

LNF-72/49
22 Maggio 1972

M. Donnetti, F. Moscati e G. M. Veca : PROPOSTA DI UN
METODO DI CALCOLO DELLA FORZA DI SOSTENTAMENTO
DI UNA SOSPENSIONE MAGNETICA PER ULTRACENTRIFUGA.

M. Donnetti^(x), F. Moscati^(x) e G. M. Veca^(o): PROPOSTA DI UN METODO DI CALCOLO DELLA FORZA DI SOSTENTAMENTO DI UNA SOSPENSIONE MAGNETICA PER ULTRACENTRIFUGA⁽⁺⁾.

1. - INTRODUZIONE. -

Nel presente lavoro gli scriventi propongono un metodo di calcolo per determinare la mappa del campo magnetico per la geometria di Fig. 1, ove la lastra conduttrice si muove nella direzione dell'asse y con velocità v , e F' ed F'' sono due lastre di materiale a permeabilità (μ) molto elevata, tale che all'interno di esse il campo (H) dovuto ai magneti permanenti possa considerarsi nullo.

Il sistema deve inoltre considerarsi come infinitamente esteso sia nella direzione dell'asse x che in quella dell'asse y . Dalla conoscenza dei valori assunti dal campo magnetico nella lastra conduttrice $L-L'$, è possibile determinare la forza di sostentamento (per unità di lunghezza nella direzione dell'asse x) che su tale lastra esercitano i magneti permanenti, a causa del suo moto traslatorio, nonché l'entità della forza resistente che il campo magnetico predetto oppone a tale moto. Per ragioni di simmetria si può limitare lo studio del problema ad una sezione ottenuta mediante un piano parallelo al piano yz . Su tale sezione il problema può essere ulteriormente semplificato limitando lo studio alla regione individuata dal contorno $AA'B'B$ di Fig. 1 e Fig. 2. Il problema enunciato all'inizio si riduce pertanto alla determinazione dei valori del campo magnetico nei vari punti di questa regione.

2. - IMPOSTAZIONE GENERALE DEL PROBLEMA. -

Fissiamo innanzitutto il sistema di riferimento che intendiamo assumere per la definizione delle grandezze magnetiche B ed H . Detto t un asse orientato nella direzione della traslazione della lastra mobile e n un asse normale a questo, assumiamo l'asse z in modo tale che formi con i precedenti una terna ortogonale levogira ($O - tnz$). In tale riferimento le componenti dell'induzione magnetica B e del campo magnetico H saranno denotate coi simboli B^T , B^N , B^Z ed H^T , H^N , H^Z rispettivamente.

Poiché si è supposto il dispositivo magnetico infinitamente esteso nelle direzioni z e t (cfr. Introduzione), sarà $B^Z = H^Z = 0$. In tal modo possiamo introdurre sul piano tn l'angolo

(x) - Collaboratori CNEN

(o) - Assistente ordinario presso l'Istituto di Elettrotecnica dell'Università di Roma

(+) - Lavoro svolto con contributo CNEN nell'ambito del programma per l'ultracentrifuga.

2.

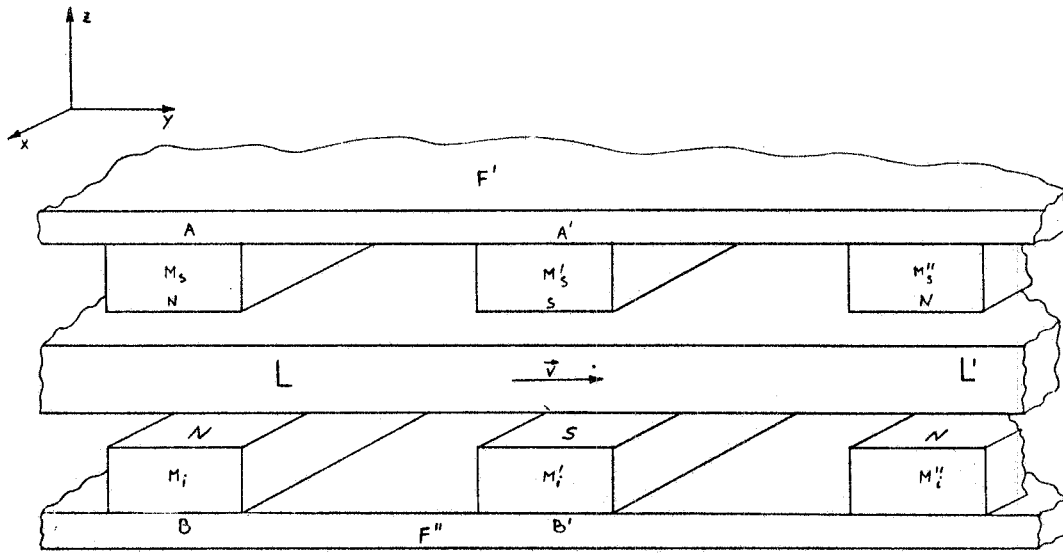


FIG. 1

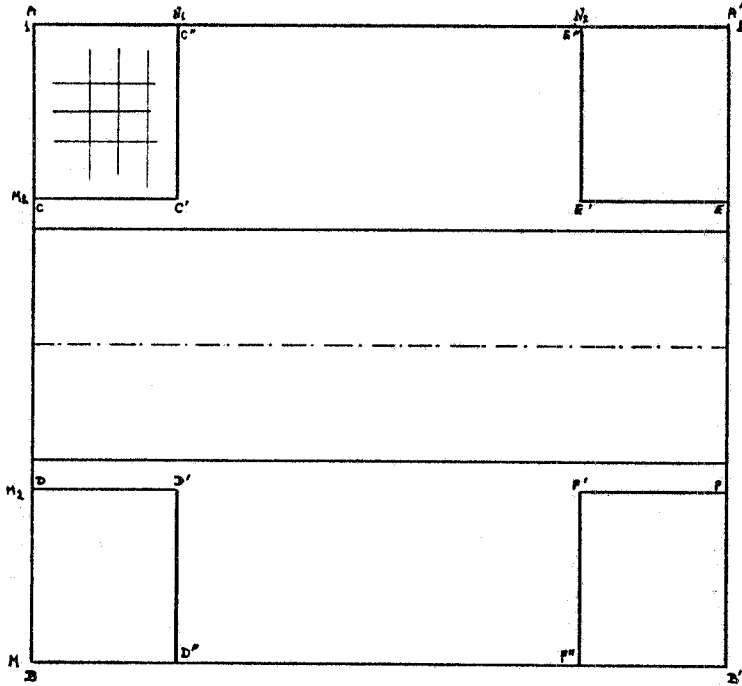


FIG. 2

SINTEROX III

Equazione della caratteristica

$$B = 1.456 \cdot 10^{-6} H + 0.37$$

$$\mu_r = 1.17$$

$$B_r = 0.37$$

H
(Amp/m)

