

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE  
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-73/8

1 Marzo 1973

G. Sanna : L'OTTICA DEGLI SPETTROMETRI MAGNETICI NELLE  
APPROSSIMAZIONI DEL PRIMO E SECONDO ORDINE.  
Parte II<sup>a</sup>: SVILUPPI IN SERIE DI MULTIPOLI DELLE COMPONENTI  
DEL CAMPO NELL'INTORNO DELLA TRAIETTORIA CENTRALE.

G. Sanna: L'OTTICA DEGLI SPETTROMETRI MAGNETICI NELLE APPROSSIMAZIONI DEL PRIMO E SECONDO ORDINE.  
Parte II<sup>a</sup>: SVILUPPI IN SERIE DI MULTIPOLI DELLE COMPONENTI DEL CAMPO NELL'INTORNO DELLA TRAIETTORIA CENTRALE.

## II, 1. INTRODUZIONE -

Nella Parte I<sup>a</sup>(<sup>x</sup>) sono state dedotte, senza introdurre alcuna approssimazione, le equazioni differenziali delle traiettorie nel sistema di coordinate  $t, r, z$  riferito ad una traiettoria piana  $\tau_0$  presa come riferimento (cfr. equaz. I.17). In queste equazioni compaiono le componenti  $B_t, B_r, B_z$  dell'induzione  $\vec{B}$  secondo la terna ortogonale di vettori  $\vec{t}, \vec{r}, \vec{z}$ , intrinseca a  $\tau_0$ . Per procedere all'integrazione delle equazioni differenziali suddette è necessario esplicitare la dipendenza funzionale di tali componenti dalle coordinate  $t, r, z$ . Questo programma verrà affrontato e risolto nella presente nota interna (Parte II<sup>a</sup>). Per il suo svolgimento due considerazioni sono di fondamentale importanza. La prima consiste nel rilevare che è superfluo per i nostri scopi calcolare in tutto lo spazio la distribuzione di campo  $\vec{B} = \vec{B}(Q)$  prodotta da una assegnata distribuzione di materiali magnetizzati e/o di correnti elettriche. In effetti è sufficiente conoscere la dipendenza funzionale dalle coordinate  $t, r, z$  delle componenti  $B_t, B_r, B_z$  o del potenziale scalare  $\mathcal{A}$ , solamente dentro il ristretto dominio spaziale attraversato dalle traiettorie  $\tau$  "otticamente" interessanti. In pratica questo dominio, che contiene la traiettoria di riferimento  $\tau_0$ , risulta avere sempre dimensioni trasversali<sup>(o)</sup> notevolmente minori del raggio di curvatura della traiettoria  $\tau_0$ .

E' pertanto possibile e conveniente esprimere ciascuna delle componenti di  $\vec{B}$ , o il potenziale  $\mathcal{A}$ , in un punto qualsiasi di tale dominio, mediante uno sviluppo in serie bidimensionale nell'intorno di  $\tau_0$ . L'ampiezza dei diversi coefficienti di uno sviluppo dipenderà poi dalle particolari caratteristiche possedute dalla distribuzione di sorgenti che genera il campo.

La seconda considerazione riguarda le differenti simmetrie che presentano le distribuzioni di campo utilizzate nell'ottica corpuscolare magnetica. Infatti, tenendo conto delle particolari simmetrie, è possibile semplificare e specializzare, per ogni distribuzione considerata, gli sviluppi in serie anzidetti.

La presente Parte II<sup>a</sup> si articola in sedici paragrafi. Nel paragrafo 2 sono riportate sinteticamente

---

(x) - Nota interna LNF-71/81.

le proprietà e le equazioni generali valide per le distribuzioni stazionarie e solenoidali di campo. Quindi nel paragrafo 3 sono introdotte e caratterizzate analiticamente le simmetrie fondamentali che il potenziale scalare magnetico  $\mathcal{M}_b(Q)$  può presentare. Viene poi effettuata in base ad esse una classificazione delle distribuzioni interessanti nell'ottica (par. 4). Sono individuati sei casi di pratica utilità che vengono trattati separatamente nel seguito (par. 6, 7, 8, 9, 10, 11). Nel par. 5 è stabilita, senza tener conto di eventuali simmetrie, la forma analitica generale degli sviluppi di  $B_t$ ,  $B_r$ ,  $B_z$  nell'intorno di  $\tau_0$ . Nella trattazione dei sei casi interessanti sono stati seguiti due procedimenti diversi. Con il primo di questi, che è applicato ai primi quattro casi di simmetria considerati (par. 6, 7, 8, 9), gli sviluppi di  $B_t$ ,  $B_r$ ,  $B_z$  ottenuti al par. 5 sono specializzati imponendo le condizioni di simmetria e le condizioni  $\text{div } \vec{B} = 0$  e  $\text{rot } \vec{B} = 0$ . Con il secondo procedimento, che è applicato ai casi di simmetria trattati nel par. 10, 11, viene determinato un integrale in forma di sviluppo in serie dell'equazione di Laplace  $\nabla^2 \mathcal{M}_b = 0$ . Viene poi imposto che questo integrale soddisfi alle condizioni di simmetria esistenti per le distribuzioni considerate. Questo diverso procedimento è stato usato perchè risulta più semplice applicare, nei due casi anzidetti, le condizioni di simmetria al potenziale piuttosto che alle componenti di  $\vec{B}$ . Queste sono poi ottenute per mezzo della relazione  $\vec{B} = -\mu_0 \text{grad } \mathcal{M}_b$ . Nel par. 12 sono analizzate delle distribuzioni particolari comunemente indicate come "pure o ideali". Queste corrispondono ai termini fondamentali degli sviluppi in serie ottenuti per i casi di simmetria analizzati nei par. 11, 12 e presentano caratteristiche particolarmente semplici. A seconda del numero di piani rispetto ai quali il potenziale  $\mathcal{M}_b$  risulta antisimmetrico, le distribuzioni precedenti sono indicate come "quadrupolare, sestupolare, ottupolare . . . pura". Nel par. 13 si riconosce che gli sviluppi ottenuti per tutti i sei casi di simmetria studiati possono essere considerati come "sviluppi in serie di multipoli" (dipolo + quadrupolo + sestupolo + . . .), ogni "termine di multipolo" risultando individuato da una particolare legge di dipendenza dalle coordinate  $r$  e  $z$ .

L'indagine qui svolta per le componenti di  $\vec{B}$  nell'intorno di  $\tau_0$  presenta una certa analogia con l'analisi di Fourier di una funzione e costituisce la base logica della "spettroscopia di multipoli". Questa tecnica sperimentale è infatti comunemente usata per analizzare il contenuto di multipoli presenti nelle distribuzioni di campo usate nell'ottica corpuscolare magnetica.

Infine nel par. 14 la presenza dei termini di multipolo negli sviluppi di  $B_z(t, r, 0)$  e nell'integrale  $\int B_z(t, r, 0) dt$  esteso a tutta la distribuzione ("termini integrati di multipolo") è messa in relazione con alcune caratteristiche delle traiettorie del piano  $z = 0$  percorse dai corpuscoli (curvatura e deflessione totale). Infine nel par. 15 viene mostrata la possibilità di ottenere "termini integrati di multipolo" dei diversi ordini usando campi uniformi.

## II. 2. PROPRIETA' GENERALI DELLA DISTRIBUZIONE DI CAMPO. -

Consideriamo una regione spaziale  $\mathcal{A}$  limitata, chiusa, semplicemente connessa ed avente per contorno una superficie regolare.

Scelto un sistema di coordinate curvilinee ortogonali<sup>(1)</sup>, siano  $u, v, w$  le coordinate del generico punto  $Q$  di  $R$  e  $\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v, \vec{\tau}_w$  i versori delle tangenti rispettivamente alle linee coordinate  $u, v, w$  passanti per il punto suddetto. Data una curva regolare  $\tau$  attraversante la regione  $R$ , l'espressione dell'elemento infinitesimo di area  $ds$  di  $\tau$  nelle coordinate suddette, si scrive:

$$(II. 1) \quad ds^2 = h_u^2 \cdot du^2 + h_v^2 \cdot dv^2 + h_w^2 \cdot dw^2,$$

dove i coefficienti  $h_u^2, h_v^2, h_w^2$  (coefficienti metrici) possono essere calcolati in base alla teoria generale dei sistemi di coordinate curvilinei<sup>(2)</sup> o ricavati mediante considerazioni dirette.

Supponiamo che la regione  $\mathcal{A}$  di cui sopra non contenga né materia né campi elettrici stazionari o variabili nel tempo ma sia invece sede di una distribuzione stazionaria di induzione magnetica  $\vec{B} = \vec{B}(Q)$  prodotta da sorgenti esterne ad  $\mathcal{A}$ . In ogni punto  $Q$  di  $R$  valgono allora le equazioni di Maxwell:

$$(II. 2) \quad \text{div } \vec{B} = \frac{1}{h_u \cdot h_v \cdot h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (B_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (B_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (B_w h_u h_v) \right] = 0,$$

$$(II. 3) \quad \text{rot } \vec{B} = (\text{rot } \vec{B})_u \cdot \vec{\tau}_u + (\text{rot } \vec{B})_v \cdot \vec{\tau}_v + (\text{rot } \vec{B})_w \cdot \vec{\tau}_w = 0$$

dove:

$$(II. 3, a) \quad (\text{rot } \vec{B})_u = \frac{1}{h_v h_w} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial v} (B_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w} (B_v h_v) \right]$$

$$(II. 3, b) \quad (\text{rot } \vec{B})_v = \frac{1}{h_u h_w} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial w} (B_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u} (B_w h_w) \right]$$

$$(II. 3, c) \quad (\text{rot } \vec{B})_w = \frac{1}{h_u h_v} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial u} (B_v h_v) - \frac{\partial}{\partial v} (B_u h_u) \right]$$

La validità della (II. 3) permette di affermare che esiste nella regione  $R$  una funzione scalare  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(Q)$  ad un sol valore, definita a meno di una costante arbitraria e tale che:

$$(II. 4) \quad \vec{B}(u, v, w) = -\mu_0 \cdot \text{grad} \mathcal{A} \Big|_{(u, v, w)} = B_u(u, v, w) \cdot \vec{\tau}_u + B_v(u, v, w) \cdot \vec{\tau}_v + B_w(u, v, w) \cdot \vec{\tau}_w,$$

con:

$$(II. 4, a) \quad B_u = -\mu_0 \cdot (\text{grad} \mathcal{A})_u = -\frac{\mu_0}{h_u} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u}$$

$$(II. 4, b) \quad B_v = -\mu_0 \cdot (\text{grad} \mathcal{A})_v = -\frac{\mu_0}{h_v} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial v}$$

$$(II. 4, c) \quad B_w = -\mu_0 \cdot (\text{grad} \mathcal{A})_w = -\frac{\mu_0}{h_w} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial w}$$

La funzione  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(Q)$ , che è il ben noto "potenziale scalare magnetico", soddisfa, come può essere direttamente verificato per sostituzione della (II. 4) nella (II. 2), alla equazione di Laplace:

$$(II. 5) \quad \nabla^2 \mathcal{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v h_w}{h_u} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u h_w}{h_v} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial w} \right) \right] = 0$$

La funzione  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(Q)$  è poi, per quanto detto prima, continua, superiormente ed inferiormente limitata in  $R$  e dotata, in questa regione, di derivate parziali di qualsiasi ordine:

$$\frac{\partial^{1+m+n} \mathcal{A}}{\partial u^1 \cdot \partial v^m \cdot \partial w^n} \quad 1, m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(1 + m + n > 0)$$

che sono a loro volta funzioni continue delle variabili  $(u, v, w)$ <sup>[2]</sup>. Alle derivate parziali di ordine  $1+m+n > 1$  è poi applicabile il teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine delle derivazioni.

A questo punto se si vuol procedere nella caratterizzazione delle diverse distribuzioni di potenziale  $\mathcal{A}(Q)$  è necessario sfruttare le simmetrie particolari che queste distribuzioni possono presentare. E' pertanto necessario individuare e definire le simmetrie fondamentali ed effettuare in base ad esse una classificazione delle distribuzioni di potenziale magnetico interessanti per l'ottica corpuscolare.

### II. 3. SIMMETRIE FONDAMENTALI DELLE DISTRIBUZIONI DI POTENZIALE.

Le simmetrie fondamentali del potenziale  $\mathcal{A}(Q)$  che possono essere individuate sono essenzialmente quattro e cioè la "simmetria di rivoluzione attorno ad un asse", la "simmetria di traslazione lungo un asse", la "simmetria" e la "antisimmetria rispetto ad un piano". Queste quattro simmetrie fondamentali possono essere definite come segue:

a) Diremo che una distribuzione di potenziale ha "simmetria di rivoluzione rispetto all'asse  $a$ ", se, preso un punto qualsiasi  $Q$  e condotta per esso la circonferenza  $\mathcal{M}$  con centro sulla retta  $a$  e contenuta nel

4.

piano per Q normale ad a, si ha sempre:

$$d\mathcal{L}(Q) = d\mathcal{L}(P),$$

per qualsiasi punto P appartenente a  $\mathcal{N}$ ,

b) Diremo invece che una distribuzione di potenziale ha "simmetria di traslazione lungo l'asse a" se, preso un punto qualsiasi Q e condotta per esso una retta r parallela alla retta a, si ha sempre:

$$d\mathcal{L}(Q) = d\mathcal{L}(P)$$

per qualsiasi punto P appartenente ad r,

c) supponiamo ora che la distribuzione di potenziale  $d\mathcal{L}(Q)$  possieda un piano tale che, detto Q' il punto simmetrico rispetto ad esso del generico punto Q, sia sempre:

$$d\mathcal{L}(Q') = K d\mathcal{L}(Q), \quad \text{dove:} \quad K = \pm 1.$$

se questa eguaglianza è verificata per  $K = 1$ , diremo che il piano suddetto è un "piano di simmetria" e lo indicheremo con  $\sigma$ , se viceversa l'eguaglianza precedente è vera per  $K = -1$ , diremo che il piano in oggetto è un "piano di antisimmetria" e lo indicheremo con  $\alpha$  (3).

Vediamo ora di caratterizzare analiticamente queste simmetrie e di stabilire quali conseguenze derivino da esse. Introduciamo un sistema di coordinate curvilinee ortogonali  $q_1, q_2, q_3$  analogo a quello introdotto al par. II.2. (4).

Per il caso a) assumiamo che le superfici  $q_1$  e  $q_2$  siano di rivoluzione attorno alla retta a. Pertanto le linee coordinate  $q_3$  saranno circonferenze con centro su a e appartenenti a piani ortogonali a tale retta, proprio come le circonferenze  $\mathcal{N}$  di cui sopra. Le superfici  $q_3$  siano poi i piani della stella avente per sostegno la retta a. Nel caso b) assumeremo che le superfici  $q_1$  e  $q_2$  siano generiche superfici cilindriche con generatrici parallele all'asse a. In tal modo le linee coordinate  $q_3$  risultano parallele ad a e le superfici  $q_3$  sono piani ortogonali ad a. Le condizioni a) e b) relative alle simmetrie di rivoluzione e traslazione possono essere caratterizzate analiticamente nella medesima forma scrivendo

$$d\mathcal{L} = d\mathcal{L}(q_1, q_2).$$

Da questa segue subito che deve essere:

$$(II.6) \quad \frac{\partial^n}{\partial q_3^n} \left( \frac{\partial^{1+m} d\mathcal{L}}{\partial q_1^1 \partial q_2^m} \right) = 0 \quad \begin{matrix} (n = 1, 2, 3, \dots) \\ (1, m = 0, 1, 2, \dots) \end{matrix}$$

Tenendo poi conto che, analogamente alle (II.4, a, b, c), si può scrivere:

$$(II.4, i) \quad B_{q_i} = -\frac{\mu_0}{h_{q_i}} \cdot \frac{\partial d\mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

si ricavano le relazioni seguenti (5):

$$(II.6, a) \quad \frac{\partial^{n-1} B_{q_3}}{\partial q_3^{n-1}} = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$(II.6, b) \quad \frac{\partial^n}{\partial q_3^n} \left[ \frac{\partial^{1+m-1} (h_{q_1} \cdot B_{q_1})}{\partial q_1^{1-1} \partial q_2^m} \right] = 0 \quad (1 \geq 1, m \geq 0)$$

$$(II.6, c) \quad \frac{\partial^n}{\partial q_3^n} \left[ \frac{\partial^{1+m-1} (h_{q_2} \cdot B_{q_2})}{\partial q_1^1 \partial q_2^{m-1}} \right] = 0 \quad (1 \geq 0, m \geq 1)$$

Per il caso c) assumeremo che le superfici coordinate  $q_1, q_2, q_3$  siano simmetriche rispetto ad una super

ficie piana  $q_3^*$  coincidente col piano di simmetria  $\sigma$  o di antisimmetria  $\alpha$ . Le linee coordinate  $q_3$  risultano allora simmetriche rispetto al piano  $q_3^*$ .

La condizione di simmetria espressa nel punto c) può allora essere espressa nella forma:

$$(II. 7) \quad dl_b(q_1, q_2, q_3^* - \delta q_3) = dl_b(q_1, q_2, q_3^* + \delta q_3)$$

nel caso  $q_3^* \equiv \sigma$  (cioè  $K = 1$ ), e:

$$(II. 8) \quad dl_b(q_1, q_2, q_3^* - \delta q_3) = -dl_b(q_1, q_2, q_3^* + \delta q_3)$$

nel caso  $q_3^* \equiv \alpha$  (cioè  $K = -1$ ).

Nelle (II. 7) e (II. 8)  $\delta q_3$  indica un incremento finito della coordinata  $q_3$ .

Vediamo ora di stabilire quali conseguenze derivino per una distribuzione di potenziale dalla validità di una delle due condizioni precedenti. Esaminiamo prima la (II. 7). Se teniamo presente che  $dl_b(q_1, q_2, q_3)$  è una funzione continua, limitata in  $\mathcal{A}$  e dotata di derivate prima continue, segue che, dovendo valere la (II. 7),  $dl_b(q_1, q_2, q_3)$  deve essere massima o minima sul piano  $q_3^* \equiv \sigma$ . Sarà quindi:

$$(II. 7') \quad \left( \frac{\partial dl_b}{\partial q_3} \right)_{(q_1, q_2, q_3^*)} = 0.$$

Naturalmente il valore del massimo o del minimo sul piano  $q_3^*$  è funzione delle coordinate  $q_1$  e  $q_2$ . Pertanto il piano  $q_3^* \equiv \sigma$ , ossia "il piano di simmetria non è una equipotenziale magnetica". Essendo poi:

$$B_{q_3} = -\frac{\mu_0}{h_{q_3}} \frac{\partial dl_b}{\partial q_3},$$

segue che deve essere:

$$(II. 7'') \quad B_{q_3}(q_1, q_2, q_3^*) = 0.$$

Pertanto:

$$(II. 7''') \quad \vec{B}(q_1, q_2, q_3^*) = B_{q_1}(q_1, q_2, q_3^*) \cdot \vec{\tau}_{q_1} + B_{q_2}(q_1, q_2, q_3^*) \cdot \vec{\tau}_{q_2}.$$

Quindi: "In ogni punto del piano di simmetria  $\sigma$ ,  $\vec{B}$  è tangenziale a tale piano".

Ricordiamo poi che, data una funzione di più variabili (sia essa  $f(q_1, q_2, q_3)$ ) dotata di un certo carattere di simmetria rispetto ad una di esse (ad esempio simmetrica (antisimmetrica) rispetto a  $q_2$ ), la sua derivata prima rispetto a quella variabile ( $\partial f / \partial q_2$ ) è una funzione con carattere di simmetria cambiato rispetto alla stessa variabile (cioè antisimmetrica (simmetrica) rispetto a  $q_2$ ). Tenuto conto della (II. 7), delle relazioni

$$\frac{\partial dl_b}{\partial q_i} = -\frac{1}{\mu_0} \cdot (h_{q_i} \cdot B_{q_i}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

e di quanto sopra ricordato, segue che rispetto alla variabile  $q_3$  ed al piano  $q_3^* \equiv \sigma$ , è:

$$(II. 7^{IV}) \quad \begin{array}{ll} (h_{q_1} \cdot B_{q_1}) & \text{Simmetrica} \\ (h_{q_2} \cdot B_{q_2}) & \text{Simmetrica} \\ (h_{q_3} \cdot B_{q_3}) & \text{Antisimmetrica}^{(6)} \end{array}$$

Passiamo ora a considerare il caso in cui valga la (II. 8). Tenendo conto di essa e del fatto che

$\mathcal{M}_0(q_1, q_2, q_3)$  è continua, segue che in ogni punto del piano  $q_3^* \equiv \alpha$ , è:

$$(II. 8') \quad d\mathcal{M}_0(q_1, q_2, q_3^*) = 0.$$

Pertanto il "piano di antisimmetria  $\alpha$  è una equipotenziale magnetica". Dalla (II. 8') segue che:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial q_1}\right)_{(q_1, q_2, q_3^*)} = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial q_2}\right)_{(q_1, q_2, q_3^*)} = 0,$$

ed in virtù delle eguaglianze:

$$B_{q_i} = -\frac{\mu_0}{h_{q_i}} \cdot \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2),$$

si ha:

$$(II. 8'') \quad B_{q_1}(q_1, q_2, q_3^*) = 0, \quad B_{q_2}(q_1, q_2, q_3^*) = 0.$$

Pertanto:

$$(II. 8''') \quad \vec{B}(q_1, q_2, q_3^*) = B_{q_3}(q_1, q_2, q_3^*) \cdot \vec{\tau}_{q_3}.$$

Quindi: "In ogni punto del piano di antisimmetria  $\alpha$ ,  $\vec{B}$  è normale a detto piano".

Dalle precedenti espressioni delle  $B_{q_i}$  e da quanto ricordato sulla derivazione delle funzioni dotate di un particolare carattere di simmetria, segue che rispetto alla variabile  $q_3$  ed al piano  $q_3^* \equiv \alpha$ , è

$$(II. 8^{IV}) \quad \begin{array}{ll} (h_{q_1} \cdot B_{q_1}) & \text{Antisimmetrica} \\ (h_{q_2} \cdot B_{q_2}) & \text{Antisimmetrica} \\ (h_{q_3} \cdot B_{q_3}) & \text{Simmetrica.} \end{array}$$

#### II. 4. - CLASSIFICAZIONE DELLE DISTRIBUZIONI DI POTENZIALE SULLA BASE DELLE LORO SIMMETRIE. -

Sulla base delle quattro simmetrie fondamentali descritte nel paragrafo precedente è possibile classificare tutte le distribuzioni di potenziale scalare magnetico interessanti per l'ottica corpuscolare. È possibile individuare sei "casi o tipi" di distribuzioni, che sono stati nel seguito ordinati partendo dai casi con simmetrie di grado più basso e procedendo verso i casi con simmetrie di grado sempre più elevato. Questi sei tipi di distribuzione possono essere descritti come segue.

##### Tipo A -

"La distribuzione  $\mathcal{M}_0(Q)$  ammette un piano di antisimmetria  $\alpha$ ". Questo caso si verifica nelle distribuzioni prodotte da un "generico magnete dipolare" (7) oppure nelle distribuzioni in prossimità delle testate di un "magnete dipolare a settore" (cfr. punto successivo).

##### Tipo B -

"La distribuzione di potenziale ammette un piano di antisimmetria  $\alpha$  ed una asse  $a$  di simmetria di rivoluzione ortogonale a tale piano". È il caso della distribuzione che si realizza nella regione interna (rispetto alle due testate) di un "magnete dipolare o settore" (8)

Tipo C -

"La distribuzione  $\mathcal{M}(Q)$  ammette una stella formata da un numero intero  $l (\geq 2)$  di piani di antisimmetria  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_l$  che ha per sostegno un'asse  $a$ . Inoltre la distribuzione si riproduce esattamente per rotazioni attorno all'asse  $a$  di angoli multipli interi di  $2(\pi/l)^{(9)}$ ". Questo caso si verifica nelle distribuzioni in prossimità delle testate di un "magnete 2l-polare" <sup>(10)</sup>.

Tipo D -

"La distribuzione di potenziale possiede le simmetrie del caso C ed inoltre ha simmetria di traslazione rispetto all'asse  $a$ ". E' il caso della distribuzione che si produce nella regione interna di un magnete 2l - polare.

Tipo E -

"La distribuzione  $\mathcal{M}(Q)$  possiede una stella di  $l$  piani di antisimmetria, come nel caso C, ed in più una stella formata da un eguale numero  $l$  di piani di simmetria  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$  avente lo stesso sostegno  $a$  della stella precedente. I piani  $\sigma$  della stella bisecano le  $l$  coppie di angoli diedri opposti formate dai piani di antisimmetria". Questo caso si verifica nelle distribuzioni in prossimità delle testate di un magnete 2l-polare" nel quale ogni espansione polare è simmetrica rispetto ad uno dei piani  $\sigma$  <sup>(11)</sup>.

Tipo F -

"La distribuzione di potenziale possiede le stesse simmetrie del caso E ed in più la simmetria di traslazione rispetto all'asse  $a$  comune alle due stelle di piani  $\alpha$  e  $\sigma$ ". Questo caso si verifica nella distribuzione presente nella regione interna di un magnete 2l-polare come quello considerato in E.

Il caso delle distribuzioni dotate della pura simmetria di rivoluzione che si verifica nelle lenti magnetiche a focalizzazione debole, non è qui considerato. Per una sua trattazione vedasi bibl [3]

I casi C ed E per  $l > 2$  riguardano le distribuzioni in prossimità delle testate di magneti sestupolari, ottupolari, . . . . con o senza piani di simmetria  $\sigma$ . Questi casi risultano assai complicati per quanto riguarda la loro trattazione analitica mentre rivestono scarsa importanza pratica. Infatti la estensione assiale della regione di campo disperso in prossimità della testata di un magnete 2l-polare decresce rapidamente al crescere di  $l$  e si può ritenere che essa eserciti una influenza trascurabile sulle traiettorie dei corpuscoli già per  $l = 3$ . Trascureremo pertanto questi casi mentre ci limiteremo a trattare i casi A, B, C (con  $l = 2$ ), D, E (con  $l = 2$ ), F. I casi D ed F saranno trattati per ultimi.

