COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-73/5
14 Febbraio 1973

G. A. Rottigni : CALCOLO DELLA SEZIONE D'URTO (γ, N) NEI NUCLEI AD ENERGIE INTERMEDIE. -

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Servizio Documentazione

LNF-73/5
14 Febbraio 1973

G.A. Rottigni[x]: CALCOLO DELLA SEZIONE D'URTO (γ,N) NEI NUCLEI AD ENERGIE INTERMEDIE.-

INTRODUZIONE.-

L'interazione fotonucleare ad energie superiori a diverse decine di MeV (cioè oltre la Risonanza Gigante) presenta aspetti oltremodo interessanti. Alle energie dette la lunghezza d'onda del fotone diventa confrontabile con le dimensioni nucleari ed il fotone prevalentemente interagisce direttamente con i singoli nucleoni o con coppie di essi. Poichè l'hamiltoniana di interazione è ben nota dalla elettrodinamica quantistica, è possibile attraverso il processo suddetto ottenere informazioni sulla dinamica dei nucleoni nel nucleo, sulla loro distribuzione di momento, su eventuali effetti di correlazione tra nucleoni etc. Da questo punto di vista il fotoeffetto presenta un interesse competitivo e può dare informazioni analoghe alle misure di scattering quasi elastico di protoni o elettroni (esperienze (p,2p)[1,2,3] e (e,e'p)[4,5,6]. Il processo inoltre, a causa della particolare cinematica che involve, fornisce anche altre informazioni molto significative. Come è noto infatti il fotone trasferisce ad un nucleone energia molto elevata ma relativamente basso impulso e quindi può interagire necessariamente solo con nucleoni di alto impulso iniziale. Il fotoeffetto alle energie dette è quindi un meccanismo molto sensibile per lo studio delle componenti di alto impulso nella distribuzione degli impulsi di singolo nucleone nei nuclei, tecnicamente meno facilmente studiabili mediante le esperienze (p,2p) e (e,e'p).

(x) - Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Genova.

Nonostante l'indubbio interesse che involve, il fotoeffetto oltre la Risonanza Gigante è stato finora scarsamente studiato sia dal punto di vista teorico che sperimentale.

Per quanto riguarda la situazione sperimentale, recenti esperimenti su questo processo in alcuni nuclei della shell p condotti soprattutto presso l'elettrosincrotrone di Torino(7, 8, 9, 10) hanno permesso di evidenziare in modo chiaro il fotoeffetto diretto, anche se la precisione della misura della sezione d'urto non è molto buona a causa dell'uso di fasci di fotoni di Bremsstrahlung. La previsione di poter avere a disposizione in un prossimo futuro misure sistematiche della sezione d'urto con buona precisione mediante l'utilizzo di fasci di fotoni quasi monocromatici(11) fa comprendere l'interesse che il problema sia affrontato nel modo più rigoroso anche sul piano teorico.

Attualmente manca una soddisfacente teoria.... E' da notare che un calcolo rigoroso di questo tipo è in linea di principio molto difficile; basti pensare infatti che impulsi superiori a 250-300 MeV/c hanno origine nel nucleo da interazioni dei nucleoni a distanze dell'ordine del "core repulsivo" dove la conoscenza delle forze nucleari è molto scarsa. Calcoli in questo senso sono stati affrontati da alcuni autori(12, 13) ma sussistono forti perplessità sui risultati ottenuti ad esempio per quanto riguarda gli effetti che possono aversi nel calcolo della sezione d'urto se viene violata l'ortogonalità tra stati legati e stati del continuo, o sul modo di introdurre la correlazione tra nucleoni. Inoltre quando il problema delle correlazioni viene tralasciato, il calcolo in generale viene effettuato considerando funzioni d'onda di oscillatore armonico per quanto riguarda lo stato iniziale del nucleone e l'onda piana per il nucleone uscente(14). Supponendo anche di superare i dubbi sulla scelta del potenziale non realistico, non si può non tener presente che l'uso dell'onda piana fa perdere le informazioni sull'interazione che il nucleone ha con il resto del nucleo.

Un calcolo più rigoroso sulla sezione d'urto di fotoemissione di nucleone singolo, in alcuni nuclei leggeri fino a 45 MeV di fotone, è stato effettuato da M.G. Mustafa e F.B. Malik(15); l'approssimazione introdotta dagli autori sulle funzioni di Bessel contenute negli operatori di transizione per semplificare l'espressione della sezione d'urto, valida però solo per grandi lunghezze d'onda del fotone, non permette di estendere i loro calcoli fino ad energie del fotone oltre il centinaio di MeV.