B
(Wb/m²)

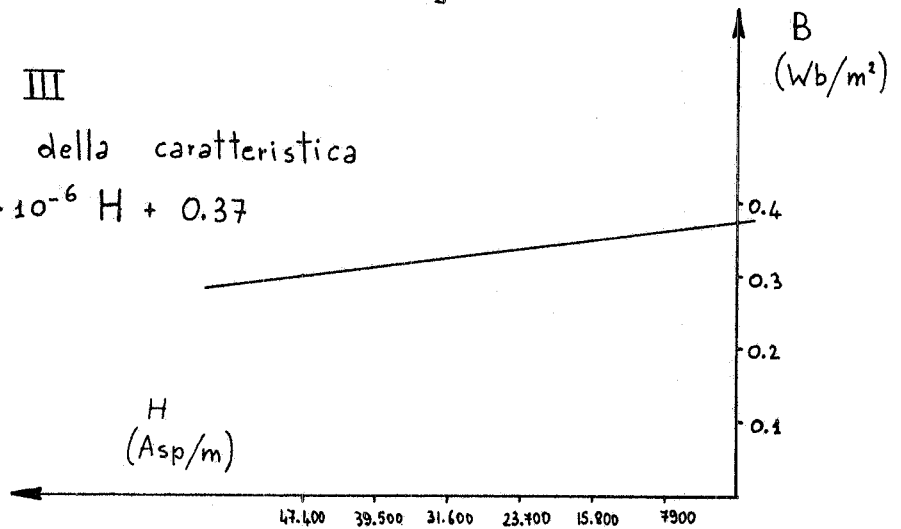


FIG. 3

α che il vettore B forma con la direzione dell'asse $0n$. Pertanto sarà: $\tan \alpha = B^T/B^N$. Con riferimento alla Fig. 2 determiniamo per le varie zone (magnete permanente, aria, lastra mobile, ecc.) della regione delimitata dal contorno $AA'BB'$ le equazioni che legano le induzioni ai campi, e le relative condizioni al contorno sulle superfici di separazione.

Per semplificare il problema assumiamo la permeabilità relativa μ_r del Ferro $F'-F''$ molto elevata rispetto a quella del materiale di cui sono costituiti i magneti permanenti^(x).

Possiamo pertanto ritenere che sulle superfici AA' e BB' le linee di forza del campo e dell'induzione siano normali ad esse, ossia, con la scelta fatta del sistema di riferimento ($O - tnz$)

$$(1) \quad H^T = B^T = 0.$$

Sulle superfici AB ed $A'B'$, per evidenti ragioni di simmetria, i campi (e le induzioni) risultano in valore assoluto uguali e di segno opposto, cioè

$$(2) \quad \bar{H}_P = -\bar{H}_{P'}$$

ove P e P' sono due generici punti corrispondenti sulle superfici AB ed $A'B'$ rispettivamente.

Le equazioni di cui faremo uso per determinare il campo magnetico sono le equazioni seguenti:

$$(3) \quad \text{div } \bar{B} = 0 \quad (5) \quad \bar{B} = \bar{B}_r + \mu \bar{H}$$

$$(4) \quad \text{rot } \bar{H} = \bar{J} \quad (6) \quad \bar{B} = \mu_0 \bar{H}$$

ove \bar{J} è il vettore densità di corrente che viene indotta nella lastra $L-L'$ a causa del "taglio" delle linee di forza del campo stesso esistente tra le espansioni polari, taglio dovuto al moto traslatorio della lamina.

La (5) si differenzia dalla (6), valida nell'aria e nella regione occupata dalla lamina, per la presenza del termine B_r che rappresenta il vettore induzione residua. Osserviamo inoltre che la permeabilità magnetica μ è, per la natura del materiale costituente il magnete, costante e pari a $\mu_0 \mu_r$.

3. - APPROSSIMAZIONE ALLE DIFFERENZE FINITE DELLE EQUAZIONI DEL CAMPO. -

Nel precedente paragrafo si è visto che il problema della determinazione del campo magnetico H e dell'induzione B è risolto dalle equazioni (3), (4), (5) e (6) con le condizioni al contorno (1) e (2). Non essendo il problema ovviamente affrontabile per via analitica, abbiamo ritenuto opportuno procedere a una sua discretizzazione sostituendo alle equazioni (3), (4), (5) e (6) un sistema equivalente di equazioni alle differenze finite.

A tale scopo suddividiamo la regione delimitata dal contorno $AA'BB'$ mediante un reticolo coordinato quadrato di passo a , avente i lati paralleli a quelli del contorno. Il generico nodo del reticolo è individuato dall'indice i -mo di riga e j -mo di colonna (cfr. Fig. 2). Denotemo inoltre con i simboli B_{ij}^T, B_{ij}^N i valori delle componenti B^T, B^N dell'induzione (B) relativa al punto nodale (ij). Analogamente con H_{ij}^T, H_{ij}^N denoteremo le componenti del campo (H) nel punto (ij). Indicheremo poi con α_{ij} l'angolo formato da \bar{B} e dall'asse $0n$ relativo al punto (ij), ossia tale che $\tan \alpha_{ij} = B_{ij}^T/B_{ij}^N$. Infine, per nostra assunzione, i punti nodali (rs) appartenenti alle superfici di separazione magnete-aria, vanno considerati appartenenti al magnete. In tali punti pertanto, i valori B_{rs}^T, B_{rs}^N e H_{rs}^T, H_{rs}^N sono quelli delle componenti B^T, B^N e H^T, H^N relativi al magnete. A proposito della discontinuità subita da \bar{B} e \bar{H} nel passaggio da un mezzo ad un altro attraverso tali superfici limiti, sarà detto nel paragrafo 4. Ciò premesso l'equazione:

$$(7) \quad \text{div } \bar{B} = \frac{\partial B^T}{\partial t} + \frac{\partial B^N}{\partial n} = 0$$

(x) - Il magnete permanente è costituito con materiale sinterizzato (ferrite tipo SYNTEROX 3) la cui caratteristica magnetica è praticamente lineare nel punto di lavoro (v. Fig. 3).

4.

diventa, sostituendo alle derivate i corrispondenti rapporti incrementali,

$$(8) \quad B_{i,j+1}^T = B_{ij}^T - B_{i+1,j}^N + B_{ij}^N.$$

Evidentemente la (8) non è l'unica equazione alle differenze finite che traduca la (7). Tuttavia, tra le varie possibili equazioni equivalenti alla (8) abbiamo scelto, in questa fase del problema, questa perchè, per la sua forma, si presta meglio alla traduzione matriciale del problema che sarà discussa nel paragrafo 5.