## II. 5. SVILUPPI IN SERIE DELLE COMPONENTI DI $\vec{E}(Q)$ NELL'INTORNO DI UNA CURVA PIANA DI RIFERIMENTO.

Osserviamo anzitutto che in tutti i sei casi di simmetrie elencati precedentemente esiste sempre almeno un piano di antisimmetria  $\alpha$ . Ora, per la trattazione dei problemi di ottica che ci interessano, è conveniente utilizzare una curva di riferimento  $\tau_0$  (alla quale un opportuno sistema di coordinate è riferito) che sia scelta in modo da sfruttare al massimo le simmetrie della distribuzione di campo. Pertanto assumeremo che la  $\tau_0$  sia una curva regolare giacente sul piano di antisimmetria  $\alpha$ , riservandoci di specializzare ulteriormente questa curva nei casi di simmetria più elevata (cfr. Parte I<sup>a</sup> - par. 2 e 3).

Con riferimento alla Fig. II-1, fissiamo su  $\tau_0$  un sistema di ascisse curvilinee orientate (OP) =  $t$  con origine nel punto O. Un punto Q della regione R può essere individuato assegnando la terna di coordinate  $(t, r, z)$  dove  $t$  è l'ascisse curvilinea del punto P in cui il piano per Q normale  $\tau_0$  taglia questa curva ed  $r$  e  $z$  sono le proiezioni di  $\vec{PQ}$  rispettivamente lungo la normale  $\vec{r}$  e la binormale  $\vec{z}$  a  $\tau_0$  in P. <sup>(12)</sup> Identifichiamo ora il sistema di coordinate  $t, r, z$  con un particolare sistema di coordinate curvilinee  $u, v, w$ . A tal fine assumiamo che la curva piana  $\tau_0$  coincida con una particolare linea coordinata  $u^*$  ottenuta per intersezione di due particolari superfici coordinate  $v^*$  e  $w^*$ . La superficie  $v^*$  è la superficie cilindrica avente per direttrice la  $\tau_0$  stessa e generatrici perpendicolari ad  $\alpha$ , mentre la  $w^*$  coincide con il piano  $\alpha$  medesimo. Le superfici  $v^*$  e  $w^*$  si identificano quindi rispettivamente con le superfici  $r = 0$  e  $z = 0$ . Le superfici  $v$  coincidono poi con le superfici cilindriche aventi generatrici normali al piano  $\alpha$  e per direttrici le linee  $r = \text{cost}$  di tale piano, mentre le superfici coordinate  $w$  siano i piani paralleli ad  $\alpha$ , cioè i piani  $z = \text{cost}$ . Infine i piani normali alla curva  $\tau_0$  (e quindi normali al piano  $\alpha$ ) cioè i piani  $t = \text{cost}$ , siano assunti come superfici  $u$ . Da ciò segue che le linee  $w$  sono rette, normali ad  $\alpha$  le linee  $v$  sono rette parallele ad  $\alpha$  appartenenti a piani normali a  $\tau_0$  ed infine le linee  $u$  sono le curve intersezione dei piani  $z = \text{cost}$  con le superfici cilindriche normali ad  $\alpha$  ed aventi per direttrici le curve  $r = \text{cost}$ . Con queste identificazioni risulta:



8.

$$(II.9) \quad \begin{array}{ccc} u = t, & v = r, & w = z \\ \vec{\tau}_u = \vec{t}, & \vec{\tau}_v = \vec{r}, & \vec{\tau}_w = \vec{z}. \end{array}$$

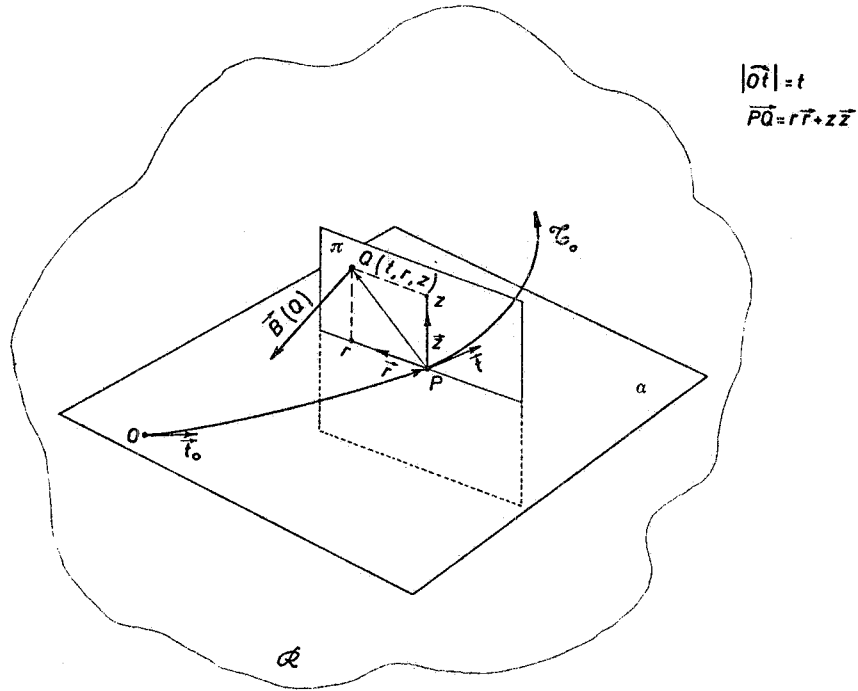


FIG. II-1 - Sistema di coordinate  $t, r, z$  usato per individuare i punti della distribuzione di campo (cfr. Fig. 1 - Parte I<sup>a</sup>).

Ricordiamo ora che nella Parte I<sup>a</sup>, par. I-3 è stato calcolato l'elemento infinitesimo  $ds$  di una generica curva gobba  $\tau$  facendo uso delle coordinate  $t, r, z$ . Si era allora ottenuto:

$$(I-9) \quad ds^2 = (1+hr)^2 \cdot dt^2 + dr^2 + dz^2,$$

dove  $h = 1/\rho$  è la curvatura di  $\tau_0$  nel punto corrente.

Confrontando questa espressione con la (II-1) si ricava:

$$(II-10) \quad h_u = (1+hr), \quad h_v = 1, \quad h_w = 1.$$

Torniamo ora al potenziale scalare magnetico  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t, r, z)$ . Questo, come già detto al par. II.2, possiede derivate parziali:

$$\frac{\partial^{1+m+n} \mathcal{A}}{\partial t^n \cdot \partial r^1 \cdot \partial z^m} \quad \begin{array}{l} 1, m, n = 0, 1, 2, \dots \\ (1+m+n > 0) \end{array}$$

che sono funzioni definite e continue in ogni punto  $Q$  della regione  $\mathcal{Q}$ . Da questo fatto segue che esistono e sono continue in ogni punto di  $\mathcal{Q}$  tanto le componenti  $B_t, B_r, B_z$  di  $B$  quanto le loro derivate totali e parziali di qualsiasi ordine rispetto alle variabili  $r$  e  $z$  (13). A queste ultime è poi applicabile il teorema di Schwarz sulla invertibilità dell'ordine delle derivazioni parziali.

Aggiungiamo infine l'ipotesi che le derivate (14):

$$\left( \frac{\partial^{l+m+n-1} B_t}{\partial t^{n-1} \partial r^{l-1} \partial z^m} \right) (t, 0, 0) \quad \left( \begin{array}{l} l, m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

$$\left( \frac{\partial^{l+m+n-1} B_r}{\partial t^n \partial r^{l-1} \partial z^m} \right) (t, 0, 0) \quad \left( \begin{array}{l} n, m = 0, 1, 2, \dots \\ l = 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

$$\left( \frac{\partial^{l+m+n-1} B_z}{\partial t^n \partial r^l \partial z^{m-1}} \right) (t, 0, 0) \quad \left( \begin{array}{l} l, n = 0, 1, 2, \dots \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

calcolate nel punto corrente P di  $\tau_0$  siano funzioni note della ascissa curvilinea  $t$  <sup>(15)</sup> e decomponiamo l'induzione magnetica  $\vec{B}$  nel punto Q(t, r, z) lungo le direzioni individuate dai versori  $\vec{t}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{z}$  della terna intrinseca a  $\tau_0$  in P(t, 0, 0). Si ha:

$$(II. 11) \quad \vec{B}(t, r, z) = B_t(t, r, z) \cdot \vec{t} + B_r(t, r, z) \cdot \vec{r} + B_z(t, r, z) \cdot \vec{z}.$$

Nelle ipotesi fatte è possibile sviluppare  $B_t(t, r, z)$ ,  $B_r(t, r, z)$ ,  $B_z(t, r, z)$  in serie bidimensionali di MacLaurin nell'intorno della curva  $\tau_0$ . Si ha:

$$(II-12) \quad \begin{aligned} B_t(t, r, z) &= \sum_{0 \leq K} \frac{1}{K!} \left[ \left( r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^K B_t \right] (t, 0, 0) \\ B_r(t, r, z) &= \sum_{0 \leq K} \frac{1}{K!} \left[ \left( r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^K B_r \right] (t, 0, 0) \quad (0! = 1) \\ B_z(t, r, z) &= \sum_{0 \leq K} \frac{1}{K!} \left[ \left( r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^K B_z \right] (t, 0, 0) \end{aligned}$$

Per gli sviluppi successivi è opportuno effettuare qualche trasformazione sulla espressione operatoriale:

$$(II-12') \quad \sum_{0 \leq K} \frac{1}{K!} \left[ \left( r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^K \dots \right] (t, 0, 0),$$

che compare in tutti gli sviluppi (II. 12). Utilizzando la formula di Newton per lo sviluppo della potenza K-esima di un binomio la (II-12') può essere riscritta nella forma:

$$\sum_{0 \leq K} \frac{1}{K!} \left[ \sum_{0 \leq i}^K \binom{K}{i} r^{K-i} \cdot z^i \cdot D_{K-i}^K \dots \right],$$

nella quale si è posto:

$$D_{K-i}^K \dots = \left( \frac{\partial^{K-i} \dots}{\partial r^{K-i} \partial r^i} \right) (t, 0, 0)$$

e dove:

$$\binom{K}{i} = \frac{K!}{i!(K-i)!}$$

indica il numero di combinazioni di K elementi presi ad i ad i.

Scambiando l'ordine delle sommatorie l'espressione precedente diviene:

$$\sum_{0 \leq i} \left[ \sum_{i \leq K} \frac{1}{K!} \binom{K}{i} r^{K-i} \cdot D_{K-i}^K \dots \right] \cdot z^i$$

Decomponiamo ora la sommatoria sull'indice  $i$  nelle sommatorie sui termini di grado pari e dispari in  $z$ . Poniamo a tal fine:

$$i = \begin{cases} 2\lambda & \lambda = 0, 1, 2, \dots, \infty. \\ 2\lambda + 1 \end{cases}$$

Ciò posto possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq K} \frac{1}{K!} \left[ \left( r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^K \dots \right]_{(t, 0, 0)} = \\ \text{(II-12'')} & = \sum_{0 \leq \lambda} \left[ \sum_{2\lambda \leq K} \frac{1}{K!} \binom{K}{2\lambda} \cdot r^{K-2\lambda} \cdot D_{K-2\lambda}^K \dots \right] \cdot z^{2\lambda} + \sum_{0 \leq \lambda} \left[ \sum_{2\lambda+1 \leq K} \frac{1}{K!} \binom{K}{2\lambda+1} r^{K-2\lambda-1} D_{K-2\lambda-1}^K \dots \right] z^{2\lambda+1}. \end{aligned}$$

Decomponiamo poi la sommatoria rispetto a  $K$  nelle sommatorie sui termini pari e dispari in  $r$  ponendo:

$$K = \begin{cases} 2\mu & \mu = 0, 1, 2, \dots, \infty. \\ 2\mu + 1 \end{cases}$$

Con ciò la (II-12'') diviene:

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq K} \frac{1}{K!} \left[ \left( r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^K \dots \right]_{(t, 0, 0)} = \\ & = \sum_{0 \leq \lambda} \left[ \sum_{\lambda \leq \mu} \frac{1}{(2\mu)!} \binom{2\mu}{2\lambda} \cdot r^{2(\mu-\lambda)} D_{2(\mu-\lambda)}^{2\mu} \dots \right] z^{2\lambda} + \sum_{0 \leq \lambda} \left[ \sum_{\bar{\mu} \leq \mu} \frac{1}{(2\mu+1)!} \binom{2\mu+1}{2\lambda} \cdot \right. \\ \text{(II. 12''')} & \left. \cdot r^{2(\mu-\lambda)+1} D_{2(\mu-\lambda)+1}^{2\mu+1} \dots \right] z^{2\lambda} + \sum_{0 \leq \lambda} \left[ \sum_{\bar{\mu} \leq \mu} \frac{1}{(2\mu)!} \binom{2\mu}{2\lambda+1} \cdot r^{2(\mu-\lambda)-1} D_{2(\mu-\lambda)-1}^{2\mu} \dots \right] z^{2\lambda+1} + \\ & + \sum_{0 \leq \lambda} \left[ \sum_{\bar{\mu} \leq \mu} \frac{1}{(2\mu+1)!} \binom{2\mu+1}{2\lambda+1} \cdot r^{2(\mu-\lambda)} D_{2(\mu-\lambda)}^{2\mu+1} \dots \right] z^{2\lambda+1}, \end{aligned}$$

dove  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\bar{\mu}}$  sono rispettivamente i minimi interi positivi o nulli tali che risulti:

$$2\bar{\mu} + 1 > 2\lambda \quad \text{e} \quad 2\bar{\bar{\mu}} > 2\lambda + 1.$$

Le espressioni (II-12'', 12''') saranno utilizzate nel seguito.

## II. 6. DISTRIBUZIONI CON SIMMETRIE DEL TIPO A.

La scelta della curva  $\tau_0$  e del sistema di riferimento adatti per trattare questo caso di simmetria, che è quello più elementare, sono stati descritti nel paragrafo precedente. In particolare valgo-

no le eguaglianze (II-9), (II-10) e pertanto le equazioni (II-4), (II-2) (II-3) assumono, nel sistema di coordinate  $t, r, z$  usato, la forma:

$$\vec{B} = -\mu_0 \cdot \text{grad } \mathcal{L} = B_t(t, r, z) \vec{t} + B_r(t, r, z) \vec{r} + B_z(t, r, z) \vec{z}$$

con:

$$B_t = -\mu_0 \cdot \frac{1}{1+hr} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad B_r = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}, \quad B_z = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z},$$

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{1+hr} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1+hr) \cdot B_r \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1+hr) B_z \right] + \frac{\partial B_t}{\partial t} \right\} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = (\text{rot } \vec{B})_t \vec{t} + (\text{rot } \vec{B})_r \vec{r} + (\text{rot } \vec{B})_z \vec{z} = 0$$

con:

$$(\text{rot } \vec{B})_t = \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z}; \quad (\text{rot } \vec{B})_r = \frac{1}{1+hr} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial z} (1+hr) B_t - \frac{\partial B_z}{\partial t} \right];$$

$$(\text{rot } \vec{B})_z = \frac{1}{1+hr} \cdot \left[ \frac{\partial B_r}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} (1+hr) B_t \right].$$

Dalle ultime cinque equazioni si ricavano immediatamente le condizioni a cui devono soddisfare le componenti  $B_t, B_r, B_z$  affinché  $\vec{B}$  risulti solenoidale ed irrotazionale. Queste condizioni si scrivono:

$$(II-13) \quad hB_r + (1+hr) \cdot \frac{\partial B_r}{\partial r} + (1+hr) \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_t}{\partial t} = 0$$

$$(II-14, a) \quad \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z} = 0$$

$$(II-14, b) \quad (1+hr) \cdot \frac{\partial B_t}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$(II-14, c) \quad hB_t + (1+hr) \cdot \frac{\partial B_t}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial t} = 0.$$

Esse saranno utilizzate tra breve.

Vediamo ora quali conseguenze derivino dalla presenza del piano di antisimmetria  $\alpha$  (piano  $z = 0$ ). Assumiamo:

$$q_1 = u = t, \quad q_2 = v = r, \quad q_3 = w = z, \quad q_3^* = w^* = 0, \quad h_{q_1} = h_u, \quad h_{q_2} = h_v, \quad h_{q_3} = h_w$$

Le (II-8', 8'', 8''', 8<sup>IV</sup>) si scrivono:

$$\mathcal{L}(t, r, 0) = 0; \quad B_t(t, r, 0) = 0; \quad B_r(t, r, 0) = 0$$

$$\vec{B}(t, r, 0) = B_z(t, r, 0) \vec{z}$$

$$(1+hr) \cdot B_t \quad \text{Antisimmetrica rispetto a } z \text{ ed al piano } z = 0$$

$$B_r \quad \text{Antisimmetrica rispetto a } z \text{ ed al piano } z = 0$$

$$B_z \quad \text{Simmetrica rispetto a } z \text{ ed al piano } z = 0.$$

Osserviamo ora (1+hr) è, rispetto a z, una costante. <sup>(16)</sup> Pertanto possiamo concludere che è:

$$(II-15) \quad \begin{array}{ll} B_t & \text{Antisimmetrica rispetto a z ed al piano } z = 0 \\ B_r & \text{Antisimmetrica rispetto a z ed al piano } z = 0 \\ B_z & \text{Simmetrica rispetto a z ed al piano } z = 0 \end{array}$$

La conseguenza più importante che deriva dall'esistenza del piano di antisimmetria  $\alpha$  è quindi che gli sviluppi (II-12) delle componenti di  $\vec{B}$  devono soddisfare alle condizioni (II-15). Da queste segue che gli sviluppi in serie di  $B_r$  e  $B_t$  possono contenere solo termini con potenze dispari di z mentre lo sviluppo di  $B_z$  potrà contenere solo termini con potenze pari della stessa variabile.

Avvalendoci della forma (II-12'') dell'espressione operatoriale (II-12'), possiamo scrivere:

$$(II-16) \quad \begin{aligned} B_t(t, r, z) &= \sum_0^\infty \lambda \left[ \sum_{2\lambda+1}^\infty K \frac{1}{K!} \cdot \binom{K}{2\lambda+1} D_{K-2\lambda-1}^{K-2\lambda-1} B_t \cdot r^{K-2\lambda-1} \right] z^{2\lambda+1} \\ B_r(t, r, z) &= \sum_0^\infty \lambda \left[ \sum_{2\lambda+1}^\infty K \frac{1}{K!} \cdot \binom{K}{2\lambda+1} D_{K-2\lambda-1}^{K-2\lambda-1} B_r \cdot r^{K-2\lambda-1} \right] z^{2\lambda+1} \\ B_z(t, r, z) &= \sum_0^\infty \lambda \left[ \sum_{2\lambda}^\infty K \frac{1}{K!} \cdot \binom{K}{2\lambda} D_{K-2\lambda}^{K-2\lambda} B_z \cdot r^{K-2\lambda} \right] z^{2\lambda} \end{aligned}$$

ovvero esplicitando questi sviluppi fino a termini del 2° ordine nelle variabili r e z:

$$(II-16') \quad \begin{aligned} B_t(t, r, z) &= \left[ \frac{\partial B_t}{\partial z} + \frac{\partial^2 B_t}{\partial r \partial z} \cdot r + \dots \right] \cdot z + \dots \\ B_r(t, r, z) &= \left[ \frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial z} \cdot r + \dots \right] \cdot z + \dots \\ B_z(t, r, z) &= \left[ B_z + \frac{\partial B_z}{\partial r} \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \cdot r^2 + \dots \right] + \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \dots \right] \cdot z^2 + \dots \end{aligned}$$

Finora non abbiamo utilizzato le equazioni (II-3) e (II-2) che esprimono la irrotazionalità della distribuzione  $\vec{B}(Q)$ . Ci siamo invece limitati ad esplicitare queste equazioni assumendo come curva di riferimento per le coordinate t, r, z la curva  $\mathcal{T}_0$  appartenente al piano  $\alpha$  e si sono ottenute le condizioni (II.13) e (II-14, a, b, c).

Vogliamo ora esaminare quali conseguenze derivino dalla esistenza di tali condizioni per gli sviluppi (II-16). A tal fine sostituiamo gli sviluppi in oggetto nelle equazioni (II-13) e (II-14 a, b, c) e, utilizzando il fatto che esse devono valere in ogni punto Q (t, r, z) di  $\alpha$ , stabiliremo quali relazioni debbono sussistere tra i coefficienti degli sviluppi (II-16) di modo che le equazioni suddette risultino soddisfatte identicamente. Sviluppando questa procedura <sup>(17)</sup> si ottengono le relazioni ricorrenti:

$$(II-17) \quad h(K-2\lambda) \cdot D_{K-2\lambda-1}^{K-2\lambda-1} B_r + D_{K-2\lambda-1}^{K-2\lambda-1} B_t + D_{K-2\lambda}^{K+1} B_r + D_{K-2\lambda-1}^{K+1} B_z + h(K-2\lambda-1) D_{K-2\lambda-2}^{K-2\lambda-2} B_z = 0$$

$$(II-18 a) \quad D_{K-2\lambda}^{K-2\lambda} B_z - D_{K-2\lambda-1}^{K-2\lambda-1} B_r = 0$$

$$(II-18, b) \quad D_{K-2\lambda}^{K+1} B_t + h (K-2\lambda) \cdot D_{K-2\lambda-1}^K B_t - D_{K-2\lambda}^K B'_z = 0$$

$$(II-18, c) \quad D_{r-2\lambda-1}^K B'_r - h (K-2\lambda) \cdot D_{K-2\lambda-1}^K B_t - D_{K-2\lambda}^{K+1} B_t = 0.$$

Al fine di ottenere espressioni diverse per i coefficienti degli sviluppi (II-16') esplicitiamo le relazioni ricorrenti trovate in modo da ottenere espressioni contenenti al più derivate del secondo ordine. Si ottiene dalla (II-17):

$$h \frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{\partial B'_t}{\partial z} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = 0 \quad (K=1, \lambda=0),$$

dalla (II-18, a):

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z} \quad (K=1, \lambda=0)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial z} \quad (K=2, \lambda=0),$$

dalla (II-18, b):

$$\frac{\partial B_t}{\partial z} = B'_z \quad (K=0, \lambda=0)$$

$$\frac{\partial^2 B_t}{\partial r \partial z} + h \frac{\partial B_t}{\partial z} - \frac{\partial B'_z}{\partial r} = 0 \quad (K=1, \lambda=0),$$

dalla (II-18, c):

$$\frac{\partial B'_r}{\partial z} - h \cdot \frac{\partial B_t}{\partial z} - \frac{\partial^2 B_t}{\partial r \partial z} = 0 \quad (K=1, \lambda=0).$$

Da queste si hanno o si deducono facilmente le eguaglianze seguenti:

$$(II-19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial B_t}{\partial z} &= B'_z \\ \frac{\partial^2 B_t}{\partial r \partial z} &= \frac{\partial B'_z}{\partial r} - h \frac{\partial B_t}{\partial z} = \frac{\partial B'_z}{\partial r} - h B'_z \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} &= \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial z} &= \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} &= -\left(h \frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{\partial B'_t}{\partial z} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial r \partial z}\right) = -\left(h \frac{\partial B_z}{\partial r} + B''_z + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right), \end{aligned}$$

dove nell'ultima eguaglianza si è posto :

$$\frac{\partial B'_t}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_t}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) = B''_z$$

in virtù del teorema di Schwarz e della prima eguaglianza (II-19). Introducendo queste eguaglianze negli sviluppi (II-16') si ottiene per il caso A :

$$\begin{aligned} B'_t(t, r, z) &= B'_z \cdot z + \left( \frac{\partial B'_z}{\partial r} - hB'_z \right) rz + \dots \\ \text{(II-20)} \quad B_r(t, r, z) &= \frac{\partial B_z}{\partial r} \cdot z + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \cdot rz + \dots \\ B_z(t, r, z) &= B_z + \frac{\partial B_z}{\partial r} \cdot r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \cdot r^2 - \frac{1}{2} \left( h \frac{\partial B_z}{\partial r} + B''_z + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right) z^2 + \dots \end{aligned}$$

Nelle (II-20), la  $B_z$  e tutte le sue derivate rispetto ad  $r$  e  $z$  s'intendono calcolate in  $(t, 0, 0)$  e sono funzioni note di  $t$ . Inoltre la curvatura  $h = h(t)$  della curva  $\tau_0$  è una funzione nota "a priori".

Vogliamo ora osservare che l'uso delle relazioni ricorrenti e delle relazioni da queste dedotte ha permesso, almeno per quanto riguarda i termini fino al secondo ordine in  $r$  e  $z$  presenti nelle (II-16'), di esprimere i relativi coefficienti mediante  $B_z$  e le sue derivate totali e parziali rispetto alle variabili  $t, r, z$ . Poichè la procedura indicata in precedenza non presenta limitazioni di sorta, si può pensare di estendere questo risultato fino a termini di qualsivoglia ordine degli sviluppi (II-16). In conclusione si può affermare che le equazioni  $\text{rot } \vec{B} = 0$  e  $\text{div } \vec{B} = 0$  consentono di restringere considerevolmente l'ipotesi iniziale, cioè che tutte le componenti di  $\vec{B}$  e tutte le loro derivate parziali e totali rispetto a  $r$  e  $z$  di qualsiasi ordine devono essere funzioni note di  $t$ , alla ipotesi più ristretta che soltanto  $B_z$  e le sue derivate parziali di qualsiasi ordine rispetto a  $t, r, z$  devono essere funzioni di  $t$  conosciute.