Scopo del lavoro riportato in questo report è stato quello di calcolare l'espressione della sezione d'urto nella sua forma più generale, non legata a particolari funzioni d'onda per lo stato del nucleone, non in approssimazione di grande lunghezza d'onda del fotone e quindi valida fino ad energie del fotone comparabili con la soglia mesonica e tenendo conto di tutti i multipoli nella interazione elettromagnetica.

CALCOLO DELLA ESPRESSIONE COMPLETA DELLA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE. -

La densità di hamiltoniana di interazione per una particella che interagisce con il campo elettromagnetico è dedotta in meccanica quantistica nella forma:

(1) $$H_{int} = \sum_i \left(-\frac{e_i}{mc} \vec{P}_i \cdot \vec{A} + \frac{e_i}{2mc^2} \vec{A}^{\,2}\right)$$

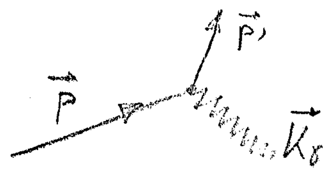
dove $\vec{P}_i$ è l'impulso dell'iesimo nucleone di carica e_i e massa m, $\vec{A}$ è il potenziale vettore del fotone.

Consideriamo l'espressione di $\vec{A}$ in termini di operatori di creazione e distruzione

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{K_\gamma,\lambda} \frac{\vec{\varepsilon}_{K_\gamma}(\lambda)}{\sqrt{2K_\gamma}} (a_K + a^+_{-K})\, e^{i\vec{K}_\gamma \cdot \vec{r}}$$

$\vec{\varepsilon}$ vettore di polarizzazione, λ indice di polarizzazione.

Appare evidente che il primo addendo della (1) essendo lineare negli operatori di creazione e distruzione consente solo processi come indicato in figura



nei quali un nucleone può cambiare il suo impulso $\vec{P}$ emettendo o assorbendo un fotone reale e questo costituisce il caso della fotoemissione diretta. Il secondo addendo della (1) contenendo $\vec{A}^{\,2}$ implica la possibile presenza di $2a^+$ cioè creazione di due fotoni reali, 2a cioè distruzione di due fotoni reali oppure a a^+ creazione di un fotone e distruzione di un altro e viceversa (scattering di fotoni). Questi processi però non interessano evidentemente le interazioni dirette γ -N che sono l'argomento del nostro studio.

Pertanto l'hamiltoniana di interazione diventa semplicemente:

$$H' = -\frac{1}{c} \int \vec{J} \cdot \vec{A}\, d\vec{r}$$

dove

(2) $$\vec{J} = \sum_i \frac{e_i}{mc} \vec{P}_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$\vec{J}$, in effetti, è funzione di r e t; la dipendenza temporale dell'elemento di matrice che lo coinvolge è quella usuale della meccanica quantistica cioè:

$$(3) \qquad \langle f|\vec{J}(\vec{r},t)|i\rangle = \langle f|\vec{J}(\vec{r})|i\rangle \, e^{i\frac{E_f - E_i}{\hbar} t}$$

$\vec{J}(\vec{r},t)$ si trasforma come un operatore vettoriale per rotazioni tridimensionali e $|i\rangle$ ed $|f\rangle$ sono stati di parità e di momento angolare definito.

Nella (3)

$$|E_i - E_f| = \hbar K_\gamma c = \hbar\omega$$

in questa relazione è contenuta l'ipotesi che tutta l'energia del γ venga assorbita solo dal nucleone e il resto del nucleo passi dallo stato iniziale a quello finale senza prendere parte in alcun modo alla reazione.

Assumiamo che $\vec{J}(\vec{r},t)$ soddisfi l'equazione di continuità:

$$(4) \quad \nabla\cdot\langle f|\vec{J}(\vec{r},t)|i\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}\langle f|\varrho(\vec{r},t)|i\rangle = \frac{i(E_i - E_f)}{\hbar}\langle f|\varrho(\vec{r})|i\rangle \, e^{i\frac{E_f - E_i}{\hbar} t}$$

dove $\varrho(\vec{r},t)$ è l'operatore densità di carica con dipendenza dal tempo analoga alla (3).

Questa ipotesi equivale a considerare nel termine $\vec{J}(\vec{r},t)$ solo il contributo di A nucleoni indipendenti contenuti nel nucleo. In effetti mentre la densità di carica nucleare coinvolge soltanto i nucleoni, la densità di corrente no: l'interazione di scambio può cambiare lo stato di carica della coppia protone - neutrone quindi l'equazione di continuità dovrebbe tenere conto anche del flusso di corrente portato dai mesoni. Deduzioni dovute a Siegert, confermate sperimentalmente, permettono di osservare che per radiazioni di multipolo elettrico le correnti mesoniche non danno contributo sensibile nella valutazione della sezione d'urto, mentre per radiazioni di multipolo magnetico bisognerebbe in qualche modo tenerne conto. Questi contributi possono essere valutati solo sulla base di informazioni e assunzioni piuttosto incerte sul ruolo dei mesoni nel nucleo e vengono quindi comunemente trascurate come nel nostro caso.