Per quanto riguarda la (4) essendo il problema in esame un problema piano, si ha

$$(9) \quad \frac{\partial H^N}{\partial t} - \frac{\partial H^T}{\partial n} = J_z$$

essendo

$$J_T = J_N = 0$$

Alle differenze finite la (9) diventa:

$$(10) \quad \frac{1}{a} \left[(H_{i,j+1}^N - H_{ij}^N) - (H_{i+1,j}^T - H_{i,j}^T) \right] = J_{zij}.$$

L'espressione di J_{zij} si ottiene dalla relazione che fornisce la f. e. m. indotta in un conduttore in moto con velocità v in un campo magnetico di induzione B . Questa si scrive

$$e = \bar{v} \wedge \bar{B} \times d\bar{l}$$

dove $d\bar{l}$ rappresenta il generico elemento di lunghezza del conduttore. Nel caso in esame e con la particolare scelta fatta per il riferimento, si ha ($l = 1$):

$$J_z = \frac{e}{\rho l} = \frac{v \mu_0 H^N}{\rho}$$

pertanto

$$J_{zij} = \frac{v \mu_0}{\rho} H_{ij}^N.$$

In tal modo la (10) diventa:

$$(11) \quad H_{i,j+1}^N = \left(1 + \frac{a \mu_0 v}{\rho}\right) H_{ij}^N + H_{i+1,j}^T - H_{ij}^T.$$

La (5) fornisce per il generico punto (ij) del reticolo, le due relazioni:

$$(12) \quad B_{ij}^T = \mu H_{ij}^T + B_r \sin \alpha_{ij}; \quad B_{ij}^N = \mu H_{ij}^N + B_r \cos \alpha_{ij}$$

Le (12) sostituiscono le relazioni utilizzate nell'aria:

$$(13) \quad B_{ij}^T = \mu_0 H_{ij}^T; \quad B_{ij}^N = \mu_0 H_{ij}^N.$$

Nelle (12) con α_{ij} , si è indicato l'angolo che il vettore \bar{B} forma con l'asse O_n nel punto (ij), angolo misurato positivamente in senso antiorario.

4. - RIFRAZIONE DELLE LINEE DI FORZA DEI VETTORI \bar{H} E \bar{B} NEL PASSAGGIO ATTRAVERSO LE SUPERFICI DI SEPARAZIONE MAGNETE PERMANENTE - ARIA. -

Con riferimento alla Fig. 2, le note condizioni di continuità per le componenti dei vettori B e H in corrispondenza del passaggio attraverso le superfici di separazione magnete permanente - aria, si scrivono nel modo seguente:

$$(14) \quad H_{aria}^T = H_{Ferro}^T ; \quad B_{aria}^N = B_{Ferro}^N$$

per i punti delle superfici CC', E'E, DD', F'F, e :

$$(15) \quad H_{aria}^N = H_{Ferro}^N ; \quad B_{aria}^T = B_{Ferro}^T$$

per i punti delle superfici C'C", E'E", D'D", F'F".

Le equazioni (8) e (11) sono valide nella forma in cui sono scritte, solo se i quattro termini che vi figurano sono riferiti ad uno stesso mezzo, cioè solo se i punti reticolari (ij), (ij+1), (i+1j) appartengono alla regione di spazio occupata da uno stesso mezzo. Pertanto le superfici di separazione magnete-aria (cfr. Fig. 1) sono superfici di discontinuità per le equazioni precedenti. Possiamo estendere il campo di validità di esse introducendo le condizioni di continuità (14) e (15).

E' facile vedere che per la riga i corrispondente alle superfici CC' ed E'E la (8) e la (11) diventano rispettivamente :

$$(16) \quad B_{i j+1}^T = B_{ij}^T - \mu_r B_{i+1 j}^N + \mu_r B_{ij}^N + B_r \sin \alpha_{i j+1} - B_r \sin \alpha_{ij}$$

$$(17) \quad H_{i j+1}^N = A H_{ij}^N + \frac{1}{\mu_r} H_{i+1 j}^T - \frac{1}{\mu_r} H_{ij}^T + \frac{A}{\mu} B_r \cos \alpha_{ij} - \frac{1}{\mu} B_r \cos \alpha_{i j+1}$$

Analogamente per la colonna j corrispondente alle superfici C'C" e D'D" le (8) e (11) diventano rispettivamente :

$$(18) \quad B_{i j+1}^T = B_{ij}^T + \frac{1}{\mu_r} B_{ij}^N - \frac{1}{\mu_r} B_{i+1 j}^N + \frac{B_r}{\mu_r} \cos \alpha_{i+1 j} - \frac{B_r}{\mu_r} \cos \alpha_{ij}$$

$$(19) \quad H_{i j+1}^N = A H_{ij}^N + \mu_r H_{i+1 j}^T + \frac{1}{\mu_o} B_r \sin \alpha_{i+1 j} - \mu_r H_{ij}^T - \frac{1}{\mu_o} B_r \sin \alpha_{ij} .$$

Nelle precedenti equazioni si è indicato con A il termine

$$1 + \frac{a \mu_o v}{\rho} .$$

Si constata anche facilmente che le (8) e (11) continuano a valere nella loro forma sulle superfici DD', F'F e E'E", F'F".

5. - ESPRESSIONE MATRICIALE DELLE EQUAZIONI DEL CAMPO ALLE DIFFERENZE FINITE. -

Le equazioni (16) e (19) possono essere scritte in forma matriciale nel modo seguente :

$$(20) \quad \left| B_{j+1}^T \right| = \left| B_j^T \right| + M_j' \left| B_j^N \right| + \left| U_{j+1} \right|$$

$$(21) \quad \left| H_{j+1}^N \right| = A \left| H_j^N \right| - M_j'' \left| H_j^T \right| + \left| V_{j+1} \right|$$

mentre le (12) e (13) si scrivono :

$$(22) \quad \left| B_j^T \right| = \mu_j \left| H_j^T \right| + \left| S_j \right|$$

$$(23) \quad \left| B_j^N \right| = \mu_j \left| H_j^N \right| + \left| C_j \right| .$$

Nelle equazioni precedenti con la scrittura $|B_j^T|$ e analoghe si è indicato il vettore-colonna di dimensione $(m \times 1)$. Allo scopo di chiarire il significato delle matrici M_j' , M_j'' e dei vettori $|U_j|$ e $|V_j|$, osserviamo che per quanto detto nel paragrafo 4 e per quanto diremo più avanti è conveniente suddividere la regione in cui si studia il problema in 5 parti (Cfr. Fig. 1) delimitate verticalmente dalle colonne qui sotto indicate :

- I) j da 1 + N1-1
- II) j la N1-esima
- III) j da N1+1 + N2-1
- IV) j la N2-esima
- V) j da N2 + 1 + N .