In vista di una utilizzazione delle espressioni (II-20) per l'ottica corpuscolare, assumiamo che la curva  $\tau_0$  coincida con la "traiettoria effettiva" del piano  $\alpha$  corrispondente alle condizioni iniziali  $0, \vec{u}_0, p_0$  (traiettoria di riferimento o "asse ottico"). Per essa varrà allora l'equazione :

$$B_z(t, 0, 0) = \frac{p_0}{q} h(t)$$

che si ottiene dalla relazione (I-3) della Parte I<sup>a</sup> ponendo  $p = p_0$ . Da questa per derivazione successiva rispetto a  $t$ , si ottiene :

$$B'_z(t, 0, 0) = \frac{p_0}{q} h'(t), \quad B''_z(t, 0, 0) = \frac{p_0}{q} h''(t), \dots$$

Allo scopo di caratterizzare la distribuzione  $\vec{B}(Q)$  nell'intorno della traiettoria  $\tau_0$  ed in conformità con la pratica corrente nella trattazione dei problemi relativi agli acceleratori di particelle introduciamo i cosiddetti "indici di campo" (adimensionali) definiti dalla relazione generale :

$$n_i = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{h^i B_z} \left( \frac{\partial^i B_z}{\partial r^i} \right) (0, 0, t) \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Questa fornisce in particolare :

$$\begin{aligned} n_0 &= 1 \\ n_1 &= - \frac{1}{h B_z} \left( \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) (0, 0, t) = n \quad (\text{indice primo}) \\ n_2 &= \frac{1}{2! h^2 B_z} \left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right) (0, 0, t) = \quad (\text{indice secondo}) \\ &\dots \end{aligned}$$

In virtù di queste definizioni e delle relazioni precedenti si può scrivere :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial r} &= -nhB_z = -\frac{p_0}{q} nh^2 \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} &= 2\beta h^2 B_z = 2\frac{p_0}{q} \beta h^3 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial B'_z}{\partial r} &= -\frac{p_0}{q} (n'h^2 + 2nhh'), \dots \end{aligned}$$

e le (II-20) possono essere riscritte nella forma definitiva :

$$\begin{aligned} (II-20') \quad B_t(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ h'z - (n'h^2 + 2nhh' + hh') rz + \dots \right] \\ B_r(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ -nh^2 z + 2\beta h^3 rz + \dots \right] \\ B_z(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ h - nh^2 r + \beta h^3 r^2 - \frac{1}{2}(h'' - nh^3 + 2\beta h^3)z^2 + \dots \right] . \end{aligned}$$

II. 7. DISTRIBUZIONI CON SIMMETRIE DEL TIPO B.

Per sfruttare al massimo le simmetrie della distribuzione  $\mathcal{M}_0(Q)$  conviene assumere che la curva  $\tau_0$  di riferimento non solo giaccia nel piano  $\alpha$  ma coincida con una particolare circonferenza  $\gamma_0$  di raggio  $\rho$  e centro nel punto C in cui l'asse  $a$  di simmetria di rivoluzione interseca il piano  $\alpha$  di antisimmetria. Con questa scelta tutte le superfici coordinate  $u, v, w$  possono essere prese come descritto nel par. II-5 per il caso A, solo che le superfici  $v$ , anzichè essere delle generiche superfici cilindriche con generatrici normali ad  $\alpha$ , si specializzano ora in cilindri circolari con asse coincidente con l'asse  $a$  di cui sopra. In particolare risulta :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{\rho(t)} = \frac{1}{\rho} = h = \text{cost.} \neq 0 \\ h' &= h'' = \dots = 0 . \end{aligned}$$

Con riferimento a quanto detto nel par. II-3 a proposito della simmetria di rivoluzione assumiamo:

$$\begin{aligned} q_1 = v = r, & \quad q_2 = w = z, & \quad q_3 = u = t \\ h_{q_1} = h_v = 1, & \quad h_{q_2} = h_w = 1, & \quad h_{q_3} = h_u = (1 + hr) . \end{aligned}$$

Le (II-6, a, b, c) si scrivono allora :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n-1} B_t}{\partial t^{n-1}} &= 0 & (n \geq 1) \\ \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( \frac{\partial^{1+m-1} B_r}{\partial r^{1-1} \partial z^m} \right) &= 0 & (1 \geq 1, m \geq 0) \\ \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( \frac{\partial^{1+m-1} B_z}{\partial r^1 \partial z^{m-1}} \right) &= 0 & (1 \geq 0, m \geq 1) . \end{aligned}$$



La prima di queste eguaglianze da, per  $n = 1$  :

$$B_t(t, r, z) = 0$$

mentre la seconda e la terza, danno :

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = 0 \quad (n = 1, l = 1, m = 0)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = B_z^t = 0 \quad (n = 1, l = 0, m = 1)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = B_z^{tt} = 0 \quad (n = 2, l = 0, m = 1)$$

In conseguenza le (II-4), (II-2), (II-3) divengono :

$$\vec{B} = -\mu_0 \text{grad } \mathcal{M} = B_r(t, r, z) \vec{r} + B_z(t, r, z) \vec{z}$$

con :

$$B_r = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial r}, \quad B_z = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{1+hr} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [(1+hr) B_r] + \frac{\partial}{\partial z} [(1+hr) B_z] \right\}$$

$$\text{rot } \vec{B} = (\text{rot } \vec{B})_t \vec{t} = 0$$

con :

$$(\text{rot } \vec{B})_t = \left( \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z} \right), \quad (\text{rot } \vec{B})_r = 0, \quad (\text{rot } \vec{B})_z = 0$$

Inoltre gli sviluppi (II-20) divengono per il caso B :

$$\begin{aligned} B_t(t, r, z) &= 0 \\ \text{(II-21)} \quad B_r(t, r, z) &= \frac{\partial B_z}{\partial r} z + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} rz + \dots \\ B_z(t, r, z) &= B_z + \frac{\partial B_z}{\partial r} r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} r^2 - \frac{1}{2} (h \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}) z^2 + \dots \end{aligned}$$

dove ora tutte le derivate presenti non sono più funzioni di  $t$ , ma delle costanti calcolate in un punto qualsiasi di  $\mathcal{T}_0$ . Pertanto nelle (II-21) non vi è alcuna variabilità rispetto a  $t$ .

Riassumendo si può dire che, nel caso B, tutte le relazioni interessanti possono essere ottenute dalle corrispondenti del caso A, imponendo le condizioni :

$$\frac{\partial^n h}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1} B_t}{\partial t^{n-1}} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( \frac{\partial^{1+m-1} B_z}{\partial r^{1-1} \partial z} \right) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( \frac{\partial^{1+m-1} B_z}{\partial r^1 \partial z^{m-1}} \right) = 0 \quad (n \geq 1)$$

Identificando  $\mathcal{T}_0$  con la traiettoria di riferimento ed introducendo gli indici di campo ( $n' = n'' = \dots = \beta'$  =

=  $\beta'' = \dots = 0$ ) le (II-21) divengono :

$$(II-21') \quad \begin{aligned} B_t(t, r, z) &= 0 \\ B_r(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ -nh^2 z + 2\beta h^3 r z + \dots \right] \\ B_z(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ h - nh^2 r + \beta h^3 r^2 + \frac{1}{2} (nh^3 - 2\beta h^3) z^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

dove ora  $n$  e  $\beta$  sono delle costanti note.

## II. 8. DISTRIBUZIONI CON SIMMETRIE DEL TIPO C (1 = 2).

In questo caso assumeremo come curva di riferimento  $\tau_0$  la retta a intersezione dei due piani ortogonali di antisimmetria  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$ . Il sistema di coordinate  $t, r, z$  si riduce quindi ad un sistema cartesiano ortogonale. Assumeremo che i piani  $z=0$  ed  $r=0$  coincidano rispettivamente con i piani  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  di cui sopra. Il sistema di coordinate curvilinee  $u, v, w$  più adatto per trattare questo caso è quello di seguito specificato. I piani paralleli ad  $\alpha_1$ , cioè i piani  $z = \text{cost}$ , sono presi come superfici  $w$  mentre i piani paralleli ad  $\alpha_2$ , ossia i piani  $r = \text{cost}$ , si identificano con le superfici  $v$ . Infine i piani ortogonali a  $\tau_0 \equiv a$ , ossia i piani  $t = \text{cost}$ , sono presi come superfici  $u$ . Con queste scelte le linee coordinate  $u$  risultano parallele a  $\tau_0$ , le  $v$  ortogonali ad  $\alpha_2$  e le  $w$  normali ad  $\alpha_1$ . Si ha quindi :

$$\begin{aligned} u &= t, & v &= r, & w &= z, \\ \vec{\tau}_u &= \vec{t}, & \vec{\tau}_v &= \vec{r}, & \vec{\tau}_w &= \vec{z}, \\ ds^2 &= dt^2 + dr^2 + dz^2, & \text{per cui: } & h_u = h_v = h_w = 1. \end{aligned}$$

Va poi osservato che con le scelte effettuate le linee coordinate  $w$  sono simmetriche rispetto al piano  $w^* \equiv \alpha_1$  ed egualmente le linee  $v$  rispetto al piano  $v^* \equiv \alpha_2$ . Pertanto possiamo applicare a questi due piani la definizione di antisimmetria introdotta nel par. II-3. Poniamo per il piano  $\alpha_1$  :

$$\begin{aligned} q_1 &= u = t, & q_2 &= v = r, & q_3 &= w = z, & q_3^* &= w^* = 0, \\ h_{q_1} &= h_u, & h_{q_2} &= h_v, & h_{q_3} &= h_w, \end{aligned}$$

allora le (II-8', 8'', 8''', 8<sup>IV</sup>) si scrivono :

$$(II-22) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(t, r, z) &= 0, & B_t(t, r, z) &= 0, & B_r(t, r, z) &= 0, & \vec{B}(t, r, z) &= B_z(t, r, z) \vec{z}. \\ B_t & & \text{antisimmetrica in } z & \text{rispetto al piano } z = 0, \\ B_r & & \text{antisimmetrica in } z & \text{rispetto al piano } z = 0, \\ B_z & & \text{simmetrica in } z & \text{rispetto al piano } z = 0. \end{aligned}$$

Per il piano  $\alpha_2$  di antisimmetria poniamo invece :

$$\begin{aligned} q_1 &= u = t, & q_2 &= w = z, & q_3 &= v = r, & q_3^* &= v^* = 0, \\ h_{q_1} &= h_u, & h_{q_2} &= h_w, & h_{q_3} &= h_v. \end{aligned}$$

Le (II-8', 8'', 8''', 8<sup>IV</sup>) danno in questo caso :

$$\mathcal{L}(t, 0, z) = 0, \quad B_t(t, 0, z) = 0, \quad B_z(t, 0, z) = 0, \quad \vec{B}(t, 0, z) = B_r(t, 0, z) \vec{r}.$$

18.

$$(II-23) \quad \begin{array}{ll} B_t & \text{antisimmetrica in } r \text{ rispetto al piano } r = 0, \\ B_r & \text{simmetrica in } r \text{ rispetto al piano } r = 0, \\ B_z & \text{antisimmetrica in } r \text{ rispetto al piano } r = 0. \end{array}$$

Dalle relazioni precedenti risulta poi :

$$B_t(t, 0, 0) = B_r(t, 0, 0) = B_z(t, 0, 0) = 0.$$

Pertanto :

$$\vec{B}(t, 0, 0) = 0,$$

ossia l'induzione magnetica è nulla in tutti i punti di  $\mathcal{V}_0 \equiv a$ . Con il sistema di coordinate introdotto le relazioni generali (II-4), (II-2), (II-3) divengono :

$$\vec{B} = -\mu_0 \text{grad } \mathcal{A} = B_t(t, r, z)\vec{t} + B_r(t, r, z)\vec{r} + B_z(t, r, z)\vec{z}$$

con :

$$B_t = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}, \quad B_r = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}, \quad B_z = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z},$$

$$(II-24) \quad \text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_t}{\partial t} + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

$$(II-25) \quad \text{rot } \vec{B} = (\text{rot } B)_t \vec{t} + (\text{rot } B)_r \vec{r} + (\text{rot } B)_z \vec{z} = 0,$$

con :

$$(\text{rot } \vec{B})_t = \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z}, \quad (\text{rot } \vec{B})_r = \frac{\partial B_t}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (\text{rot } \vec{B})_z = \frac{\partial B_t}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial t}.$$

Esaminiamo ora le conseguenze derivanti dai caratteri di simmetria sopra precisati per gli sviluppi (II-12). Essi dovranno essere tali da soddisfare alle condizioni (II-22) e (II-23). Pertanto lo sviluppo della componente  $B_t$  dovrà contenere potenze dispari di  $r$  e  $z$ , mentre lo sviluppo di  $B_r$  dovrà contenere potenze pari di  $r$  e dispari di  $z$ . Infine lo sviluppo di  $B_z$  dovrà contenere solo potenze dispari di  $r$  e pari di  $z$ .

Utilizzando la forma (II-12<sup>m</sup>) dell'espressione operatoriale (II-12<sup>l</sup>) si può scrivere :

$$(II-26) \quad \begin{aligned} B_t(t, r, z) &= \sum_0^{\infty} \lambda \left[ \sum_{\substack{\mu \\ \bar{\mu}}}^{\infty} \frac{1}{(2\mu)!} \binom{2\mu}{2\lambda+1} \frac{D^{2\mu} B_t}{2^{(\mu-\lambda)-1} 2\lambda+1} \cdot r^{2(\mu-\lambda)-1} \right] z^{2\lambda+1} \\ B_r(t, r, z) &= \sum_0^{\infty} \lambda \left[ \sum_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+1)!} \binom{2\mu+1}{2\lambda+1} \frac{D^{2\mu+1} B_r}{2^{(\mu-\lambda)} 2\lambda+1} \cdot r^{2(\mu-\lambda)} \right] z^{2\lambda+1} \\ B_z(t, r, z) &= \sum_0^{\infty} \lambda \left[ \sum_{\bar{\mu}}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+1)!} \binom{2\mu+1}{2\lambda} \frac{D^{2\mu+1} B_z}{2^{(\mu-\lambda)+1} 2\lambda} \cdot r^{2(\mu-\lambda)+1} \right] z^{2\lambda} \end{aligned}$$

ossia, esplicitando fino ai termini del 3<sup>o</sup> ordine nelle variabili  $r$  e  $z$  :

$$\begin{aligned}
B_t(t, r, z) &= \left[ \frac{\partial^2 B_t}{\partial r \partial z} r + \dots \right] z + \dots \\
\text{(II-26')} \quad B_r(t, r, z) &= \left[ \frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 B_r}{\partial r^2 \partial z} r^2 + \dots \right] z + \left[ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 B_r}{\partial z^3} + \dots \right] z^3 + \dots \\
B_z(t, r, z) &= \left[ \frac{\partial B_z}{\partial r} r + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} r^3 + \dots \right] + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} r + \dots \right] z^2 + \dots
\end{aligned}$$

Analogamente a quanto già fatto per le distribuzioni dotate di un solo piano di antisimmetria, cerchiamo ora di utilizzare le condizioni che esprimono la solenoidalità ed irrotazionalità. Sostituiamo pertanto gli sviluppi (II-26) nelle equazioni (II-24), (II-25). Ripetendo la procedura accennata al par. II-6, si perviene alle seguenti relazioni ricorrenti (18) :

$$\text{(II-27)} \quad D^{2\mu} B_t' + D^{2\mu+1} B_r + D^{2\mu+1} B_z = 0,$$

$$\frac{2(\mu-\lambda)-1}{2\lambda+1} \quad \frac{2(\mu-\lambda)}{2\lambda+1} \quad \frac{2(\mu-\lambda)-1}{2\lambda+2}$$

$$\text{(II-28a)} \quad D^{2\mu+1} B_z - D^{2\mu+1} B_r = 0,$$

$$\frac{2(\mu-\lambda)+1}{2\lambda} \quad \frac{2(\mu-\lambda)}{2\lambda+1}$$

$$\text{(II-28b)} \quad D^{2\mu+2} B_t - D^{2\mu+1} B_z' = 0,$$

$$\frac{2(\mu-\lambda)+1}{2\lambda+1} \quad \frac{2(\mu-\lambda)+1}{2\lambda+1}$$

$$\text{(II-28c)} \quad D^{2\mu+2} B_t - D^{2\mu+1} B_r' = 0.$$

$$\frac{2(\mu-\lambda)+1}{2\lambda+1} \quad \frac{2(\mu-\lambda)}{2\lambda+1}$$

Oltre a queste soluzioni va ricordato che vale il teorema di Schwarz. Cerchiamo ora di esprimere in forma diversa i coefficienti degli sviluppi (II-26') utilizzando le relazioni ricorrenti (II-27) e (II-28a, b, c). Dalla (II-27) si ha :

$$\frac{\partial^2 B_t'}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 B_r}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} = 0 \quad (\mu = 1, \lambda = 0),$$

dalla (II-28a) :

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z} \quad (\mu = 0, \lambda = 0),$$

$$\frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} = \frac{\partial^3 B_r}{\partial r^2 \partial z} \quad (\mu = 1, \lambda = 0),$$

$$\frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} = \frac{\partial^3 B_r}{\partial z^3} \quad (\mu = 1, \lambda = 1),$$

dalla (II-28b) :

$$\frac{\partial^2 B_t}{\partial r \partial z} = \frac{\partial B_z'}{\partial r} \quad (\mu = 0, \lambda = 0),$$

dalla (II-28c) :

$$\frac{\partial^2 B_t}{\partial r \partial z} = \frac{\partial B'_r}{\partial z} \quad (\mu = 0, \lambda = 0).$$

La prima di queste relazioni sarà utilizzata più oltre. In virtù delle altre gli sviluppi (II-26') si scrivono per il caso C (l = 2) :

$$\begin{aligned} B_t(t, r, z) &= \frac{\partial B'_z}{\partial r} \cdot rz + \dots\dots\dots, \\ (II-29) \quad B_r(t, r, z) &= \frac{\partial B_z}{\partial r} z + \frac{1}{6} \left( 3 \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} r^2 z + \frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} z^3 \right) + \dots\dots\dots, \\ B_z(t, r, z) &= \frac{\partial B_z}{\partial r} r + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} r^3 + 3 \frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} r z^2 \right) + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

dove tutte le derivate s'intendono calcolate in (t, 0, 0) e sono funzioni note di t.

Vediamo ora se è possibile identificare la retta  $t = \tau_0$  con una traiettoria effettiva ed introdurre gli "indici di campo" come già fatto al par. II-6. Consideriamo dapprima la traiettoria  $\tau$  descritta da una particella di condizioni iniziali  $0, \vec{u}_0, p_0$  con il punto 0 ed il versore  $\vec{u}_0$  giacenti sul piano di antisimmetria  $\alpha_1$  (piano  $z = 0$ ). Questa traiettoria, essendo  $\vec{B}$  sempre normale al piano  $\alpha_1$  ( $B(t, r, 0) = B_z(t, r, 0)z$ ), rimarrà sempre contenuta su tale piano e varrà per essa l'equazione (I-3), ossia :

$$(I-3) \quad h = \frac{q}{p_0} \cdot B_z.$$

Facciamo ora tendere il punto 0 ad un punto dell'asse t ed il versore  $\vec{u}_0$  al versore  $\vec{t}$ . Allora la traiettoria  $\tau$  tenderà a sovrapporsi con l'asse  $t \equiv \tau_0$  qualunque sia il valore del rapporto  $q/p_0$ . Infatti si vede subito che la (I-3) è soddisfatta per la traiettoria  $\tau_0 \equiv t$  perchè essendo  $B_z(t, 0, 0) = 0$ , risulta sempre  $h(t) = 0$  proprio come deve essere. Per le distribuzioni del tipo considerato e per la scelta effettuata della  $\tau_0$  si ha quindi che per  $\tau \rightarrow \tau_0 \equiv t$  è  $h(t) \rightarrow 0$ .

Osserviamo ora che, nel caso contemplato, la definizione di "indice i-mo del campo"  $n_i$  perde il suo significato. Infatti per  $h \rightarrow 0, n_i \rightarrow \infty$  come  $1/h^i$ . Per caratterizzare la distribuzione  $\vec{B}(Q)$  nell'intorno di  $\tau_0 \equiv t$  introdurremo quindi una nuova costante (dimensionale) definita nel modo seguente :

$$(II-30) \quad K_i = \frac{q}{p_0} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i B_z}{\partial r^i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad ([K_i] = L^{i+1}).$$

Questa nuova costante presenta il vantaggio di non divergere quando  $\tau$  approssima l'asse rettilineo  $t \equiv \tau_0$ . La relazione esistente tra  $K_i$  ed  $n_i$  è subito stabilita eliminando le derivate presenti nelle due definizioni. Si ottiene :

$$K_i = (-1)^i h^{i+1} n_i.$$

Dalla (II-30) si ha, in particolare :

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{q}{p_0} B_z = h = 0, & K_1 &= \frac{q}{p_0} \frac{\partial B_z}{\partial r}, \\ K_2 &= \frac{1}{2} \frac{q}{p_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}, & K_3 &= \frac{1}{6} \frac{q}{p_0} \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3}, \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

e da queste si ricavano le relazioni :

$$(II-30') \quad \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{p_0}{q} K_1, \quad \frac{\partial B'_z}{\partial r} = \frac{p_0}{q} K'_1, \quad \frac{\partial B''_z}{\partial r} = \frac{p_0}{q} K''_1, \quad \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} = 6 \frac{p_0}{q} K_3, \quad \dots\dots\dots$$

Inoltre dalla relazione ricorrente (II-27,  $\mu=1, \lambda=0$ ) si ricava :

$$\frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} = - \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^2 \partial z} - \frac{\partial^2 B'_t}{\partial r \partial z} = - \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^2 \partial z} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 B_t}{\partial r \partial z} \right),$$

e per le (II-28a,  $\mu=1, \lambda=0$ ) e (II-28b,  $\mu=0, \lambda=0$ ) si può scrivere :

$$(II-30'') \quad \frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} = - \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} - \frac{\partial B''_z}{\partial r} = - \frac{p_0}{q} (6 K_3 + K''_1).$$

Pertanto le (II-29) assumono la forma definitiva :

$$(II-29') \quad B_t(t, r, z) = \frac{p_0}{q} \left[ K'_1 r z + \dots\dots\dots \right],$$

$$B_r(t, r, z) = \frac{p_0}{q} \left[ K_1 z + 3 K_3 r^2 z - (K_3 + \frac{1}{6} K''_1) z^3 + \dots\dots\dots \right],$$

$$B_z(t, r, z) = \frac{p_0}{q} \left[ K_1 r + K_3 r^3 - 3 (K_3 + \frac{1}{6} K''_1) r^2 z + \dots\dots\dots \right].$$

## II. 9. DISTRIBUZIONI CON SIMMETRIE DEL TIPO E ( $i = 2$ ).

In questo caso, oltre ai due piani  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  di antisimmetria ortogonali per  $\mathcal{M}(Q)$ , sono presenti anche due piani ortogonali  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  di simmetria bisecanti le due coppie di diedri opposti. Pertanto tutte le relazioni scritte nel paragrafo precedente, ad eccezione degli sviluppi (II-29), conservano la loro validità mentre dovremo tenere conto delle ulteriori condizioni derivanti dalla presenza dei due piani di simmetria. Nello stesso sistema di coordinate  $t, r, z$  introdotto nel precedente paragrafo le equazioni :

$$z = r, \quad z = -r$$

rappresentano rispettivamente i piani  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Per la trattazione da svolgere è utile considerare un generico piano di simmetria  $\sigma$  passante per l'intersezione  $\tau_0 \equiv t$  dei piani  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  e formante un diedro di apertura  $\theta$  col piano  $\alpha_1$  ( $z = 0$ ). Introduciamo poi accanto alla terna  $t, r, z$  una terna ausiliaria  $\xi, \eta, \zeta$  ottenuta ruotando la prima attorno all'asse  $t$  di un angolo  $\theta$  nel verso antiorario. In tal modo gli assi  $\xi, \zeta$  vengono ad appartenere al piano  $\sigma$ , mentre l'asse  $\eta$  risulterà normale a detto piano. Tra i sistemi di coordinate suddetti, vale la trasformazione :

$$(II-31) \quad \xi = r \cos \theta + z \sin \theta, \quad \eta = -r \sin \theta + z \cos \theta, \quad \zeta = t.$$

Assumiamo ora il piano  $\sigma$ , cioè il piano  $\eta = 0$ , come piano  $q_3^*$  e le "linee  $\eta$ ", (intersezione dei piani  $\xi = \text{cost}$  e  $\zeta = \text{cost}$ ) come "linee  $q_3$ ". Tenuto conto che tali linee sono simmetriche rispetto al piano  $\sigma$ , si può porre:

$$q_1 = \xi, \quad q_2 = \zeta, \quad q_3 = \eta, \quad q_3^* = 0.$$

Avendosi poi che:

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

risulta:

$$h_{q_1} = h_{q_2} = h_{q_3} = 1.$$

Con ciò le (II-7<sup>II</sup>, 7<sup>III</sup>, 7<sup>IV</sup>) si scrivono:

$$\begin{aligned} B_\xi(\xi, 0, \zeta) &= 0 \\ \vec{B}(\xi, 0, \zeta) &= B_\xi(\xi, 0, \zeta) \cdot \vec{\tau}_\xi + B_\zeta(\xi, 0, \zeta) \cdot \vec{\tau}_\zeta \\ B_\xi &\text{ simmetrica rispetto ad } \eta \text{ ed al piano } \eta = 0, \\ B_\eta &\text{ antisimmetrica rispetto ad } \eta \text{ ed al piano } \eta = 0, \\ B_\zeta &\text{ simmetrica rispetto ad } \eta \text{ ed al piano } \eta = 0. \end{aligned}$$

Le (II-4a, b, c) divengono poi:

$$B_\xi = -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial \xi}, \quad B_\eta = -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial \eta}, \quad B_\zeta = -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial \zeta}.$$

Osserviamo ora che, essendo note le trasformazioni (II-31), il potenziale  $db(\xi, \eta, \zeta)$  può essere espresso in coordinate  $t, r, z$ :

$$db(\xi, \eta, \zeta) = db[\xi(t, r, z), \eta(t, r, z), \zeta(t, r, z)].$$

Tenendo presenti le definizioni di  $B_t, B_r, B_z$  e le regole di derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$\begin{aligned} B_t &= -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial t} = -\mu_0 \left[ \frac{\partial db}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial db}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial db}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right] = B_\xi, \\ B_r &= -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial r} = -\mu_0 \left[ \frac{\partial db}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial db}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial db}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right] = B_\xi \cdot \cos \theta - B_\eta \cdot \sin \theta, \\ B_z &= -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial z} = -\mu_0 \left[ \frac{\partial db}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial db}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial db}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] = B_\xi \cdot \sin \theta + B_\eta \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

Per ottenere queste relazioni si è fatto uso delle definizioni di  $B_\xi, B_\eta, B_\zeta$  e delle derivate rispetto a  $t, r, z$  delle (II-31).