La sezione d'urto differenziale di fotoemissione diretta, viene espressa, in base alle considerazioni fatte sull'hamiltoniana di interazione nella forma seguente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{K}_\gamma,\vec{K}) = \frac{2\pi}{h}\,\frac{V}{c}\,\frac{2\pi c\hbar}{VK_\gamma}\,\frac{K^2}{8\pi^3\hbar v}\,\frac{1}{2I_A+1}\times \tag{5}$$

$$\times \left|\langle \psi_f \left| \frac{1}{c}\int \vec{J}'_{(\vec{r},t)}\,\vec{\chi}_n\, e^{i\vec{K}_\gamma\cdot\vec{r}}\, e^{-i\omega t}\, d\vec{r}\,\right|\psi_i\rangle\right|^2$$

dove:

- V è il volume di normalizzazione
- $\vec{K}_\gamma$ vettore d'onda del fotone
- $\vec{K}$ vettore d'onda del fotoprotone

ψ_i e ψ_f sono le funzioni d'onda dello stato iniziale e finale del nucleone interessato alla transizione e sono espresse esplicitamente come:

$$\psi_i = \sum_{\gamma\varrho} (L_i\,\tfrac{1}{2}\,\gamma\varrho|I\text{-}M)\, i^L\, Y_{L_i\gamma}(\hat{r})\,\frac{R(E_{B,}r)}{r}\, S_{1/2\,\sigma} \tag{6}$$

$$\psi_f = \frac{4\pi}{K}\sum_{\lambda\varrho}(\ell\,\tfrac{1}{2}\,\lambda\mu|jm)\, Y^x_{\ell\lambda}(\hat{K})\, S_{1/2\,\varepsilon}\ x \tag{7}$$

$$x\left[\sum_{\lambda'\mu'}(\ell\,\tfrac{1}{2}\,\lambda'\mu'|jm)\, i^{\ell}\, Y_{\ell\lambda}(\hat{r})\, R(E,r)\, S_{1/2\,\varepsilon'}\right]$$

Dove

- $R(E_B r)$ è la funzione d'onda radiale
- $S_{1/2\varepsilon}$ e $S_{1/2\sigma}$ sono le funzioni di spin
- $L_i;\ \ell$ sono i momenti angolari orbitali del nucleone nello stato iniziale e finale
- I, j sono i momenti angolari totali del nucleone nello stato iniziale e finale.

Il potenziale vettore $\vec{A}$ è stato espresso in termini di $\vec{\chi}_M$ che costituisce la nota base sferica delle polarizzazioni.

Il termine $\vec{\chi}_M e^{i\vec{K}_\gamma\vec{r}}$ può essere sviluppato in multipoli nel modo seguente:

$$\vec{\chi}_M\, e^{i\vec{K}_\gamma\cdot\vec{r}} = \nu\sqrt{2\pi}\sum_L \sqrt{2L+1}\, i^L\left[\vec{A}_{LM}(\vec{r},m) + i\nu\vec{A}_{LM}(\vec{r},\zeta)\right] \tag{8}$$

dove

$$\vec{A}_{LM}(\vec{r}, m) = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} \vec{L}\, J_\ell\,(K_\gamma r)\, Y_{LM}(\theta\, \varphi)$$

$$\vec{A}_{LM}(\vec{r}, \zeta) = \frac{-i}{K_\gamma \sqrt{L(L+1)}}\, \nabla \Lambda\, (\vec{L}\, J\,(K_\gamma\, r)\, Y_{LM}(\theta\, \varphi)$$

e

$$\vec{L} = -i\,\vec{r} \Lambda \nabla$$

Questo tipo di sviluppo per il campo elettromagnetico è stato scelto in quanto permette di separare i termini di multipolarità elettrica ζ da quelli di multipolarità magnetica m. Partendo da questo sviluppo la (5) può essere scritta nella forma più appropriata:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{K}_\gamma, \vec{K}) = \frac{K^2}{2\pi}\, \frac{1}{\hbar v}\, \frac{1}{2I_A+1}\, \frac{2\pi}{K_\gamma} \sum_{LL'\delta\delta'} \sqrt{2L+1}\sqrt{2L'+1}\, i^L\, i^{L'}\, \frac{e}{c}\, I_L(\vec{r}, \delta)\, I^{*}_{L'}(\vec{r}, \delta')$$

dove δ sta per ζ e m.

