

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-72/83

L. E. Casano, F. Moscati e G. Sacerdoti : CALCOLO DEL CAMPO  
MAGNETICO PRODOTTO DA UN MAGNETE PERMANENTE NEL  
CASO DI GEOMETRIA PIANA E CILINDRICA

Estratto da : Alta Frequenza 41, 512 (1972)

# CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UN MAGNETE PERMANENTE NEL CASO DI GEOMETRIA PIANA E CILINDRICA

L. E. CASANO - F. MOSCATI - G. SACERDOTI (\*)

*Viene esposto un nuovo metodo per calcolare il potenziale magnetico prodotto da magneti permanenti con simmetria piana e cilindrica. Lo spazio è diviso da un reticolo ortogonale di  $i$  righe e  $j$  colonne. Il potenziale nei vertici di ciascuna colonna è considerato come un vettore di  $i$  componenti. Sono ricavate le relazioni tra questi vettori. Usando queste relazioni è possibile scrivere le equazioni per calcolare il potenziale in ciascun vertice del reticolo in funzione dei potenziali al contorno dello spazio considerato. Il campo nello spazio del magnete permanente viene calcolato con un nuovo metodo iterativo.*

## I. - INTRODUZIONE.

Per il dimensionamento di una sospensione magnetica di un corpo ad asse di simmetria cilindrica si è presentata la necessità di calcolare la distribuzione di campo magnetico tra un magnete permanente e un nucleo di ferro non saturato. Un tale calcolo non è né facile né agevole anche se si introducono semplificazioni.

Inoltre a calcoli finiti, rimangono le incertezze che seguono ad una schematizzazione troppo semplice del comportamento del materiale magnetico, nonché al fatto che il reticolo considerato per il calcolo del potenziale magnetico è, per economia di calcolo, necessariamente a largo passo.

Ugualmente però, data l'originalità del procedimento suggerito dal prof. Sacerdoti, abbiamo creduto opportuno presentare i procedimenti e i risultati ottenuti.

Il contributo originale degli autori appare evidente se si confronta il metodo proposto con i normali metodi di rilassamento e di iterazione seguiti per il calcolo del potenziale di tipo laplaciano.

Nel metodo di rilassamento si parte da una configurazione iniziale del potenziale o dei residui, e ridistribuendo i residui tra i vari nodi, o gruppi di nodi, secondo vari criteri si giunge, dopo un elevato numero di iterazioni (anche parecchie decine), ed approssimare il risultato [1 ÷ 4]. Il metodo di iterazione, a differenza del metodo di rilassamento, si basa su un procedimento di risoluzione ciclico che è lo stesso per tutte le scansioni, mediante il quale i nuovi valori del potenziale vengono ricavati direttamente dalle equazioni alle differenze finite, senza più far ricorso alla valutazione dei residui [5 ÷ 11].

Nel nostro caso vi sono due sostanziali differenze. Nello spazio a permeabilità costante il problema viene risolto senza ricorrere a metodi iterativi. Noto il potenziale al contorno, si può risalire direttamente al potenziale nei vari punti. L'algoritmo usato per stabilire que-

sta corrispondenza, che fa uso di espressioni matriciali, è di facile applicazione, in quanto le matrici che vi compaiono sono di tipo trigonale simmetrico con autovalori che sono immediatamente determinati in funzione dei coefficienti delle stesse matrici [20].

Questa particolarità del metodo prescinde dalla forma del contorno e si conserva quando si passi ad una geometria cilindrica, sia assumendo reticoli quadrati, sia assumendo reticoli rettangolari. Il secondo punto da sottolineare è il seguente: nel caso dei magneti permanenti non è possibile nello spazio da essi occupato applicare integralmente il metodo proposto con essendovi proporzionalità tra campo e densità di flusso, per cui è necessario ricorrere a metodi iterativi. Questo abbiamo fatto però con metodo originale che ci ha permesso di ridurre notevolmente il numero delle iterazioni a parità di precisione.

Abbiamo infatti assunto, come dato di partenza, la pendenza del campo magnetico nei singoli nodi all'interno del magnete, pendenza che viene via via corretta in corrispondenza di ciascuna iterazione.

I valori di tale pendenza, assunti come dati di partenza, sono spesso più facilmente individuabili (per certe geometrie) di quanto non sia per i residui. Nello spazio vuoto abbiamo utilizzato il metodo non iterativo di cui sopra per arrivare ad esprimere una relazione lineare tra potenziali sul magnete e gradienti di campo in prossimità di esso, relazione necessaria per la applicazione del metodo iterativo dentro il magnete.

È difficile stabilire a priori, tra i metodi tradizionali (di rilassamento o di iterazione) e il metodo proposto, quale sia preferibile per tempo di calcolo, precisione raggiungibile a parità di calcolatore e ampiezza del reticolo.

In particolare la precisione, nel caso dei metodi tradizionali, dipenderà anche dall'abilità con cui il ricercatore saprà, individuare la configurazione iniziale dei residui o dei potenziali.

A titolo di esempio possiamo ricordare i risultati ottenuti da ricercatori particolarmente esperti del problema, che, nel caso del calcolo del campo prodotto da una bobina, utilizzando un reticolo di un migliaio di punti, risolvono il problema con un centinaio di iterazioni con un tempo di calcolatore (UNIVAC 1108) dell'ordine di 3 min e riducendo i residui a qualche per cento del valore massimo del potenziale magnetico [12].

Nel nostro caso invece con un reticolo di più di 700 punti (nel caso piano), di cui più di 120 nel magnete permanente, riusciamo in circa 2 min con lo stesso calcolatore a ridurre nello spazio vuoto i valori dei residui ad un decimillesimo rispetto al valore massimo dei potenziali. Nei disegni riportati tale precisione risulta inferiore, in quanto abbiamo arrotondato per ciascun punto il

(\*) L. E. CASANO, F. MOSCATI, G. SACERDOTI - Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN - Frascati, Italy.

valore effettivo del potenziale al valore intero più prossimo.

Le geometrie a cui riferiremo sono due:

- a) Piana con un asse di simmetria (fig. 1a).
- b) Cilindrica con un asse di simmetria (fig. 1b).

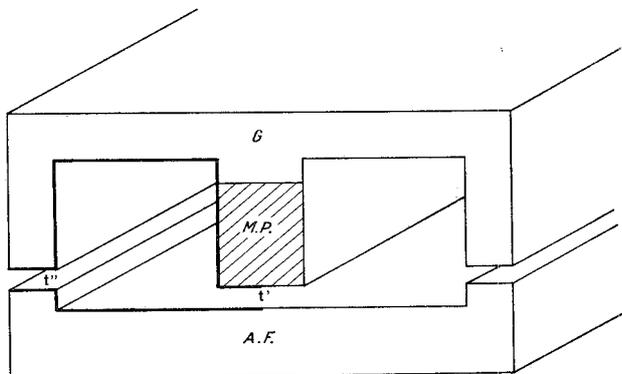


Fig. 1a — Sospensione magnetica piana con asse di simmetria.

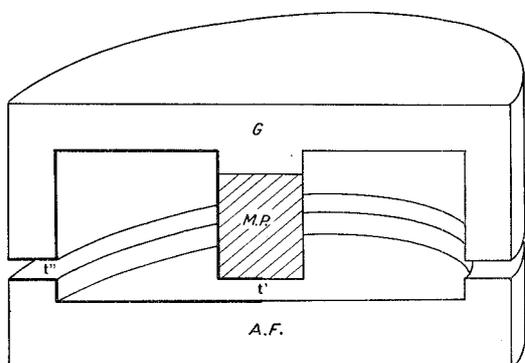


Fig. 1b — Sospensione magnetica cilindrica con asse di simmetria.

I procedimenti proposti per i due casi (piano e cilindrico) prevedono i seguenti passi:

- a) calcolo del campo magnetico sul contorno in funzione dei potenziali magnetici sul contorno stesso.
- b) Ricerca, attraverso la proprietà dei materiali

magnetici del magnete permanente, delle relazioni che legano i potenziali magnetici all'induzione magnetica sul contorno del magnete permanente.

c) Facendo uso delle relazioni tra i potenziali e i gradienti così stabilite, ricavare i valori degli stessi. Per il punto b) proporremo un metodo di tipo iterativo, per cui non si fa a priori alcuna ipotesi sull'andamento del flusso magnetico nel magnete permanente.

Ricavato il potenziale tra il magnete permanente e il nucleo di ferro si risale facilmente alla forza che si esercita sul nucleo di ferro solidale con il corpo sospeso.

Riporteremo e discuteremo alcuni risultati ottenuti. Nelle conclusioni esamineremo la convenienza e il costo del calcolo in relazione ai mezzi di calcolo disponibili sul mercato.

I programmi (scritti in linguaggio FORTRAN) necessari per eseguire i calcoli, sia nel caso piano che nel caso cilindrico, sono a disposizione degli interessati.

## 2. - CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO IN FUNZIONE DEL POTENZIALE MAGNETICO SUL CONTERNO. CASO PIANO IN MATERIALE A PERMEABILITÀ COSTANTE.

In questo paragrafo illustreremo un metodo per il calcolo del campo magnetico piano in un materiale a permeabilità uniforme. Considerato un contorno  $C$  che delimita un'area  $D$  (fig. 2), ci proponiamo di esprimere il potenziale magnetico nel dominio  $D$  noto il potenziale sul contorno  $C$ .