Nelle zone I), IV) e V) si ha :

$$M_j'(m \times m) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_r & -\mu_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{riga M1-ma}$$

$$M_j''(m \times m) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\mu_r} & -\frac{1}{\mu_r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{riga M1-ma}$$

$$|U_j| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad |V_j| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{(mxs)}$$

$$|U_j| = \begin{vmatrix} B_r \sin \alpha_{M1, j+1} \\ - B_r \sin \alpha_{M1, j} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad |V_j| = \begin{vmatrix} \frac{A}{\mu} B_r \cos \alpha_{M1, j} \\ - \frac{1}{\mu} B_r \cos \alpha_{M1, j+1} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

Nella zona II) si ha :

$$M_j' = \frac{1}{\mu_r} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(26) \quad |S_j| = B_r \begin{vmatrix} \sin \alpha_{1j} \\ \sin \alpha_{2j} \\ \dots\dots\dots \\ \sin \alpha_{M_1j} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \sin \alpha_{M_2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sin \alpha_{M_j} \end{vmatrix} ; \quad |C_j| = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{1j} \\ \cos \alpha_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cos \alpha_{M_1j} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \cos \alpha_{M_2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cos \alpha_{M_j} \end{vmatrix}$$

Nella zona III) si ha :

$$(27) \quad \|\mu_j\| = \begin{vmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & \mu_0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 & \dots\dots\dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & \mu_0 \end{vmatrix}$$

$$|S_j| = |C_j| = 0$$

Sostituendo le (24) nella (20) si ottiene :

$$\|\mu_{j+1}\| |H_{j+1}^T| + |S_{j+1}| = \|\mu_j\| |H_j^T| + |S_j| + M'_j \|\mu_j\| |H_j^N| + M'_j |C_j| + |U_{j+1}|$$

ossia :

$$(28) \quad |H_{j+1}^T| = \|\mu_{j+1}\|^{-1} \|\mu_j\| |H_j^T| + \|\mu_{j+1}\|^{-1} M'_j \|\mu_j\| |H_j^N| + \|\mu_{j+1}\|^{-1} \left[|S_j| - |S_{j+1}| + M'_j |C_j| + |U_{j+1}| \right]$$

A questo punto è conveniente introdurre, per ragioni di semplicità di scrittura, le seguenti notazioni :

$$(29) \quad (j) = \|\mu_j\|$$

$$(j+1, j) = \|\mu_{j+1}\|^{-1} \|\mu_j\|$$

$$|T_{j+1}| = \|\mu_{j+1}\|^{-1} \left[|S_j| - |S_{j+1}| + M'_j |C_j| + |U_{j+1}| \right]$$

Con tali notazioni le equazioni (21) e (28), atte a determinare il campo magnetico, si scrivono :

$$(30) \quad |H_{j+1}^T| = (j+1, j) |H_j^T| + (j+1)^{-1} M'_j (j) |H_j^N| + |T_{j+1}|$$

$$(31) \quad |H_{j+1}^N| = A |H_j^N| - M''_j |H_j^T| + |V_{j+1}|$$

Le precedenti (30) e (31) costituiscono un sistema di $2(N-1)$ equazioni nelle $2(N-1)$ incognite H_j^T e H_j^N . Esse sono suscettibili di essere espresse in una forma matriciale compatta molto significativa. Si scrivano, infatti, le suddette per $j=1, 2, \dots (N-1)$, portando a primo membro tutte le incognite. Si avrà:

$$\begin{aligned}
(2, 1) & \left| H_1^T \right| + (2)^{-1} M'_1(1) \left| H_1^N \right| - \left| H_2^T \right| = - \left| T_2 \right| \\
& - M''_1 \left| H_1^T \right| + A \left| H_1^N \right| - \left| H_2^N \right| = - \left| V_2 \right| \\
(3, 2) & \left| H_2^T \right| + (3)^{-1} M'_2(2) \left| H_2^N \right| - \left| H_3^T \right| = - \left| T_3 \right| \\
& - M''_2 \left| H_2^T \right| + A \left| H_2^N \right| - \left| H_3^N \right| = - \left| V_3 \right| \\
(4, 3) & \left| H_3^T \right| + (4)^{-1} M'_3(3) \left| H_3^N \right| - \left| H_4^T \right| = - \left| T_4 \right| \\
& - M''_3 \left| H_3^T \right| + A \left| H_3^N \right| - \left| H_4^N \right| = - \left| V_4 \right| \\
& \dots \\
(N, N-1) & \left| H_{N-1}^T \right| + (N)^{-1} M'_{N-1}(N-1) \left| H_{N-1}^N \right| - \left| H_N^T \right| = - \left| T_N \right| \\
& - M''_{N-1} \left| H_{N-1}^T \right| + A \left| H_{N-1}^N \right| - \left| H_N^N \right| = - \left| V_N \right|
\end{aligned}$$

ove $\left| H_N^T \right| = - \left| H_1^T \right|$ e $\left| H_N^N \right| = - \left| H_1^N \right|$ per la (8).

Il sistema di equazioni (32) può scriversi in forma matriciale compatta nel modo che segue :

$$(33) \quad B X = Y$$

ove B, X, Y sono espressi da :

$$B = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccccc} (2, 1) & (2)^{-1} M'_1(1) & -I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ - M''_1 & A & 0 & -I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3, 2) & (3)^{-1} M'_2(2) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - M''_2 & A & 0 & -I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N, N-1) & (N)^{-1} M'_{N-1}(N-1) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & - M''_{N-1} & A & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} |H_1^T| \\ |H_1^N| \\ |H_2^T| \\ |H_2^N| \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ |H_{N-1}^T| \\ |H_{N-1}^N| \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -|T_2| \\ -|V_2| \\ -|T_3| \\ -|V_3| \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -|T_N| \\ -|V_N| \end{pmatrix}$$

Le precedenti meritano alcune considerazioni. La matrice del sistema (32), B, è una matrice a blocchi, i cui singoli elementi sono matrici (mxm). I vettori delle incognite X e quello dei termini noti Y hanno come elementi vettori (mx1).

Pertanto può ancora applicarsi, per la risoluzione del sistema (33) il metodo di Cramer, purchè gli elementi del vettore Y siano moltiplicati per la matrice unitaria I (mxm) lasciando tale prodotto indicato, dato che tale vettore, nel metodo suddetto, va a sostituire ordinatamente, le colonne della matrice C, che in questo caso hanno come elementi matrici (mxm).

Per quanto ora detto, l'applicazione di questo metodo, risulta estremamente laboriosa, anche con l'ausilio di un elaboratore, per cui si è preferito risolvere le (30) e (31) mediante un procedimento iterativo di sostituzione che è riportato nel paragrafo successivo.

7. - RISOLUZIONE DEL SISTEMA (30), (31) E DETERMINAZIONE DEI VETTORI $|H_j^T|$, $|H_j^N|$ PER $j = 1, \dots, N$.