(9) $$I_L(\vec{r}, \zeta) = \frac{i\nu}{ec} \int \langle \psi_f | \vec{J}'(\vec{r}) |\, \psi_i \rangle\, \vec{A}_{LM}(\vec{r}, \zeta)\, d\vec{r}$$

e

$$I_L(\vec{r}, m) = \frac{1}{ec} \int \langle \psi_f | \vec{J}'(\vec{r}) | \psi_i \rangle\, \vec{A}_{LM}(\vec{r}, m)\, d\vec{r}$$

Esaminiamo dapprima i termini di multipolarità elettrica sottointendendo il fatto che $\vec{J}'(\vec{r})$ opera tra $\langle \psi_f |$ e $| \psi_i \rangle$:

(10) $$I_L(\vec{r}, \zeta) = \frac{1}{ec\, k_\gamma \sqrt{L(L+1)}} \int \vec{J}'(\vec{r})\, \nabla \Lambda\, \vec{L}\, J_\ell\, (K_\gamma r)\, Y_{LM}(\theta\, \varphi)\, d\vec{r}$$

Esprimiamo l'operatore densità di corrente come somma di due termini

$$\vec{J}'(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{\sigma})$$

dove

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sum_i e_i \frac{\vec{P}_i}{m_i}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

è l'operatore relativo alla densità di corrente dovuta allo spostamento di cariche e

$$\vec{J}(\vec{\sigma}) = c\nabla\Lambda\, \vec{m}(\vec{r})$$

con

$$\vec{m}(\vec{r}) = \sum_i \mu_i\, \sigma_i\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) = \frac{1}{2c} \cdot \sum_i g_s\, \mu_B\, \sigma_i\, \delta(r - r_i)$$

è l'operatore relativo alla densità di corrente di magnetizzazione dovuta al fatto che i nucleoni possiedono un momento magnetico.

Sostituendo queste espressioni nella (10) si ottiene

(11) $$I_L(\vec{r},\zeta) = I_L(\vec{r},\zeta)_{\vec{J}(\vec{r})} + I_L(\vec{r},\zeta)_{\vec{J}(\vec{\sigma})}$$

elaborando singolarmente i due termini della (11) si perviene a:

(12) $$\begin{aligned} I_L(\vec{r},\zeta)_{\vec{J}(\vec{r})} &= \frac{1}{ecK_\gamma}\sqrt{\frac{L+1}{L}} \int (-i)K_\gamma\, c\, \varrho(\vec{r})\, J_\ell(Kr)\, Y_{LM}(\theta\varphi)\, d\vec{r} = \\ &= -i\sqrt{\frac{L+1}{L}}\left[J_L(Kr)\, Y_{LM}(\theta\varphi)\right] \end{aligned}$$

e

(13) $$\begin{aligned} I_L(\vec{r},\zeta)_{\vec{J}(\vec{\sigma})} &= \frac{-i}{K_\gamma\sqrt{L(L+1)}}\ \frac{1}{e}\,\frac{1}{2}\, g_s\, \mu_B\, i\nabla\Lambda\Big[-\nabla\Big(\frac{\partial}{\partial r}(r\, J_L(Kr))\, Y_{LM}(\theta\varphi)\Big) + \\ &+ K_\gamma^2\, \vec{r}\, J_L(Kr)\, Y_{LM}(\theta\varphi)\Big] \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

Il primo termine della somma nella (13) è nullo, il secondo termine si può semplificare ulteriormente osservando che:

$$\frac{\vec{r}}{r} Y_{LM} = \Big(-\frac{L+1}{2L+1}\Big)^{1/2} \vec{Y}_M^{L,L+1}(\theta,\varphi) + \Big(\frac{L}{2L+1}\Big)^{1/2} \vec{Y}_M^{L,L-1}(\theta,\varphi)$$

Con un facile calcolo si perviene a

(14) $$I_L(\vec{r},\zeta)_{\vec{J}(\vec{\sigma})} = \frac{iK_\gamma}{e}\,\frac{1}{2}\, g_s\, \mu_B\, J_L(Kr)\, \vec{Y}_M^{LL}(\theta\varphi) \cdot \vec{\sigma}$$

Osservando che $(\vec{\chi}_\varepsilon \cdot \vec{\sigma}) = \sigma_\varepsilon$ la (14) può essere ulteriormente semplificata ottenendo:

$$I_{LM}(\vec{r},\zeta)_{\vec{J}(\vec{\sigma})} = \frac{iK_\gamma}{e}\,\frac{1}{2}\,g_s\,\mu_B\,J_L(Kr)\sum_{\varrho\varepsilon}(L1\varrho\varepsilon|LM)\,Y_{L\varrho}(\theta\varphi)\,(\vec{\chi}_\varepsilon\cdot\vec{\sigma}) =$$

(15)

$$= iK_\gamma\,\frac{1}{e}\,\frac{1}{2}\,g_s\,\mu_B\sqrt{\frac{L+1}{L}}\left(\sqrt{\frac{L}{L+1}}\,J_L(Kr)\left[\vec{Y}_L\,\Lambda\,\vec{\sigma}\right]^L_M\right.$$

I due radicali, il cui prodotto vale I, sono stati introdotti per convenienza in vista dei calcoli successivi.