A tale scopo approssimiamo il contorno  $C$  con una spezzata  $C_s$  costituita da un reticolo di rette perpendicolari distanziate tra loro di un prefissato passo  $a$  (fig. 2): l'approssimazione può essere tanto migliore quanto minore è il passo  $a$ .

Indicando con  $i = 0, 1, 2, \dots, N + 1$  la generica riga del reticolo e con  $j = 0, 1, 2, \dots, n + 1$  la generica colonna del reticolo, è possibile definire il contorno  $C_s$  mediante  $N + 2$  matrici  $M_j$  diagonali ( $N + 2$ ) in cui sono nulli tutti gli elementi delle righe  $i$  corrispondenti a punti esterni o sul contorno  $C_s$ , mentre sono uguali a 1 tutti gli altri elementi diagonali e uguali a zero gli altri elementi.

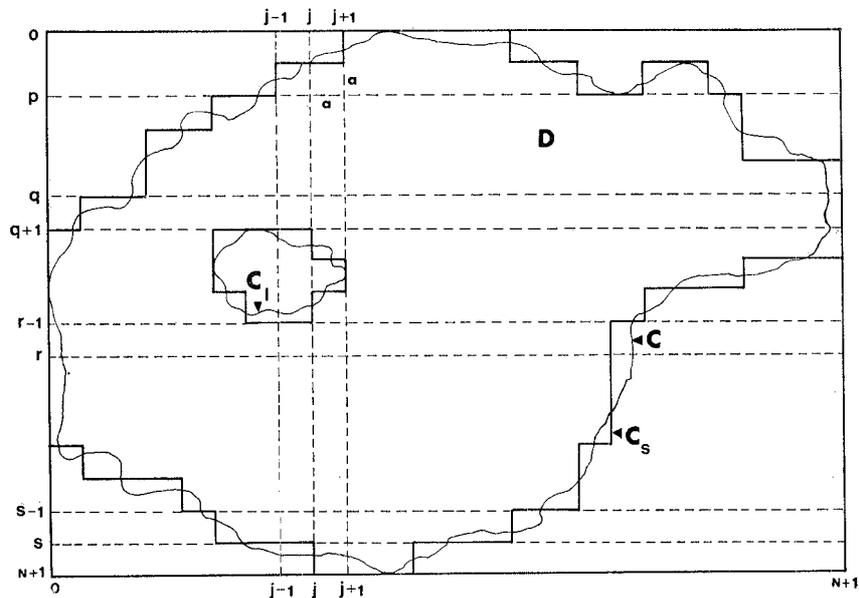


Fig. 2. — Sezione piana di un contorno magnetico generico.



3. - CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO PIANO IN FUNZIONE DEL POTENZIALE MAGNETICO SU UN CONTORNO RETTANGOLARE IN UN MATERIALE A PERMEABILITÀ COSTANTE.

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, dividiamo il rettangolo, che costituisce il contorno della nostra area, in un reticolo (fig. 4).

remo in App. A) consiste essenzialmente nel considerare separatamente i singoli termini del vettore dei termini noti e di quello delle incognite, nonchè nel diagonalizzare la matrice dei coefficienti (del sistema (7)), in modo da poter scrivere delle formule ricorrenti tra i vettori  $| \mathbf{X}_j |$ .

Si è constatato infatti che nel caso di contorno rettan-

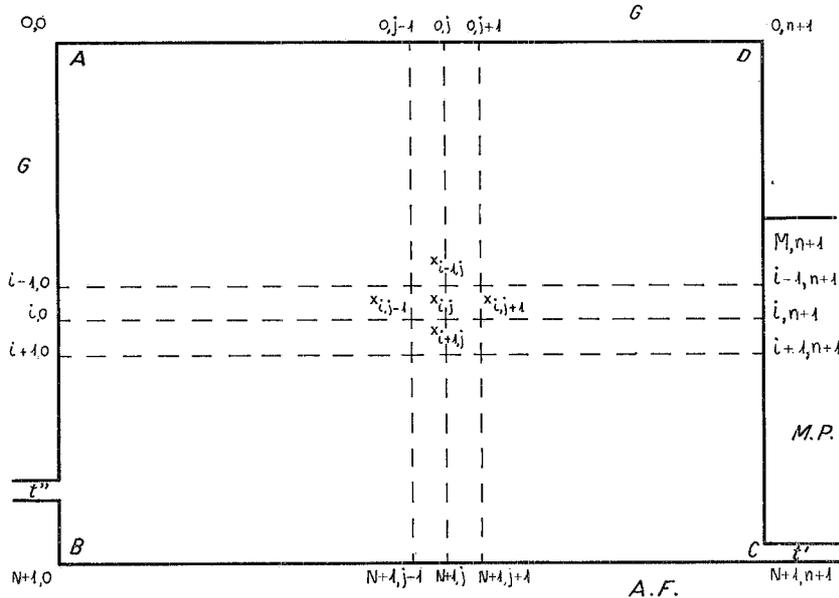


Fig. 4. — Sezione piana di un contorno magnetico rettangolare.

Le relazioni trovate tra i vettori che rappresentano i valori discreti del potenziale in una colonna del reticolo, di cui alla espressione (6) si riducono al sistema semplificato seguente:

(7)

$$\begin{aligned}
 | \mathbf{X}_1 | - \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_2 | &= \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_0 | + \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_{N+1,1} | \\
 - \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_1 | + | \mathbf{X}_2 | - \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_3 | &= \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_{N+1,2} | \\
 - \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_2 | + | \mathbf{X}_3 | - \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_4 | &= \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_{N+1,3} | \\
 &\vdots \\
 - \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_{n-1} | + | \mathbf{X}_n | &= \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_{n+1} | + \\
 + \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} | \mathbf{X}_{N+1,n} |
 \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{M}^{-1}$  è la matrice inversa di  $\mathbf{M}$  definita nella (2), di ordine  $n \times n$ .

Le (7) costituiscono un sistema di  $n \times N$  equazioni negli  $n$  vettori incogniti  $| \mathbf{X}_j |$  (per  $j = 1, 2, \dots, n, n + 1$ ).

Il sistema (7) può essere manipolato in modo da renderne possibile l'utilizzazione pratica. In particolare da esso può ricavarsi una relazione matriciale più semplice tra i vettori  $| \mathbf{X}_n |$  e  $| \mathbf{X}_{n+1} |$  eliminando così gli altri vettori incogniti  $| \mathbf{X}_j |$ . Il procedimento seguito (che espor-

Solare le matrici ausiliarie da introdurre per queste operazioni hanno molti termini nulli e quindi i calcoli da effettuare si semplificano grandemente. Indichiamo allora con  $\lambda_p$  una matrice diagonale costruita con gli autovalori  $\frac{\mathbf{M}^{-1}}{4}$ , con  $\mathbf{U}$  una matrice diagonalizzante di  $\mathbf{M}$ .

Inoltre sia  $\mathbf{G}_p(k)$  una matrice diagonale i cui elementi siano esprimibili come polinomi in  $\lambda$  di ordine  $K$ , tramite una formula ricorrente che ricollega  $\mathbf{G}_p(k)$  a  $\mathbf{G}_p(k-1)$ ,  $\mathbf{G}_p(k-2)$  e  $\lambda_p$ . Tali polinomi sono calcolati ordinatamente per  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  (autovalori di  $\frac{\mathbf{M}^{-1}}{4}$ ), come mostrato in App. A. Si perviene per questa via alla espressione:

(8)

$$\mathbf{G}_p(n) \mathbf{U} \begin{pmatrix} (\text{grad } v)_1 \\ (\text{grad } v)_2 \\ \vdots \\ (\text{grad } v)_N \end{pmatrix} + [(\lambda_p - 1) \mathbf{G}_p(n-1) + \lambda_p^2 \mathbf{G}_p(n-2)] \mathbf{U} \begin{pmatrix} X_{1,n+1} \\ X_{2,n+1} \\ \vdots \\ X_{N,n+1} \end{pmatrix} = V_0 [(-1)^{n+1} \cdot$$

$$\cdot \lambda_p^n \mathbf{G}_p(0) + \dots + (-1)^{2n} \lambda_p \mathbf{G}_p(n-1)] \mathbf{U} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

(segue 8)

$$+ (-1)^{n+1} \lambda_p^n V_0 \mathbf{G}_p(0) \mathbf{U} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ove:

$$(\text{grad } v)_k = |\mathbf{X}_{n,k}| - |\mathbf{X}_{n+1,k}|.$$

Le relazioni (8) costituiscono un sistema di  $N$  equazioni in  $2N$  incognite in base alle sole proprietà del campo magnetico nel vuoto. Pertanto tale sistema non è sufficiente a determinare le incognite. Le equazioni ulteriori che permetteranno di risolvere il problema, saranno fornite dalle proprietà del campo magnetico nella materia, più propriamente nella regione di spazio occupata dal magnete permanente.

