COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-71/81
29 Novembre 1971

G. Sanna : L'OTTICA DEGLI SPETTROMETRI MAGNETICI NELLA APPROSSIMAZIONE DEL PRIMO E SECONDO ORDINE. - Parte I^{a} : LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLE TRAIETTORIE IN FORMA ESATTA. -

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Servizio Documentazione

LNF-71/81
29 Novembre 1971

G. Sanna : L'OTTICA DEGLI SPETTROMETRI MAGNETICI NELLA APPROSSIMAZIONE DEL PRIMO E SECONDO ORDINE. -
Parte I^{a} : LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLE TRAIETTORIE IN FORMA ESATTA.

I. 1. - INTRODUZIONE. -

La presente nota fa parte di un gruppo di note interne che saranno pubblicate successivamente e che hanno lo scopo di presentare una analisi quanto più possibile esauriente e semplificata del comportamento "ottico" degli spettrometri magnetici soprattutto per quanto concerne le deviazioni dall'ottica gaussiana.

Le pubblicazioni esistenti su tale argomento presentano spesso lacune considerevoli per quanto riguarda l'organicità e la chiarezza della trattazione e talvolta non forniscono giustificazioni esaurienti sulle approssimazioni introdotte per ottenere i risultati desiderati. Pertanto, pubblicando questa serie di note interne, si è ritenuto di far cosa utile e gradita allo sperimentatore che impiega per la propria ricerca gli spettrometri magnetici.

Particolari argomenti, solitamente poco approfonditi nella letteratura corrente, come lo sviluppo del campo magnetico in "serie di multipoli" ed il significato "ottico" degli stessi, l'analisi dettagliata delle approssimazioni introdotte per ricavare le equazioni differenziali delle traiettorie al 1^{o} e 2^{o} ordine, l'analisi del significato dei termini di aberrazione del 2^{o} ordine (geometrici e cromatici) saranno oggetto di particolare attenzione.

In questa nota, che sarà indicata nel seguito come parte I[a], ci limiteremo a dedurre le equazioni differenziali delle traiettorie in forma esatta. Il procedimento che seguiremo per tale scopo è quello proposto per la prima volta da J. F. Streib[1].

Per valutare meglio i vantaggi di semplificazione ottenuti con questo procedimento accenneremo brevemente al metodo seguito nelle trattazioni classiche dei problemi di ottica corpuscolare. In queste, la traiettoria è determinata sulla base del principio di Maupertuis[2] il quale afferma che la traiettoria τ effettivamente seguita da un corpuscolo tra due punti A e B è tale che il funzionale[x]:

$$T(\tau) = \int_A^B (\vec{p} + q\vec{A}) \cdot \vec{ds}$$

associato con tale traiettoria, assume un valore "minimale".

L'integrando dell'espressione precedente o "funzione variazionale" è poi espresso in un opportuno sistema di coordinate che risulta di particolare utilità per lo studio delle proprietà ottiche di uno spettrometro. Questo sistema fa riferimento ad una particolare traiettoria τ_o che si suppone nota e che viene assunta come "asse ottico". Le coordinate di un punto Q dello spazio sono espresse dall'ascissa curvilinea t su τ_o (a partire da un'origine prefissata) della proiezione P di Q sulla curva e dalle proiezioni r e z di $|\vec{PQ}|$ lungo le direzioni della normale e della binormale o τ_o in P[o]. In queste coordinate la funzione variazionale si scrive:

$$(p + q\ \vec{A} \cdot \vec{u}) \frac{ds}{dt} .$$

Ora, mentre le quantità $\vec{u}$ e ds/dt sono facilmente espresse in forma esatta nelle coordinate t, r, z, altrettanto non può dirsi per ie potenziale vettore $\vec{A}$. Infatti, in linea generale le componenti A_t, A_r, A_z di $\vec{A}$ possono essere ottenute integrando il sistema di tre equazioni differen-

---

(x) - Nell'integrando $\vec{p} = m\vec{v} = mv\vec{u}$ indica la quantità di moto del corpuscolo e q la sua carica elettrica. $\vec{A}$ è il potenziale vettore del campo magnetico e $\vec{ds} = ds\vec{u}$ è l'elemento infinitesimo orientato della traiettoria τ. Ovviamente $\vec{u}$ indica il versore della tangente a τ nel punto generico.