Stabilite queste relazioni generali, valide cioè per  $\theta$  qualsiasi, portiamo il piano  $\sigma$  a coincidere col piano  $\sigma_1$  di equazione  $z = r$ . Dovremo allora porre  $\theta = \pi/4$ . Osserviamo innanzi tutto che per passare dal punto  $Q(t, r, z)$  al punto  $Q'$ , simmetrico di  $Q$  rispetto al piano  $\sigma_1$ , è sufficiente scambiare tra loro le coordinate  $r$  e  $z$ . Si ha cioè:

$$Q(t, r, z) \quad \quad \quad Q'(t, z, r).$$

Tra le componenti di  $\vec{B}$  nei due sistemi si ha poi ( $\theta = \pi/4$ ):

$$B_t = B_\xi, \quad B_r = \frac{\sqrt{2}}{2} (B_\xi - B_\eta), \quad B_z = \frac{\sqrt{2}}{2} (B_\xi + B_\eta).$$

Si vede subito che, essendo  $B_\eta$  antisimmetrica, le ultime due relazioni si trasformano l'una nell'altra, quando si passi dal punto  $Q$  a  $Q'$ . Pertanto la condizione di simmetria per il piano  $\sigma_1$  in coordinate  $t, r, z$  si esplica nelle due eguaglianze :

$$(II-32) \quad B_r(t, r, z) = B_z(t, z, r), \quad B_z(t, r, z) = B_r(t, z, r).$$

Portiamo ora il piano  $\sigma_1$  a coincidere col piano  $\sigma_2$  di equazione  $z = -r$ . Ciò si fa ponendo  $\theta = \pi/4$ . Osserviamo subito che, per passare dal punto  $Q(t, r, z)$  al punto simmetrico  $Q'$  è necessario non solo scambiare tra loro le coordinate  $r$  e  $z$  ma cambiare anche il loro segni. Si ha cioè :

$$Q(t, r, z) \quad Q'(t, -z, -r).$$

La relazione tra le componenti in questo caso ( $\theta = \pi/4$ ) diviene :

$$B_r = -\frac{\sqrt{2}}{2} (B_\xi + B_\eta), \quad B_z = \frac{\sqrt{2}}{2} (B_\xi - B_\eta).$$

Passando dal punto  $Q$  al punto  $Q'$  si vede che queste relazioni si trasformano l'una nell'opposta dell'altra. La condizione di simmetria per il piano  $\sigma_2$  si esprime quindi con le due equazioni :

$$(II-32') \quad B_r(t, r, z) = -B_z(t, -z, -r), \quad B_z(t, r, z) = -B_r(t, -z, -r).$$

In definitiva la presenza dei piani di simmetria  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  impone che gli sviluppi (II-26) per le componenti  $B_r$  e  $B_z$  debbano soddisfare alle condizioni (II-32) e (II-32'). Per soddisfare la prima delle due condizioni (II-32) consideriamo lo sviluppo (II-26) per  $B_z$  e scambiamo in esso le coordinate  $r$  e  $z$  tra loro. Si ha :

$$(II-33) \quad B_z(t, r, z) = \sum_0^\infty \lambda \left[ \sum_1^\infty \mu \frac{1}{(2\mu+1)!} \binom{2\mu+1}{2\lambda} D^{2\mu+1} B_z \cdot r^{2\lambda} \right] z^{2(\mu-\lambda)+1}.$$

Ora lo sviluppo (II-33) è identicamente eguale (cioè per tutti i valori di  $r$  e  $z$ ) allo sviluppo (II-26) per  $B_r$  soltanto se i coefficienti dei termini contenenti le stesse potenze di  $r$  e  $z$  sono eguali. Osserviamo in proposito che il termine corrispondente agli indici  $\mu, \mu-\lambda$  dello sviluppo (II-33) per  $B_z$  contiene  $r$  e  $z$  con le stesse potenze contenute nel termine generale dello sviluppo (II-26) per  $B_r$ . Infatti si ha :

$$r^{2(\mu-\lambda)} z^{2[\mu-(\mu-\lambda)+1]} = r^{2(\mu-\lambda)} z^{2\lambda+1}.$$

Pertanto sarà sufficiente porre  $(\mu-\lambda)$  al posto di  $\lambda$  nell'espressione del relativo coefficiente ed eguagliare questo al coefficiente del termine generale dello sviluppo (II-27) per  $B_r$ . Si ottiene :

$$\frac{1}{(2\mu+1)!} \binom{2\mu+1}{2\lambda+1} D^{2\mu+1} B_r = \frac{1}{(2\mu+1)!} \binom{2\mu+1}{2(\mu-\lambda)} D^{2\mu+1} B_z.$$

Semplificando e tenendo conto della ben nota relazione tra coefficienti binomiali :

$$\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$$

si ha in definitiva la relazione ricorrente :

$$(II-34) \quad \frac{D^{2\mu+1} B_r}{2(\mu-\lambda) 2\lambda+1} = \frac{D^{2\mu+1} B_z}{2(\mu-\lambda)}.$$



Da questa si deduce in particolare :

$$\begin{array}{l}
 (\lambda = 0, \mu = 0) \quad \frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} \\
 (\lambda = 0, \mu = 1) \quad \frac{\partial^3 B_r}{\partial r^2 \partial z} = \frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} \\
 (\lambda = 1, \mu = 1) \quad \frac{\partial^3 B_r}{\partial z^3} = \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Con procedimenti analoghi a quello descritto si può poi verificare che la seconda delle condizioni (II-32) e le due condizioni (II-32') conducono sempre alla stessa relazione (II-34). Questa può quindi essere assunta come condizione generale, posta dalla presenza dei due piani di simmetria  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , cui devono soddisfare le derivate presenti negli sviluppi (II-26). Cerchiamo ora di stabilire la forma che i coefficienti di tali sviluppi assumono nel caso particolare considerato. In virtù delle (II-34,  $\lambda=1, \mu=1$ ), (II-28a,  $\mu=1, \lambda=0$ ) e (II-28a,  $\mu=1, \lambda=1$ ) si ha :

$$\frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} = \frac{\partial^3 B_r}{\partial z^3} = \frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} = \frac{\partial^3 B_r}{\partial r^2 \partial z}$$

Pertanto gli sviluppi (II-26') assumono per il caso E (l=2) la forma seguente :

$$\begin{array}{l}
 B_t(t, r, z) = \frac{\partial B'_z}{\partial r} r z \dots \\
 \text{(II-35)} \quad B_r(t, r, z) = \frac{\partial B_z}{\partial r} z + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} \right) (3r^2 z + z^3) + \dots\dots\dots \\
 B_z(t, r, z) = \frac{\partial B_z}{\partial r} r + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} \right) (r^3 + 3rz^2) + \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Ora dalla (II-27,  $\mu=1, \lambda=0$ ) si ha, tenuto conto della (II-34,  $\lambda=0, \mu=1$ ) :

$$2 \frac{\partial^3 B_r}{\partial r^2 \partial z} = 2 \frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} = - \frac{\partial^2 B'_t}{\partial r \partial z} = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 B_t}{\partial r \partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B'_z}{\partial r} \right) = - \frac{\partial B''_z}{\partial r}$$

Le ultime tre eguaglianze essendo state ottenute in virtù del teorema di Schwarz e della (II-28b,  $\mu=0, \lambda=0$ ).

In definitiva si ottiene :

$$\frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} = \frac{\partial^3 B_r}{\partial z^3} = \frac{\partial^3 B_z}{\partial r \partial z^2} = \frac{\partial^3 B_r}{\partial r^2 \partial z} = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B''_z}{\partial r} \right)$$

Con ciò gli sviluppi (II-35) assumono la forma alternativa :

$$\begin{array}{l}
 B_t(t, r, z) = \frac{\partial B_z}{\partial r} r z + \dots\dots\dots \\
 \text{(II-35')} \quad B_r(t, r, z) = \frac{\partial B_z}{\partial r} z - \frac{1}{12} \left( \frac{\partial B''_z}{\partial r} \right) (3r^2 z + z^3) + \dots\dots\dots \\
 B_z(t, r, z) = \frac{\partial B_z}{\partial r} r - \frac{1}{12} \left( \frac{\partial B''_z}{\partial r} \right) (r^3 + 3rz^2) + \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Nelle (II-35) e (II-35') tutte le derivate presenti s'intendono calcolate in  $(t, 0, 0)$  e sono funzioni note di  $t$ . Sia ora l'asse  $\tau_0 \equiv t$  una traiettoria effettiva. Tenendo conto delle (II-30), le (II-35) si riscrivono nella forma :

$$(II-35'') \quad \begin{aligned} B_t(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ K_1' rz + \dots \right] , \\ B_r(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ K_1 z + K_3(3r^2 z + z^3) + \dots \right] , \\ B_z(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ K_1 r + K_3(r^3 + 3r^2 z) + \dots \right] . \end{aligned}$$

Tenendo ancora presenti le (II-30') e che, per quanto sopra trovato, risulta :

$$\frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} = 6 \frac{p_0}{q} K_3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z''}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{q} K_1'' ,$$

da cui segue che :

$$K_3 = -\frac{1}{12} K_1'' ,$$

le (II-35') possono essere riscritte nella forma :

$$(II-35''') \quad \begin{aligned} B_t(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ K_1' rz + \dots \right] , \\ B_r(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ K_1 z - \frac{1}{12} K_1'' (3r^2 z + z^3) + \dots \right] , \\ B_z(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \left[ K_1 r - \frac{1}{12} K_1'' (r^3 + 3r^2 z) + \dots \right] . \end{aligned}$$

## II. 10. DISTRIBUZIONI CON SIMMETRIE DEL TIPO D.

Per trattare questo caso ed il successivo caso F useremo una procedura diversa da quella fin ora usata. Quest'ultima infatti presentava il vantaggio di fornire direttamente, per il caso di simmetria considerato, gli sviluppi richiesti di  $B_t$ ,  $B_r$ ,  $B_z$ , senza passare attraverso la determinazione della forma analitica di  $\mathcal{M}(t, r, z)$  per la quale è necessaria l'integrazione della equazione di Laplace (II-5). Tuttavia, quando si considerano casi con  $l > 2$ , diviene assai complicato scrivere in coordinate cartesiane  $t, r, z$  tutte le condizioni poste dalla presenza dei piani di simmetria o di antisimmetria, mentre ciò può essere fatto senza difficoltà usando coordinate cilindriche. La procedura seguita nei casi D ed F si fonda pertanto sull'integrazione dell'equazione  $\nabla^2 \mathcal{M} = 0$  espressa in coordinate cilindriche. Specializziamo quindi le coordinate curvilinee ortogonali  $u, v, w$  nel modo che segue. Le superfici coordinate  $u$  coincidono con i piani normali alla retta  $\tau_0 \equiv a$ , sostegno della stella di  $l (> 1)$  piani di antisimmetria, le superfici  $v$  coincidono con cilindri circolari aventi  $\tau_0 \equiv a$  come asse ed infine le superfici  $w$  coincidono con i semi-piani uscenti dalla retta  $\tau_0 \equiv a$ . In tal modo le linee coordinate  $u$  sono rette parallele a  $\tau_0$ , le linee  $v$  sono semirette uscenti dai punti di  $\tau_0$  ed ortogonali a  $\tau_0$  stessa. Infine le linee  $w$  sono circonferenze con centro su  $\tau_0$  e contenute in piani ortogonali a tale retta. Con questa scelta il sistema  $u, v, w$  viene ad identificarsi con un sistema di coordinate cilindriche e si può porre :

$$\begin{aligned} u &= t , & v &= \rho , & w &= \theta , \\ \vec{\tau}_u &= \vec{\tau}_t = \vec{t} , & \vec{\tau}_v &= \vec{\tau}_\rho , & \vec{\tau}_w &= \vec{\tau}_\theta . \end{aligned}$$

Ora poichè in coordinate cilindriche l'elemento infinitesimo di linea si scrive :

$$ds^2 = dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 ,$$

ne deriva che :

$$h_u = 1, \quad h_v = 1, \quad h_w = \rho.$$

Le (II-4, 4a, b, c) e la (II-5) si scrivono in coordinate cilindriche  $t, \rho, \theta$  :

$$(II-36) \quad \vec{B} = -\mu_0 \text{grad } db = B_t \vec{t} + B_\rho \vec{r}_\rho + B_\theta \vec{r}_\theta$$

$$(II-36a, b, c) \quad B_t = -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial t}, \quad B_\rho = -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial \rho}, \quad B_\theta = -\mu_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial db}{\partial \theta}$$

$$\nabla^2 db = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial db}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial db}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial db}{\partial \theta} \right) \right] = 0.$$

A fianco del sistema  $t, \rho, \theta$  consideriamo anche il consueto sistema ortogonale  $t, r, z$  legato al precedente dalle relazioni :

$$t = t, \quad r = \rho \cos \theta, \quad z = \rho \sin \theta,$$

e siano  $\vec{t}, \vec{r}, \vec{z}$  i versori degli assi  $t, r, z$  rispettivamente. Ricordiamo che in questo sistema si ha :

$$(II-37) \quad \vec{B} = -\mu_0 \text{grad } db = B_t \vec{t} + B_r \vec{r} + B_z \vec{z},$$

con :

$$(II-37, a, b, c) \quad B_t = -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial t}, \quad B_r = -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial r}, \quad B_z = -\mu_0 \frac{\partial db}{\partial z},$$

e che in definitiva sono proprio gli sviluppi di  $B_t, B_r, B_z$  che vogliamo determinare.

Osserviamo ora che, ad ogni piano della stella costituita da 1 ( $> 1$ ) piani di antisimmetria ed avente per sostegno  $\tau_0$ , corrispondono due semipiani sfalsati di  $\pi$ . Avremo quindi 21 semipiani di antisimmetria ciascuno individuato da un valore  $\theta_s^\alpha$  dell'angolo  $\theta$  dato da :

$$\theta_s^\alpha = \frac{\pi}{1} s \quad (s = 1, 2, \dots, 21).$$

Da questa relazione segue che i semipiani corrispondenti ad  $s = 1$  e  $s = 21$  giacciono sul piano coordinato  $z = 0$ .

Per caratterizzare l'antisimmetria di  $db(t, \rho, \theta)$  rispetto al generico semipiano  $s$ , osserviamo anzitutto che le linee  $\theta$  (o linee  $w$ ), essendo delle circonferenze, sono simmetriche rispetto ai piani  $\theta = \text{cost}$  (ossia alle superfici  $w$ ). Pertanto esse possono essere assunte come linee  $q_3$  (cfr. par. II-3). Poniamo quindi :

$$q_1 = u = t, \quad q_2 = v = \rho, \quad q_3 = w = \theta, \\ h_{q_1} = h_u = 1, \quad h_{q_2} = h_v = 1, \quad h_{q_3} = h_w = \rho.$$

Allora le equazioni caratterizzanti l'antisimmetria di  $db(Q)$  rispetto ai 21 semipiani della stella si scrivono (cfr. II-8', 8'', 8''') :

$$db(t, \rho, \theta_s^\alpha) = 0, \quad B_t(t, \rho, \theta_s^\alpha) = 0, \quad B_\rho(t, \rho, \theta_s^\alpha) = 0, \quad \vec{B}(t, \rho, \theta_s^\alpha) = B_\theta(t, \rho, \theta_s^\alpha) \vec{r}_\theta.$$

Per introdurre la simmetria di traslazione lungo l'asse  $t \equiv a \equiv \tau_0$ , assumiamo :

$$q_1 = v = \rho, \quad q_2 = w = \theta, \quad q_3 = u = t, \\ h_{q_1} = h_v = 1, \quad h_{q_2} = h_w = \rho, \quad h_{q_3} = h_u = 1.$$

Le condizioni (II-6, a, b, c) si scrivono :

$$\frac{\partial^{n-1} B_t}{\partial t^{n-1}} = 0 \quad (n \geq 1) ,$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( \frac{\partial^{1+m-1} B_\rho}{\partial \rho^{1-1} \partial \theta^m} \right) = 0 \quad (1 \geq 1, m \geq 0) ,$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{\partial^{1+m-1} (\rho B_\theta)}{\partial \rho^1 \partial \theta^{m-1}} \right] = 0 \quad (1 \geq 0, m \geq 1) .$$

Dall'ultima di queste segue che<sup>(19)</sup> :

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( \frac{\partial^{1+m-1} B_\theta}{\partial \rho^1 \partial \theta^{m-1}} \right) = 0 \quad (1 \geq 0, m \geq 1) ,$$

mentre dalla prima si ha per  $n = 1$  :

$$B_t(t, r, z) = 0$$

per cui le (II-36, 36, a, b, c) e l'equazione di Laplace divengono :

$$(II-38) \quad \vec{B} = -\mu_0 \text{grad } \mathcal{L} = B_\rho \vec{\tau}_\rho + B_\theta \vec{\tau}_\theta ,$$

$$(II-38, b, c) \quad B_\rho = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} , \quad B_\theta = -\mu_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} ,$$

$$(II-39) \quad \nabla^2 \mathcal{L} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta^2} = 0 .$$

Inoltre le (II-37, 37, a, b, c) divengono :

$$(II-40) \quad \vec{B} = -\mu_0 \text{grad } \mathcal{L} = B_r \vec{r} + B_z \vec{z} ,$$

$$(II-40, b, c) \quad B_r = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} , \quad B_z = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} .$$

Ciò premesso consideriamo ora l'equazione di Laplace (II-39) e cerchiamo se è possibile determinare una soluzione a variabili separate, cioè del tipo :

$$(II-41) \quad \mathcal{L}(\rho, \theta) = f(\rho) \cdot g(\theta) ,$$

la quale sia anche periodica con periodo  $2\pi$ , dovendo risultare la funzione  $\mathcal{L}(\rho, \theta)$  ad un sol valore. Si può mostrare<sup>(20)</sup> che esiste un integrale generale, soddisfacente alle richieste precedenti, il quale può essere scritto nella forma :

$$(II-42) \quad \mathcal{L}(\rho, \theta) = \sum_n C_n (a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \quad (n \geq 0 \text{ intero}) .$$

Osserviamo ora che per  $\rho = 0$  deve risultare  $\mathcal{L}(0, \theta) = 0$ . Infatti i punti dell'asse  $t \equiv \tau_0 \equiv a$  appartengono a tutti gli 1 piani di antisimmetria sui quali il potenziale si annulla. Da queste considerazioni segue che, per  $n > 0$ , deve essere :

$$b_n = 0 .$$

Infatti per  $b_n \neq 0$ , si avrebbe per  $n > 0$  :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} b_n \rho^{-n} = +\infty .$$

Lo stesso fatto si verifica per il termine  $a_n \rho^n$  se  $a_n \neq 0$  ed  $n < 0$ . Assumeremo pertanto :

$$a_n \neq 0, \quad b_n = 0, \quad n > 0 .$$

Si osservi poi che non può essere  $n = 0$ . Infatti il termine della (II-42) corrispondente ad  $n = 0$ , è :  $C_0 (a_0 + b_0) c_0$ , che essendo costante e diverso da zero in qualsiasi caso ( $a_n = 0, \text{ o } b_n = 0$ ), non si annulla per  $\rho \rightarrow 0$ .

La (II-42) deve quindi essere riscritta nella forma :

$$(II-43) \quad \mathcal{M}(\rho, \theta) = \sum_1^{\infty} \rho^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) ,$$

nella quale si è posto :

$$A_n = C_n a_n c_n, \quad B_n = C_n a_n d_n .$$

Imponiamo ora alla (II-43) le 2l condizioni di antisimmetria

$$\mathcal{M}(\rho, \theta_s^\alpha) = 0$$

stabilite precedentemente. Osserviamo che se si pone :

$$n = j l \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

risulta :

$$n \theta_s^\alpha = j l \theta_s^\alpha = j l \frac{\pi}{l} s = (j s) \pi$$

per cui :

$$\sin(n \theta_s^\alpha) = \sin[(j s) \pi] = 0, \quad \cos(n \theta_s^\alpha) = \cos[(j s) \pi] = (-1)^{j s} \neq 0 .$$

Basterà quindi assumere :

$$A_n \neq 0 \text{ per } n = j s, \quad A_n = 0 \text{ per } n \neq j s, \quad B_n = 0 \text{ per } n \text{ qualsiasi,}$$

perchè la (II-43) soddisfi alle condizioni di simmetria precedenti.

In definitiva il potenziale cercato ha la forma :

$$(II-44) \quad \mathcal{M}(\rho, \theta) = \sum_1^{\infty} A_{j l} \rho^{j l} \sin j l \theta = \sum_1^{\infty} \mathcal{M}_{j l}(\rho, \theta) .$$

Da questa, tenuto conto delle (II-38) e (II-38, b, c) si ricava :

$$(II-45) \quad \begin{aligned} B_t(\rho, \theta) &= 0, \\ B_\rho(\rho, \theta) &= -\mu_0 \sum_1^{\infty} j (j l) A_{j l} \rho^{j l - 1} \sin j l \theta = \sum_1^{\infty} j (B_\rho)_{j l}, \\ B_\theta(\rho, \theta) &= -\mu_0 \sum_1^{\infty} j (j l) A_{j l} \rho^{j l - 1} \cos j l \theta = \sum_1^{\infty} j (B_\theta)_{j l}. \end{aligned}$$

E' interessante ora disporre delle espressioni di  $\mathcal{M}$  e delle componenti di  $\vec{B}$  in coordinate cartesiane. Tenuto conto della formula di n-plicazione degli archi(21) :

$$(II-46) \quad \sin n\theta = \sum_0^{\bar{\nu}} (-1)^\nu \cdot \binom{n}{2\nu+1} \cdot \cos^{n-(2\nu+1)} \theta \cdot \sin^{2\nu+1} \theta ,$$

nella quale  $\bar{\nu}$  è il massimo intero  $\geq 0$  tale che  $2\bar{\nu}+1 \leq n$ , e delle relazioni

$$r = \rho \cos \theta , \quad z = \rho \sin \theta ,$$

la (II-44) diviene ( $n = jl$ ) :

$$(II-47) \quad \mathcal{M}(r, z) = \sum_1^{\infty} \mathcal{M}_{jl}(r, z) = \sum_1^{\infty} A_{jl} \sum_0^{\bar{\nu}} (-1)^\nu \cdot \binom{jl}{2\nu+1} \cdot r^{jl-(2\nu+1)} \cdot z^{2\nu+1} .$$

In virtù delle (II-40) e (II-40, b, c) si ottiene poi :

$$(II-48) \quad \begin{aligned} B_t(r, z) &= 0 , \\ B_r(r, z) &= - \sum_1^{\infty} \mu_0 A_{jl} \left\{ \sum_0^{\bar{\nu}} (-1)^\nu \cdot [jl - (2\nu+1)] \cdot \binom{jl}{2\nu+1} \cdot r^{jl-2(\nu+1)} \cdot z^{2\nu+1} \right\} , \\ B_z(r, z) &= - \sum_1^{\infty} \mu_0 A_{jl} \left\{ \sum_0^{\bar{\nu}} (-1)^\nu \cdot (2\nu+1) \cdot \binom{jl}{2\nu+1} \cdot r^{jl-(2\nu+1)} \cdot z^{2\nu} \right\} , \end{aligned}$$

nelle quali  $\bar{\nu}$  è il massimo intero  $\geq 0$  tale che  $2(\bar{\nu}+1) \leq jl$ .

Vediamo ora se è possibile esprimere in termini di derivate di  $B_r$  e  $B_z$  i coefficienti  $A_{jl}$  presenti negli sviluppi (II-48). A questo scopo consideriamo i seguenti sviluppi generali per  $B_r$  e  $B_z$  (cfr. par. II-5):

$$(II-49) \quad \begin{aligned} B_r(r, z) &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \sum_0^k \binom{k}{i} D_{k-i}^k B_r \cdot r^{k-i} z^i \right] , \\ B_z(r, z) &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \sum_0^k \binom{k}{i} D_{k-i}^k B_z \cdot z^{k-i} z^i \right] , \end{aligned}$$

dove le derivate presenti sono indipendenti dalla variabile  $t$  e sono calcolate in un qualsiasi punto dell'asse  $t \equiv \tau_0$ . Se confrontiamo ora il primo degli sviluppi (II-49) con la seconda delle (II-48) si vede subito che assumendo  $k = jl-1$ ,  $i=2\nu+1$ , i termini correnti dei due sviluppi vengono a contenere le stesse potenze in  $r$  e  $z$ (22). Pertanto anche i loro coefficienti devono identificarsi. Si ha quindi :

$$\frac{1}{(jl-1)!} \cdot \binom{jl-1}{2\nu+1} \cdot D_{2\nu+1}^{jl-1} B_r = - \mu_0 \cdot A_{jl} \cdot (-1)^\nu \cdot [jl - (2\nu+1)] \cdot \binom{jl}{2\nu+1} ,$$

da cui, effettuando le dovute semplificazioni, si ottiene :

$$(II-50) \quad A_{jl} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\mu_0 \cdot (jl)!} \cdot D_{2\nu+1}^{jl-1} B_r .$$

Si osservi ora che  $A_{jl}$  è indipendente dall'indice  $\nu$ . Questo tuttavia può assumere nel secondo membro della (II-50) tutti i valori interi da 0 a  $\bar{\nu}$ . Si ottengono perciò le  $\bar{\nu} + 1$  eguaglianze tra le derivate di  $B_r$ :

$$(II-50'') \quad \mu_0(jl)! \cdot A_{jl} = (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{D^{jl-1}}{jl-2(\nu+1)} B_r = - \frac{\partial^{jl-1} B_r}{\partial r^{jl-2} \partial z} = \frac{\partial^{jl-1} B_r}{\partial r^{jl+4} \partial z^3} = \dots = \\ = (-1)^{\bar{\nu}+1} \cdot \frac{\partial^{jl-1} B_r}{\partial r^{jl-2(\bar{\nu}+1)} \partial z^{2\bar{\nu}+1}}$$

L'eguaglianza tra queste derivate segue dalle condizioni poste per le simmetrie all'inizio del presente paragrafo.