La ricerca delle nuove equazioni che completano il sistema (8) è l'argomento di cui ci occuperemo nel par. 5.

ordinata assiale e con  $j = 0, 1, 2, \dots, n+1$  coordinata radiale (fig. 5). Si ricava quindi:

$$|\mathbf{X}_{i,j}| = \frac{|\mathbf{X}_{i,j+1}|}{4} \left(1 - \frac{a}{2r_j}\right) + \frac{|\mathbf{X}_{i,j-1}|}{4} \cdot \left(1 + \frac{a}{2r_j}\right) + \frac{|\mathbf{X}_{i+1,j}|}{4} + \frac{|\mathbf{X}_{i-1,j}|}{4}.$$

Da quest'ultima relazione si ottiene per  $i = 1, 2, \dots, N$  un sistema di  $N$  equazioni che si riassume nella relazione:

$$(11) \quad \mathbf{M} |\mathbf{X}_j| = \left(1 - \frac{a}{2r_j}\right) \frac{|\mathbf{X}_{j+1}|}{4} + \left(1 + \frac{a}{2r_j}\right) \frac{|\mathbf{X}_{j-1}|}{4} + \frac{|\mathbf{X}_{N+1,j}|}{4}$$

i cui termini, scritti in forma esplicita, sono analoghi alla matrice e ai vettori che compaiono nelle espressioni (2) e (8).

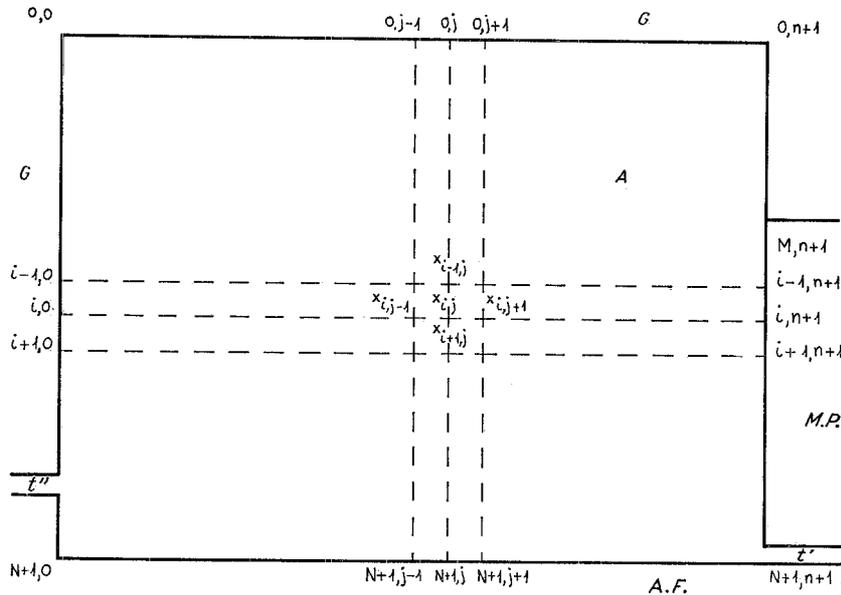


Fig. 5. — Sezione piana di un contorno magnetico: caso cilindrico.

4. - CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO IN FUNZIONE DEL POTENZIALE NEL CASO DI UN CORPO AD ASSE DI SIMMETRIA CILINDRICA

Nello spazio vuoto  $A$  (fig. 1b e fig. 4) l'equazione del potenziale in coordinate cilindriche  $r$  e  $z$  è data da:

$$(9) \quad \Delta X = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{dX}{dr} \right) + \frac{d^2(rX)}{dz^2} \right] = 0$$

in cui  $X$  è il potenziale magnetico incognito [15, 16].

La (9) può essere approssimata in termini di differenze finite [17, 18]. A tal fine si tracci in un piano passante per l'asse del cilindro un reticolo  $r, z$  ortogonale ( $N+1$  rette orizzontali ed  $n+1$  verticali). Si ottiene nello spazio vuoto e nel contorno, che supponiamo rettangolare, un reticolo di  $(N+1) \times (n+1)$  punti, il cui potenziale sarà indicato da  $X_{i,j}$  con  $i = 0, 1, 2, \dots, N+1$  co-

Con procedimento analogo a quello del paragrafo precedente si perviene alla:

(12)

$$\mathbf{P}_n(\lambda) \mathbf{U} \begin{pmatrix} (\text{grad } v)_1 \\ (\text{grad } v)_2 \\ \vdots \\ (\text{grad } v)_n \end{pmatrix} = \left[ \left(1 - \frac{a}{2r_n}\right) \mathbf{P}_{n-1}(\lambda) - \mathbf{P}_n(\lambda) \right] \mathbf{U} \begin{pmatrix} X_{1,n+1} \\ X_{2,n+1} \\ \vdots \\ X_{N,n+1} \end{pmatrix} = V_0 [(-1)^{n+1} \mathbf{P}_0(\lambda) +$$

(segue 12)

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{n+2} \mathbf{P}_1(\lambda) + \dots + \mathbf{P}_{n-1}(\lambda) \mathbf{U} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \\
 & + (-1)^{n+1} \left( 1 + \frac{a}{2r_1} \right) \mathbf{V}_0 \mathbf{P}_0(\lambda) \mathbf{U} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

A proposito dell'espressione (12) osserviamo che i termini  $\mathbf{P}_k(\lambda)$ , il cui significato è analogo a quello dei  $(G_p \hat{h})$  dell'espressione (8), si calcolano nel caso cilindrico diversamente da quanto fatto per il caso piano, in quanto ora non è agevole la determinazione di una formula ricorrente apposita.

C'è da osservare che la matrice diagonalizzante  $\mathbf{U}$  e quella degli autovalori  $\lambda_p$  rimangono le stesse ricavate per il caso piano nel par. 3.

Il procedimento seguito nel caso cilindrico è esposto dettagliatamente in App. B.

Anche in questo caso, come si è già visto nel par. 3 si è giunti con la (12) ad un sistema di  $N$  equazioni in  $2N$  incognite in base alle sole proprietà del campo magnetico nel vuoto e sarà necessario ricorrere alle proprietà che assume il campo magnetico nella materia per ottenere le altre equazioni per determinare completamente il problema.

### 5. - CALCOLO DEL MAGNETE PERMANENTE. CASO DI UN MAGNETE PERMANENTE PIANO A SEZIONE RETTANGOLARE CON ASSE DI SIMMETRIA PIANA.

Nel par. 3 abbiamo ricavato le relazioni che legano i potenziali su un contorno rettangolare, ai gradienti del potenziale su un lato del rettangolo per il caso piano (fig. 4).

Sia il magnete permanente, cui è dovuto il campo magnetico che dobbiamo calcolare nel rettangolo  $(A, B, C, D)$ , adiacente ad un lato di tale rettangolo. Le relazioni che legano il campo e la induzione nei singoli punti del magnete permanente, ci permettono di scrivere le relazioni tra i gradienti sul contorno e i potenziali sul contorno che, con le equazioni ricavate nel par. 3, permettono di ricavare appunto i potenziali incogniti sulla superficie del magnete.

Nel magnete permanente seguiremo un procedimento di tipo iterativo, che, almeno in linea di principio, permette di raggiungere una precisione qualsivoglia. Riferendoci alla fig. 4, risulta comodo introdurre i vettori  $|\mathbf{v}_j|$ ,  $|\text{grad } v|$ ,  $|\mathbf{C}_j|$  e  $|\mathbf{S}_j|$ , e le matrici  $\mathcal{M}$  ed  $\mathbf{A}$ , definiti come mostrato in App. C.

Inoltre la relazione tra i vettori  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  è:

$$(13) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_r)$$

con:

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

ove utilizzando materiali magnetici tipo ferrite si ha  $\mu_r \simeq$  costante.

Questa relazione vettoriale può scindersi in due relazioni scalari fra le componenti di  $\mathbf{H}$  e di  $\mathbf{B}$ , scegliendo opportunamente i riferimenti come in fig. 5:

$$(14) \quad \begin{aligned} H^T &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^T - \frac{B_r}{\mu_r \mu_0} \cos \delta \\ H^N &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^N - \frac{B_r}{\mu_r \mu_0} \sin \delta \end{aligned}$$

ove  $\delta$  è l'angolo del vettore induzione rispetto all'asse  $x = T$  del sistema di riferimento.

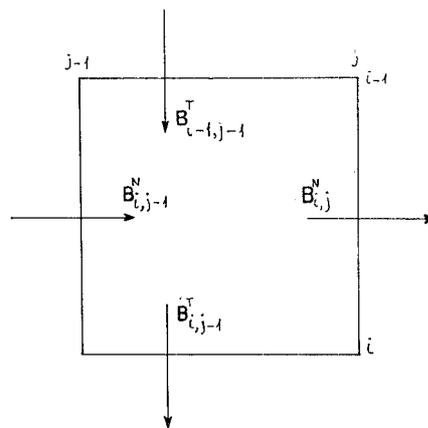


Fig. 6. — Cella elementare di sezione del magnete permanente.

Inoltre dall'equazione della  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , applicata al volume compreso fra le sezioni  $j$ -esima e  $(j-1)$ -esima del magnete permanente M. P. (fig. 6), si ottiene la relazione scalare:

$$(15) \quad B_{i,j}^N = B_{i,j-1}^N - B_{i,j-1}^T + B_{i-1,j-1}^T$$

che in forma vettoriale dà:

$$(15') \quad |\mathbf{B}_j^N| = |\mathbf{B}_{j-1}^N| + \mathbf{A} \left( \frac{\mathcal{M}}{a} |\mathbf{v}_{j-1}| + |\mathbf{C}_{j-1}| \right)$$

mentre si ha anche:

$$(16) \quad a |\mathbf{H}_j^N| = -\mathbf{A} |\mathbf{v}_j|$$

Per  $j = n + 1 = 1$  sono valide inoltre le relazioni:

$$(17) \quad B_1^N = \frac{\mu_0}{a} |\text{grad } v|$$

$$(18) \quad a |\mathbf{H}_1^T| = \mathbf{A} |\mathbf{v}_{n+1}|$$

Le (17) e (18) legano i valori delle grandezze magnetiche nel vuoto ai valori che le stesse grandezze assumono nella materia.