(o) - Questo sistema di coordinate è descritto dettagliatamente nel paragrafo successivo.

ziali scalari corrispondenti alla equazione $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ quando sia nota la legge analitica di variazione nello spazio dell'induzione magnetica. In pratica, a parte la difficoltà che l'integrazione del sistema differenziale anzidetto può presentare per una assegnata forma della legge $\vec{B} = \vec{B}(Q)$, questa è in genere nota soltanto in modo approssimato. Poichè in generale sono note (o misurate) le componenti di $\vec{B}$ e le loro derivate direzionali dei vari ordini sulla traiettoria τ_o, le componenti suddette nel punto generico Q sono espresse in forma approssimata mediante sviluppi in serie di Mac-Laurin delle coordinate r e z[(x)]. Ne consegue che anche le componenti di $\vec{A}$ potranno essere ottenute solo in forma approssimata. Giacchè non è possibile ottenere una espressione esatta per la funzione variazionale sarà pure conveniente esprimere $\vec{u}$ e ds/dt mediante sviluppi in serie delle coordinate nell'intorno di τ_o. In definitiva la funzione anzidetta può soltanto essere espressa in forma approssimata come somma di funzioni di grado crescente delle variabili r, z, dr/dt, dz/dt. Le equazioni differenziali delle traiettorie sono poi ottenute scrivendo le equazioni di Eulero per la funzione variazionale. Queste equazioni sono ottenute nell'ordine di approssimazione desiderato includendo un conveniente numero di termini di grado crescente nella funzione anzidetta[(+)].

A differenza del procedimento descritto, quello proposto da Streib si rifà all'equazione del moto (Newton-Lorentz):

$$\dot{\vec{p}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

e, per eliminazione del tempo, ottiene l'equazione differenziale intrinseca della traiettoria τ[(o)]:

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{q}{p}\,\vec{u} \wedge \vec{B}\,.$$

Le quantità $\vec{u}$ e $d\vec{u}/ds$ sono assai facilmente espresse in forma esatta nel sistema di coordinate precedentemente introdotto e l'induzione magnetica è scritta come somma vettoriale delle sue componenti $\vec{B}_t$, $\vec{B}_r$, $\vec{B}_z$.

(x) - Questo aspetto della trattazione sarà sviluppato in dettaglio nella Parte II^a (successiva nota sull'argomento).

(+) - Per una esposizione più dettagliata di questa procedura cfr. ref. (3).

(o) - Questa deduzione è sviluppata nel paragrafo successivo.

Poichè non è necessario per il momento esplicitare le componenti di $\vec{B}$, le equazioni differenziali scalari corrispondenti all'equazione vettoriale precedente sono determinate in modo semplice ed esatto. Negli sviluppi successivi, allo scopo di ottenere equazioni differenziali approssimate ma di più facile integrazione, alcuni termini delle equazioni esatte e le componenti di $\vec{B}$ possono essere approssimati con un conveniente numero di termini dei relativi sviluppi in serie. Questo procedimento sarà seguito nel corso della nostra trattazione.

II.2. - EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLE TRAIETTORIE ED IPOTESI FONDAMENTALI. -

Come premesso nel § precedente tutte le considerazioni successive sono dedotte dalla equazione differenziale intrinseca della traiettoria τ descritta dal corpuscolo di carica q e massa m che attraversa una distribuzione assegnata $\vec{B} = \vec{B}(Q)$ di induzione magnetica. Questa è immaginata essere stazionaria ed irrotazionale. Indicati con τ il tempo e con $\vec{v}$ e $\vec{p} = m\vec{v}$ rispettivamente la velocità e la quantità di moto del corpuscolo, l'equazione del moto, nell'ipotesi di irraggiamento elettromagnetico trascurabile, si scrive:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = q\,\vec{v} \wedge B \tag{I.1}$$

Indichiamo poi con s l'ascissa curvilinea rispetto ad un punto origine su τ del punto corrente Q e con $\vec{u}$ il versore della tangente o τ in Q. Poichè per uno studio dell'ottica non interessa ricavare la legge oraria $s = s(\tau)$ ma la forma della traiettoria, si può eliminare la dipendenza dal tempo dalla relazione precedente tenendo conto delle relazioni:

$$\vec{v} = v\vec{u}, \quad \vec{p} = p\vec{u}, \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{ds}\,\frac{ds}{d\tau} = v\,\frac{d}{ds}$$