Se analogamente confrontiamo il secondo sviluppo (II-49) con la terza delle (II-48) si vede che è necessario assumere  $k=jl-1, i=2\nu$ . Eguagliando i coefficienti dei termini simili nei due sviluppi si ottiene in questo caso:

$$\frac{1}{(jl-1)!} \cdot \frac{D^{jl-1}}{2\nu} B_z = - \mu_0 A_{jl} \cdot (-1)^\nu \cdot (2\nu+1) \cdot \binom{jl}{2\nu+1},$$

da cui semplificando

$$(II-50''') \quad A_{jl} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\mu_0(jl)!} \cdot \frac{D^{jl-1}}{jl-2(\nu+1)} B_z$$

Anche in questo caso l'indipendenza di  $A_{jl}$  da  $\nu$  consente di scrivere le  $\bar{\nu} + 1$  eguaglianze tra le derivate di  $B_z$ . Si ha:

$$(II-50^{IV}) \quad \mu_0(jl)! \cdot A_{jl} = (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{D^{jl-1}}{jl-2(\nu+1)} B_z = - \frac{\partial^{jl-1} B_z}{\partial r^{jl-1}} = \frac{\partial^{jl-1} B_z}{\partial r^{jl-3} \partial z^2} = \dots = \\ = (-1)^{\bar{\nu}+1} \cdot \frac{\partial^{jl-1} B_z}{\partial r^{jl-2(\bar{\nu}+1)} \partial z^{2\bar{\nu}}}$$

E' poi facile riconoscere che (II-50') e (II-50''') coincidono. Infatti da  $(\text{rot } \vec{B})_t = 0$  segue che<sup>(23)</sup>:

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r},$$

e quindi:

$$(II-50^V) \quad \frac{D^{jl-1}}{jl-2(\nu+1)} B_r = \frac{D^{jl-2}}{jl-2(\nu+1)} \cdot \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} \right) = \frac{D^{jl-2}}{jl-2(\nu+1)} \cdot \left( \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) = \frac{D^{jl-1}}{jl-2(\nu+1)} B_z$$

Le (II-50''), (II-50<sup>IV</sup>) e (II-50<sup>V</sup>) costituiscono le relazioni ricorrenti per questo caso di simmetria.

Converremo di assumere nel seguito per convenienza:

$$(II-50) \quad A_{jl} = - \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{(jl)!} \cdot \left( \frac{\partial^{jl-1} B_z}{\partial r^{jl-1}} \right) \quad (\nu = 0).$$

Introducendo questa nelle (II-48) e semplificando si ottiene:

$$B_t(r, z) = 0,$$

$$(II-48') \quad B_r(r, z) = \sum_1^{\infty} (B_r)_{j1} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{(j1-1)!} \left( \frac{\partial^{j1-1} B_z}{\partial r^{j1-1}} \right) \sum_0^{\bar{v}} (-1)^{\nu} \frac{(j1-1)!}{[j1-2(\nu+1)]!(2\nu)!} r^{j1-2(\nu+1)} z^{2\nu+1},$$

$$B_z(r, z) = \sum_1^{\infty} (B_z)_{j1} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{(j1-1)!} \left( \frac{\partial^{j1-1} B_z}{\partial r^{j1-1}} \right) \sum_0^{\bar{v}} (-1)^{\nu} \frac{(j1-1)!}{[j1-2(\nu+1)]!(2\nu)!} r^{j1-(2\nu+1)} z^{2\nu},$$

dove  $\bar{v}$ ,  $\bar{v} + 1$  ed 1 sono interi tali che  $2\bar{v}+1 \leq j1$ ,  $2(\bar{v}+1) \leq j1$ ,  $1 > 1$ . La forma di scrittura usata per le (II-48') consente di avere coefficienti interi nei termini delle sommatorie rispetto a  $\nu$ .

Le espressioni esplicite dei primi dodici termini delle sommatorie rispetto a  $j$  contenute nelle (II-47) e (II-48') sono riportate nella Tabella I. I valori che può assumere l'indice ( $j1$ ) dei termini nelle sommatorie delle (II-44), (II-45), (II-47) e (II-48') per un magnete 2l-polare con un valore di  $l$  fissato e con simmetrie del tipo D sono quelli indicati col segno + nella riga corrispondente a quel valore di  $l$  nella Tabella II. Così ad esempio per una distribuzione con simmetrie del tipo D ed  $l=3$ , si ha :

$$\mathcal{M}(v, w) = \mathcal{M}_3(v, w) + \mathcal{M}_6(v, w) + \mathcal{M}_9(v, w) + \dots,$$

$$B_v(v, w) = (B_v)_3 + (B_v)_6 + (B_v)_9 + \dots,$$

$$B_w(v, w) = (B_w)_3 + (B_w)_6 + (B_w)_9 + \dots,$$

dove  $v = \rho, r$  e  $w = \theta, z$ .

Assumiamo ora che la retta  $t = \tau_0$  sia una traiettoria effettiva ed introduciamo le costanti  $k_i$  definite dalla (II-30). Dovremo porre in questa  $i=j1-1$ . Gli sviluppi (II-48') assumono allora la forma definitiva :

$$(II-48'') \quad B_t(t, r, z) = 0$$

$$B_r(t, r, z) = \frac{P_0}{q} \sum_1^{\infty} k_{j1-1} \sum_0^{\bar{v}} (-1)^{\nu} \frac{(j1-1)!}{[j1-2(\nu+1)]!(2\nu)!} r^{j1-2(\nu+1)} z^{2\nu+1}$$

$$B_z(t, r, z) = \frac{P_0}{q} \sum_1^{\infty} k_{j1-1} \sum_0^{\bar{v}} (-1)^{\nu} \frac{(j1-1)!}{[j1-2(\nu+1)]!(2\nu)!} r^{j1-(2\nu+1)} z^{2\nu}$$

### II. 11. DISTRIBUZIONI CON SIMMETRIE DEL TIPO F.

Per questo caso faremo ancora uso dei sistemi di coordinate introdotti nel paragrafo precedente, mentre le formule allora ottenute saranno modificate in modo da tener conto del fatto che ora esiste per  $\mathcal{M}(Q)$  anche una stella di  $1 (> 1)$  piani di simmetria avente  $\tau_0$  come sostegno. Lo  $s$ -esimo semipiano di questa stella, bisecante il diedro limitato dai semipiani di antisimmetria corrispondenti agli angoli  $\theta_s^\alpha$  e  $\theta_{s+1}^\alpha$ , risulta individuata assegnando l'angolo :

$$\theta_s^\sigma = \frac{\pi}{1} s + \frac{\pi}{2l} (2s + 1) \quad (s = 1, 2, \dots, 2l).$$

La condizione di simmetria di  $\mathcal{M}(Q)$  rispetto a tale semipiano si scrive (cfr. II-3) :

$$(II-51) \quad \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_s^\sigma} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, 2l).$$



TABELLA I - Espressioni analitiche dei termini  $\mathcal{M}_{jl}(r, z)$ ,  $(B_r)_{jl}$ ,  $(B_z)_{jl}$  presenti negli sviluppi (II-47) e (II-48') per i primi dodici valori di  $(jl)$   $\frac{\partial^{jl-1} B_z}{\partial r^{jl-1}}$

Le derivate  $\frac{\partial^{jl-1} B_z}{\partial r^{jl-1}}$  s'intendono calcolate in  $(t, 0, 0)$ .

$jl$	$\mathcal{M}_{jl}(r, z)$	$(B_r)_{jl}$	$(B_z)_{jl}$
2	$2A_2 rz$	$\frac{1}{1!} \frac{\partial B_z}{\partial r} z$	$\frac{1}{1!} \frac{\partial B_z}{\partial r} r$
3	$A_3(3r^2 z - z^3)$	$\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} 2rz$	$\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} (r^2 - z^2)$
4	$4A_4(r^3 z - rz^3)$	$\frac{1}{3!} \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} (3r^2 z - z^3)$	$\frac{1}{3!} \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} (r^3 - 3rz^2)$
5	$A_5(5r^4 z - 10r^2 z^3 + z^5)$	$\frac{1}{4!} \frac{\partial^4 B_z}{\partial r^4} (4r^3 z - 4rz^3)$	$\frac{1}{4!} \frac{\partial^4 B_z}{\partial r^4} (r^4 - 6r^2 z^2 + z^4)$
6	$2A_6(3r^5 z - 10r^3 z^3 + 3rz^5)$	$\frac{1}{5!} \frac{\partial^5 B_z}{\partial r^5} (5r^4 z - 10r^2 z^3 + z^5)$	$\frac{1}{5!} \frac{\partial^5 B_z}{\partial r^5} (r^5 - 10r^3 z^2 + 5rz^4)$
7	$A_7(7r^6 z - 35r^4 z^3 + 21r^2 z^5 - z^7)$	$\frac{1}{6!} \frac{\partial^6 B_z}{\partial r^6} (6r^5 z - 20r^3 z^3 + 6rz^5)$	$\frac{1}{6!} \frac{\partial^6 B_z}{\partial r^6} (r^6 - 15r^4 z^2 + 15r^2 z^4 - z^6)$
8	$8A_8(r^7 z - 7r^5 z^3 + 7r^3 z^5 - rz^7)$	$\frac{1}{7!} \frac{\partial^7 B_z}{\partial r^7} (7r^6 z - 35r^4 z^3 + 21r^2 z^5 - z^7)$	$\frac{1}{7!} \frac{\partial^7 B_z}{\partial r^7} (r^7 - 21r^5 z^2 + 35r^3 z^4 - 7rz^6)$
9	$A_9(9r^8 z - 84r^6 z^3 + 126r^4 z^5 - 36r^2 z^7 + z^9)$	$\frac{1}{8!} \frac{\partial^8 B_z}{\partial r^8} (8r^7 z - 56r^5 z^3 + 56r^3 z^5 - 8rz^7)$	$\frac{1}{8!} \frac{\partial^8 B_z}{\partial r^8} (r^8 - 28r^6 z^2 + 70r^4 z^4 - 28r^2 z^6 + z^8)$
10	$2A_{10}(5r^9 z - 60r^7 z^3 + 126r^5 z^5 - 60r^3 z^7 + 5rz^9)$	$\frac{1}{9!} \frac{\partial^9 B_z}{\partial r^9} (9r^8 z - 84r^6 z^3 + 126r^4 z^5 - 36r^2 z^7 + z^9)$	$\frac{1}{9!} \frac{\partial^9 B_z}{\partial r^9} (r^9 - 36r^7 z^2 + 126r^5 z^4 - 84r^3 z^6 + 9rz^8)$
11	$A_{11}(11r^{10} z - 165r^8 z^3 + 462r^6 z^5 - 330r^4 z^7 + 55r^2 z^9 - z^{11})$	$\frac{1}{10!} \frac{\partial^{10} B_z}{\partial r^{10}} (10r^9 z - 120r^7 z^3 + 252r^5 z^5 - 120r^3 z^7 + 10rz^9)$	$\frac{1}{10!} \frac{\partial^{10} B_z}{\partial r^{10}} (r^{10} - 45r^8 z^2 + 210r^6 z^4 - 210r^4 z^6 + 45r^2 z^8 - z^{10})$
12	$4A_{12}(3r^{11} z - 55r^9 z^3 + 198r^7 z^5 - 198r^5 z^7 + 55r^3 z^9 - 3rz^{11})$	$\frac{1}{11!} \frac{\partial^{11} B_z}{\partial r^{11}} (11r^{10} z - 165r^8 z^3 + 462r^6 z^5 - 330r^4 z^7 + 55r^2 z^9 - z^{11})$	$\frac{1}{11!} \frac{\partial^{11} B_z}{\partial r^{11}} (r^{11} - 55r^9 z^2 + 330r^7 z^4 - 462r^5 z^6 + 165r^3 z^8 - 11rz^{10})$
..	.....	.....	.....

**TABELLA II** - Valore che può assumere l'indice (jl) negli sviluppi di  $u(\rho, \theta)$ ,  $B_\rho$ ,  $B_\theta$ ,  $M(r, z)$ ,  $B_r$ ,  $B_z$  per distribuzioni con simmetrie dei tipi D ed F dotati di l piani di antisimmetria. I valori permessi di (jl) per le distribuzioni dei tipi D ed F sono stati indicati rispettivamente con i segni + e o. Si osservi poi come per le distribuzioni del tipo D gli sviluppi siano costituiti da termini dotati alternamente di simmetrie dei tipi F e D. Ad esempio, in una distribuzione sestupolare (l=3) del tipo D i termini con  $jl = 3, 9, 15, \dots$  posseggono simmetria del tipo F, mentre i termini con  $jl = 6, 12, 18, \dots$  hanno simmetria del tipo D.

VALORI PERMESSI DI $jl$ NEI PIANI DI ANTISIMM.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
2	+,0		+		+,0		+		+,0		+		+,0		+		+,0		+		+,0	...
3		+,0			+			+,0			+			+,0			+			+,0		...
4			+,0				+				+,0				+				+,0			...
5				+,0					+					+,0					+			...
6					+,0						+						+,0					...
7						+,0							+							+,0		...
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Da questa, in virtù della (II-38, c) segue che :

$$B_\theta(t, \rho, \theta_s^\sigma) = 0$$

e ricordando che per la simmetria di traslazione si ha pure (cfr. par. II-10) :

$$B_t(t, \rho, \theta) = 0 ,$$

risulta che :

$$\vec{B}(t, \rho, \theta_s^\sigma) = B_\rho(t, \rho, \theta_s^\sigma) \cdot \vec{v}_\rho .$$

Applichiamo ora la (II-51) alla espressione (II-44) del potenziale che abbiamo visto soddisfare alla equazione di Laplace, alla simmetria traslazionale ed alle condizioni di antisimmetria. Derivando rispetto a  $\theta$  la (II-44) e ponendo  $\theta = \theta_s^\sigma$ , si ottiene :

$$\sum_{j=1}^{\infty} j! \cdot A_{jl} \cdot \rho^{jl} \cdot \left[ \cos j! \theta \right]_{\theta = \frac{\pi}{2l}(2s+1)} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, 2l) .$$

Da ciò segue che deve essere :

$$\cos \left[ j! \frac{\pi}{2l} (2s+1) \right] = \cos \left[ \frac{\pi}{2} j(2s+1) \right] = 0 .$$

Questa uguaglianza, essendo (2s+1) un numero dispari, è soddisfatta soltanto se j è dispari. Dovremo perciò assumere :

$$j = 2\lambda + 1 \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots) .$$

Pertanto il potenziale cercato ha la forma :

$$(II-52) \quad \mathcal{A}(\rho, \theta) = \sum_1^{\infty} \mathcal{A}_{j1}(\rho, \theta) = \sum_0^{\infty} A_{(2\lambda+1)1} \cdot \rho^{(2\lambda+1)1} \cdot \sin[(2\lambda+1)1\theta] .$$

Tenendo poi conto delle (II-39, 39, b, c), si ottiene :

$$(II-53) \quad \begin{aligned} B_{\rho}(\rho, \theta) &= \sum_1^{\infty} (B_{\rho})_{j1} = -\mu_0 \sum_0^{\infty} (2\lambda+1)1 \cdot A_{(2\lambda+1)1} \cdot \rho^{(2\lambda+1)1-1} \cdot \sin[(2\lambda+1)1\theta] , \\ B_{\theta}(\rho, \theta) &= \sum_1^{\infty} (B_{\theta})_{j1} = -\mu_0 \sum_0^{\infty} (2\lambda+1)1 \cdot A_{(2\lambda+1)1} \cdot \rho^{(2\lambda+1)1-1} \cdot \cos[(2\lambda+1)1\theta] . \end{aligned}$$

Se si tiene conto della formula (II-46) per la n-plicazione degli archi e che  $r = \rho \cos \theta$ ,  $z = \rho \sin \theta$ , possiamo esprimere il potenziale in coordinate cartesiane  $t, r, z$ , ottenendo :

$$(II-54) \quad \mathcal{A}(r, z) = \sum_1^{\infty} \mathcal{A}_{j1}(r, z) = \sum_0^{\infty} A_{(2\lambda+1)1} \sum_0^{\bar{v}} (-1)^{\nu} \binom{(2\lambda+1)1}{2\nu+1} \cdot r^{(2\lambda+1)1-(2\nu+1)} \cdot z^{2\nu+1} .$$

Infine per le (II-41) e (II-41, b, c) e per la (II-50) con  $j = 2\lambda+1$ , si ottiene :

$$(II-55) \quad \begin{aligned} B_t(r, z) &= 0 \\ B_r(r, z) &= \sum_1^{\infty} (B_r)_{j1} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{[(2\lambda+1)1-1]!} \cdot \left( \frac{\partial^{(2\lambda+1)1-1} B_z}{\partial r^{(2\lambda+1)1-1}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_0^{\bar{v}} (-1)^{\nu} \cdot \frac{[(2\lambda+1)1-1]!}{[(2\lambda+1)1-2(\nu+1)]! (2\nu+1)!} \cdot r^{(2\lambda+1)1-2(\nu+1)} \cdot z^{2\nu+1} , \\ B_z(r, z) &= \sum_1^{\infty} (B_z)_{j1} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{[(2\lambda+1)1-1]!} \cdot \left( \frac{\partial^{(2\lambda+1)1-1} B_z}{\partial r^{(2\lambda+1)1-1}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_0^{\bar{v}} (-1)^{\nu} \cdot \frac{[(2\lambda+1)1-1]!}{[(2\lambda+1)1-2(\nu+1)]! (2\nu)!} \cdot r^{(2\lambda+1)1-2(\nu+1)} \cdot z^{2\nu} . \end{aligned}$$

dove ora  $\bar{v}$ ,  $\bar{\nu}$  ed  $l$  sono interi tali che  $2\bar{v}+1 \leq (2\lambda+1)l$ ,  $(2\bar{\nu}+1) \leq (2\lambda+1)l$ ,  $l > 1$ .

I valori che può assumere l'indice (j1) dei termini nelle simmetrie delle (II-52), (II-53) e (II-54) per un magnete 2l-polare con un valore di  $l$  fissato e con simmetrie del tipo F sono quelli indicati col segno o nella riga corrispondente a quel valore di  $l$  nella Tabella II. Così ad esempio per una distribuzione con simmetrie di tipo F ed  $l = 3$ , si ha :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(v, w) &= \mathcal{A}_3(v, w) + \mathcal{A}_9(v, w) + \mathcal{A}_{15}(v, w) + \dots , \\ B_v(v, w) &= (B_v)_3 + (B_v)_9 + (B_v)_{15} + \dots , \\ B_w(v, w) &= (B_w)_3 + (B_w)_9 + (B_w)_{15} + \dots , \end{aligned}$$

dove  $v = \rho, r$  e  $w = \theta, z$ .

Sia ora  $t \equiv \tau_0$  una traiettoria effettiva. Poniamo pertanto  $i = (2\lambda+1)l-1$  nella (II-30) ed introduciamo questa nelle (II-55). Si ottiene :

$$(II-55') \quad \begin{aligned} B_t(t, r, z) &= 0, \\ B_r(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \sum_{\lambda}^{\infty} K_{(2\lambda+1)l-1} \sum_{\nu}^{\bar{\nu}} (-1)^{\nu} \frac{[(2\lambda+1)l-1]!}{[(2\lambda+1)l-2(\nu+1)]!(2\nu+1)!} r^{(2\lambda+1)l-2(\nu+1)} z^{2\nu+1}, \\ B_z(t, r, z) &= \frac{p_0}{q} \sum_{\lambda}^{\infty} K_{(2\lambda+1)l-1} \sum_{\nu}^{\bar{\nu}} (-1)^{\nu} \frac{[(2\lambda+1)l-1]!}{[(2\lambda+1)l-2(\nu+1)]!(2\nu)!} r^{(2\lambda+1)l-2(\nu+1)} z^{2\nu}. \end{aligned}$$

## II. 12. DISTRIBUZIONI 2l-POLARI PURE O IDEALI.

Abbiamo veduto nei due paragrafi precedenti che il potenziale  $\mathcal{M}(Q)$  può essere scritto (cfr. (II-44), (II-47), (II-52), (II-54)) nella forma :

$$(II-56) \quad \mathcal{M}(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}_{jl}(Q),$$

dove:  $j = 1, 2, 3, \dots$  per le distribuzioni con simmetrie di tipo D e  $j = 2\lambda+1$  con  $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$  per le distribuzioni con simmetrie del tipo F.

Vogliamo ora esaminare le proprietà delle distribuzioni rappresentate dalle equazioni :

$$(II-57) \quad \mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}_1(Q) \quad (j=1, \quad l=2, 3, \dots),$$

ossia, usando coordinate polari e cartesiane, dalle equazioni :

$$(II-57') \quad \begin{aligned} \mathcal{M}(\rho, \theta) &= \mathcal{M}_1(\rho, \theta) = A_1 \rho^l \sin l\theta, \\ \mathcal{M}(r, z) &= \mathcal{M}_1(r, z) = A_1 \sum_{\nu}^{\bar{\nu}} (-1)^{\nu} \binom{l}{2\nu+1} r^{l-2(\nu+1)} z^{2\nu+1} \quad (\bar{\nu} \geq 0 \text{ intero}, \\ &\quad 2\bar{\nu}+1 \leq l). \end{aligned}$$

Queste distribuzioni, che, in via puramente formale possono essere ottenute ponendo eguali a zero nelle (II-56) tutti i coefficienti dei termini di grado più elevato del primo termine sono dette "distribuzioni 2l-polari pure o ideali". Osserviamo subito che il termine  $\mathcal{M}_1(Q)$  (termine fondamentale) possiede simmetria del tipo F potendo essere ottenuto dalle (II-52) o (II-54) per  $\lambda = 0$  (24).

Le superfici equipotenziali di queste distribuzioni, rappresentate da equazioni del tipo :

$$(II-57'') \quad \mathcal{M}_1(Q) = \mathcal{M}_0 \quad (\mathcal{M}_0 = \text{cost. reale}),$$

sono costituite da l famiglie di iperboloidi cilindrici con generatrici parallele all'asse  $t \equiv \tau_0$  ed aventi per direttrici le iperboli di ordine superiore di equazioni polari e cartesiane (25) :

$$(II-57''') \quad \begin{aligned} \rho &= \left( \frac{\mathcal{M}_0}{A_1} \operatorname{cosec} l\theta \right)^{1/l}, \\ \left[ \sum_{\nu}^{\bar{\nu}} (-1)^{\nu} \binom{l}{2\nu+1} r^{l-2(\nu+1)} z^{2\nu+1} \right] - \frac{\mathcal{M}_0}{A_1} &= 0. \end{aligned}$$

Ogni famiglia di detti iperboloidi ammette sempre una coppia di piani asintoti coincidente con una coppia di piani di antisimmetria adiacenti (26). Le equazioni delle iperboli direttrici sono riportate, in coordinate polari e cartesiane e per vari valori di l, nella Tabella III. Le componenti di  $\vec{B}(Q)$  per le distribuzioni

**TABELLA III** - Equazioni polari e cartesiane relative alle iperboli direttrici delle superfici cilindriche equipotenziali  $dlb(u, v) = dlb_0$  nelle "distribuzioni 2l-polari pure".

Distribuzione 2l-polare ideale	Coord. polari	Coord. cartesiane
Quadrupolare (l = 2)	$\rho = \left( \frac{dlb_0}{A_2} \operatorname{cosec} 2\theta \right)^{1/2}$	$rz = dlb_0 / 2A_2$
Sestupolare (l = 3)	$\rho = \left( \frac{dlb_0}{A_3} \operatorname{cosec} 3\theta \right)^{1/3}$	$3r^2 z - z^3 - dlb_0 / A_3 = 0$
Ottupolare (l = 4)	$\rho = \left( \frac{dlb_0}{A_4} \operatorname{cosec} 4\theta \right)^{1/4}$	$r^3 z - rz^3 - dlb_0 / 4A_4 = 0$
Decapolare (l = 5)	$\rho = \left( \frac{dlb_0}{A_5} \operatorname{cosec} 5\theta \right)^{1/5}$	$5r^4 z - 10r^2 z^3 + z^5 - dlb_0 / A_5 = 0$
Dodecapolare (l = 6)	$\rho = \left( \frac{dlb_0}{A_6} \operatorname{cosec} 6\theta \right)^{1/6}$	$3r^5 z - 10r^3 z^3 + 3rz^5 - dlb_0 / 2A_6 = 0$
.....	.....	.....
.....	.....	.....