In definitiva se  $s$  sono le colonne che vengono a cadere nel magnete si dovranno effettuare  $s-1$  sostituzioni successive a partire dalla colonna  $n + 1$  fino all'asse di simmetria del magnete (colonna  $(n + s)$ -esima) per cui vale la condizione al contorno.

$$|\mathbf{B}_s^N| = 0$$

$|\mathbf{B}_s^N|$  risulterà quindi funzione di  $|\text{grad } v|$  e  $|\mathbf{v}_1|$ , che sono le incognite gradienti e potenziali, che ci interessano. Nelle espressioni finali compaiono, tramite le funzioni seno e coseno contenute nei vettori  $|\mathbf{S}_j|$ , e  $|\mathbf{C}_j|$  gli angoli  $\delta_j$ , che individuano la direzione del vettore  $\mathbf{B}$  rispetto all'asse  $x = T$  (fig. 7). Questi angoli sono noti a priori e bisognerà determinarli con un metodo iterativo.

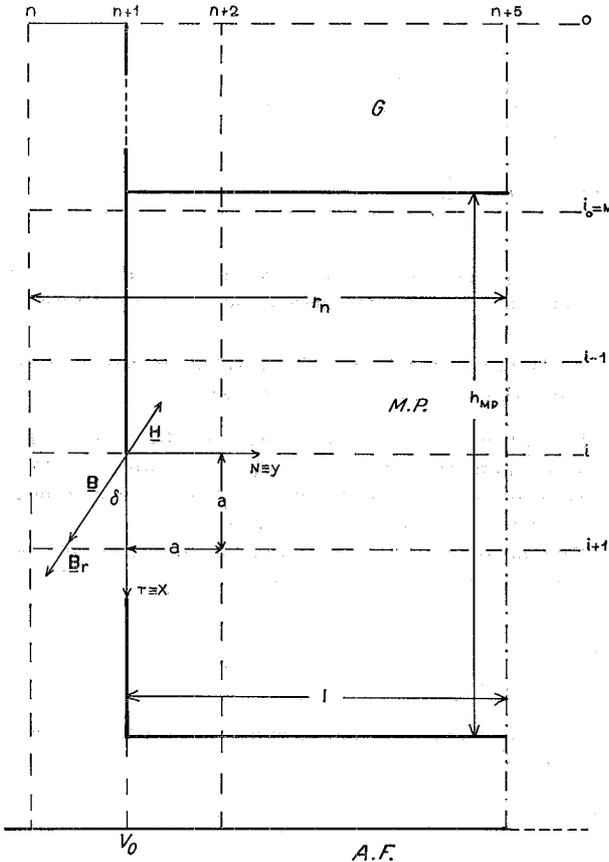


Fig. 7. — Sezione piana di un semimagnete permanente: caso piano e cilindrico.

Il procedimento iterativo consiste nel porre alcuni  $\delta_j$  iniziali, ricavare i valori del campo e dell'induzione nel magnete permanente, ricalcolare  $\delta_j$  mediante la formula:

$$(19) \quad \text{tg } \delta_j = \frac{B_j^N}{B_j^T}$$

che risulterà diversa dal rapporto:

$$(19') \quad \text{tg } \delta_j = \frac{H_j^N}{H_j^T}$$

Questi valori saranno quindi riportati all'inizio e si riprocederà allo stesso modo fino a trovare i valori corretti di questi angoli, cioè fino a quando le (19) e (19') coincideranno, a meno di una differenza trascurabile.

6. — CALCOLO DEL MAGNETE PERMANENTE. CASO DI UN MAGNETE PERMANENTE CON ASSE DI SIMMETRIA CILINDRICA A SEZIONE RETTANGOLARE.

Nel par. 4 abbiamo ricavato le relazioni che legano i potenziali sulla periferia su un contorno rettangolare ai gradienti del potenziale su un lato del rettangolo per il caso a simmetria cilindrica di fig. 5.

Le relazioni che legano il campo e l'induzione nei singoli punti del magnete permanente sono state poste nel par. 5 e da esse possiamo ancora sviluppare con alcune varianti un metodo di calcolo in analogia con quanto fatto nel citato paragrafo.

Infatti è possibile completare la teoria svolta e trovare le  $N$  relazioni atte a completare il sistema di equazioni (12) tenendo conto che la relazione (15) relativa alla  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  viene modificata nell'espressione seguente:

$$(20) \quad B_{ij}^N \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r_j} \right) = B_{i,j-1}^N \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r_{j-1}} \right) - B_{i,j-1}^T + B_{i-1,j-1}^T$$

7. — CALCOLO DELLA FORZA DI SOSTENTAMENTO PER UNA STRUTTURA A SIMMETRIA PIANA.

La forza di sostentamento per la struttura di fig. 1a è calcolata per metro lineare secondo l'asse  $x$ .

Considerando la superficie esterna  $S$  dell'ancora A. F., coincidente con il profilo dell'ancora, calcoleremo il flusso del vettore  $\mathbf{B}$  attraverso la superficie  $S$ , imponendo la condizione che l'induzione magnetica  $\mathbf{B}$  sia solenoidale nello spazio racchiuso da  $S$ , il che in pratica equivale ad imporre che:

$$(21) \quad \int_S d\Phi(\mathbf{B}) = 0$$

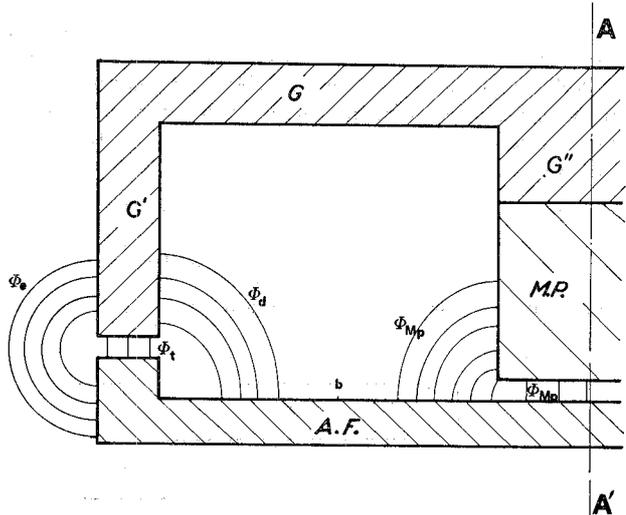


Fig. 8. — Particolare delle sezioni di fig. 1.

Il flusso complessivo di  $\mathbf{B}$ , che attraversa la superficie  $S$ , è uguale alla somma di 4 termini, come in fig. 8:

a) un flusso  $\Phi_e$  che si chiude tra il ritorno in ferro  $G'$  e la parte esterna del dente dell'ancora A. F.;

b) un flusso  $\Phi_t$  che interessa unicamente lo spazio delimitato dalla superficie laterale del ritorno in ferro  $G'$  e del dente dell'ancora A. F.;

c) un flusso  $\Phi_D$  che si chiude tra il ritorno in ferro  $G'$  e la parte interna del dente dell'ancora A. F., fino al punto  $b$  indicato in fig. 8 ove con  $b$  indichiamo il punto di inversione di senso del flusso sulla superficie  $S$ ;

d) un flusso  $\Phi_{MP}$  che si chiude tra la parte della superficie  $S$  compresa tra  $b$  e l'asse di simmetria  $A-A'$  e il magnete permanente.

Per calcolare i flussi  $\Phi_D$  e  $\Phi_{MP}$  si devono utilizzare i valori dei potenziali dell'ultima riga del reticolo, mediante le relazioni:

$$(22) \quad \Phi_D = \sum_{i=1}^{n_b} \Phi_i$$

$$(23) \quad \Phi_{MP} = \sum_{i=n_b}^n \Phi_i$$

ove  $\Phi_i$  rappresenta il flusso entrante (o uscente) in corrispondenza della  $i$ -esima colonna elementare del reticolo di cui sopra sopra e si ricava dalla:

$$(24) \quad \Phi_i = \left( \frac{v_{n,i} - V_0}{a} \right) \cdot a \cdot 1 \cdot \mu_0$$

ove:

- $a$  è il passo del reticolo uguale ad 1 mm,
- $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto,
- $v_{n,i}$  è il potenziale in corrispondenza della  $n$ -esima riga e  $i$ -esima colonna del reticolo,
- $V_0$  è il potenziale dell'ancora in ferro A. F.

Il flusso  $\Phi_e$  di fig. 8 si chiude tra le due superfici  $S_1$  ed  $S_2$  separate da un traferro  $t$  in aria. Per calcolare il suddetto flusso possiamo, con buona approssimazione, supporre che le linee di flusso più interne abbiano un andamento rettilineo, mentre quelle più esterne un andamento circolare con centro sulla mezzeria del traferro, nel punto di incontro del prolungamento ideale delle superfici  $S_1$  e  $S_2$ .

Facendo riferimento alla fig. 9 i punti  $c-c'$ ,  $d-d'$ ,  $e-e'$  indicano la variazione di forma delle linee di flusso.

Nell'intervallo  $c-d$ ,  $c'-d'$  possiamo supporre che le linee di flusso abbiano un andamento rettilineo e parallelo ad  $x$ , mentre nell'intervallo  $d-e$ ,  $d'-e'$  abbiamo un andamento circolare, per cui:

$$(25) \quad \Phi_e = \mu_0 V_0 \left[ \int_c^d \frac{dx}{2x} + \int_a^e \frac{dx}{\pi x} \right]$$

ove  $x$  è l'ascissa verticale indicata in fig. 9.