In virtù di queste la (I.1) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{d}{ds}(p\vec{u}) = q\,\vec{u} \wedge \vec{B}\,.$$

Nell'eseguire la derivazione al 1^o membro và osservato che sia $d\vec{u}/ds$ che $\vec{u} \wedge \vec{B}$ sono vettori normali ad $\vec{u}$ e che pertanto deve essere:

$$\frac{dp}{ds} = 0, \qquad \text{ossia} \quad p = \text{cost},$$

come peraltro risulta da elementari considerazioni di dinamica. Con ciò la (I.1) diviene:

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{q}{p}\,\vec{u} \wedge \vec{B}\,. \tag{I.2}$$

L'equazione (I.2), è, come già detto, in forma intrinseca; volendo specificare un riferimento dovremo fissare un polo Ω come origine dei vettori. Si ha allora $\vec{u} = d\,\overrightarrow{\Omega Q}/ds$ e la (I.2) assume la forma di equazione differenziale del 2° ordine:

$$\frac{d^2\overrightarrow{\Omega Q}}{ds^2} = -\frac{q}{p}\,\vec{B}\,(\overrightarrow{\Omega Q}) \wedge \frac{d\overrightarrow{\Omega Q}}{ds} \tag{I.2'}$$

Assegnata quindi la distribuzione di campo $\vec{B} = \vec{B}(\overrightarrow{\Omega P})$ ed il valore del rapporto q/p, per individuare una traiettoria particolare τ di eq. $\overrightarrow{\Omega Q} = \overrightarrow{\Omega P}(s)$, occorre assegnare due condizioni iniziali, ossia un punto A di τ (di vettore $\overrightarrow{\Omega A}$) ed il versore $\vec{u}_A$ della tangente in esso. Cioè gli elementi:

$$\overrightarrow{\Omega Q}(0) = \overrightarrow{\Omega A}$$

$$\frac{d\,\overrightarrow{\Omega Q}}{ds} = \vec{u}_A\,.$$

E' opportuno far osservare che l'equazione vettoriale (I.2) corrisponde, quando sia espressa in qualsiasi sistema di coordinate, a 3 equazioni scalari che legano le diverse componenti di $\vec{u}$ e $d\vec{u}/ds$ tra loro. D'altra parte, per qualsiasi curva la condizione $\vec{u}\cdot(d\vec{u}/ds) = 0$, che esprime la ortogonalità di questi vettori, è automaticamente soddisfatta e fornisce una equazione differenziale supplementare. Pertanto si può fin d'ora antecipare che una tra le tre equazioni scalari corrispondenti alla (I.2) risulterà sovrabbondante.

Nel caso di una distribuzione di campo magnetico dotata di una superficie piana equipotenziale, tale che in ogni suo punto P sia $\vec{B}(P) = B(P)\cdot\vec{b}$ (essendo $\vec{b}$ versore della normale al piano) si può mostrare che scegliendo le condizioni iniziali sul piano in oggetto, la traiettoria τ seguita dalla particella, è completamente contenuta in esso e che in ogni suo punto P si ha:

$$h(P) = \frac{q}{p} B(P) \tag{I.3}$$

dove $h = h(P) = 1/\varrho$ è la curvatura di τ nel punto P[(x)].

Nella trattazione che segue supporremo sempre verificate le ipotesi seguenti:

1) i corpuscoli considerati presentano eguali caratteristiche fisiche (carica elettrica q, massa di quiete m_o, ecc) che riterremo note, ma non sono dotati della stessa energia cinetica T. Il modulo $p = T/c\,[1-(2m_oc^2/T)]^{1/2}$ della quantità di motò assume perciò valori diversi per i vari corpuscoli,

2) ogni traiettoria considerata, che risulta individuata in modo univoco assegnando gli elementi p, A, $\vec{u}_A$, appartiene ad un dominio spaziale limitato contenente nel suo interno una particolare traiettoria τ_o (individuata dagli elementi p_o, 0, $\vec{u}_o$) che viene assunta come "riferimento "o" asse ottico " o "traiettoria centrale",

3) nel dominio considerato (attorno a τ_o) le distribuzioni di campo magnetico esibiscano un "comportamento regolare". Ciò significa che le componenti del campo (rispetto ad una terna ortogonale qualsiasi) e le loro derivate direzionali (rispetto ad una direzione qualsiasi) sono funzioni continue e derivabili fino a qualsivoglia ordine. Tali derivate, qualunque sia il loro ordine, sono sempre "equilimitate" in tutto il dominio considerato attorno a τ_o.