2l-polari ideali sono subito ottenute dalle (II-45), (II-48') e (II-48'') prendendo solo il primo termine delle sommatorie (j=1) e tralasciando tutti i successivi. Si ha:

$$\begin{aligned}
 & B_t = 0, \\
 \text{(II-58)} \quad & B_\rho = (B_\rho)_1 = -\mu_0 l A_1 \rho^{l-1} \sin l\theta, \\
 & B_\theta = (B_\theta)_1 = -\mu_0 l A_1 \rho^{l-1} \cos l\theta,
 \end{aligned}$$

in coordinati polari e :

$$\begin{aligned}
 & B_t = 0, \\
 \text{(II-59)} \quad & B_r = (B_r)_1 = \frac{1}{(l-1)!} \left( \frac{\partial^{l-1} B_z}{\partial r^{l-1}} \right) \sum_0^{\bar{v}} (-1)^\nu \frac{(l-1)!}{[1-2(\nu+1)]!(2\nu+1)!} r^{1-2(\nu+1)} z^{2\nu+1}, \\
 & B_z = (B_z)_1 = \frac{1}{(l-1)!} \left( \frac{\partial^{l-1} B_z}{\partial r^{l-1}} \right) \sum_0^{\bar{v}} (-1)^\nu \frac{(l-1)!}{[1-(2\nu+1)]!(2\nu)!} r^{1-(2\nu+1)} z^{2\nu}, \\
 & \qquad \qquad \qquad (2(\bar{v}+1) \leq l) \qquad \qquad \qquad (2\bar{v}+1 \leq l),
 \end{aligned}$$

in coordinate cartesiane. In queste coordinate assumendo l'asse  $t \equiv \tau_0$  come traiettoria effettiva di riferimento si può scrivere anche :

$$\begin{aligned}
 & B_t = 0, \\
 \text{(II-59')} \quad & B_r = (B_r)_1 = \frac{p_0}{q} K_{l-1} \sum_0^{\bar{v}} (-1)^\nu \frac{(l-1)!}{[1-2(\nu+1)]!(2\nu+1)!} r^{1-2(\nu+1)} z^{2\nu+1}, \\
 & B_z = (B_z)_1 = \frac{p_0}{q} K_{l-1} \sum_0^{\bar{v}} (-1)^\nu \frac{(l-1)!}{[1-(2\nu+1)]!(2\nu)!} r^{1-(2\nu+1)} z^{2\nu}.
 \end{aligned}$$

Stabiliamo ora alcune proprietà generali delle distribuzioni 2l-polari ideali. Per il modulo di  $\vec{B}$  si ha subito :

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_\rho^2 + B_\theta^2} = \mu_0 l |A_1| \rho^{l-1} .$$

Se poi si assume che sia  $\mathcal{M}(\rho, \theta) > 0$  per :

$$\theta_s^\alpha < \theta < \theta_{s+1}^\alpha \quad (s = 1, 2, \dots, 2l)$$

quando  $s$  è un numero pari, allora l'angolo  $\Psi$  (orientato in verso orario) compreso tra le due direzioni orientate stabilite del raggio vettore  $\rho$  passante per il generico punto  $Q$  (di versore  $\vec{\tau}_\rho(Q)$ ) e dalla induzione magnetica  $\vec{B}(Q)$  risulta :

$$\cos \Psi = \vec{\tau}_\rho \cdot \frac{\vec{B}}{B} = \frac{1}{B} \vec{\tau}_\rho (B_\rho \vec{\tau}_\rho + B_\theta \vec{\tau}_\theta) = \frac{B_\rho}{B} = -\sin \theta ,$$

cioè :

$$\cos \Psi = \sin(-\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) ,$$

da cui :

$$\Psi = \theta + \frac{\pi}{2} .$$

Pertanto : "in una distribuzione 2l-polare ideale" il vettore  $\vec{B}(Q)$  ha un modulo che decresce con la potenza (l-1)-ma della distanza di  $Q$  dall'asse della stella di  $l$  piani di antisimmetria, inoltre la direzione ed il verso di  $\vec{B}(Q)$  sono ottenuti, quando valga l'ipotesi precedente sul segno del potenziale<sup>(27)</sup>, per rotazione nel verso orario di un angolo  $(\theta + \pi/2)$  rispetto alla direzione e verso del versore  $\vec{\tau}_\rho(Q)$ . Direzione e verso di  $\vec{B}(Q)$  sono poi costanti per tutti i punti  $Q$  giacenti nello stesso raggio vettore  $\rho^R$ .

Dalle proprietà ora stabilite segue che se indichiamo con  $B_0$  il valore di  $|\vec{B}|$  nei punti distanti  $\rho = a$  dall'asse  $t = \vec{\tau}_0$ , si può scrivere :

$$|B(\rho = a, \theta)| = B_0 = \mu_0 l |A_1| a^{l-1} ,$$

da cui si ricava :

$$(II-60) \quad |A_1| = \frac{B_0}{\mu_0 l a^{l-1}} .$$

Questa espressione, che collega  $|A_1|$  a quantità direttamente osservabili può essere confrontata con la espressione ottenuta dalla (II-50) ponendo in essa  $j=1$  e prendendone il valore assoluto. Si ha :

$$\frac{1}{\mu_0 l!} \cdot \left| \frac{\partial^{l-1} B_z}{\partial r^{l-1}} \right| = \frac{B_0}{\mu_0 l a^{l-1}} ,$$

da cui segue semplificando :

$$(II-61) \quad \frac{1}{(l-1)!} \cdot \left| \frac{\partial^{l-1} B_z}{\partial r^{l-1}} \right| = \frac{B_0}{a^{l-1}} .$$

Si ha poi per il modulo della costante  $K_{l-1}$  :

$$(II-62) \quad \frac{p_0}{q} |K_{l-1}| = \frac{B_0}{a^{l-1}} .$$

Le (II-60), (II-61) e (II-62) forniscono espressioni più semplici per le ampiezze dei termini 2l-polari puri  $\mathcal{M}_1(u, v)$ ,  $(B_u)_1$ ,  $(B_v)_1$ . Esse possono essere introdotte in tutte le espressioni trovate in questo paragrafo.

Nella Tabella IV sono riportate per le distribuzioni 2l-polari ideali aventi  $l=2, 3, 4, \dots$  le quantità



$\mathcal{L}(\rho, \theta)$ ,  $B_\rho$ ,  $B_\theta$ ,  $|\vec{B}|$ ,  $\Psi(\theta)$ ,  $\mathcal{L}(r, z)$ ,  $B_r$ ,  $B_z$ . Nelle Figg. 2, a, b, c sono riportate per le stesse distribuzioni le tracce dei piani di antisimmetria, delle superfici equipotenziali corrispondenti ad un valore assegnato del potenziale  $\mathcal{L}_0 = \pm(B_0/l\mu_0)a$  e, nei punti  $(a, \theta_s)$  e  $(2a, \theta_s)$ , dove  $\theta_s = (\pi/2l)s$  ( $s = 1, 2, \dots, 4l$ ), si è riportato un vettore proporzionale a  $\vec{B}$ . Ovunque si è fatto uso delle relazioni (II-60), (II-61), (II-62) e della convenzione già adottata nel segno del potenziale.

### II. 13. SVILUPPI IN SERIE DI MULTIPOLI.

Nei paragrafi II-10 e II-11 abbiamo visto che le componenti di  $\vec{B}$  nell'intorno di  $\tau_0$  possono essere scritte nella forma di sviluppi in serie:

$$(II-63) \quad B_v(v, w) = \sum_1^{\infty} j (B_v)_{jl} = \sum_1^{\infty} j C_{jl} (f_v)_{jl},$$

$$B_w(v, w) = \sum_1^{\infty} j (B_w)_{jl} = \sum_1^{\infty} j C_{jl} (f_w)_{jl},$$

dove le:

$$(II-63') \quad C_{jl} = -\mu_0(jl) A_{jl} = \frac{1}{(jl-1)!} \left( \frac{\partial^{jl-1} B_z}{\partial r^{jl-1}} \right) (t, 0, 0) = \frac{p_0}{q} k_{jl-1}$$

sono delle costanti, mentre le funzioni  $(f_v)_{jl}$ ,  $(f_w)_{jl}$  delle coordinate  $u, v$  si scrivono:

$$(II-63'') \quad (f_\rho)_{jl} = \rho^{jl-1} \sin jl\theta, \quad (f_\theta)_{jl} = \rho^{jl-1} \cos jl\theta,$$

se  $v = \rho$ ,  $w = \theta$ , mentre:

$$(II-63''') \quad (f_r)_{jl} = \sum_0^{\bar{v}} \frac{(-1)^v (jl-1)! r^{jl-2(v+1)} z^{2v+1}}{v [jl-2(v+1)]! (2v+1)!}, \quad (f_z)_{jl} = \sum_0^{\bar{v}} \frac{(-1)^v (jl-1)! r^{jl-(2v+1)} z^2}{v [jl-(2v+1)]! (2v)!},$$

se  $v = r$ ,  $w = z$ .

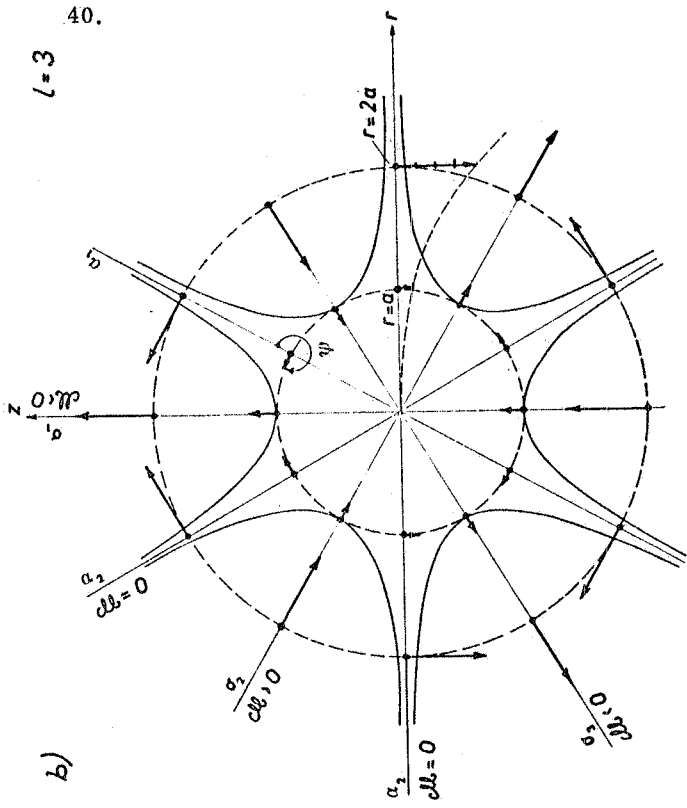
Inoltre nelle (II-63) l'indice  $j$  può assumere i valori  $j = 1, 2, 3, \dots$  nel caso delle distribuzioni di tipo D, mentre  $j = 2\lambda + 1$  con  $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$  nel caso delle distribuzioni di tipo F. Nel par. II-12 si è poi visto come si possono prendere in considerazione, almeno idealmente, delle distribuzioni di  $B$  rappresentate dalle equazioni:

$$B_v(v, w) = (B_v)_1, \quad B_w(v, w) = (B_w)_1,$$

cioè ottenute dalle (II-63) prendendo soltanto il termine corrispondente a  $j = 1$  (termine fondamentale). Queste distribuzioni sono dette "2l-polari pure o ideali". Esse presentano, come già detto, simmetrie di tipo F.

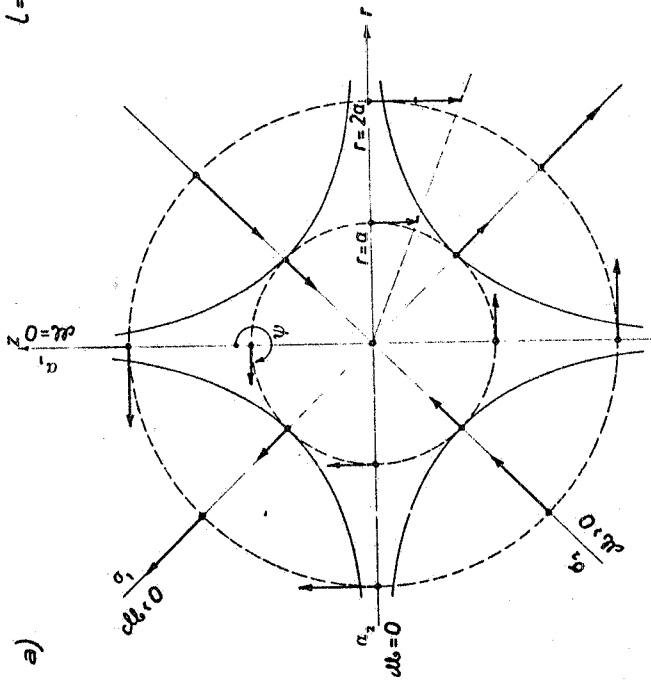
Osserviamo ora che le distribuzioni dei tipi D ed F presentano la seguente caratteristica. Per un valore fissato del numero  $l$  dei piani di antisimmetria, qualunque termine delle (II-63) che sia successivo al fondamentale (cioè avente  $j > 1$ ), ha la stessa espressione analitica del termine fondamentale di una distribuzione  $2l^*$ -polare pura corrispondente ad un valore  $l^* = jl$ . Così, ad esempio, in una distribuzione quadrupolare ( $l=2$ ) con simmetria del tipo D i termini  $(B_v)_{j1}$  e  $(B_w)_{j1}$  corrispondenti a  $j = 2$ , ossia  $(B_v)_4$  e  $(B_w)_4$ , coincidono con le componenti  $B_v$ ,  $B_w$  di  $B$  di una distribuzione ottupolare pura ( $l^* = 4$ ). Pertanto  $(B_v)_4$  e  $(B_w)_4$  vengono indicati come "termini ottupolari" o "di ottupolo" della distribuzione considerata. Questa, si potrà pensare costituita sommando tra loro termini di quadrupolo, ottupolo, dodecapolo, ecc. Estendendo queste considerazioni potremo dire che una qualsiasi distribuzione con simmetrie di tipo D o F può essere rappresentata mediante un conveniente sviluppo in serie costituito da "termini di multiplo". Queste distribuzioni, a differenza di quelle costituite dal solo termine fondamentale di multiplo, sono dette "impure o reali". In altri termini possiamo dire che gli sviluppi (II-45), (II-48'), (II-53) e (II-55) rappresentano una sorta di "decomposizione spettrale" della distribuzione di campo in multipoli di





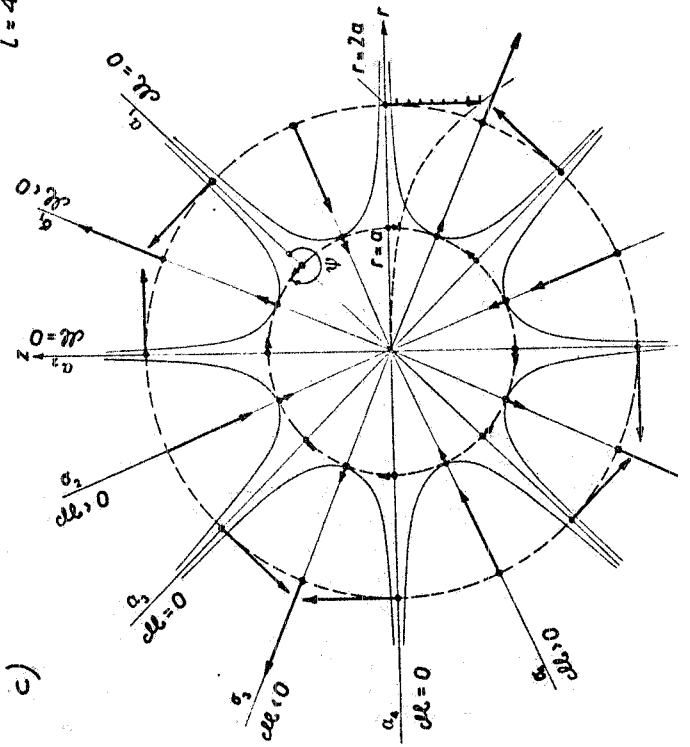
b)

$l=2$



a)

$l=4$



c)

FIG. II-2 - Tracce delle superfici equipotenziali magnetiche e dei piani di simmetria ed antisimmetria del potenziale nelle "distribuzioni 2l-polari ideali". Le equipotenziali riportate corrispondono a valori del potenziale dati da  $\alpha_l \alpha_{l+1} = \pm \frac{B_0}{1\mu_0} a$ , dove  $B_0 = |\vec{B}(a, \theta)|$ . Nei punti  $(a, \frac{\pi}{2l} s)$  e  $(2a, \frac{\pi}{2l} s)$  con  $s=1, 2, \dots, 4l$  sono stati riportati vettori proporzionali a  $\vec{B}$ .

- a) Distribuzione quadrupolare ideale (l=2),
- b) Distribuzione sestupolare ideale (l=3),
- c) Distribuzione ottupolare ideale (l=4).

"ordine  $l^*$ " e di "ampiezze" opportune. L'ordine di un multipolo risulta poi stabilito dal fatto che la legge  $(f_v)_{j1}$  (o  $(f_w)_{j1}$ ) di dipendenza dalle coordinate  $u, v$  può essere in generale espressa come un polinomio in  $u, v$  di grado complessivo  $(j1-1) = l^*-1$ . Inoltre l'ampiezza risulta determinata dal valore della costante  $C_{j1} = C_{j1}^*$ . Considerazioni analoghe a quelle svolte per  $B_v, B_w$  possono essere ripetute per il potenziale  $\phi(v, w)$ .

La decomposizione spettrale anzidetta può essere poi effettuata non solo per le distribuzioni dei tipi D ed F, ma per tutte le distribuzioni considerate in questa Parte II<sup>a</sup>.

Per verificare quest'ultima affermazione è necessario anzitutto estendere le definizioni e le formule stabilite per le distribuzioni 2l-polari pure al caso di un solo piano di antisimmetria  $\alpha$  ( $l=1$ ) mantenendo il consueto sistema di riferimento ortogonale  $t, r, z$  con l'asse  $t$  rettilineo. Si ha dalle (II-57'), (II-58), (II-59) per  $l=1$ ,

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \theta) &= \phi_1(\rho, \theta) = A_1 \rho \sin \theta, & \phi(r, z) &= \phi_1(r, z) = A_1 z \\ B_t &= 0 & B_t &= 0 \\ B_\rho &= (B_\rho)_1 = -\mu_0 A_1 \sin \theta & B_r &= (B_r)_1 = 0 \\ B_\theta &= (B_\theta)_1 = -\mu_0 A_1 \cos \theta & B_z &= (B_z)_1 = -\mu_0 A_1. \end{aligned}$$

Le superfici equipotenziali sono quindi piani, paralleli al piano di antisimmetria  $\alpha$ , rappresentati dalle equazioni:

$$\phi(r, z) = A_1 z = \phi_0, \quad \text{ossia:} \quad z = \phi_0 / A_1 = \text{cost.}$$

In particolare il piano  $\alpha$  stesso è rappresentato dalla equazione  $z=0$  risultando in questo caso  $\phi_0 = 0$  (cfr. II-8'). Si ha inoltre:

$$\vec{B} = \vec{B}_z z = -\mu_0 A_1 \vec{z}, \quad |\vec{B}| = |\vec{B}_z| = \mu_0 |A_1| = \text{cost.},$$

ed infine:

$$\psi = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Si vede quindi che la caratteristica fondamentale delle "distribuzioni dipolari ideali" è espressa dalla relazione  $\vec{B}(Q) = \text{cost.}$  Pertanto essendo l'induzione  $\vec{B}$  indipendente dalle coordinate di  $Q$ , essa non dipenderà neppure dalla scelta del sistema di riferimento  $t, r, z$  nel senso che invece di assumere l'asse  $t$  rettilineo come fatto finora potremo assumere che  $t$  sia una generica curva regolare del piano  $\alpha$ . A questo proposito ricordiamo che per le distribuzioni con simmetrie dei tipi A e B abbiamo appunto effettuato una scelta del genere e che proprio tale scelta ci ha consentito di identificare l'asse curvilineo  $t$  con una traiettoria reale. Questa identificazione non sarebbe invece possibile per le distribuzioni dipolari ideali mantenendo l'asse  $t$  rettilineo.

Ciò premesso, osserviamo che per riconoscere termini di multipolo negli sviluppi delle componenti di  $\vec{B}$  per le distribuzioni trattate nei paragrafi II-6, 7, 8, 9 dovremo attenderci che questi termini presentino una struttura più generale e complicata di quella rappresentata dalle (II-63', 63'', 63''') (cfr. anche Tabella I). Va infatti ricordato che queste espressioni sono state ottenute assumendo l'asse  $t$  rettilineo e la simmetria di traslazione lungo di esso. Pertanto imponendo queste condizioni le espressioni dei termini di multipolo ottenuti per le distribuzioni dei tipi A, B, C ( $l=2$ ) ed F ( $l=2$ ) dovranno ridursi alle corrispondenti espressioni della Tabella I. E' poi ovvio che l'assenza di certi termini di multipolo sarà determinata dal numero di piani di simmetria ed antisimmetria presenti.

Cominciamo con l'osservare che i termini contenuti negli sviluppi (II-20) per le distribuzioni del tipo A e (II-21) per le distribuzioni del tipo B, introducendo l'asse  $t$  rettilineo ( $h = h' = h'' = \dots = 0$ ) e la simmetria traslazionale rispetto a questo asse ( $B'_z = B''_z = \dots = 0$ ), si riducono ai termini della Tabella I ottenuta per le distribuzioni 2l-polari generiche. Si vede quindi che i termini dei predetti sviluppi non sono altro che dei termini di multipolo scritti in forma più generale. Possiamo quindi concludere che le distribuzioni di tipo A e B sono rappresentabili con uno sviluppo in serie di multipoli costituito dai termini di: dipolo + quadrupolo + sestupolo + ... ecc. Per le distribuzioni con simmetrie del tipo C con  $l=2$  possiamo vedere che i secondi termini negli sviluppi di  $B_r$  e  $B_z$  delle (II-29) si riducono ai corrispondenti

termini di ottupolo ( $l=4$ ) della Tabella I introducendo la simmetria di traslazione lungo l'asse  $t$  ( $B'_z = B''_z = \dots = 0$ ). Infatti, dalla (II-30"), si ha per  $B''_z = 0$ ,  $\partial^3 B_z / \partial r \partial z^2 = -\partial^3 B_z / \partial r^3$ . I predetti termini sono quindi termini di ottupolo scritti in forma più generale di quella riportata nella Tabella suddetta. Gli sviluppi (II-29) sono pertanto costituiti da termini di quadrupolo + ottupolo + ... ecc. Per le distribuzioni con simmetria di tipo E e con  $l=2$  si vede che, introducendo la simmetria di traslazione, i secondi termini degli sviluppi (II-35') per  $B_r$  e  $B_z$  si annullano ( $\partial B''_z / \partial r = 0$ ). Infatti l'effetto dell'introduzione dei piani di simmetria  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  consiste nell'annullare i termini  $(B_r)_{j1}$ ,  $(B_z)_{j1}$  corrispondenti a  $j1 = 4, 8, 12, \dots$ , come risulta peraltro dalla Tabella II. In questo caso i soli termini che rimangono negli sviluppi (II-35'), che sono esplicitati al 3° ordine in  $rz$ , sono i termini di quadrupolo.

Mostreremo più oltre (cfr. par. II-14) come ad ogni distribuzione 2l-polare pura possa essere associata almeno per i valori più bassi di  $l$ , una funzione ottica preponderante. Segue da ciò che nella progettazione di uno spettrometro magnetico si cerca sempre di realizzare una distribuzione di campo contenente un solo o pochissimi termini di multipolo degli ordini più bassi al fine di ottenere una o alcune funzioni ottiche concomitanti. In genere in uno spettrometro magnetico, al fondamentale termine di dipolo è aggiunto un termine di quadrupolo e solo per esigenze particolari è necessario introdurre termini di dipolo, quadrupolo e sestupolo. Difficoltà di natura pratica che sorgono nella realizzazione di uno spettrometro fanno sì che siano ordinariamente presenti nella distribuzione di campo termini di multipolo di ordine più elevato di quelli voluti. Tali termini sono di regola indesiderati e si cerca sempre di contenere la loro ampiezza entro limiti accettabili. Questi termini, come si può vedere dalle (II-63, 63', 63"), tendono infatti a divenire sempre più importanti per  $\rho \rightarrow \infty$ . Tuttavia l'estensione limitata delle sorgenti di campo fa sì che oltre un certo valore di  $\rho$ ,  $|\vec{B}|$  tenda a zero rapidamente, questo effetto prevalendo su tutti gli altri. E' pertanto ragionevole tentare di mantenere le ampiezze dei termini di multipolo di ordine più elevato entro limiti tali che, entro una regione definita da  $\rho \leq a$ , il loro contributo risulti trascurabile rispetto al contributo del termine di multipolo desiderato<sup>(29)</sup>. I multipoli di ordine inferiore a quello voluto sono esclusi in sede di progetto del magnete introducendo un numero opportuno  $l$  di piani di antisimmetria per  $\mathcal{M}(u, v)$ . Così ad esempio in un magnete sestupolare l'esistenza di  $l=3$  piani di antisimmetria sfalsati tra loro di  $120^\circ$  impedisce la presenza di termini di dipolo e quadrupolo nella distribuzione di campo (cfr. Tabella II).

Va ricordato infine che l'introduzione di altri  $l (> 2)$  piani di simmetria per  $\mathcal{M}(u, v)$  determina l'annullamento dei termini di multipolo di ordine  $2\lambda \cdot l$  con  $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ . Va ricordato anche che, data l'importanza dell'argomento trattato, sono state sviluppate in tempi recenti tecniche di misure magnetiche capaci di fornire un'analisi spettrale completa dei termini di multipolo presenti in una distribuzione di campo<sup>[4]</sup>.

## II. 14. FUNZIONI OTTICHE ASSOCIATE AI TERMINI DI MULTIPOLO.

Vogliamo studiare, dal punto di vista del "comportamento ottico" dei corpuscoli che attraversano una distribuzione  $\vec{B}(Q)$ , le sei distribuzioni analizzate nei paragrafi precedenti con lo scopo di individuare eventuali differenze in tale comportamento. Al fine di stabilire un valido confronto ci limiteremo a studiare le traiettorie  $\tau$  descritte da corpuscoli di eguali caratteristiche fisiche e condizioni iniziali muovendosi sopra un piano di antisimmetria per  $\mathcal{M}(Q)$ <sup>(30)</sup>. Ricordiamo a questo proposito che per tutte le sei distribuzioni  $\vec{B}(Q)$  considerate esiste sempre almeno uno di detti piani. Assumendo per riferimento la traiettoria  $\tau_0$  giacente sul piano di antisimmetria<sup>(31)</sup>, detto piano sarà rappresentato dall'equazione  $z=0$ .