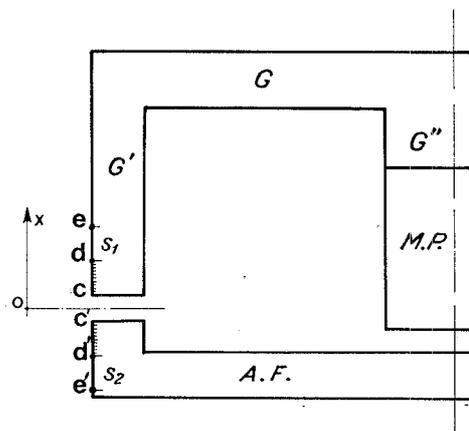


Fig. 9. — Particolare della sezione di fig. 8.

Il flusso  $\Phi_t$  deriva direttamente dalla (24) secondo la relazione:

$$(26) \quad \Phi_t = \Phi_{MP} - \Phi_D - \Phi_E.$$

Dal valore di  $\Phi_t$  si risale al valore  $t$  della larghezza del dente di A. F. che dipende biunivocamente dal valore di  $V_0$ :

$$(27) \quad t = \frac{\Phi_t \cdot h_t}{\mu_0 \cdot V_0 \cdot 1}$$

ove  $h_t$  è l'altezza del traferro.

Per calcolare la forza di sostentamento  $F$  useremo la relazione:

$$(28) \quad F = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot 1 \cdot a} + \frac{\Phi_e^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot 1 \cdot t}$$

ove  $\Phi_s$  rappresenta il flusso entrante (o uscente) in corrispondenza della  $i$ -esima colonna elementare del reticolo.

### 8. — CALCOLO DELLA FORZA DI SOSTENTAMENTO PER UNA STRUTTURA A SIMMETRIA CILINDRICA.

Per calcolare la forza di sostentamento di una struttura a simmetria cilindrica, seguiremo un metodo di calcolo che deriva direttamente, con opportune modifiche, da quello seguito per il caso piano.

Rimanendo invariate le definizioni dei flussi  $\Phi_e$ ,  $\Phi_t$ ,  $\Phi_D$ ,  $\Phi_{MP}$  modificheremo la (24) in:

$$(29) \quad \Phi_i = \left( \frac{v_{n,i} - V_0}{a} \right) 2 \pi r_i \cdot a \cdot \mu_0$$

ove  $r_s$  è il raggio all' $i$ -esima colonna del reticolo di fig. 5, ed è ricavato da:

$$(30) \quad r'_i = r_i + \frac{a}{2} \simeq r_i.$$

Rimanendo valide le relazioni (22) e (23) per calcolare i valori di  $\Phi_e$  e  $\Phi_{MP}$ , purchè in esse  $\Phi_i$  venga espresso secondo la (29), calcoleremo il flusso  $\Phi_e$  con lo stesso procedimento del caso piano per mezzo della relazione:

$$(31) \quad \Phi_e = 2 \pi r_M \mu_0 V_0 \left[ \int_c^d \frac{dx}{2x} + \int_a^e \frac{dx}{\pi x} \right],$$

ove  $r_M$  rappresenta il raggio medio del dente dell'ancora A. F. Poichè tale raggio medio è una delle incognite da determinare, lo approssimeremo per comodità di calcolo con il raggio minimo  $r_m$  del dente (questa ipotesi è resa valida dai risultati raggiunti).

Si può quindi determinare  $\Phi_t$  in base alla relazione (26). La determinazione dello spessore  $t$  del dente porta alla risoluzione di una equazione di 2°, di cui una radice è priva di significato fisico, e l'altra è data da:

$$(32) \quad t = -r_m + \sqrt{r_m^2 + \frac{a \Phi_t}{\mu_0 V_0 \pi}}$$

La forza di sostentamento è data dalla relazione:

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^2}{2 \cdot \mu_3 \cdot 2 \pi a \cdot r_i} + \frac{\Phi_e^2}{2 \cdot \mu_3 \cdot 2 \pi (r_m + t/2) t}$$

9. — RISULTATI E CONCLUSIONI.

Sulla base delle discussioni e dei procedimenti indicati nei paragrafi precedenti sono stati preparati i programmi in linguaggio Fortran per i seguenti casi:

1) Calcolo del campo magnetico tra un'ancora di ferro dolce  $G$  con un dente di magnete permanente M. P. di tipo Sinterox III ed una piastra di ferro A. F. a permeabilità infinita, affacciata all'ancora stessa.

Il numero di punti del reticolo, in cui si è suddiviso lo spazio vuoto di una semiancra è di  $25 \times 25$ . Le dimensioni sono indicate nella fig. 11 a.

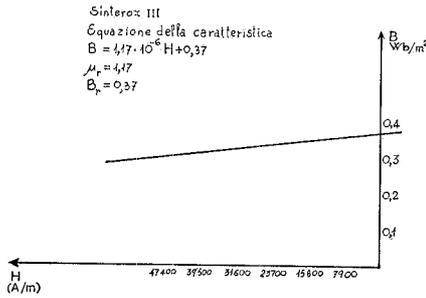


Fig. 10. — Caratteristica magnetica del Sinterox III.

Viceversa il reticolo in cui si è suddiviso il magnete permanente M. P. è  $i \times 5$ , dove  $i$  è stato fatto variare variando l'altezza  $h$  del magnete permanente tra 10 e 20 mm. Il passo  $a$  del reticolo è di 1mm. OI tre alla altezza del magnete permanente, abbiano variato anche il valore del potenziale  $V_0$  della piastra, che è legata in maniera univoca alla larghezza della gamba di ritorno, per ogni fissata struttura, nonché all'altezza del traferro.

2) Calcolo del campo magnetico tra un'ancora cilindrica di ferro dolce con un dente di magnete permanente ed una piastra di ferro dolce.

Le dimensioni di questa struttura e il numero di punti del reticolo sono indicati nella fig. 11b. È stato fatto ancora variare il potenziale  $V_0$  della piastra.

Nei casi precedenti si sono ricavate le mappe dei potenziali magnetici nello spazio vuoto.

I risultati di questi calcoli non sono fine a se stessi, ma si possono utilizzare per la realizzazione di un prototipo di ultracentrifuga, in quanto, opportunamente elaborati, forniranno il valore della forza di sostentamento che si esercita tra il magnete permanente M. P. e l'ancora in ferro A. F. A quest'ultima, in sede di effettiva utilizzazione, verrà connesso un carico utile.

In totale sono state studiate 24 soluzioni per la struttura a simmetria piana e 12 per quella a simmetria cilindrica. Queste soluzioni sono riportate in tab. 1.

