo in rame, ritorna in ciclo all'ingresso del refrigeratore.

A causa dell'elevato peso da sostenere e per soddisfare alle norme A.N.C.C., i due tubi di INVAR hanno un notevole spessore e quindi una elevata conduzione termica. La dissipazione totale del criostato risulta quindi 3,5 W; l'elio che evapora, essendo una temperatura di poco superiore a quella di ebollizione, ritorna attraverso la linea di collegamento criostato-refrigeratore e viene riimmesso in ciclo negli ultimi stadi di refrigerazione.

In Tab. IV riportiamo i parametri principali del dipolo.

TABELLA IV

Elenco dei parametri principali del magnete.

B_o	= 3 T senza ferro, 4 T con ferro
J	= $2,17 \cdot 10^8$ A/m ²
R_1	= $6 \cdot 10^{-2}$ m
R_2	= $8,21 \cdot 10^{-2}$ m
R_o	= $3,5 \cdot 10^{-2}$ m
R_f	= $12,7 \cdot 10^{-2}$ m
L_f	= 0,817 m
L_b	= 0,5 m
N	= 1318 spire
I_o	= 508 A
L	= 0,63 H
E	= $82 \cdot 10^3$ J
W	= $1,92 \cdot 10^6$ Asp = 2,41 T.m
R_e	= 1 Ω

Desideriamo ringraziare il Sig. S. Falcioni per l'efficace collaborazione nel corso di tutto il lavoro ed in particolare nella progettazione del criostato.

BIBLIOGRAFIA -

- (1) - G. Pasotti, M. Spadoni, Studio preliminare di un dipolo superconduttore in corrente continua, Frascati - report LNF-72/6 (1972).
- (2) - R. A. Beth, J. Appl. Phys. 37, 2568 (1966).
- (3) - M. A. Green, The elimination of higher multipoles in the two-dimensional and integrated fields of conductor-dominated dipole and quadrupole magnets with iron shell, Lawrence Radiation Laboratory report, UCID 2493 (1971).
- (4) - J. H. Coupland, Equations and formulae for magnets with air cored windings of "saddle coil" type, Rutherford High Energy Laboratory report RHEL/R 203 (1970).
- (5) - P. F. Smith, Protection of superconducting coils, Rev. Sci. Instr. 34, 368 (1963).
- (6) - M. W. Dowlay, Field energy removal from a superconducting solenoid-Cryogenics, 4, 153 (1964).
- (7) - B. J. Maddock and G. B. James, Protection and stabilization of large superconducting coils, Proc. IEE 115, 543 (1968).
- (8) - C. P. Parsch et al., The 1,4 m/2.2 T superconducting magnet Pluto for the electron-positron storage ring at Desy, Proc. Fourth Intern. Conf. on Magnet Technology, Brookhaven (1972).
- (9) - H. Brechna, Superconducting magnet systems, (Springer Verlag, Berlin, 1973).
- (10) - K. R. Efferson, Helium vapor cooled current leads, Rev. Sci. Instr. 38, 1776 (1967).
- (11) - V. E. Keilin and E. Yu Klimenko, Investigation into high current leads in liquid helium applications, Cryogenics, 6, 222 (1966).