Stabiliremo innanzi tutto la forma che le componenti di  $\vec{B}$  assumono, per i vari tipi di distribuzioni studiati, nei punti  $(t, r, 0)$  del piano  $z=0$ . In virtù delle (II-8", 8") si ha subito:

$$B_t(t, r, 0) = B_r(t, r, 0) = 0, \quad \vec{B}(t, r, 0) = B_z(t, r, 0) \vec{z}.$$

Inoltre dalle (II-20', 21', 29', 35", 48", 55') si ricava per  $z=0$ :

$$\begin{aligned} B_z(t, r, 0) &= \frac{p_0}{q} (h - nh^2 r + \beta h^3 r^2 + \dots) && \text{per le distribuzioni dei tipi A e B}^{(32)}, \\ B_z(t, r, 0) &= \frac{p_0}{q} (k_1 r + k_3 r^3 + \dots) && \text{per le distribuzioni del tipo C (l=2)}, \\ B_z(t, r, 0) &= \frac{p_0}{q} (k_1 r - \frac{1}{12} k_1'' r^3 + \dots) && \text{per le distribuzioni del tipo E (l=2)}, \end{aligned}$$

$$B_z(t, r, 0) = \frac{p_0}{q} (k_{1-1} r^{1-1} + k_{21-1} r^{21-1} + \dots) \quad \text{per le distribuzioni del tipo D}^{(33)}$$

$$B_z(t, r, 0) = \frac{p_0}{q} (k_{1-1} r^{1-1} + k_{31-1} r^{31-1} + \dots) \quad \text{per le distribuzioni del tipo F.}$$

Tutte le espressioni precedenti possono essere poste nella forma generale :

$$(II-64) \quad B_z(t, r, 0) = \frac{p_0}{q} \sum_0^{\infty} K_i r^i,$$

quando si convenga di assumere per  $K_i$  le espressioni riportate nella seconda colonna della Tabella V.

La (II-64), che è una serie di potenze in  $r$ , costituisce la forma generalizzata dello sviluppo in serie di multipoli di  $B_z(t, r, 0)$ . Nella (II-64),  $(p_0/q)K_i$  rappresenta la forma generale della "ampiezza del termine di  $2(i+1)$  - polo" (34).

Consideriamo ora una generica traiettoria  $\tau$  di condizioni iniziali (cfr. paragrafi I-2 e I-4 della Parte I<sup>a</sup>) :

$$(II-65) \quad r_1 = r(t_1), \quad z_1 = z(t_1) = 0, \quad r'_1 = r'(t_1), \quad z'_1 = z'(t_1) = 0, \quad p = p_0.$$

Questa risulterà completamente piana e contenuta interamente nel piano  $z = 0$  (cfr. par. I-2 della Parte I<sup>a</sup>).

Per stabilire dei confronti tra le proprietà ottiche delle diverse distribuzioni converremo inoltre di considerare la parte della traiettoria  $\tau$  contenuta in una striscia del piano  $z = 0$  compresa tra i piani  $t = t_1$  e  $t = t_2$  normali a  $\tau_0$  in modo che la lunghezza  $(t_2 - t_1)$  dell'arco (o segmento) di  $\tau_0$  presa in considerazione sia eguale per tutte le distribuzioni considerate.

Detta ora  $c$  la curvatura di  $\tau$  nel punto corrente, dalla (I-3) con  $p=p_0$ ,  $c = h = h(P)$ ,  $B(P) = B_z(t, r, z)$  si ha :

$$(II-66) \quad c = \frac{q}{p_0} B_z(t, r, 0)$$

e per la (II-64) si può scrivere :

$$(II-67) \quad c = \sum_0^{\infty} K_i r^i.$$

La (II-67) mostra che la curvatura  $c$ , può essere decomposta nel modo seguente :

$$c = \sum_0^{\infty} c_i,$$

dove :

$$(II-67') \quad c_i = K_i r^i.$$

Si vede quindi che la curvatura della traiettoria  $\tau$  in un punto generico può essere espressa con una serie convergente, ciascun termine della quale risulta determinato dal termine di  $2(i+1)$  - polo contenuto nella distribuzione di campo. In particolare per una "distribuzione  $2(i+1)$ -polare pura" la curvatura  $c = c_i$  della traiettoria  $\tau$  in ogni suo punto  $P(t, r, 0)$  risulta proporzionale ad  $r^i$  con una costante di proporzionalità data dall'ampiezza del termine di  $2(i+1)$ -polo moltiplicata per il fattore  $q/p_0$ .

Così, ad esempio, la traiettoria descritta da un corpuscolo nel piano  $z=0$  di una distribuzione ottupolare pura ( $i=3$ ) è una curva piana avente in ogni suo punto  $(t, r, 0)$  curvatura data da :

$$c_3(t) = \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} \right) [r(t)]^3.$$

TABELLA V - Espressioni di  $K_i, S_i$  per i diversi tipi di distribuzioni considerati nel testo.  
 Per le "distribuzioni  $2(i+1)$ -polari pure" si ha inoltre:

$$|K_i| = \frac{q}{P_0} \frac{B_0}{a^i}, \quad |S_i| = \frac{q}{P_0} \frac{B_0}{a^i} (t_2 - t_1).$$

Tipo distribuzione	$K_i$	$S_i$
A	$K_0(t) = h(t)$ $K_1(t) = -n(t) h^2(t)$ $K_2(t) = \beta(t) h^3(t)$ ..... .....	$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} h dt$ $S_1 = \int_{t_1}^{t_2} n h dt$ $S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \beta h^3 dt$ ..... .....
B	$K_0 = h$ $K_1 = -n h^2$ $K_2 = \beta h^3$ ..... .....	$S_0 = h(t_2 - t_1)$ $S_1 = -n h^2(t_2 - t_1)$ $S_2 = \beta h^3(t_2 - t_1)$ ..... .....
C (l=2)	$K_1(t) = 0$ (i pari) $K_1(t) = k_1(t) = \frac{q}{P_0} \frac{1}{i!} \left( \frac{\partial^i B_z}{\partial r^i} \right) (t, 0, 0)$ (i dispari)	$S_1 = 0$ (i pari) $S_1 = \int_{t_1}^{t_2} k_1 dt$ (i dispari)
E (l=2)	$K_1 = 0$ (i pari) $K_1(t) = k_1(t) = \frac{q}{P_0} \left( \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) (t, 0, 0)$ $K_3(t) = -\frac{1}{12} k_1''$ ..... .....	$S_1 = 0$ (i pari) $S_1 = \int_{t_1}^{t_2} k_1 dt$ $S_3 = -\frac{1}{12} \int_{t_1}^{t_2} k_1'' dt$ ..... .....
D	$K_0 = 0$ $K_1 = \begin{cases} k_{j1-1} = \frac{q}{P_0} \frac{1}{(j1-1)!} \left( \frac{\partial^{j1-1} B_z}{\partial r^{j1-1}} \right) & (i=j1-1) \\ 0 & (i \neq j1-1) \end{cases}$ (l = 2, 3, 4, ...) (j = 1, 2, 3, ...)	$S_0 = 0$ $S_1 = \begin{cases} k_{j1-1}(t_2 - t_1) & (i=j1-1) \\ 0 & (i \neq j1-1) \end{cases}$
F	$K_0 = 0$ $K_1 = \begin{cases} k_{(2\lambda+1)l-1} = \frac{q}{P_0} \frac{1}{[(2\lambda+1)l-1]!} \left( \frac{\partial^{(2\lambda+1)l-1} B_z}{\partial r^{(2\lambda+1)l-1}} \right) & (i = (2\lambda+1)l-1) \\ 0 & (i \neq (2\lambda+1)l-1) \end{cases}$ (l = 2, 3, 4, ...) (j = 1, 2, 3, ...)	$S_0 = 0$ $S_1 = \begin{cases} k_{(2\lambda+1)l-1}(t_2 - t_1) & (i = (2\lambda+1)l-1) \\ 0 & (i \neq (2\lambda+1)l-1) \end{cases}$

Consideriamo ora la deflessione angolare  $\theta_{1,2}$  totale subita dalla traiettoria  $\tau$  tra i piani  $t = t_1$  e  $t = t_2$ . Detti  $ds$  e  $d\theta$  rispettivamente l'elemento infinitesimo di arco su  $\tau$  e l'angolo (infinitesimo) di cui ruota la tangente a  $\tau$  passando dal punto  $P$  di ascissa  $s$  a quello di ascissa  $s+ds$ , si ha per la curvatura  $c(s)$  di  $\tau$  in  $P$ :

$$c = \frac{d\theta}{ds}.$$

Da questa si ricava subito l'espressione  $d\theta = c ds$ . Integrando ambo i membri di essa rispettivamente tra i limiti  $t_1, t_2$  e  $s_1 = s(t_1), s_2 = s(t_2)$ , si ottiene:

$$(II-68) \quad \theta_{1,2} = \int_{s_1}^{s_2} c ds = \frac{g}{p_0} \int_{s_1}^{s_2} B_z(t, r, 0) ds = \int_{s_1}^{s_2} \sum_0^{\infty} K_i r^i ds.$$

Le ultime due eguaglianze essendo state ottenute in virtù delle (II-66) e (II-64). Dalla precedente si ha poi:

$$(II-68^*) \quad \theta_{1,2} = \sum_0^{\infty} K_i \int_{s_1}^{s_2} r^i ds.$$

Questo permette di effettuare la decomposizione seguente:

$$(II-68') \quad \theta_{1,2} = \sum_0^{\infty} (\theta_{1,2})_i,$$

con

$$(II-68'') \quad (\theta_{1,2})_i = \int_{s_1}^{s_2} K_i r^i ds.$$

Si vede quindi che la deflessione angolare totale subita dalla traiettoria  $\tau$  tra i piani  $t = t_1$  e  $t = t_2$  può essere espressa con una serie convergente di termini ciascuno dei quali è attribuibile al termine di  $2(i+1)$ -polo presente nella distribuzione di campo ed è espresso dall'integrale di  $K_i r^i$  lungo l'arco di  $\tau$  compreso tra i piani suddetti. In particolare per una distribuzione  $2(i+1)$ -polare pura si ha semplicemente:  $\theta_{1,2} = (\theta_{1,2})_i$ .

Ricordiamo ora che  $ds = s' dt$ , per cui la (II-68'') diviene:

$$(\theta_{1,2})_i = \int_{t_1}^{t_2} K_i r^i s' dt.$$

In virtù della (I-12) l'espressione di  $ds$  può essere riscritta nella forma:

$$ds = s' dt = \left[ (1 + hr)^2 + r'^2 \right]^{1/2} dt,$$

nella quale si è tenuto conto che la traiettoria  $\tau$  è completamente contenuta nel piano  $z = 0$  ( $z' = z'' = \dots = 0$ ). In conseguenza la (II-68'') si scrive:

$$(II-68''') \quad (\theta_{1,2})_i = \int_{t_1}^{t_2} K_i r^i \left[ (1 + hr)^2 + r'^2 \right]^{1/2} dt.$$

Si vede quindi che per calcolare esattamente  $(\theta_{1,2})_i$  è necessario anzitutto conoscere l'equazione  $r = r(t)$  della traiettoria  $\tau$  sul piano  $z = 0$ . Tale conoscenza può essere acquisita soltanto determinando l'integrale particolare della equazione differenziale ricavata dalla (I-17-1<sup>a</sup>) ponendo  $z' = z'' = 0$ , integrale che

soddisfa alle condizioni iniziali (II-65). Ora il nostro scopo non è quello di calcolare la traiettoria  $\tau$  corrispondente ad assegnate condizioni iniziali ed il valore esatto della deflessione angolare  $\theta_{1,2}$  da essa subita, ma piuttosto quello di caratterizzare dal punto di vista "ottico" le distribuzioni  $B_z(t, r, 0)$ . Per una valutazione "approssimata" dell'integrale (II-68<sup>m</sup>) sostituiamo pertanto alla traiettoria  $\tau$  una curva C di equazione  $\bar{r} = \text{cost}$ . Tale costante potrà essere presa approssimativamente eguale al valore medio di  $r(t)$  nell'intervallo  $t_1, t_2$  per la traiettoria considerata. Segue subito che per la curva C è  $r'(t) = 0$ ,

Osserviamo poi che per le distribuzioni dei tipi C (1=2), E (1=2), D ed F la traiettoria  $\tau_0$  di riferimento è rettilinea, pertanto :

$$h = 0, \quad \text{per cui : } hr = 0.$$

Nelle distribuzioni dei tipi A e B, la  $\tau_0$  è curva ( $h \neq 0$ ) ma, per le traiettorie  $\tau$  che ordinariamente si considerano in ottica, si ha sempre :

$$hr = \frac{r}{\rho} \ll 1.$$

Si potrà quindi assumere  $hr = 0$  o comunque  $hr \ll 1$  anche per la curva C. In definitiva, per effetto della sostituzione della traiettoria  $\tau_0$  con la curva C, si ottengono le "relazioni approssimate" :

$$(\theta_{1,2})_i \simeq r^i \int_{t_1}^{t_2} K_i dt,$$

ossia :

$$(II-69) \quad (\theta_{1,2})_i \simeq S_i r^i,$$

avendo posto :

$$(II-69') \quad S_i = \int_{t_1}^{t_2} K_i dt.$$

Questa espressione prende il nome di "intensità del termine di  $2(i+1)$ -polo integrato nell'arco  $(t_2 - t_1)$  della traiettoria  $\tau_0$ ". Essa risulta eguale all'ampiezza del termine di  $2(i+1)$ -polo moltiplicata per il fattore  $q/p_0$  ed integrata nello stesso arco di  $\tau_0$ . Le espressioni di  $S_i$  per le diverse distribuzioni di campo studiate sono riportate nella terza colonna della Tabella V. Potremo scrivere quindi al posto della relazione esatta (II-68<sup>a</sup>) la relazione approssimata :

$$(II-69'') \quad \theta_{1,2} \simeq \sum_0^{\infty} S_i r^i.$$

Concludendo potremo dire che la deflessione angolare  $\theta_{1,2}$  subita dalla traiettoria  $\tau$  tra i piani  $t = t_1$  e  $t = t_2$  può essere "approssimativamente" espressa come una serie di potenze in  $r$  i cui coefficienti  $S_i$  sono le intensità dei termini di multipolo presenti in  $B_z(t, r, 0)$  integrate sull'arco  $t_1, t_2$  di  $\tau_0$ . Per una distribuzione  $2(i+1)$ -polare pura la deflessione  $(\theta_{1,2})_i$  è poi "approssimativamente" proporzionale a  $\bar{r}^i$ . Con riferimento a traiettorie con lo stesso valore del rapporto  $p_0/q$  entranti parallelamente in una distribuzione  $2(i+1)$ -polare pura e per le quali sia sempre  $hr=0$  o comunque  $hr \ll 1$ , si possono trarre le conclusioni che seguono. Se la distribuzione è dipolare pura ( $i=0$ ) la deflessione subita dalle traiettorie è all'incirca indipendente da  $\bar{r}$  e pertanto esse, uscendo dalla distribuzione emergeranno all'incirca parallelamente. L'effetto principale in questo caso consiste nel produrre una deflessione approssimativamente eguale per tutte le traiettorie. L'utilità delle distribuzioni dipolari nell'ottica corpuscolare non deriva tuttavia da questa proprietà ma dal fatto che la deflessione di una traiettoria risulta all'incirca proporzionale<sup>(35)</sup> al rapporto  $q/p_0$ . Segue da ciò che traiettorie con valori diversi di detto rapporto subiranno deflessioni diverse (dispersione cromatica). Nel caso di una distribuzione quadrupolare pura ( $i=1$ ) la deflessione subita dalle traiettorie è all'incirca proporzionale ad  $\bar{r}$ . Pertanto le traiettorie entranti parallelamente nella distribuzione con distanza  $r_1$  dall'asse  $t$  via via crescente, sono deflesse in misura sempre maggiore. Ne risulta, all'uscita dalla distribuzione, una netta azione focalizzante (focalizzazione del 1° ordine). Analogamente in una distribuzione sestupolare si ha un simile effetto di focalizzazione ma con deflessioni all'incirca proporzionali ad  $\bar{r}^2$  (focalizzazione del 2° ordine).

In realtà non è a rigore possibile effettuare una separazione netta delle "funzioni ottiche" svolte dalle varie distribuzioni  $2(i+1)$ -polari pure come quella sopra tratteggiata in quanto esiste sempre in misura più o meno grande un mescolamento di tali funzioni. Ad esempio in una distribuzione dipolare pura l'effetto sopra accennato di eguale deflessione della traiettoria è quasi sempre associato ad un effetto secondario di focalizzazione più o meno sensibile. E' quindi più corretto affermare che ad ogni particolare "distribuzione pura" si può associare una funzione ottica "preponderante".

## II. 15. MULTIPOLI INTEGRATI IN CAMPI UNIFORMI.

Vogliamo ora mostrare come sia possibile ottenere intensità integrate di multipolo di ordine  $i > 0$  in distribuzioni dipolari pure ( $i=0$ ). In generale ciò può essere ottenuto limitando opportunamente la distribuzione di campo uniforme. Con riferimento alla traiettoria  $\gamma_0$  contenuta nel piano di antisimmetria  $z=0$  consideriamo la regione dello spazio compresa tra il piano  $t=t_1$  e la superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse  $z$  avente per direttrice la curva  $C_2$  appartenente al piano  $z=0$  (cfr. Fig. 3). Sia :

$$t = t_2(r)$$

l'equazione di tale curva. Si abbia inoltre :

$$|\vec{B}| = B_z(t, r, z) = B_0$$

dentro tale regione, e :

$$|\vec{B}| = 0$$

esternamente ad essa<sup>(36)</sup>.

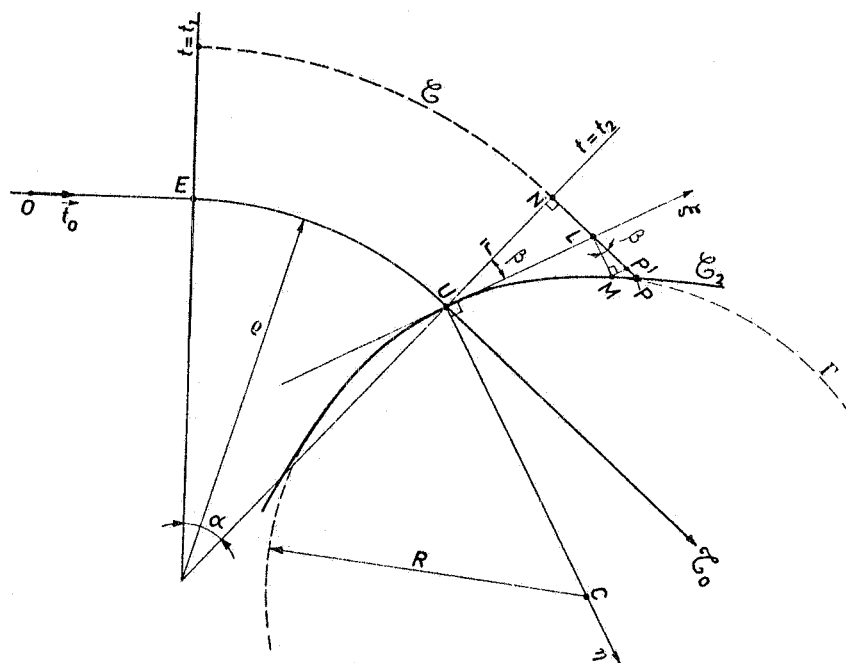


FIG. II-3 - Disposizione geometrica per dimostrare la presenza di multipoli integrati  $S_i$ , con  $i > 0$ , in campi uniformi.

La deflessione  $\theta$  subita da una traiettoria  $\gamma$  di condizioni iniziali (II-65) nell'attraversare la distribuzione di campo sopra precisato si scrive :

$$\theta = \frac{q}{p_0} \cdot \int_{t_1}^{t_2(r)} B_z(t, r, 0) \left[ (1 + hr)^2 + r'^2 \right]^{1/2} dt ,$$



essendo  $t_2(r)$  l'ascissa curvilinea del punto in cui la traiettoria  $\tau$  interseca la curva  $C_2$ . Per una valutazione approssimata di  $\theta$  sostituiamo la traiettoria  $\tau$  con curva  $C$  di equazione  $r = \bar{r} = \text{cost}$  come fatto nel paragrafo precedente. Si ha, tenendo conto delle approssimazioni allora introdotte :

$$(II-70) \quad \theta \simeq \frac{q}{p_0} B_0 \int_{t_1}^{t_2(\bar{r})} dt = h [t_2(\bar{r}) - t_1] .$$

Dalla Fig. II-3 si ha poi :

$$t_2(\bar{r}) = t_2(0) + \overline{NP}$$

per cui la (II-70) diviene :

$$(II-71) \quad \theta \simeq h [t_2(0) - t_1 + \overline{NP}] = \alpha + h \overline{NP} ,$$

essendo  $\alpha = h [t_2(0) - t_1]$  la deflessione angolare subita dalla traiettoria  $\tau$  tra i piani  $t=t_1$  e  $t=t_2$ .

Specifichiamo ora la curva  $C_2$  nel modo di seguito descritto. Con riferimento al sistema ortogonale  $\mathbf{U}(\eta, \xi)$ , ottenuto ruotando attorno al punto  $\mathbf{U}(t, 0, 0)$  gli assi  $r, t$  di un angolo  $\beta$  nel verso orario, la curva  $C_2$  sia rappresentata dalla parabola di equazione :

$$\eta = a \cdot \xi^2 .$$

Calcoliamo ora la lunghezza del segmento  $\overline{NP}$ . Dalla Fig. (II-3) si ricavano le relazioni :

$$\begin{aligned} \overline{NP} &= \overline{NL} + \overline{LP} , & \overline{NL} &= \overline{UN} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta \cdot \bar{r} , \\ \overline{LP} &\simeq \overline{LP}' = \overline{LM} \sec \beta , & \overline{UL} &= \overline{UN} \sec \beta = \sec \beta \cdot \bar{r} , \\ & & \overline{LM} &= a \overline{UL}^2 = a \sec^2 \beta \cdot \bar{r} , \end{aligned}$$

per cui :

$$\overline{NP} \simeq \operatorname{tg} \beta \cdot \bar{r} + a \sec^3 \beta \cdot \bar{r}^2 .$$

Se le traiettorie  $\tau$  sono limitate ad un intorno del secondo ordine di  $\gamma_0$ , come di regola avviene, potremo sostituire alla parabola  $\eta = a \xi^2$  la circonferenza  $\gamma$  osculatrice ad essa nel punto  $\mathbf{U}^{(37)}$ . In tal caso si ha :

$$a = \frac{1}{2R}$$

essendo  $R$  il raggio della circonferenza suddetta. Pertanto :

$$\overline{NP} \simeq \operatorname{tg} \beta \cdot \bar{r} + \frac{1}{2R} \sec^3 \beta \cdot \bar{r}^2$$

e la (II-71) diviene :

$$\theta \simeq \alpha + h \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \bar{r} + \frac{h}{2R} \sec^3 \beta \cdot \bar{r}^2 .$$

Ponendo :

$$\begin{aligned} S_0 &= \alpha = h [t_2(0) - t_1] , \\ S_1 &= h \cdot \operatorname{tg} \beta , & S_2 &= \frac{h}{2R} \sec^3 \beta , \end{aligned}$$

si può scrivere in definitiva :

$$\theta \simeq S_0 + S_1 \bar{r} + S_2 \bar{r}^2 .$$

Si vede quindi che sagomando opportunamente uno dei bordi di una distribuzione dipolare pura si possono ottenere intensità integrate di quadrupolo e sestupolo oltre a quella normale di dipolo.

NOTE. -

(o) - Cioè lungo gli assi  $x$  e  $z$ .(1) - Ricordiamo sinteticamente come le coordinate curvilinee ortogonali sono introdotte. Fissato un sistema di assi ortogonali  $x, y, z$ , le equazioni

$$f_1(x, y, z) = u, \quad f_2(x, y, z) = v, \quad f_3(x, y, z) = w$$

rappresentano tre schiere di superfici. Un particolare elemento di una tra queste tre schiere è individuato dal corrispondente valore della costante al 2° membro nell'equazione che rappresenta quella schiera. In genere, l'intersezione di tre superfici, ciascuna delle quali appartenga ad una schiera diversa, determina un punto al quale si può far corrispondere la terna di numeri  $(u, v, w)$  individuanti le tre superfici anzidette. Parleremo quindi nel seguito di "superfici coordinate  $u, v, w$ ". Si fa qui l'ipotesi che le superfici  $u, v, w$  s'intersechino sempre ortogonalmente tra loro. Si ha poi:

- a) L'intersezione di due superfici appartenenti a due schiere diverse determina una linea, in genere curva, lungo la quale la coordinata corrispondente alle superfici della terza schiera può variare. Ad esempio, l'intersezione delle superfici  $v$  e  $w$  determina una linea lungo la quale la coordinata  $u$  varia da punto a punto. Diremo che questa è la "linea coordinata  $u$ ". Le linee coordinate  $v$  e  $w$  si definiscono analogamente.
- b) Ogni linea coordinata risulta, per quanto sopra affermato, ortogonale alle superfici coordinate corrispondenti. Così le linee  $u$  sono ortogonali alle superfici  $u$ , ecc.
- c) In ogni punto dello spazio le tre linee coordinate s'incontrano a due a due ortogonalmente.

L'uso di questo sistema di coordinate consente di scrivere relazioni generali evitando di specificare un particolare sistema di coordinate. Questo può essere scelto successivamente nel modo più conveniente per trattare ogni particolare problema. Per una trattazione dettagliata dell'argomento vedasi bibliografia [1].