Dal confronto dei dati sperimentali ricavati per mezzo

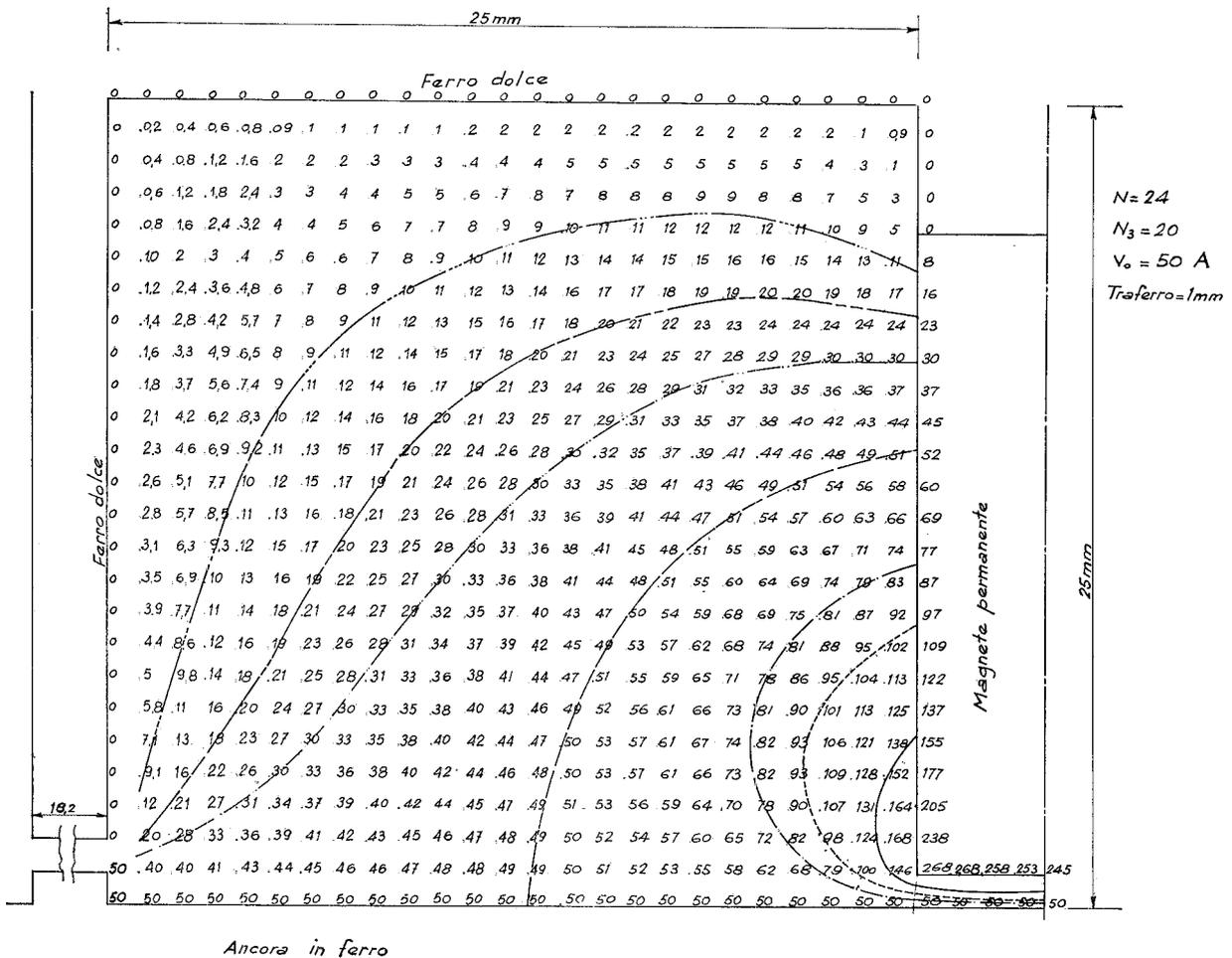


Fig. 11 a. — Mappa del campo magnetico di una «semiancra» con un reticolo nel vuoto di  $(25 \times 25)$  mm<sup>2</sup> e magnete permanente alto 20 mm (caso piano). Nel disegno sono indicate le dimensioni geometriche.

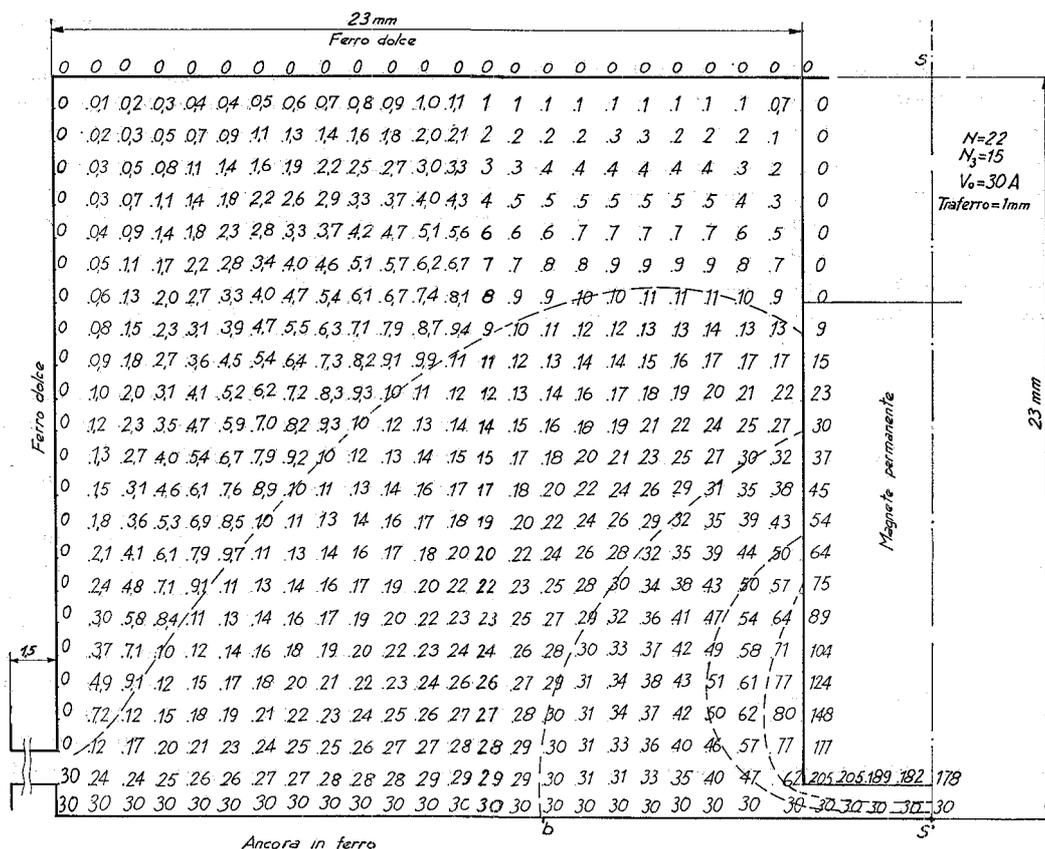


Fig. 11b. — Mappa del campo magnetico di una «semiancra» con un reticolo nel vuoto di (23 × 23) mm<sup>2</sup> e magneti permanente alto 20 mm (caso cilindrico). Nel disegno sono indicate le dimensioni geometriche.

TABELLA 1

Caso piano			Caso cilindrico			Caso piano			Caso cilindrico		
$h_t$	$h_{M_p}$	$V_0$	$h_t$	$h_{M_p}$	$V_0$	$h_t$	$h_{M_p}$	$V_0$	$h_t$	$h_{M_p}$	$V_0$
1	20	200	1	20	30	2	20	200	2	20	30
1	20	150	1	20	15	2	20	150	2	20	15
1	20	100	1	20	30	2	20	100	2	15	30
1	20	50	1	15	15	2	20	50	2	15	15
1	15	200	1	10	30	2	15	200	2	10	30
1	15	150	1	10	15	2	15	150	2	10	15
1	15	100				2	15	100			
1	15	50				2	15	50			
1	10	200				2	10	200			
1	10	150				2	10	150			
1	10	100				2	10	100			
1	10	50				2	10	50			

Nella tab. 2 riportiamo i risultati dei calcoli di cui ai paragrafi 7 e 8, in corrispondenza dei casi elencati in tab. 1. In particolare in tab. 3 sono elencati i valori, in mm, di  $x$  che si sono assegnati ai punti  $c$ ,  $d$ , e  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$  per i due casi  $h_t = 1$  mm e  $h_t = 2$  mm.

Sono stati eseguiti inoltre i calcoli della forza di sostentamento esercitata da un M. P. cilindrico su un'ancora di ferro, anch'essa cilindrica, delle dimensioni di cui alle figg. 12a e 12b.

Con il metodo indicato nell'articolo è stato dapprima calcolato il potenziale magnetico per diversi valori dell'altezza  $h$  del M. P. e per diversi valori del potenziale  $V_0$  dell'ancora.

Dal potenziale magnetico si sono ricavati i diagrammi riportati in figg. 12 e 13, dove sono riportati gli andamenti dei flussi e della forza in funzione del raggio, dopo aver fissato  $V_0$  e  $h$ . Tali diagrammi sono stati tracciati per i due casi seguenti:

$$(33) \quad \begin{matrix} h = 15 \text{ mm} & h = 20 \text{ mm} \\ V_0 = 30 \text{ A} & V_0 = 15 \text{ A} \end{matrix}$$

Dai dati così ottenuti si è calcolato il valore dello spessore  $t$  del dente (fig. 12) ed infine le forze, che sono risultate essere rispettivamente nei due casi (M. P. di Sinterox III):

$$\begin{matrix} F = 3,86 \text{ N} & F = 3,96 \text{ N} \\ t = 1,21 \text{ mm} & t = 7 \text{ mm} \end{matrix}$$

del prototipo di ultracentrifuga con i risultati dei calcoli presentati in questo articolo, saranno tratte conclusioni circa la validità del metodo di calcolo seguito.

TABELLA 2.

$h_t$	$h_{M_p}$	Caso piano							Caso cilindrico						
		$V_0$	$\Phi_{M_p}$	$\Phi_D$	$\Phi_E$	$\Phi_t$	$t$	F	$V_0$	$\Phi_{M_p}$	$\Phi_D$	$\Phi_E$	$\Phi_t$	$t$	F
1	20	200	961	— 304	180	477	2,38	168	30	15,6	— 5,5	5	5	0,98	1,3
1	20	150	989	— 233	135	621	4,15	170	15	16,4	— 2,5	2,5	11,4	4,17	1,34
1	20	100	1017	— 137	90	790	7,9	162							
1	20	50	1050	— 59	45	946	18,9	145							
1	15	200	895	— 347	180	368	1,84	156	30	15,6	— 5,5	5	5	0,98	1,3
1	15	150	922	— 251	135	536	3,57	160	15	16,3	— 2,5	2,5	11,3	4,17	1,34
1	15	100	998	— 153	90	755	7,55	157,5							
1	15	50	1021	— 68	45	908	18,16	142							
1	10	200	875	— 369	180	326	1,63	116,2	30	15,2	— 6	5	4,2	0,83	1,3
1	10	150	931	— 266	135	530	3,53	154	15	15,8	— 2,7	2,5	10,4	3,82	1,31
1	10	100	951	— 164	90	697	6,97	147							
1	10	50	992	— 73	45	874	17,5	135							
2	20	200	782	— 256	142	384	1,92	103	30	15,7	— 4,3	3,6	7,84	1,5	1,17
2	20	150	832	— 202	106,5	524	3,5	116	15	16,6	— 1,78	1,8	13	4,7	1,16
2	20	100	715	— 109	71	535	5,35	91,3							
2	20	50	908	— 46	35,5	827	16,54	96,1							
2	15	200	748	— 263	142	338	1,7	103	30	16,7	— 4,75	3,6	8,35	1,6	1,19
2	15	150	947	— 190	106,5	651	4,34	148,1	15	16,56	— 1,78	1,8	13	4,7	1,14
2	15	100	828	— 112	71	645	6,45	103,2							
2	15	50	832	— 50	35,5	747	14,9	88							
2	10	200	673	— 294	142	237	1,13	83,1	30	15,7	— 4,6	3,6	7,5	1,4	1,17
2	10	150	714	— 223	106,5	382	2,55	91	15	16,4	— 2,1	1,8	12,5	2,4	1,23
2	10	100	762	— 134	71	357	5,57	92							
2	10	50	818	— 54	35,5	728	14,56	84							

TABELLA 3

$h_t$ (mm)	c	d	e	c'	d'	e'
1	0,5	2,5	4,5	— 0,5	— 2,5	— 4,5
2	1	3	5	— 1	— 3	— 5

Si vede quindi che secondo tali calcoli l'altezza del magnete non è determinante in maniera decisiva, così come non lo è la larghezza del dente, sulla forza di sostentamento

Contemporaneamente, le prove eseguite su un modello sperimentale, avente  $t = 4$  mm e  $h = 17$  mm, hanno permesso di accertare che la forza risultava essere pari a 4,10 N.