(x) - Infatti, un corpuscolo, inizialmente in moto nel piano considerato, penetrando nella distribuzione di campo diviene soggetto unicamente ad una forza di modulo costante e parallela al piano in oggetto. La (I.2) si scrive allora

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{q}{p} B\,(\vec{u} \wedge \vec{b})\,.$$

Osserviamo ora che per una generica curva sussiste la formula di Frenet:

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = -h\vec{n},$$

nella quale h è la "curvatura", cioè l'inverso del raggio ϱ del cerchio osculatore a τ, e $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{u}$ è la normale a τ diretta verso il centro del cerchio anzidetto. Eliminando $d\vec{u}/ds$ da queste relazioni si ricava subito la (I.3).

Assumeremo inoltre che tali distribuzioni di campo siano dotate di una superficie equipotenziale piana rispetto alla quale il potenziale scalare magnetico risulti "antisimmetrico"(x). Considerevoli semplificazioni alla trattazione successiva deriveranno poi dallo scegliere la traiettoria di riferimento τ_0 in modo da sfruttare al massimo le simmetrie della distribuzione di campo.

I. 3. - CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE. -

Illustriamo ora brevemente il sistema di coordinate usato.

Consideriamo una distribuzione di campo dotata di un "piano di simmetria", nel senso precisato al § precedente. Su tale piano, (cfr. Fig. 1), scegliamo una qualsiasi curva continua τ_0 come

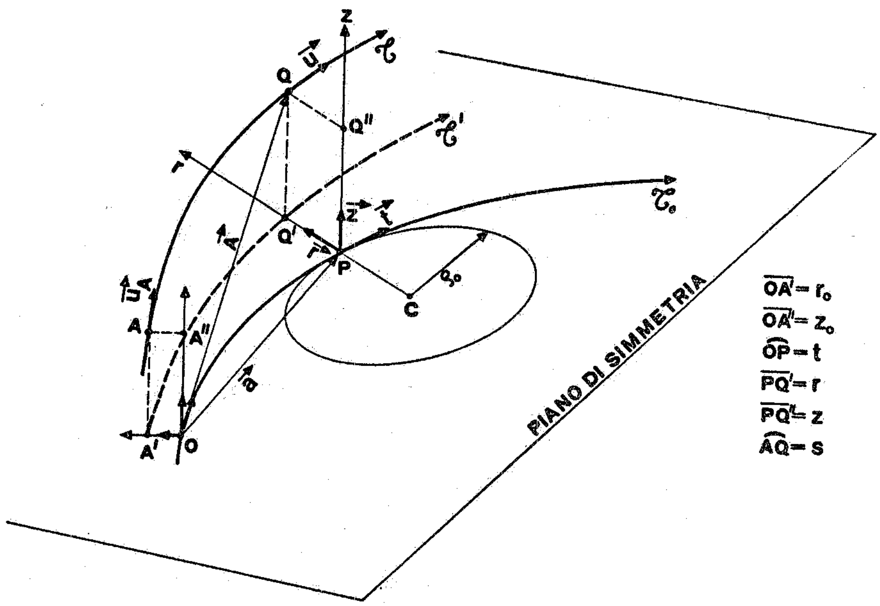

FIG. 1 - Il sistema di coordinate t, r, z introdotto nel testo.

(x) - Indicheremo d'ora in poi, per brevità, tale superficie con la dizione "Piano di simmetria", risultando essa coincidere in pratica con un piano di simmetria geometrica dello spettrometro.

riferimento[x]. Su di essa stabiliamo un punto origine 0 ed un sistema di ascisse curvilinee orientate t; sia poi $\vec{t}$ il versore della tangente orientata nel punto corrente. La posizione di un punto Q dello spazio rispetto ad 0 può essere assegnata con la procedura che segue. Condotto per Q il piano normale a τ_0 si consideri l'intersezione P tra tale piano e la curva e la proiezione Q' di Q sul piano di simmetria. Posto: $|\overset{\frown}{0P}| = t$, $|\overline{PQ'}| = r$, $|\overline{Q'Q}| = z$, la posizione di Q rispetto ad 0 risulta assegnata dai valori delle coordinate t, r, z. Il segno di queste è poi stabilito associando al punto P la terna (ortogonale e levogira) di versori $\vec{t}, \vec{r}, \vec{z}$.