Passiamo ora a considerare i termini di multipolarità magnetica $I_L(\vec{r}, m)$ osservando che:

$$\int \nabla(r^L Y_{LM}(\theta\varphi))\cdot\left[\vec{r}\,\Lambda\,\nabla\,\Lambda\;\vec{\sigma}_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\right]d\vec{r} = -\int \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\left[(\vec{\sigma}_i\cdot\vec{r})\,\nabla^2(r^L Y_{LM}(\theta\varphi)) - \right.$$

$$\left. - (\vec{\sigma}_i\,\nabla\, r^L Y_{LM}(\theta\varphi)) - \vec{\sigma}_i\,\nabla(\vec{r}\cdot\nabla(r^L Y_{LM}(\theta\varphi))\right]$$

e che

$$\vec{r}\cdot\nabla(r^L\,Y_{LM}(\theta\varphi)) = L\,r^L\,Y_{LM}(\theta\varphi)$$

possiamo scrivere $I_L(\vec{r}, m)$ nella forma:

(16) $$I_L(\vec{r},m) = \frac{i^{-1}}{\sqrt{L(L+1)}}\,\frac{1}{e}\left[\nabla(J_L(Kr)\,Y_{LM}(\theta\varphi))\,(2\,\mu_B\vec{L} + \frac{1}{2}\,g_s\,\mu_B\,\vec{\sigma}\,(L+1))\right]$$

Tenuto conto della (6, 7, 12, 15, 16) e applicando il teorema di Wigner-Eckart la sezione d'urto differenziale (9) assume la forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{K}_\gamma,\vec{K}) = \frac{K^2}{\hbar v}\,\frac{1}{2I_A+1}\sum_{\substack{LL'\\ \ell\ell' jj'}}\left[\frac{(L+1)(L'+1)}{LL'}\right]^{1/2}\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{-1}\sqrt{(2L+1)(2L'+1)}$$

(17)

$$\frac{4\pi}{K^2}\sum_{\substack{\lambda\mu mM\\ \lambda'\mu'm'M'}}(\ell\,\tfrac{1}{2}\,\lambda\mu|jm)(IjM''m|LM)\,Y^{*}_{\ell\lambda}(\hat{K})\,(\ell'\,\tfrac{1}{2}\,\lambda'\mu'|j'm')(Ij'M''m'|L'M')$$

$$Y_{\ell' \lambda'}(\hat{K})\Big[-i^{L} e\sqrt{4\pi}\, i\, i(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| J_L(Kr)\vec{Y}_L(\theta\varphi)\| n_i L_i \tfrac{1}{2} I) -$$

$$- i^{L} K_\gamma \frac{1}{2} g_s \mu_B \sqrt{4\pi}\,(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| \sqrt{\frac{L}{L+1}}\, J_L(Kr)\big[\vec{Y}_L \Lambda \vec{\sigma}\big]^{L} \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I) + i^{L-1}\sqrt{4\pi}$$

$$(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| \nabla (J_L(Kr) Y_{LM}(\theta\varphi)\Big[\frac{1}{L+1} 2\mu_B \vec{L} + \frac{1}{2} g_s \mu_B \vec{\sigma}\Big] \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I)\Big]$$

(17)

$$\Big[-i^{L'} e \sqrt{4\pi}\, i\, i(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| J_{L'}(Kr)\vec{Y}_{L'}(\theta\varphi)\| n_i L_i \tfrac{1}{2} I) - i^{L'} K_\gamma \frac{1}{2} g_s \mu_B \sqrt{4\pi}$$

$$(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| \sqrt{\frac{L'}{L'+1}}\, J_{L'}(Kr)\big[\vec{Y}_{L'} \Lambda \vec{\sigma}\big]^{L'} \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I) + i^{L'-1}\sqrt{4\pi}$$

$$(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| \nabla (J_{L'}(Kr) Y_{L'M}(\theta\varphi))\Big[\frac{1}{L'+1} 2\mu_B \vec{L} + \frac{1}{2} g_s \mu_B \vec{\sigma}\Big] \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I)\Big]^{x}$$