(2) - Per un sistema di coordinate curvilinee ortogonali  $u, v, w$ , dette :

$$x = g_1(u, v, w), \quad y = g_2(u, v, w), \quad z = g_3(u, v, w)$$

le funzioni (ad un sol valore) che rappresentano le trasformazioni inverse delle

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z),$$

si ha [1] :

$$h_u = \left[ \left( \frac{\partial g_1}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_2}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_3}{\partial u} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad h_v = \left[ \left( \frac{\partial g_1}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_2}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_3}{\partial v} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$h_w = \left[ \left( \frac{\partial g_1}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_2}{\partial w} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_3}{\partial w} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Se la trasformazione inversa sopra indicata esiste e le coordinate sono ortogonali, come supposto in precedenza, nessuno dei coefficienti  $h_u, h_v, h_w$  è nullo. Tali coefficienti sono poi, com'è ovvio, funzioni sempre positive delle variabili  $u, v, w$ .

- (3) - I piani di simmetria e di antisimmetria posseduti da una distribuzione di potenziale sono sempre piani di "simmetria geometrica" per le distribuzioni di materiale magnetizzato e/o di correnti magnetizzanti che producono la distribuzione di potenziale.
- (4) - Questo sistema ausiliario di coordinate curvilinee ci consente di caratterizzare le simmetrie definite nei punti a), b), c) senza la necessità di operare una scelta che assegni un ruolo particolare a qualcuna delle coordinate  $u, v, w$ . L'identificazione delle coordinate  $q_1, q_2, q_3$  con le  $u, v, w$  sarà effettuata nel seguito in base a particolari criteri di convenienza.
- (5) - Le (II-6, b, c) sono immediatamente ottenute per sostituzione nella (II-6) delle derivate  $\partial \mathcal{L} / \partial q_1$  e  $\partial \mathcal{L} / \partial q_2$  ricavate dalla (II-4, i). Per ottenere la (II-6, a) poniamo nella (II-6)  $l = m = 0$  ottenendo  $\partial^n \mathcal{L} / \partial q_3^n = 0$ . Questa, per  $n=1$  da  $\partial \mathcal{L} / \partial q_3 = 0$ , da cui, per la (II-4, i) con  $i=3$ , segue  $B_{q_3} = 0$  essendo  $h_{q_3} \neq 0$ . Per  $n > 1$ , si ha poi :

$$\frac{\partial^n \mathcal{L}}{\partial q_3^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial q_3^{n-1}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} \right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial q_3^{n-1}} \left( -\frac{1}{\mu_0} h_{q_3} B_{q_3} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial^{n-1} h_{q_3}}{\partial q_3^{n-1}} B_{q_3} + h_{q_3} \frac{\partial^{n-1} B_{q_3}}{\partial q_3^{n-1}} \right) = 0$$

Da questa, essendo  $B_{q_3} = 0$ ,  $h_{q_3} \neq 0$ , segue la (II-6, a).

- (6) - Si noti che si è scritto  $(h_{q_1} \cdot B_{q_1})$  invece di  $B_{q_1}$  ed analoghe non essendo possibile escludere a priori la dipendenza di  $h_{q_1}$ ,  $h_{q_2}$ ,  $h_{q_3}$  dalla coordinata  $q_3$ .
- (7) - Useremo questa denominazione per un magnete avente una coppia di espansioni polari di "polarità magnetiche" opposte, di forma qualsiasi purchè dotate di simmetria geometrica rispetto al piano  $\alpha$ .
- (8) - Con questa denominazione intendiamo un magnete dipolare simmetrico rispetto al piano  $\alpha$ , come considerato nel caso A, nel quale però le sezioni del traferro effettuate con i piani della stella di asse  $a$  si ripetano identicamente entro un diedro di apertura  $\phi$  ( $0 < \phi < 2\pi$ ).
- (9) - Infatti, gli  $l$  piani di antisimmetria della stella sono bisecati dalla retta  $a$  in  $2l$  semipiani delimitanti  $2l$  angoli diedri eguali di apertura  $2\pi/2l = \pi/l$ . Occorrono poi due rotazioni successive (di  $\pi/l$ ) per riportare la distribuzione di potenziale  $\mathcal{M}(Q)$  a sovrapporsi esattamente a quella iniziale.
- (10) - Con questo termine intendiamo un magnete costituito da  $l$  ( $> 1$ ) coppie di espansioni polari di "polarità magnetiche" opposte, le quali invertono il segno passando da una coppia a quella adiacente. Le espansioni polari sono delimitate da superfici "cilindriche" dotate di simmetria geometrica rispetto ai piani della stella  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ . Le generatrici di una qualsiasi di tali superfici risultano perciò parallele alla retta sostegno di questa stella (asse del magnete) mentre la sua direttrice può essere una linea generica. Esiste poi, per un tratto di lunghezza limitata lungo l'asse del magnete, simmetria di traslazione. Magneti  $2l$ -polari possono essere realizzati ricorrendo soltanto a distribuzioni opportune di correnti (magneti senza nucleo ferromagnetico). Le correnti sono allora disposte in modo da approssimare lamine cilindriche a sezione circolare od ellittica con le linee di flusso parallele all'asse del cilindro. Se la sezione è circolare, allora la distribuzione azimutale della densità di corrente (A/m) che produce il campo  $2l$ -polare è espressa dalla relazione:  $J(\theta) = J_0 \cos l\theta$ .
- (11) - Questa ulteriore simmetria delle espansioni polari non è richiesta per magneti  $2l$ -polari considerati nel caso C.
- (12) - Questo sistema di coordinate è già stato introdotto nella Parte I<sup>a</sup>, par. I-3. La curva  $\tau_0$  è completamente assegnata dando il punto origine  $0$ , il versore  $\vec{t}_0$  della tangente a  $\tau_0$  in  $0$  e la curvatura  $h$  in funzione dell'ascissa curvilinea  $t$ .
- (13) - Osserviamo innanzi tutto che in base alle (II-4, a, b, c) ed alle (II-10) si può scrivere:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} (1+hr) B_t, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial r} = -\frac{1}{\mu_0} B_r, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z} = -\frac{1}{\mu_0} B_z,$$

e che pertanto è possibile ottenere le eguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{1+m+n} \mathcal{M}}{\partial t^n \partial r^l \partial z^m} &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^{1+m+n-1} [(1+hr) B_t]}{\partial t^{n-1} \partial r^l \partial z^m} = \\ (x) \quad &= -\frac{1}{\mu_0} \left[ (1+hr) \frac{\partial^{1+m+n-1} B_t}{\partial t^{n-1} \partial r^l \partial z^m} + B_t \cdot \frac{\partial^{1+m+n-1} (1+hr)}{\partial t^{n-1} \partial r^l \partial z^m} \right] \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^{1+m+n} \mathcal{M}}{\partial t^n \partial r^l \partial z^m} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^{1+m+n-1} B_r}{\partial t^n \partial r^{l-1} \partial z^m} \quad (l \geq 1)$$

$$\frac{\partial^{1+m+n} \mathcal{M}}{\partial t^n \partial r^l \partial z^m} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^{1+m+n-1} B_z}{\partial t^n \partial r^l \partial z^{m-1}} \quad (m \geq 1).$$

Dalla seconda e terza di queste segue subito che esistono e sono continue in ogni punto di  $\mathcal{Q}$  le derivate:

$$\frac{\partial^{1+m+n-1} B_r}{\partial t^n \partial r^{l-1} \partial z^m}, \quad \frac{\partial^{1+m+n-1} B_z}{\partial t^n \partial r^l \partial z^{m-1}}.$$

Per la derivata :

$$\frac{\partial^{1+m+n-1} B_t}{\partial t^{n-1} \partial r^1 \partial z^m}$$

occorre osservare che, avendo supposto la  $\tau_0$  regolare, la funzione  $h(t)$  è definita e continua insieme a tutte le sue derivate (totali e parziali) di qualsiasi ordine rispetto a  $t, r, z$ . Proprietà analoghe valgono per la  $r(t)$  e quindi anche per la funzione  $(1+hr)$ . Poichè  $\partial h / \partial t$  è certamente definita e continua segue che tale deve essere anche la  $B_t$ . Possedendo i termini :

$$(1+hr), \quad B_t, \quad \frac{\partial^{1+m+n-1} (1+hr)}{\partial t^{n-1} \partial r^1 \partial z^m}$$

contenuti nella parentesi quadra al terzo membro della eguaglianza (x) le stesse proprietà del primo membro, segue che anche la derivata considerata deve possedere queste proprietà. L'asserto è quindi dimostrato.

(14) - E' fatto uso della convenzione corrente :

$$\frac{\partial^0 f}{\partial t^0} = \frac{\partial^0 f}{\partial r^0} = \frac{\partial^0 f}{\partial z^0} = f.$$

(15) - Vedremo nel seguito che questa ipotesi può essere sostituita da altre più ristrette quando si tenga conto delle equazioni (II-2) e (II-3).

(16) - Inoltre  $(1+hr)$  è sempre positiva. Infatti, nella presente trattazione ci limiteremo a considerare punti  $Q$  in prossimità di  $\tau_0$  e per i quali è sempre valida la disequaglianza  $|r| < \rho = 1/h$ , ossia  $h|r| < 1$  e pertanto  $(1+hr) > 0$ .

(17) - Acceniamo più dettagliatamente alla procedura in questione. Introducendo gli sviluppi (II-16) per  $B_t, B_r, B_z$  in una qualsiasi delle equazioni (II-13), (II-14, a, b, c) si perviene sempre ad una espressione del tipo :

$$(x) \quad \sum_i \sum_j A_{i,j} r^{ai+bj+c} z^{di+ej+f} + \sum_i \sum_j B_{i,j} r^{gi+hj+l} z^{mi+nj+p} + \dots + \sum_i \sum_j C_{i,j} r^{qi+rj+s} z^{ti+uj+v} + \dots = 0, \quad (a, b, c, \dots \text{ interi } \geq 0)$$

nella quale gli esponenti di  $r$  e  $z$  sono combinazioni lineari degli indici  $i, j$  di sommazione. Per ottenere che l'espressione precedente si annulli identicamente per tutte le coppie di valori di  $r$  e  $z$ , in  $\mathcal{A}$ , è necessario :

- individuare nelle sommatorie presenti tutti i termini contenenti le stesse potenze di  $r$  e  $z$ , cioè contenenti ad esempio  $r^\alpha z^\beta$  con  $\alpha$  e  $\beta$  interi  $\geq 0$ ,
- raccogliere a fattor comune rispetto a  $r^\alpha z^\beta$ ,
- annullare il coefficiente del termine contenente  $r^\alpha z^\beta$ .

A titolo di esempio supponiamo di voler raccogliere nella (x) i termini contenenti :

$$r^{gi+hj+l} z^{mi+nj+p}$$

Dovremo allora stabilire nelle sommatorie del 1° e 3° termine di tale espressione quali valori dare agli indici  $i$  e  $j$  allo scopo di ottenere termini contenenti le predette potenze di  $r$  e  $z$ . Se :

$$(i', j'), \quad (i'', j''), \quad \dots,$$

sono le coppie di indici  $i, j$  soddisfacenti rispettivamente alle eguaglianze :

$$\begin{aligned} ai'+bj'+c &= gi+hj+l & qi''+rj''+s &= gi+hj+l \\ di'+ej'+f &= mi+nj+p & ti''+uj''+v &= mi+nj+p \end{aligned}, \quad \dots$$

allora i termini :

$$A_{i',j'} r^{ai'+bj'+c} z^{di'+ej'+f}, \quad B_{i'',j''} r^{gi''+hj''+l} z^{mi''+nj''+p}, \quad C_{i'',j''} r^{qi''+rj''+s} z^{ti''+uj''+v}, \dots$$

possono essere tutti fattorizzati rispetto a  $r^{gi+hj+1} z^{mi+nj+p}$  e poichè, come già detto, il coefficiente di questo termine deve annullarsi, si ottiene la relazione :

$$A_{i',j'} + B_{i,j} + C_{i'',j''} + \dots = 0.$$

Esplicitando i coefficienti binomiali presenti negli sviluppi di  $B_t$ ,  $B_r$ ,  $B_z$  ed effettuando le dovute semplificazioni si ottengono le relazioni ricorrenti riportate nel testo.

- (18) - Si osservi che le (II-27) e (II-28, a, b, c) non possono essere ottenute dalle (II-17), (II-18, a, b, c) semplicemente ponendo  $h = 0$  a causa del diverso carattere di simmetria in  $r$  e  $z$  degli sviluppi (II-26) rispetto agli sviluppi (II-16).
- (19) - Per  $n > 1$ ,  $l = 0$ ,  $m = 1$  dall'ultima condizione, si ha :

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (\rho B_\theta) = 0, \text{ e poichè : } \frac{\partial^n \rho}{\partial t^n} = 0, \text{ segue : } \frac{\partial^n B_\theta}{\partial t^n} = 0 \text{ per } \rho > 0.$$

In generale, si ha poi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{\partial^{1+m-1} (\rho B_\theta)}{\partial \rho^1 \cdot \partial \theta^{m-1}} \right] &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} (B_\theta \frac{\partial^{1+m-1} \rho}{\partial \rho^1 \cdot \partial \theta^{m-1}} + \rho \frac{\partial^{1+m-1} B_\theta}{\partial \rho^1 \cdot \partial \theta^{m-1}}) = \\ &= \frac{\partial^n B_\theta}{\partial t^n} \frac{\partial^{1+m-1} \rho}{\partial \rho^1 \cdot \partial \theta^{m-1}} + B_\theta \frac{\partial^{1+m-1}}{\partial \rho^1 \cdot \partial \theta^{m-1}} \left( \frac{\partial^n \rho}{\partial t^n} \right) + \\ &+ \frac{\partial^n \rho}{\partial t^n} \frac{\partial^{1+m-1} B_\theta}{\partial \rho^1 \cdot \partial \theta^{m-1}} + \rho \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left( \frac{\partial^{1+m-1} B_\theta}{\partial \rho^1 \cdot \partial \theta^{m-1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ora i primi tre termini del terzo membro di questa catena di eguaglianze sono nulli per quanto visto in precedenza, inoltre  $\rho \geq 0$ , per cui l'asserto è dimostrato.

- (20) - Sostituiamo infatti la (II-41) nella (II-39) e moltiplichiamo ambo i membri per  $\rho^2/(fg)$ , si ottiene l'equazione :

$$\frac{\rho^2}{f} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0.$$

Da questa equazione è possibile ottenere due equazioni a variabili separate, ponendo :

$$(x) \quad \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -n^2, \quad (xx) \quad \frac{\rho^2}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{f} \frac{\partial f}{\partial \rho} = +n^2.$$

Un integrale generale della (x) che sia periodico con periodo  $2\pi$  può essere scritto nella forma :  $g(\theta) = c \cos n\theta + d \sin n\theta$ , essendo  $n \geq 0$  intero. Infatti si ha :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -n^2 c \cos n\theta - n^2 d \sin n\theta = -n^2 (c \cos n\theta + d \sin n\theta) = -n^2 g.$$

Per la equazione (xx) cerchiamo un integrale particolare del tipo  $f(\rho) = \rho^\alpha$ . Sostituendo questa nella (xx) e dividendo per  $\rho^\alpha$ , si ha :  $\alpha^2 - n^2 = 0$ , da cui  $\alpha = \pm n$ . Pertanto l'integrale generale di questa equazione si può scrivere come :  $f(\rho) = (a\rho^n + b\rho^{-n})$ . Un integrale particolare della (II-39) è quindi :  $\mathcal{M}(\rho, \theta) = f(\rho) g(\theta) = (a\rho^n + b\rho^{-n})(c \cos n\theta + d \sin n\theta)$ . L'integrale generale della (II-39) è poi scritto come combinazione lineare degli integrali particolari corrispondenti ai diversi valori di  $n$ .

- (21) - Per ricavare la (II-46) applichiamo la formula di Newton al binomio  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ . Si ha :

$$(x) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n (i)^k \binom{n}{k} \cos^{n-k} \theta \cdot \sin^k \theta = \sum_{\nu=0}^{\overline{n}} (i)^{2\nu} \binom{n}{2\nu} \cos^{n-2\nu} \theta \cdot \sin^{2\nu} \theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_0^{\bar{v}} (i)^{2\nu+1} \cdot \binom{n}{2\nu+1} \cdot \cos \theta^{n-(2\nu+1)} \cdot \sin \theta^{2\nu+1} = \\
& = \sum_0^{\bar{v}} (-1)^\nu \cdot \binom{n}{2\nu} \cdot \cos \theta^{n-2\nu} \cdot \sin \theta^{2\nu} + i \sum_0^{\bar{v}} (-1)^\nu \cdot \binom{n}{2\nu+1} \cdot \cos \theta^{n-(2\nu+1)} \cdot \sin \theta^{2\nu+1} ,
\end{aligned}$$

nelle quali :

$$\bar{v} = \text{MAX. intero } \geq 0 \text{ tale che } 2\bar{v} \leq n$$

$$\bar{v} = \text{MAX. intero } \geq 0 \text{ tale che } 2\bar{v}+1 \leq n ,$$

e dove si è fatto uso delle relazioni :

$$(i)^{2\nu} = (i^2)^\nu = (-1)^\nu , \quad (i)^{2\nu+1} = i(i)^{2\nu} = i(-1)^\nu .$$

D'altra parte per la formula di Moivre, si ha :

$$(xx) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta .$$

Eguagliando tra loro le parti reali ed immaginarie della (xx) e del terzo membro della (x), si ottengono le "formule di n-plicazione degli archi" :

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= \sum_0^{\bar{v}} (-1)^\nu \cdot \binom{n}{2\nu} \cdot \cos \theta^{n-2\nu} \cdot \sin \theta^{2\nu} \\
\sin n\theta &= \sum_0^{\bar{v}} (-1)^\nu \cdot \binom{n}{2\nu+1} \cdot \cos \theta^{n-(2\nu+1)} \cdot \sin \theta^{2\nu+1} .
\end{aligned}$$

(22) - Si ha infatti :

$$B_r(r, z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{j!-1} \left[ \sum_0^{j!-1} \binom{j!-1}{2\nu+1} D_{j!-2(\nu+1)}^{j!-1} B_r \cdot r^{(j!-1)-(2\nu+1)} z^{2\nu+1} \right] .$$

Per quanto riguarda gli indici delle sommatorie ed i loro limiti si osservi che :

$$\sum_0^{\infty} k \dots = \sum_0^{\infty} j!-1 \dots = \sum_{1/1}^{\infty} j \dots = \sum_1^{\infty} j \dots , \quad \text{essendo } j = 1, 2, \dots, \infty ,$$

e che inoltre :

$$\sum_0^k i \dots = \sum_0^{j!-1} 2\nu+1 \dots = \sum_0^{2\bar{v}+1} 2\nu+1 \dots = \sum_{-1/2}^{\bar{v}} \nu \dots = \sum_0^{\bar{v}} \nu \dots , \quad \text{essendo } \nu = 0, 1, 2, \dots, \infty ,$$

e:  $2\bar{v}+1 \leq j!-1$  .

(23) - Si ricordi infatti che per un sistema di coordinate rettilinee ortogonali  $t, r, z$  l'espressione di  $\text{rot } \vec{B} = 0$  è data dalle (II-25). In particolare è:  $(\text{rot } \vec{B})_t = \partial B_r / \partial z - \partial B_z / \partial r = 0$ . A seguito della simmetria di traslazione lungo l'asse  $t$  segue poi che le equazioni  $(\text{rot } \vec{B})_r = 0$  e  $(\text{rot } \vec{B})_z = 0$  sono sempre soddisfatte. Infatti si ha:  $B_t \equiv 0$ , per cui:  $\partial B_t / \partial r = \partial B_t / \partial z = 0$  ed inoltre  $\partial B_r / \partial t = \partial B_z / \partial t = 0$ .

(24) - A conferma di questa osservazione si osservi che, dalla prima delle (II-57'), si ha :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} \right)_{\theta_s} = 1 A_1 \rho \cos 1 \cdot \frac{\pi}{21} (2s+1) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, 21) .$$

(25) - Ovviamente i segni di  $\mathcal{M}_0$  ed  $A_1$  dovranno essere scelti in modo tale che, in ogni intervallo  $(\theta_s^\alpha, \theta_{s+1}^\alpha)$  considerato per i valori di  $\theta$ , sia sempre  $\rho \geq 0$  reale.

(26) - Si riconosce subito che le iperboli direttrici (II-57<sup>m</sup>) presentano asintoti per  $\theta = \theta_s^\alpha$ . Infatti è :

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_s^\alpha} \rho = \left( \frac{M_0}{A_1} \right)^{1/2} \lim_{\theta \rightarrow \theta_s^\alpha} \operatorname{cosec} l\theta = +\infty.$$

Si riconosce poi che in ogni intervallo  $(\theta_s^\alpha, \theta_{s+1}^\alpha)$  la  $\rho(\theta)$  presenta un minimo per  $\theta = \theta_s^\sigma$ .

(27) - Se viceversa si assume che sia  $M(\rho, \theta) < 0$  per  $\theta_s^\alpha < \theta < \theta_{s+1}^\alpha$  quando  $s$  è un intero pari, è sufficiente, per ottenere la direzione orientata di  $\vec{B}(Q)$ , aggiungere una ulteriore rotazione oraria di  $\pi$  rispetto alla direzione trovata con la regola stabilita per l'ipotesi opposta. Si ha quindi in questo caso  $\psi = (1\theta + 3\pi/2)$ .

(28) - Ad esempio, la necessità di limitare l'estensione delle espansioni polari onde permettere l'installazione degli avvolgimenti di eccitazione nei magneti con nucleo ferromagnetico o la imperfetta realizzazione della legge teorica di distribuzione azimutale della densità di corrente (conseguente all'uso di vari gruppi costituiti da un numero discreto di conduttori connessi in serie) nei magneti multipolari senza nucleo permeabile, hanno sempre l'effetto di introdurre termini di multipolo di ordine più elevato di quello richiesto.

(29) - Si osservi che il considerare multipoli di ordini elevati non è puramente accademico. Per esempio, un buon magnete dipolare deve avere tutti i termini superiori al dipolo, fino al duodecapolo ( $l = 10$ ) incluso, nulli.

(30) - Confronta Parte I<sup>a</sup>, par. I-2.

(31) - Questa traiettoria risulterà curva o rettilinea in dipendenza delle simmetrie ulteriori che la distribuzione può presentare (Cfr. par. II-5).

(32) - Per le distribuzioni del tipo A è:  $h = h(t)$ ,  $n = n(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$ , ..., mentre per le distribuzioni del tipo B queste quantità non dipendono da  $t$  a causa della simmetria di rivoluzione.

(33) - Per ottenere questa espressione di  $B_z(t, r, 0)$  e la successiva è sufficiente conservare nelle (II-48<sup>m</sup>) e (II-55<sup>l</sup>) i termini aventi  $\nu = 0$  ( $z^{2\nu} = z^0 = 1$ ) e scartare tutti i termini corrispondenti a  $\nu \neq 0$ . Si può anche porre  $z = 0$  nelle espressioni dei termini  $(B_z)_{jl}$  della Tabella II.

(34) - Infatti, in una "distribuzione 2l-polare pura"  $B_z(t, r, 0)$  dipende da  $r^{l-1}$ , pertanto se si scrive  $i$  al posto di  $l-1$ , dovremo porre  $2(i+1)$  al posto di  $2l$ . Si ha poi, cfr. (II-63<sup>l</sup>):  $C_{i+1} = (p_0/q)K_i$ .

(35) - Si ha infatti :

$$(\theta_{1,2})_0 = \int_{s_1}^{s_2} c_0 \cdot ds = \frac{q}{p_0} B_z \cdot (s_2 - s_1).$$

In genere non esiste una proporzionalità rigorosa tra  $(\theta_{1,2})_0$  e  $q/p_0$  in quanto al variare di questo rapporto varia la traiettoria  $\tau$  descritta dal corpuscolo. Varia pertanto in una certa misura anche la lunghezza  $(s_2 - s_1)$  di traiettoria contenuta entro la distribuzione di campo.

(36) - Una distribuzione con queste caratteristiche non è realizzabile senza ricorrere ad opportune lamine ideali di corrente sul bordo della distribuzione. Senza l'uso di queste si possono ottenere solo distribuzioni che tendono ad annullarsi più o meno velocemente. Tuttavia l'introduzione di questa schematizzazione conduce ad una notevole semplificazione dei calcoli.

(37) - Ciò costituisce spesso una considerevole semplificazione nella realizzazione di un magnete. Per dimostrare poi che  $a = 1/2 R$  consideriamo, rispetto agli assi  $U(\xi, \eta)$  oltre alla parabola  $\mathcal{C}$  anche la circonferenza  $\mathcal{F}$  di raggio  $R$  e centro  $C(0, R)$ . La semiparte inferiore ( $0 \leq \eta \leq R$ ) di tale circonferenza è rappresentata dall'equazione :

$$(x) \quad \eta = R - \sqrt{R^2 - \xi^2}.$$

Le condizioni perchè  $\mathcal{F}$  sia osculatrice alla parabola  $\mathcal{C}$  in  $U(0, 0)$  si esprimono dicendo che entrambe le curve devono passare per  $U$ , inoltre le derivate  $d\eta/d\xi$  e  $d^2\eta/d\xi^2$  devono coincidere nello stesso punto. La prima condizione è soddisfatta, come si verifica immediatamente. Si ha poi, per la parabola  $\mathcal{C}$  :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2a\xi, \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 2a$$

e per la semicirconferenza (x) :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi}{R - \eta}, \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{R - \eta}.$$

Si riconosce subito che le derivate corrispondenti coincidono in  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  assumendo  $a = 1/2 R$ .

BIBLIOGRAFIA. -

- [1] - E. Weber, *Electromagnetic Fields* (Wiley, New York, 1950), vol. I, pag. 440.
- [2] - O.D. Kellog, *Foundations of Potential Theory* (Springer, Berlin, 1967), cap. V.
- [3] - M.W. Garrett, *J. Appl. Phys.* 22, 1091 (1951).
- [4] - J.K. Cobb and D. Horelick, *A New Precision Measurement System for Beam Transport Type Magnets*, SLAC-PUB-750 (1970).