Nel sistema di coordinate introdotto, l'assegnazione delle relazioni parametriche:

$$
\begin{aligned}
r &= r(t) \\
z &= z(t)
\end{aligned}
\qquad (0 \leq t \leq +\infty) \tag{I.4}
$$

corrisponde quindi all'assegnazione di una curva τ, non necessariamente piana[o].

Conseguentemente alla procedura prima descritta, viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca e continua tra i punti delle curve equiorientate τ_0 e τ. Siano in particolare A e Q i punti di τ corrispondenti rispettivamente ad 0 e P su τ_0, ed s ed $\vec{u}$ indichino rispettivamente l'ascissa curvilinea e il versore della tangente su τ. Indicheremo infine con $\vec{a}(t) = \overrightarrow{0P}$, ed $\vec{A}(t) = \overrightarrow{0Q}$ i raggi vettori, rispetto al polo 0, dei punti correnti sulle due curve.

Per le considerazioni future è di grande importanza determinare l'elemento infinitesimo ds della curva τ in coordinate t, r, z.

A tale scopo consideriamo un elemento orientato $\overrightarrow{\Delta s}$ (piccolo ma finito) della generica curva τ compreso tra i punti di ascisse s

---

(x) - Và osservato che una generica curva nello spazio è completamente individuata assegnando un suo punto, il versore della tangente in esso e la curvatura e la torsione come funzioni dell'ascissa curvilinea[4]. Per individuare una curva piana è sufficiente assegnare solo i tre primi elementi essendo la torsione identicamente nulla.

(o) - Più oltre entrambe le curve τ_0 e τ si identificheranno con delle traiettorie reali, cioè con delle soluzioni particolari della (I.2). Al momento, tale identificazione non è necessaria.

ed $s+\Delta s$; esso può essere decomposto nel modo seguente:

$$\vec{\Delta s} = \vec{\Delta s}_{proi} + \vec{\Delta s}_z = \vec{\Delta s}_t + \vec{\Delta s}_r + \vec{\Delta s}_z \tag{I.5}$$

dove $\vec{\Delta s}_{proi}$ è l'elemento orientato, corrispondente a $\vec{\Delta s}$, della proiezione τ' di τ nel piano di simmetria (cfr. Fig. 2) e Δs_z è la proiezione di Δs lungo la normale a tale piano.

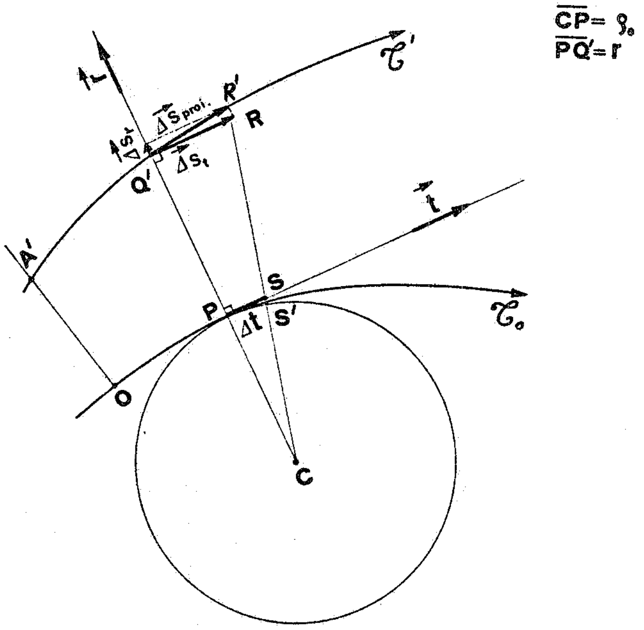

FIG. 2 - Geometria considerata nel testo per il calcolo dell'elemento infinitesimo di arco della curva τ.