L'ultimo elemento di matrice ridotta della (17) può essere ulteriormente semplificato tramite la relazione:

$$\nabla (J_L(Kr) Y_{LM}(\theta\varphi) \cdot \vec{\sigma} = \left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} \left(\frac{L+1}{r} J_L(Kr) + J'_L(Kr)\right)\big[\vec{Y}_{L-1} \Lambda \vec{\sigma}\big]^{L}_{M}$$

si ottiene infatti:

$$i^{L-1}\sqrt{4\pi}\,(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| \nabla (J_L(Kr) Y_{LM}(\theta\varphi) \cdot \Big[\frac{1}{L+1} 2\mu_B \vec{L} + \frac{1}{2} g_s \mu_B \vec{\sigma}\Big] \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I) =$$

(18) $$= i^{L-1}\sqrt{4\pi}\,(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| \left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} \frac{2\mu_B}{L+1}\left(\frac{L+1}{r} J_L(Kr) + J'_L(Kr)\right)\big[\vec{Y}_{L-1} \Lambda \vec{L}\big]^{L} \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I)$$

$$+ i^{L-1}\sqrt{4\pi}\,(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| \left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} g_s \mu_B \left(\frac{L+1}{r} J_L(Kr) + J'_L(Kr)\right)\big[\vec{Y}_{L-1} \Lambda \vec{\sigma}\big]^{L} \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I)$$

Procediamo ora alla valutazione della somma sulle proiezioni dei momenti angolari della (17):

$$\sum_{\substack{\lambda\mu m M\\ \lambda'\mu' m' M'}} (\ell \tfrac{1}{2} \lambda \mu | jm)(IjM''m|LM)\, Y^{x}_{\ell\lambda}(\hat{K})\,(\ell' \tfrac{1}{2} \lambda' \mu' | j'm') \, x$$

$$x (IjM''m'|L'M')\, Y_{\ell'\lambda'}(\hat{K}) = \sqrt{(2j+1)(2j'+1)(2L+1)(2L'+1)}\,(-1)^{1-\ell-\ell'+j+j'} x$$

$$x \sum_{M''\mu} \begin{pmatrix} \ell & \frac{1}{2} & j \\ (M-M''-\mu) & \mu & (-M+M'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & \frac{1}{2} & j' \\ (M'-M''-\mu) & \mu & (-M'+M'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & j & L \\ M'' & (M-M'') & -M \end{pmatrix} x$$

$$x \begin{pmatrix} I & j' & L' \\ M'' & (M'-M'') & -M' \end{pmatrix} (-1)^{-\mu+M''} \sum_{\Gamma (M'-M)} \left[\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)(2\Gamma+1)}{4\pi}\right]^{1/2} x$$

(19)
$$x \begin{pmatrix} \ell & \ell' & \Gamma \\ (-M+M''+\mu) & (M'-M''-\mu) & (M-M') \end{pmatrix} Y^{x}_{\Gamma (M'-M)} \begin{pmatrix} \ell & l' & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[(2j+1)(2j'+1)(2L+1)(2L'+1)\right]^{1/2} (-1)^{-I+\frac{1}{2}} \sum_{\Gamma} (jj' \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} | \Gamma 0) \; x$$

$$x (LL'-11|\Gamma 0)\, W(LL'jj';\Gamma I)\, \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{\ell+\ell'+\Gamma}\right] P_{\Gamma}(\cos\theta)$$

$P_{\Gamma}(\cos\theta)$ è il polinomio di Legendre.

Riscriviamo ora la (17) sostituendovi le relazioni (18) e (19).

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{K}_\gamma, \vec{K}) = \frac{1}{\hbar v (2I_A+1)} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{-1} \sum_{\substack{\ell\ell' jj' \\ LL'\Gamma}} \left[\frac{(L+1)(L'+1)}{LL'}\right]^{1/2} (2L+1)(2L'+1)\, x$$

(20)
$$x \left[(2j+1)(2j'+1)\right]^{1/2} (-1)^{-I+\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{\ell+\ell'+\Gamma}\right] (jj' \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} | \Gamma 0)(LL'-11|\Gamma 0)\, x$$

$$x\, W(LL'jj';\Gamma I)\, P_{\Gamma}(\cos\theta) \left[i^{L} e \sqrt{4\pi}\, (n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| J_L(Kr) \vec{Y}_L(\theta \varphi) \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I) -\right.$$

$$-i^{L}K\gamma\frac{1}{2}g_s\mu_B\sqrt{4\pi}\,(n_f\ell\frac{1}{2}j\,\|\sqrt{\frac{L}{L+1}}\,J_L(Kr)\left[\vec{Y}_L\Lambda\vec{\sigma}\right]^L\|\,n_iL_i\frac{1}{2}I)+i^{L-1}\sqrt{4\pi}$$