Data la forma delle (30) e (31), che mettono tra loro in relazione grandezze di una colonna generica con le omologhe della colonna precedente, ci proponiamo di ricavare l'espressione che fornisca il legame tra grandezze della prima colonna e quella di una generica colonna successiva ad essa. Per far ciò scriviamo successivamente per $j = 1, 2, 3, \dots$ le (30) e (31). Si ha:

$$(34) \quad \begin{aligned} |H_2^T| &= (2,1) |H_1^T| + (2)^{-1} M_1'(1) |H_1^N| + |T_2| \\ |H_2^N| &= A |H_1^N| - M_1'' |H_1^T| + |V_2| \end{aligned}$$

Tenuto conto delle precedenti si ha successivamente:

$$(35) \quad \begin{aligned} |H_3^T| &= (3,2) |H_2^T| + (3)^{-1} M_2'(2) |H_2^N| + |T_3| \\ |H_3^N| &= A |H_2^N| - M_2'' |H_2^T| + |V_3| \end{aligned}$$

Esprimendo le (35) mediante le (34) si ottiene:

$$(36) \quad \begin{aligned} H_3^T &= \left[(3,2)(2,1) - (3)^{-1} M_2'(2) M_1'' \right] |H_1^T| + \left[(3,2)(2)^{-1} M_1'(1) + (3)^{-1} M_2'(2) A \right] |H_1^N| + \\ &+ |T_3| + (3,2) |T_2| + (3)^{-1} M_2'(2) |V_2| \end{aligned}$$

$$(36) \quad \left| H_3^N \right| = \left[-M_2''(2,1) - A M_1'' \right] \left| H_1^T \right| + \left[-M_2''(2)^{-1} M_1'(1) + A^2 \right] \left| H_1^N \right| + \left| V_3 \right| + A \left| V_2 \right| - M_2'' \left| T_2 \right|$$

Le (36) si possono scrivere in forma più compatta :

$$(37) \quad \begin{aligned} \left| H_3^T \right| &= W_1 \left| H_1^T \right| + Z_1 \left| H_1^N \right| + \left| V_3^T \right| \\ \left| H_3^N \right| &= A_1 \left| H_1^N \right| + M_1 \left| H_1^T \right| + \left| V_3^N \right| \end{aligned}$$

ove si ha :

$$(38) \quad \begin{aligned} W_1 &= (3,2)(2,1) - (3)^{-1} M_2'(2) M_1'' \\ Z_1 &= (3,2)(2)^{-1} M_1''(1) + (3)^{-1} M_2'(2) A \\ \left| V_3^T \right| &= \left| T_3 \right| + (3,2) \left| T_2 \right| + (3)^{-1} M_2'(2) \left| V_2 \right| \\ A_1 &= A^2 E - M_2''(2)^{-1} M_1'(1) \\ M_1 &= A M_1'' + M_2''(2,1) \\ \left| V_3^N \right| &= \left| V_3 \right| + A \left| V_2 \right| - M_2'' \left| T_2 \right| \end{aligned}$$

avendo indicato con E la matrice unitaria (MxM).

Analogamente possiamo scrivere :

$$(39) \quad \begin{aligned} \left| H_4^T \right| &= W_2 \left| H_1^T \right| + Z_2 \left| H_1^N \right| + \left| V_4^T \right| \\ \left| H_4^N \right| &= A_2 \left| H_1^N \right| - M_2 \left| H_1^T \right| + \left| V_4^N \right| \end{aligned}$$

ove

$$(40) \quad \begin{aligned} W_2 &= (4,3)W_1 - (4)^{-1} M_3'(3) M_1 \\ Z_2 &= (4,3)Z_1 + (4)^{-1} M_3'(3) A_1 \\ \left| V_4^T \right| &= \left| T_4 \right| + (4)^{-1} M_3'(3) \left| V_3^N \right| + (4,3) \left| V_3^T \right| \\ A_1 &= A A_1 - M_3'' Z_1 \\ M_2 &= A M_1 + M_3'' W_1 \\ \left| V_4^N \right| &= \left| V_4 \right| + A \left| V_3^N \right| - M_3'' \left| V_3^T \right| \end{aligned}$$

Possiamo pertanto dedurre dalle precedenti, salvo una successiva verifica per via induttiva, le seguenti formule iterative :

$$(41) \quad \begin{aligned} \left| H_k^T \right| &= W_{k-2} \left| H_1^T \right| + Z_{k-2} \left| H_1^N \right| + \left| V_k^T \right| \\ \left| H_k^N \right| &= A_{k-2} \left| H_1^N \right| - M_{k-2} \left| H_1^T \right| + \left| V_k^N \right| \end{aligned}$$

ove :

$$\begin{aligned}
 W_{k-2} &= (k, k-1)W_{k-3} - (k)^{-1}M'_{k-1}(k-1)M_{k-3} \\
 Z_{k-2} &= (k, k-1)Z_{k-3} + (k)^{-1}M'_{k-1}(k-1)A_{k-3} \\
 A_{k-2} &= A A_{k-3} - M''_{k-1} Z_{k-3} \\
 M_{k-2} &= A M_{k-3} + M''_{k-1} W_{k-3} \\
 \left| V_k^T \right| &= \left| T_k \right| + (k, k-1) \left| V_{k-1}^T \right| + (k)^{-1}M'_{k-1}(k-1) \left| V_{k-1}^N \right| \\
 \left| V_k^N \right| &= \left| V_k \right| + A \left| V_{k-1}^N \right| - M''_{k-1} \left| V_{k-1}^T \right|
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

ove si ponga :

$$\begin{aligned}
 W_0 &= (2, 1) & M_0 &= M''_1 \\
 Z_0 &= (2)^{-1}M'_1(1) & \left| V_2^T \right| &= \left| T_2 \right| \\
 A_0 &= A & \left| V_2^N \right| &= \left| V_2 \right|
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Le (42) si possono provare col metodo di induzione diretta : infatti esse sono vere per $k=3$. Pertanto basterà far vedere che, supposte vere per k , lo siano anche per $k+1$. Infatti dalle (30) si ha :

$$\begin{aligned}
 \left| H_{k+1}^T \right| &= (k+1, k) \left| H_k^T \right| + (k+1)^{-1}M'_k(k) \left| H_k^N \right| + T_{k+1} = (k+1, k) \left[W_{k-2} \left| H_1^T \right| + \right. \\
 &+ \left. Z_{k-2} \left| H_1^N \right| + \left| V_k^T \right| \right] + (k+1)^{-1}M'_k(k) \left[A_{k-2} \left| H_1^N \right| - M_{k-2} \left| H_1^T \right| + \left| V_k^N \right| \right] + \left| T_{k+1} \right| = \\
 &= \left[(k+1, k)W_{k-2} - (k+1)^{-1}M'_k(k)M_{k-2} \right] \left| H_1^T \right| + \left[(k+1)^{-1}M'_k(k) + (k+1, k)Z_{k-2} \right] \left| H_1^N \right| + \\
 &+ \left| T_{k+1} \right| + (k+1, k) \left| V_k^T \right| + (k+1)^{-1}M'_k(k) \left| V_k^N \right|
 \end{aligned}$$

che è la I^a delle (41) scritta per $k=k+1$ quando per W_{k-1} , Z_{k-1} e $\left| V_{k+1}^T \right|$ si assumono le espressioni (42).