Il risultato si può considerare più che soddisfacente quando si tenga conto che a causa dei forti gradienti di campo esistenti in prossimità degli spigoli (soprattutto del M. P.) l'integrazione grafica delle curve viene effettuata con un minor grado di approssimazione.

Riteniamo utile riportare alcune osservazioni sui programmi Fortran preparati.

I programmi di cui ai punti 1) e 2) sono stati svolti in doppia precisione. Però si è dovuto cambiare il procedimento per ricavare i valori del potenziale nello spazio vuoto una volta ricavati il potenziale e i gradienti sul magnete permanente.

Infatti chiamati  $a_1$  e  $a_2$  le incertezze dei potenziali sulla colonna 1 e 2 nel ricavare le incertezze dei potenziali magnetici della colonna 3 da questi valori, mediante la relazione (4), si ha un'incertezza, nel caso peggiore di  $a_3 = 6a_1 + a_2$  (se gli errori sono casuali invece  $a_3 = (4^2 a_1^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$ ). Così procedendo da una colonna all'altra si propaga l'incertezza ogni volta di

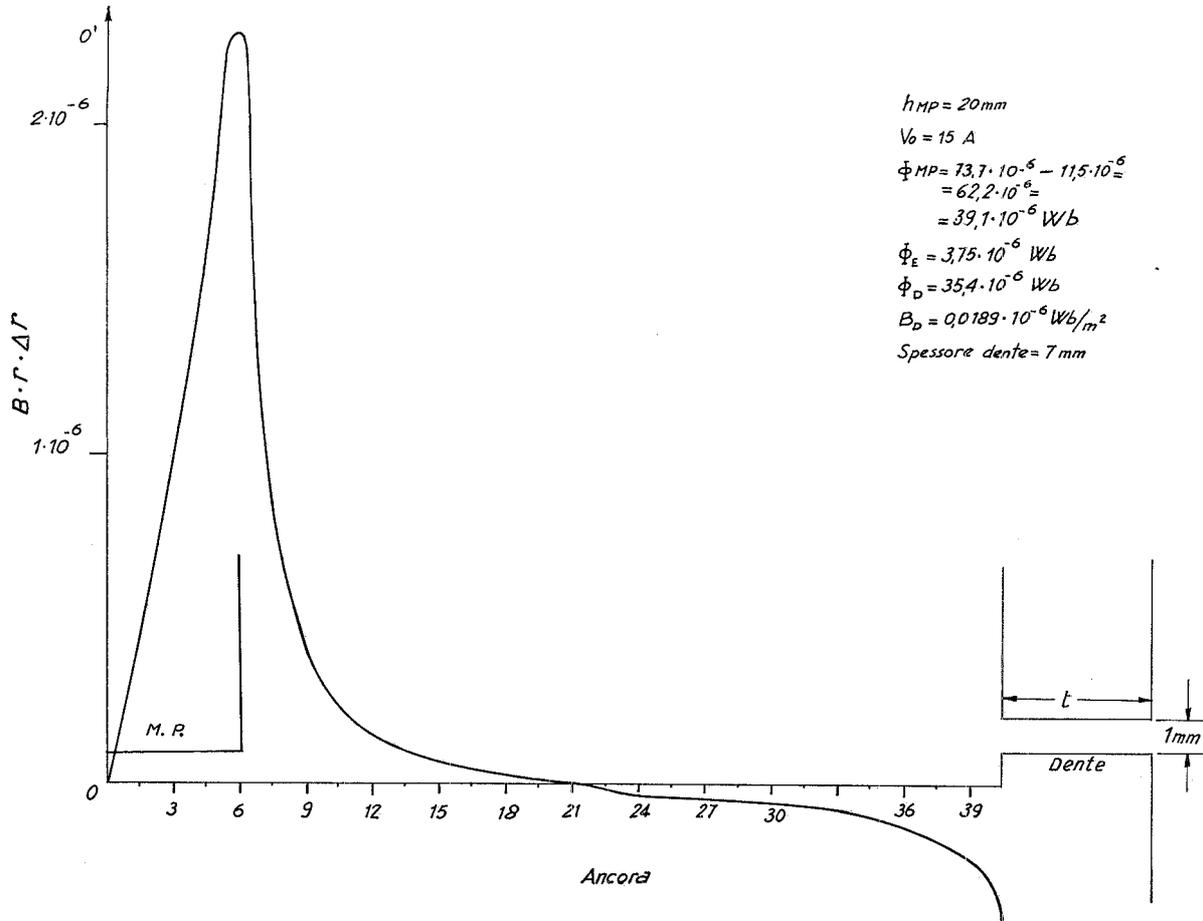


Fig. 12 a.

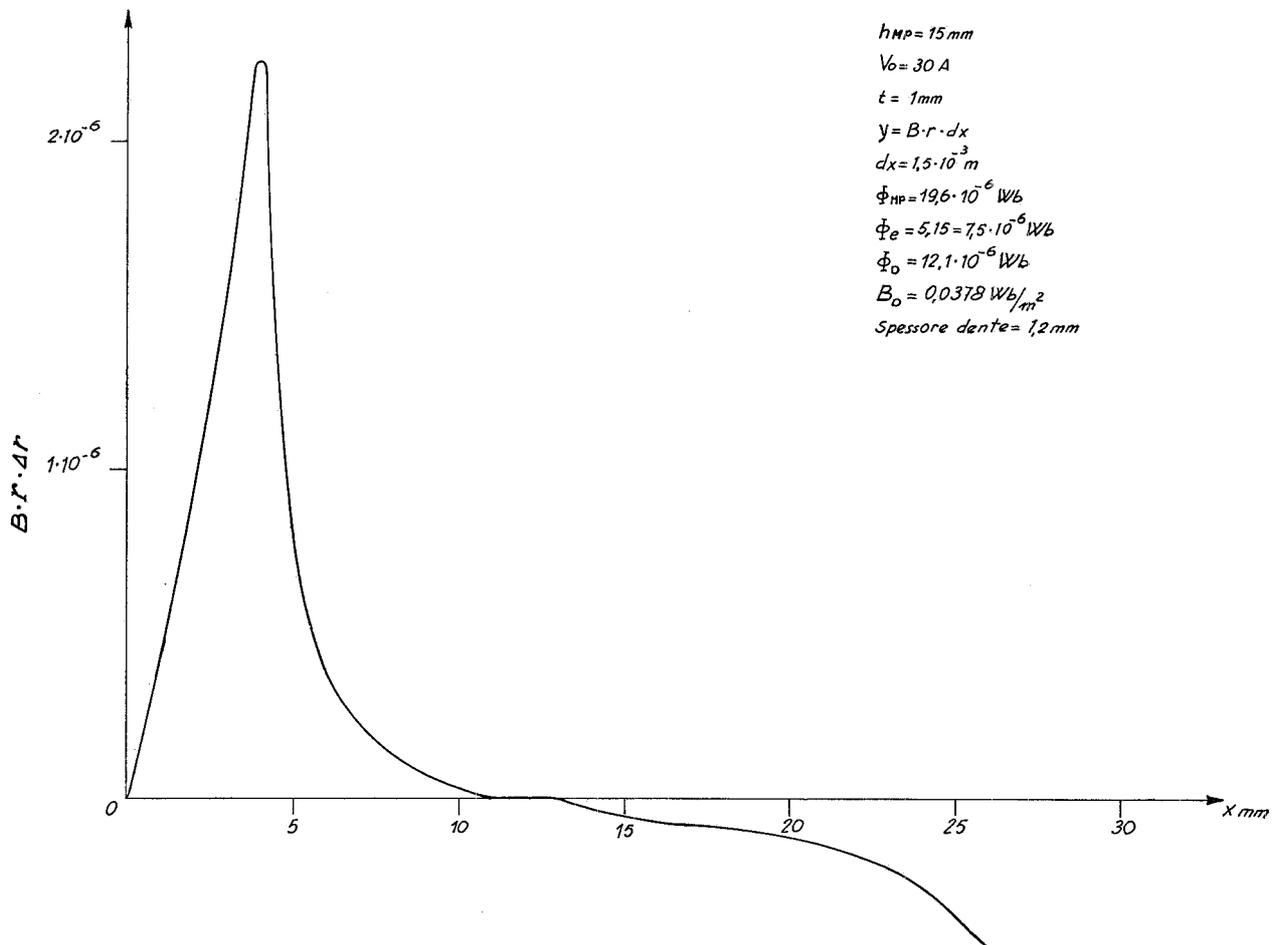


Fig. 12 b.

un fattore 7 (4). Se si arriva a calcolare il potenziale nello spazio vuoto partendo dai valori ottenuti nel magnete permanente si amplifica l'errore proporzionalmente a  $7^N a_1$  ( $5^N a_1$ ), se  $N$  è il numero di colonne.