$$(n_f\ell\frac{1}{2}j\,\|\sqrt{\frac{L}{2L+1}}\,\frac{2\mu_B}{L+1}(\frac{L+1}{r}J_L(Kr)+J_L'(Kr)\left[\vec{Y}_{L-1}\Lambda\vec{L}\right]^L\|\,n_iL_i\frac{1}{2}I)+i^{L-1}$$

$$\sqrt{4\pi}(n_f\ell\frac{1}{2}j\,\|\sqrt{\frac{L}{2L+1}}\,g_s\mu_B(\frac{L+1}{r}J_L(Kr)+J_L'(Kr)\left[\vec{Y}_{L-1}\Lambda\vec{\sigma}\right]^L\|\,n_iL_i\frac{1}{2}I)\Big]$$

(20)

$$\Big[i^{L'}e\sqrt{4\pi}(n_f\ell\frac{1}{2}j\,\|\,J_{L'}(Kr)\,\vec{Y}_{L'}(\theta\,\varphi)\|\,n_iL_i\frac{1}{2}I)-i^{L'}K\gamma\frac{1}{2}g_s\mu_B\sqrt{4\pi}$$

$$(n_f\ell\frac{1}{2}j\,\|\sqrt{\frac{L'}{L'+1}}\,J_{L'}(Kr)\left[\vec{Y}_{L'}\Lambda\vec{\sigma}\right]^{L'}\|\,n_iL_i\frac{1}{2}I)+i^{L'-1}\sqrt{4\pi}$$

$$(n_f\ell\frac{1}{2}j\,\|\sqrt{\frac{L'}{2L'+1}}\,\frac{2\mu_B}{L'+1}(\frac{L'+1}{r}J_{L'}(Kr)+J_L'(Kr))\left[\vec{Y}_{L'-1}\Lambda\vec{L}\right]^{L'}\|\,n_iL_i\frac{1}{2}I)+i^{L'-1}$$

$$\sqrt{4\pi}(n_f\ell\frac{1}{2}j\,\|\sqrt{\frac{L'}{2L'+1}}\,g_s\mu_B(\frac{L'+1}{r}J_{L'}(Kr)+J_L'(Kr))\left[\vec{Y}_{L-1}\Lambda\vec{\sigma}\right]^{L'}\|\,n_iL_i\frac{1}{2}I)\Big]^{x}$$

Impiegando la teoria degli insiemi tensoriali irriducibili gli elementi di matrice ridotta che compaiono nella (20) possono essere risolti e si ottiene rispettivamente:

$$H_L'(\zeta)=i^{L}e\sqrt{4\pi}(n_f\ell\frac{1}{2}j\,\|\,J_L(Kr)\,\vec{Y}_L(\theta\,\varphi)\|\,n_iL_i\frac{1}{2}I)=$$

(21)

$$=-i^{L}e\,(-1)^{I+\frac{1}{2}+L}\left[(2j+1)(2I+1)\right]^{1/2}(Ij\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|L0)\,R_L\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{L_i+\ell+L}\right]$$

(22) $$H_L''(\zeta)=(-1)\,i^{L}K\gamma\frac{1}{2}g_s\mu_B\sqrt{4\pi}\,(n_f\ell\frac{1}{2}j\,\|\sqrt{\frac{L}{L+1}}\,J_L(Kr)\left[\vec{Y}_L\Lambda\vec{\sigma}\right]^L\|\,n_iL_i\frac{1}{2}I)=$$

$$= i^L K_\gamma \frac{1}{2} g_s \mu_B R_L (-1)^{I+\frac{1}{2}} \left[(2j+1)(2I+1)\right]^{1/2} \times$$

(22)

$$\times (Ij \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} | L0) \frac{K_1 - K_2}{\left[L(L+1)\right]^{1/2}} \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{\ell+L_i+L}\right]$$

dove:

$$K_1 = (2I+1)(L_i - I) \qquad K_2 = (2j+1)(\ell - j)$$

$$H'_L(m) = i^{L-1}\sqrt{4\pi}\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} \frac{2\mu_B}{L+1}(n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| (\frac{L+1}{r} J_L(Kr) + J'_L(Kr)) \times$$

$$\times \left[\vec{Y}_{L-1} \Lambda \vec{L}\right]^L \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I) = i^{L-1}\, 2\mu_B R'_L (-1)^{I+\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{\ell+L_i+L-1}\right] \times$$

$$\times \left[L_i(L_i+1)(2L_i+1)\right]^{1/2} \frac{1}{2L+1}\left[(2j+1)(2I+1)\right]^{1/2} (L_i \ell 1 0 | L1) \times$$