In modo del tutto analogo si dimostra la validità della seconda delle (41). Pertanto le (41) insieme con le (42) forniscono il legame cercato tra i valori di $\left| H^T \right|$ e $\left| H^N \right|$ sulla generica colonna k -ma e quelli sulla I^a colonna. In particolare sulla colonna N -ma dovrà aversi per le (2) :

$$\left| H_N^T \right| = - \left| H_1^T \right| \quad \text{e} \quad \left| H_N^N \right| = - \left| H_1^N \right| .$$

Pertanto :

$$\begin{aligned}
 - \left| H_1^T \right| &= W_{N-2} \left| H_1^T \right| + Z_{N-2} \left| H_1^N \right| + \left| V_N^T \right| \\
 - \left| H_1^N \right| &= A_{N-2} \left| H_1^N \right| - M_{N-2} \left| H_1^T \right| + \left| V_N^N \right|
 \end{aligned}$$

ossia :

$$\begin{aligned}
 \left[W_{N-2} + E \right] \left| H_1^T \right| + Z_{N-2} \left| H_1^N \right| &= - \left| V_N^T \right| \\
 \left[A_{N-2} + E \right] \left| H_1^N \right| - M_{N-2} \left| H_1^T \right| &= - \left| V_N^N \right|
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Dalla I^a delle (44) si ottiene :

$$\left| H_1^T \right| = - \left[W_{N-2} + E \right]^{-1} \left[Z_{N-2} \left| H_1^N \right| + \left| V_N^T \right| \right]$$

e dalla II^a :

$$\left[A_{N-2} + E \right] \left| H_1^N \right| + M_{N-2} \left[W_{N-2} + E \right]^{-1} \left[Z_{N-2} \left| H_1^N \right| + \left| V_N^T \right| \right] = - \left| V_N^N \right|$$

ossia :

$$(45) \quad L \left| H_1^N \right| = G$$

ove :

$$L = A_{N-2} + E + M_{N-2} \left[W_{N-2} + E \right]^{-1} Z_{N-2}$$

$$G = - \left| V_N^N \right| - M_{N-2} \left[W_{N-2} + E \right]^{-1} \left| V_N^T \right| .$$

Risolto il sistema (45) si ottengono i valori di H_1^N , mentre quelli di H_1^T si ottengono da questi tramite una delle (44).

8. - DISCUSSIONE CRITICA DEI RISULTATI. -

Sulla base del grafo di flusso allegato alla presente relazione, è stato messo a punto un programma FORTRAN. Sono state quindi eseguite numerose prove presso il calcolatore UNIVAC 1108 del Centro di Calcolo Interfacoltà di Roma, tuttavia i risultati ottenuti non sono soddisfacenti, giacchè si è riscontrato che col crescere del numero di iterazione, i valori di H_1^T e H_1^N risultavano oscillanti tra valori positivi e negativi senza una rispondenza con fatti fisici reali. Ciò è dovuto probabilmente alle elevate dimensioni delle matrici con cui si è operato (24 x 24) e al fatto che queste di per sè risultano "mal condizionate" (cioè con elementi di ordini di grandezza molto diversi tra loro). Infatti i risultati delle operazioni di inversione delle matrici e di risoluzione dei sistemi di equazioni erano affetti da gravi errori di troncamento (pur operando il programma in doppia precisione). Dato l'elevato numero di operazioni di tipo ripetitivo, tali errori di troncamento si propagavano in modo da rendere invalidi i risultati finali. Questi infatti, in particolare i valori di H_{ij}^T e H_{ij}^N , presentavano un andamento decrescente in modulo al crescere dell'indice i .

Secondo l'opinione degli scriventi, il metodo, pur valido da un punto di vista teorico generale, mal si presta a una elaborazione numerica così come è formulato. D'altra parte una riduzione del numero dei punti reticolari, se da un lato potrebbe portare a una diminuzione della entità degli errori di troncamento, dall'altro renderebbe privi di significato i risultati ottenuti. Infatti in tal caso il passo reticolare avrebbe dimensioni tali da rendere vana la indagine dal punto di vista fisico in quanto sarebbe compromessa la validità stessa delle equazioni alle differenze finite che approssimano le equazioni differenziali del problema.

A parere degli scriventi il metodo, alla luce di questa indagine critica, andrebbe opportunamente integrato con adeguati criteri di attenuazione degli errori, oppure sostituito da un metodo numerico diverso che operi anzichè sui vettori \bar{H} e \bar{B} sulla funzione potenziale (scalare o vettore) quale ad esempio il "metodo del rilassamento".

Tuttavia l'indagine effettuata con il presente lavoro trova la sua importanza in quanto costituisce un'analisi critica sui limiti di applicabilità di metodi numerici alla risoluzione di problemi in termini differenziali approssimati alle differenze finite.

Gli autori desiderano ringraziare il Prof. G. Sacerdoti, al quale è da ascrivere l'originalità del metodo numerico illustrato, per i suggerimenti e le utili discussioni avute durante lo svolgimento del lavoro.

APPENDICE: Calcolo di massima della forza di sostentamento per unità di superficie relativa alla sospensione magnetica di cui alla Fig. 1.

Con riferimento alla configurazione geometrica illustrata in Fig. 1, è possibile valutare in prima approssimazione l'entità della forza di sostentamento che la successione inferiore di magneti permanenti, a polarità alternate, esercita sulla lastra conduttrice traslante con velocità uniforme v . Osservando la Fig. 4 e tenendo presente la simbologia ivi riportata è possibile esprimere tale forza di sostentamento per unità di superficie affacciata della lastra (dimensioni unitarie nelle direzioni degli assi x e y) come indicato nella relazione (A. 2).