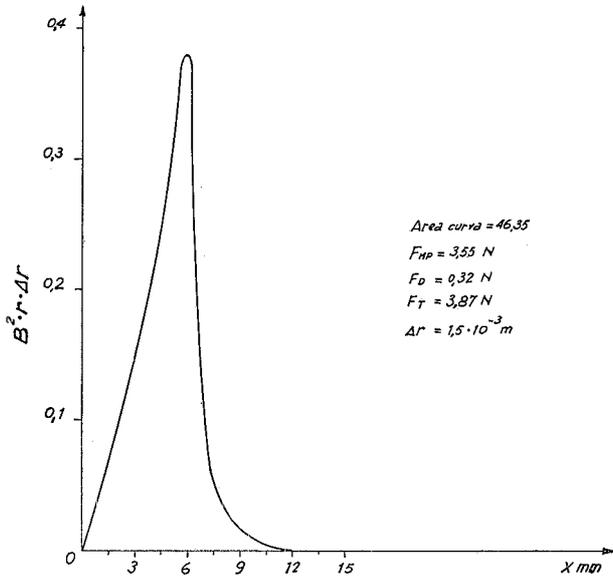


Fig. 13 a.

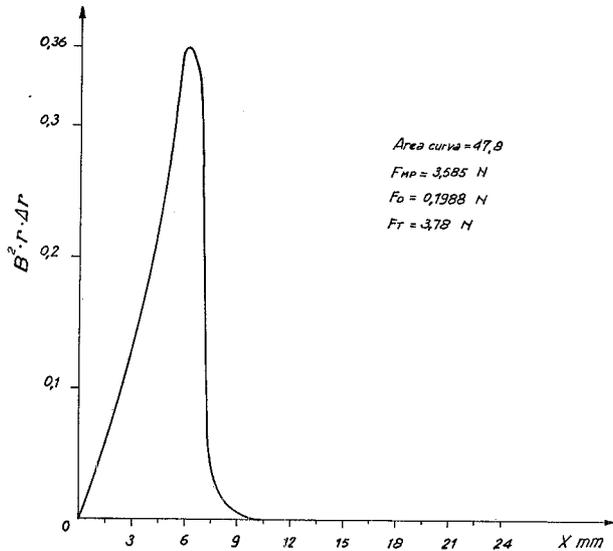


Fig. 13 b.

Se invece si ricava il potenziale partendo dal magnete permanente fino ad  $N/2$  colonne e per le altre  $N/2$  colonne si parte dalla colonna iniziale l'errore diventa proporzionale a  $7^{N/2}$  ( $5^{N/2}$ ) con grande giovamento per la precisione.

Per procedere al calcolo quando il reticolo è di numero maggiore di righe  $N_r$  e colonne  $N_c$ , si può prima calcolare il potenziale sul magnete permanente con i procedimenti indicati; poi, facendo uso di questi potenziali e di quelli nel ferro di ritorno, ricavare i potenziali delle colonne  $(j-1)$ -esima e  $j$ -esima sia partendo dal magnete permanente che partendo dal ferro di ritorno. Si ricava-

vano così  $2 N_r$  equazioni nelle  $2 N$ , incognite ( $V_{i-1,1}$ ,  $V_{i-1,2}$ ; ...;  $V_{i-1,N_r}$ ). Il meccanismo con cui si propagano gli errori dovrebbe permettere una maggiore precisione quando si evita di utilizzare per il calcolo dei potenziali di una colonna  $j$ -esima, quelli di due colonne adiacenti  $(j-1)$ -esima,  $(j-2)$ -esima. Questo fatto è comprensibile se si pensa alla fisica del fenomeno: il «quadro» dei potenziali sulle colonne  $j$ -esima e  $(j+1)$ -esima è «irregolare» (cioè vi sono, per es., cuspidi). Per «provocare» queste irregolarità con una distribuzione di potenziale sulla colonna  $j$ -esima lontana, bisogna ricorrere a distribuzioni fortemente irregolari.

Con questo sistema è stato possibile ricavare il potenziale nel vuoto con valori precisi fino alla 3<sup>a</sup> cifra decimale, se il reticolo è  $20 \times 20$ ; e fino alla 1<sup>a</sup> cifra decimale se è  $25 \times 25$ . Infatti nella colonna centrale (fig. 9 e 10) i numeri ottenuti partendo dalle due pareti (magnete permanente M. P. e ritorno in ferro G) coincidono fino alla 3<sup>a</sup> cifra decimale, nel caso di  $20 \times 20$ , e fino alla 1<sup>a</sup> cifra decimale nel caso di  $25 \times 25$ . Concludendo è necessario, con reticoli di  $25 \times 25$  punti, ricavare prima il potenziale sulla colonna adiacente alla colonna zero facendo uso della (8), ove i termini noti sono ora i potenziali sul magnete permanente.

Per il calcolo (caso piano) di un reticolo di  $25 \times 25$  punti, sono stati impiegati 1 min. e 20 s. dello Univac 1108 del Centro Calcolo dell'Università di Roma. Per il calcolo (caso cilindrico) di un reticolo di  $23 \times 23$  sono stati impiegati 3 min. dello stesso calcolatore.

La convergenza del procedimento iterativo nello spazio del magnete permanente risulta buona perchè in effetti in 2-4 iterazioni si raggiungono i valori presumibilmente corretti nei risultati del calcolo.

Mediante l'introduzione del metodo degli autovalori i calcoli si semplificano e si risparmia sul numero di operazioni aritmetiche del calcolatore.

Abbiamo modificato i procedimenti illustrati nel presente articolo ricorrendo a reticoli rettangolari modificando opportunamente le espressioni (4) ed (11). Abbiamo anche sviluppato programmi per superfici piane e cilindriche in cui le espressioni (4) e (11) sono state sostituite da espressioni equivalenti più complicate che riducono gli errori nelle colonne «centrali» del reticolo permettendo così di risolvere il problema con un maggiore numero di righe e colonne. Riteniamo questo metodo nuovo e suscettibile di ulteriori sviluppi.

APPENDICE A.

Il procedimento di calcolo che si è seguito per risolvere il problema esposto in par. 3 si può riassumere così come segue. Si consideri il sistema (7) ove compare come coefficiente delle incognite e dei termini noti la matrice  $\mathbf{M}^{-1}/4$ . Per essa sussiste la relazione agli autovalori:

$$(I.A) \quad \mathbf{U} \frac{\mathbf{M}^{-1}}{4} \mathbf{U}^{-1} = \lambda_p$$

con  $\lambda_p$  matrice diagonale degli autovalori di  $\frac{\mathbf{M}^{-1}}{4}$  dati da:

$$\lambda_{p,k} = \frac{1}{4 \lambda_k}$$



- [4] C. J. CARPENTER: *Theory and application of magnetic shells.* - «IEEE Proc.», luglio 1967, pp. 995÷1000.
- [5] L. F. RICHARDSON: *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations.* - Phil. Trans. R. Soc., 210 A, 1911.
- [6] H. LIEBMANN: *Die angenaherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformen Abbildungen.* - Sbe. bayer. Akad. Wiss. Mathematisch. Physikalische klasse, 1918.
- [7] G. E. FORSYTHE, J. ORTEGA: *Attempts to determine the optimum acceleration factor for successive over relaxation* - «The Computer Jour.», vol. 4, 1961.
- [8] R. S. VARGA: *Matrix Iterative Analysis.* - Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [9] N. PALESE, L. SANSONE: *Sulla determinazione della costante ottima per le iterazioni concatenate con forzamento successivo* - Calcolo rating - luglio 1967.
- [10] D. M. YOUNG: *Iterative Methods for solving practical differential equations of elliptic type* - «Trans. Amer. Math. Soc.», 1954.
- [11] W. E. MILNE: *Numerical Solutions of Differential Equations* Wiley, New York, 1953.
- [12] U. RATTI, E. A. ERDELYI: *L'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali del potenziale vettore e la sua soluzione numerica per le macchine sincrone a poli salienti.* Istituto Elettrotecnico - Università di Roma - Rapporto interno n. 85, luglio 1969.
- [13] J. JEANS: *Mathematical theory of electricity and magnetism.* - Cambridge University Press, 1960.
- [14] J. C. MAXWELL: *Treatise on electricity and magnetism.* - Oxford University Press, 1892.
- [15] L. DADDA: *Modelli elettrolitici per lo studio dei campi armonici a simmetria di rivoluzione.* - «l'Energia Elettrica», vol. 30, 1953, p. 837.
- [16] W. BRISLEY, B. S. THORNTON: *Electromagnetic levitation calculations for axially symmetric systems.* - «Brit. J. Appl. Phys», vol. 14, 1963, pp. 682.
- [17] C. J. CARPENTER: *Magnetic field problems.* Lecture given at the Engineering Faculty. Università di Roma, aprile 1967.
- [18] U. RATTI, E. A. ERDELYI: *L'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali del potenziale scalare e la sua soluzione numerica per gli alternatori omopolari.* - «L'Elettrotecnica», vol. 56, 1969, p. 120.
-