(23)

$$\times W(IL_i j \ell ; \tfrac{1}{2} L) \left[\frac{L(2\ell+1)}{L+1}\right]^{1/2}$$

$$H''_L(m) = i^{L-1}\sqrt{4\pi}\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2} \frac{1}{2} g_s \mu_B (n_f \ell \tfrac{1}{2} j \| \frac{L+1}{r} J_L(Kr) + J'_L(Kr) \quad \times$$

$$\times \left[\vec{Y}_{L-1} \Lambda \vec{\sigma}\right] \| n_i L_i \tfrac{1}{2} I) = i^{L-1} \frac{1}{2} g_s \mu_B R'_L (-1)^{I+\frac{1}{2}} \left[(2j+1)(2I+1)\right]^{1/2} \times$$

$$\times \frac{\left[K_1 - K_2 - L\right]}{2L+1} (Ij \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} | L0)$$

In queste espressioni:

$$R_L = \int_0^\infty R^x_{n_f \ell}(r) J_L(Kr) R_{n_i L_i}(r) dr, \qquad R'_L = \int_0^\infty R^x_{n_f \ell}\left(\frac{L+1}{r} J_L(Kr) + J'_L(Kr)\right) R_{n_i L_i} dr$$

Possiamo ora scrivere la (20) in forma più compatta:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{K}_\gamma,\vec{K}) = \frac{1}{\hbar v(2I_A+1)}\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{-1} \sum_{\substack{\ell\ell' jj' \\ LL'M\delta}} \left[\frac{(L+1)(L'+1)}{LL'}\right]^{1/2} (2L+1)(2L'+1)$$

$$\left[(2j+1)(2j'+1)\right]^{1/2} (-1)^{-I+\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{\ell+\ell'+\Gamma}\right] (jj'\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}|\Gamma 0)(LL'-11|\Gamma 0) \tag{24}$$

$$W(LL'jj';\Gamma I)\, P_\Gamma(\cos\theta)\, H_L(\delta)\, H^{*}_{L'}(\delta')$$

dove $H_L(\delta) = H'_L(\delta) + H''_L(\delta)$ e δ sta per ζ o m.

CONCLUSIONE. -

Per passare al calcolo numerico della sezione d'urto nei casi di interesse, occorrerebbe a questo punto scegliere le funzioni d'onda più appropriate. E' chiaro che le funzioni d'onda da usare devono rispondere a due requisiti:

- Devono essere le soluzioni dell'equazione di Schrodinger con un potenziale realistico quale ad esempio quello di Saxon-Wood.
- La loro validità deve risultare anche dal confronto con dati sperimentali di altri processi nucleari che le involvono, ad esempio lo scattering di elettroni.

La risoluzione di questo problema, tutt'altro che banale, è stata già affrontata parallelamente al lavoro esposto in questo report ed i primi risultati saranno oggetto di pubblicazione tra breve[16].

BIBLIOGRAFIA. -

(1) - M. Riou, Rev. Mod. Phys. 37, 375 (1965).
(2) - G. Jacob and Th. A. Maris, Rev. Mod. Phys. 38, 121 (1966).
(3) - C. Ruhla, Summer School Varenna (1967).
(4) - U. Amaldi Jr., Suppl. Nuovo Cimento 3, 1225 (1967).
(5) - G. Cortellessa, Suppl. Nuovo Cimento 3, 820 (1965).
(6) - V.V. Balashov, N.M. Kabachnik and V.I. Markov, Nuclear Phys. A129, 369 (1969).
(7) - G. Manuzio, G. Ricco, M. Sanzone and L. Ferrero, Nuclear Phys. A133, 225 (1969).
(8) - M. Sanzone, G. Ricco, S. Costa and L. Ferrero, Nuclear Phys. A153, 401 (1970).
(9) - S. Costa, L. Ferrero, L. Pasqualini and M. Sanzone, Lett. Nuovo Cimento 1, 448 (1971).
(10) - E. Mancini, G. Ricco, M. Sanzone, S. Costa and L. Ferrero, In corso di pubblicazione.
(11) - G.P. Capitani, E. De Sanctis, S. Faini, C. Guaraldo, R. Malvano, G. Ricco, M. Sanzone and R. Scrimaglio, Frascati Report LNF-72/99 (1972).
(12) - W. Weise and M.G. Huber, Nuclear Phys. A162, 330 (1971).
(13) - G.N. Shklyarevskii, Soviet Phys., JETP 14, 170 e 324 (1962).
(14) - G.M. Shklyarevskii, Soviet Phys. JETP 36, 1057 (1959).
(15) - M.G. Mustafa and F.B. Malik, Phys. Review 1, 753 (1970); 2 2068 (1970).
(16) - S. Gamba, G. Ricco and G.A. Rottigni, In corso di pubblicazione.