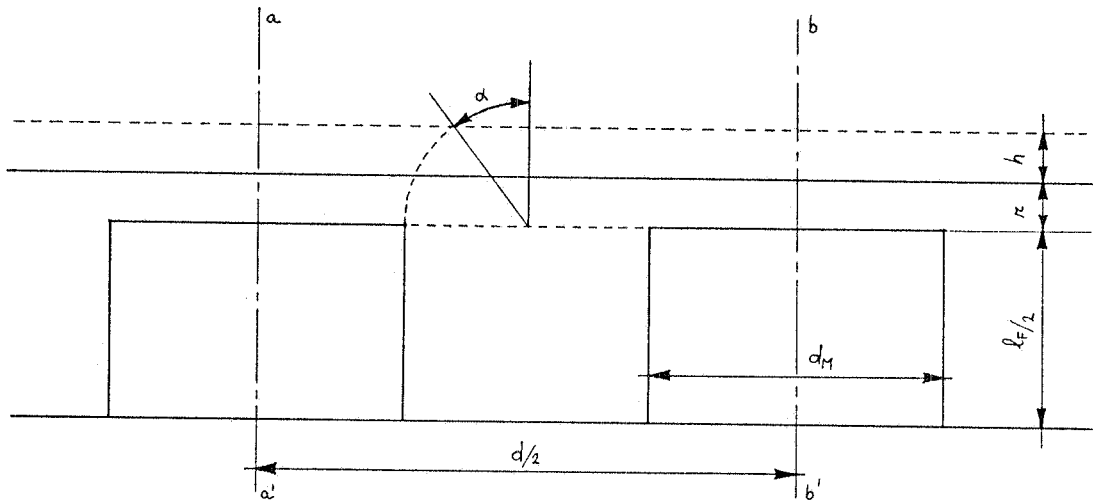


FIG. 4

Detta forza risulta sostanzialmente diversa da zero solo quando l'entità (r) del traferro è inferiore a $(d/4 - h)$, ove h rappresenta la penetrazione della corrente nella lastra pari ad

$$(A. 1) \quad h = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho d 10^{+3}}{\mu_r v}}$$

ed avendosi inoltre h in cm se è:

- ρ = resistività della lastra in $\mu\Omega$ cm
- d = distanza tra gli assi di due magneti omologhi in m
- v = velocità di traslazione della lastra in m/s
- μ_r = permeabilità relativa della lastra.

Per un generico valore di r inferiore a $(d/4 - h)$ la forza di sostentamento esercitata per unità di superficie della lastra è data dall'espressione:

$$(A. 2) \quad F = k \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

ove k è un coefficiente di proporzionalità che tiene conto dell'annullarsi del sostentamento per $r = d/4 - h$. A k si può dare la seguente espressione:

$$k = \text{sen } \alpha = \frac{4}{d} \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 - (r+h)^2}$$

B_0 è il valore medio di induzione nel traferro in prossimità della lastra. Per una sua valutazione in prima approssimazione, essendo B_0 funzione sia del traferro che delle caratteristiche dei magneti permanenti oltre che delle loro dimensioni geometriche, possiamo procedere nel seguente modo

$$B_0 = \frac{B_F S_F}{S_0}$$

ove B_F è il valore medio di induzione sulla faccia del magnete, determinabile intersecando la caratteristica B-H del materiale magnetico di cui è realizzato (v. Fig. 3) con la retta di lavoro del magnete stesso.

L'inclinazione di tale retta è determinabile mediante il teorema della circuitazione che fornisce la seguente relazione

$$\frac{B_F}{\mu_0} \frac{S_F}{S_0} \frac{l_0}{l_F} + H_F = 0$$

S_F rappresenta la sezione del tubo di flusso nel magnete ed è

$$S_F = \frac{dm}{2} \cdot 1$$

S_0 rappresenta la sezione media dello stesso tubo di flusso in aria e in prima approssimazione si può esprimere con

$$S_0 = \frac{d}{4} \cos \alpha \cdot 1$$

l_0 , la lunghezza del tubo di flusso in aria, vale

$$l_0 = \frac{d}{2} \sin \alpha .$$

In seguito al movimento traslatorio della lastra si origina oltre ad una forza di sostentamento anche una forza resistente nella direzione del moto e ovviamente in verso contrario ad esso. Tale forza resistente trova la sua spiegazione nella circolazione di una corrente nello strato di lastra alto h ; corrente originata dal taglio delle linee del campo magnetico.

Una valutazione della potenza dissipata da questa corrente per unità di superficie della lamina è esprimibile con la seguente formula:

$$P = \frac{B_0^2 v^2 h}{\rho (d + 4)} \quad \text{watt/m}^2$$

ove i simboli hanno il significato sopra riportato.

Per valutare la forza che si oppone al moto della lastra è sufficiente dividere la precedente per v , da cui:

$$F_r = \frac{B_0^2 v h}{\rho (d + 4)} \quad \text{N/m}^2$$

Riportiamo a questo punto i valori numerici attribuiti ai parametri fisici e geometrici in gioco:

$$d = 110 \text{ mm}; \quad d_m = 30 \text{ mm}; \quad l_F = 40 \text{ mm}; \quad v = 20 \text{ m/sec};$$

$$\rho = 0.03 \text{ } \Omega \text{ mm}^2/\text{m}; \quad \mu = 1.256 \times 10^{-6} \text{ h/m}; \quad \mu_r = 1.17.$$

E' stato compilato un programma in FORTRAN per determinare i valori di F al variare di r , limitando i calcoli a valori di traferro non inferiori a 2 mm, dato che le approssimazioni fatte tenderebbero invalidi i risultati per traferri più piccoli.

Si è inoltre studiata l'influenza che variazioni della natura della lamina, o della sua velocità, o della geometria dei magneti esercitano sulla entità della forza di sostentamento. Si è considerata una lastra di rame, anzichè di alluminio ($\rho = 0.02 \text{ } \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$).

Si è poi fatta variare la velocità della lastra di Al, portandola ai due valori di 10 m/sec e 100 m/sec. Infine si sono variati i parametri d (100-120 mm), d_m (25-35 mm) e l_F (35-45 mm).

I risultati finali di tali calcoli sono riportati nei diagrammi allegati. In particolare si ha:

Fig. 5 - curva 1 : forza di sostentamento nel caso di lamina in Cu ;
 curva 2 : forza di sostentamento nel caso di lamina in Al.

Fig. 6 - curva 1 : forza di sostentamento nel caso di lamina in Al con $v = 100$ m/sec ;
 curva 2 : idem come sopra con $v = 20$ m/sec ;
 curva 3 : idem come sopra con $v = 10$ m/sec.

Fig. 7 - curva 1 : forza di sostentamento nel caso di lamina in Al con una larghezza del magnete $d_M = 35$ mm ;
 curva 2 : idem come sopra con $d_M = 30$ mm ;
 curva 3 : idem come sopra con $d_M = 25$ mm.

Fig. 8 - curva 1 : forza di sostentamento nel caso di lamina in Al con una altezza del magnete $l_F = 45$ mm ;
 curva 2 : idem come sopra con $l_F = 40$ mm ;
 curva 3 : idem come sopra con $l_F = 35$ mm.

Fig. 9 - curva 1 : forza di sostentamento nel caso di lamina in Al con interasse dei magneti $d = 100$ mm ;
 curva 2 : idem come sopra con $d = 110$ mm ;
 curva 3 : idem come sopra con $d = 120$ mm.

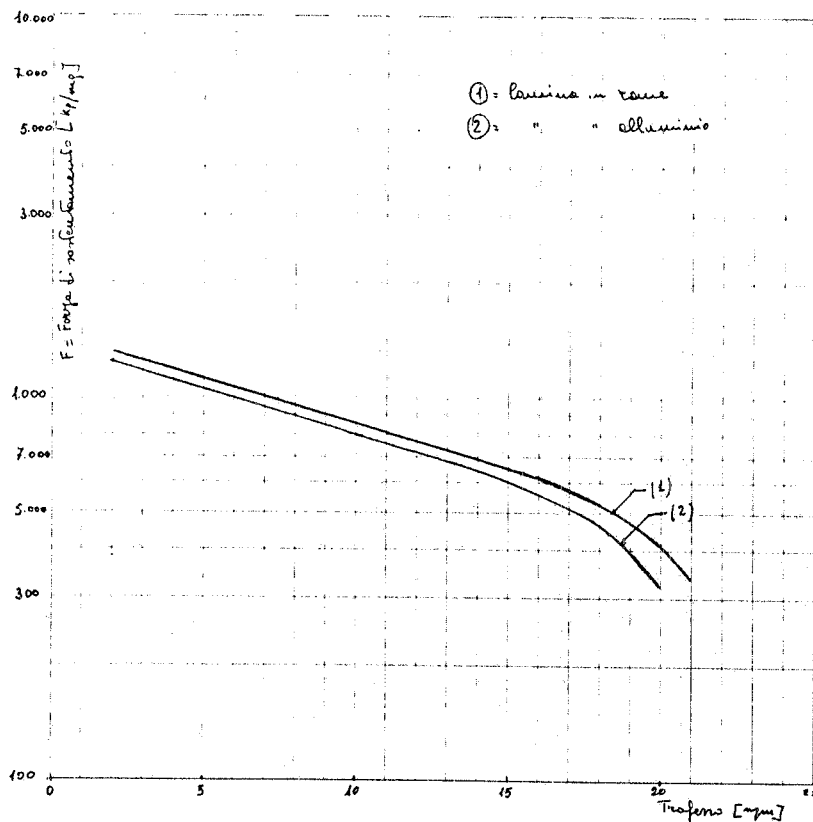


FIG. 5

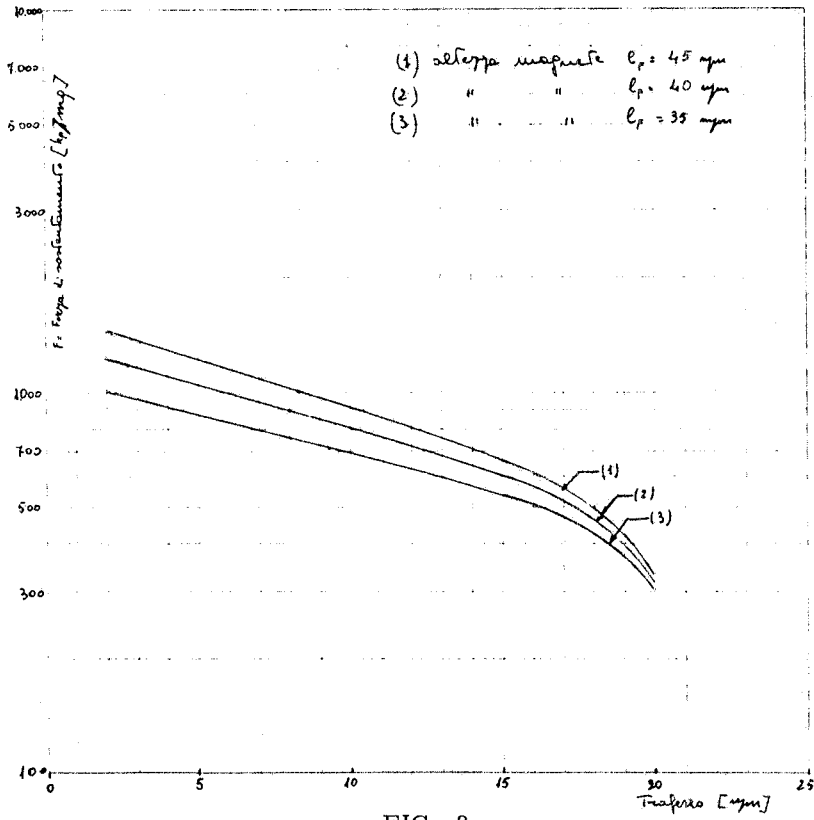


FIG. 8

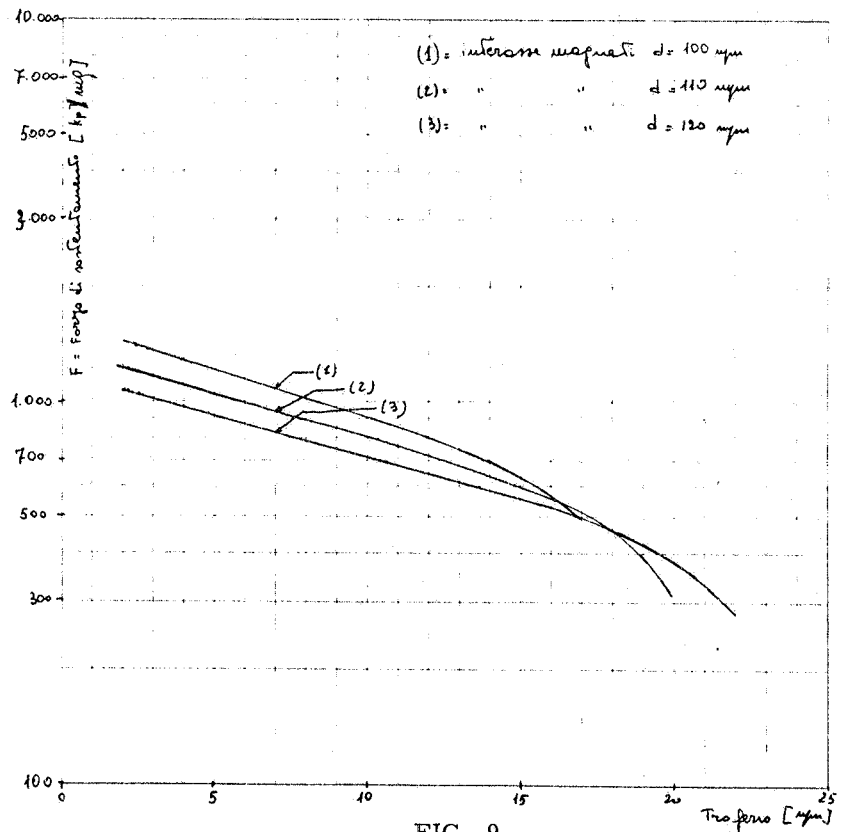


FIG. 9