Inoltre $\vec{\Delta s}_t$ e $\vec{\Delta s}_r$ indicano le proiezioni di $\vec{\Delta s}_{proi}$ nelle direzioni (contenute nel piano di simmetria) individuate rispettivamente dai versori $\vec{t}$ ed $\vec{r}$ della terna intrinseca a τ_0 nel punto di ascissa t (corrispondente a quello di ascissa s su τ).

Determiniamo anzitutto l'espressione di $\vec{\Delta s}_t$ mediante gli altri elementi introdotti.

Dalla similitudine dei triangoli CPS e CQ'R, si ricava:

$$\frac{\overline{PS}}{PC} = \frac{\overline{Q'R}}{Q'C} ,$$

ed assumendo approsimativamente[x] $\overline{PS} \simeq \widehat{PS'} = \Delta t$, si ha:

$$\frac{\Delta t}{\varrho_0} \simeq \frac{\Delta s_t}{\varrho_0 + r} .$$

(x) - Vedi nota pag. 10.

Pertanto risulta:

$$\overrightarrow{\Delta s}_t = (\overrightarrow{\Delta s})_t \cdot \vec{t} \cong \frac{\varrho_o + r}{\varrho_o} \Delta t \cdot \vec{t} = (1+hr)\, \Delta t \cdot \vec{t} .$$

Si ha poi ovviamente:

$$\overrightarrow{\Delta s}_r = \Delta r \cdot \vec{r}, \qquad \overrightarrow{\Delta s}_z = \Delta z \cdot \vec{z} .$$

Sostituendo nella (I.5) e passando infine al limite per Δs tendente a zero, si ottiene la relazione esatta:

$$ds \cdot \vec{u} = (1+hr)\, dt \cdot \vec{t} + dr \cdot \vec{r} + dz\, \vec{z}$$

da cui si ricava:

(I.6) $$ds = \left[(1+hr)^2\, dt^2 + dr^2 + dz^2 \right]^{1/2} .$$

Al fine di esprimere nel sistema di coordinate introdotto le quantità

$$\vec{u} = \frac{d\vec{A}}{ds} \qquad \text{e} \qquad \frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{d^2\vec{A}}{ds^2} ,$$

presenti nella (I.2), decomponiamo il vettore $\vec{A}$ nel modo seguente (cfr. Fig. 1):

(I.7) $$\vec{A} = \vec{a} + r\vec{r} + z\vec{z} .$$

Osserviamo inoltre che per la τ_o valgono le relazioni(o):

(x) - Questa approssimazione consiste nell'assumere l'elemento $\overline{PS}$ di tangente a τ_o nel punto (t, 0, 0) coincidente con l'elemento $\widehat{PS'}$ della curva stessa. Un'altra approssimazione consiste nell'assumere che il Δt considerato corrisponda a $\overline{Q'R'} = |\overrightarrow{\Delta s}_t|$ anzichè a $\widehat{QR'} = |\Delta s_{proi}|$ come è in realtà. Tuttavia queste approssimazioni scompaiono per $\Delta s \to 0$.

(o) - L'apice indica la derivazione rispetto alla variabile t.

$$\vec{t} = \vec{r} \wedge \vec{z}$$
$$\vec{r} = \vec{z} \wedge \vec{t} \qquad \text{(I.8)}$$
$$\vec{z} = \vec{t} \wedge \vec{r}$$

e:

$$\vec{a}\,' = \vec{t}$$
$$\vec{t}\,' = -h\vec{r} \qquad \text{(I.9)}$$
$$\vec{r}\,' = h\vec{t}$$
$$\vec{z}\,' = 0\,,$$

le ultime tre delle (I.9) esprimono le relazioni di Frenet.

Ciò stabilito, si ha:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{A}}{ds} = \vec{A}\,' \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s'}\vec{A}\,' = \frac{1}{s'}(\vec{a}\,' + r'\vec{r} + r\vec{r}\,' + z'\vec{z} + z\vec{z}\,')$$

e tenendo conto delle (I.9), si ottiene:

$$\vec{u} = \frac{1}{s'}\left[(1+hr)\vec{t} + r'\vec{r} + z'\vec{z}\right]. \qquad \text{(I.10)}$$

Si ha inoltre:

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \vec{u}\,' \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s'} \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{s'}\left[(1+hr)\vec{t} + r'\vec{r} + z'\vec{z}\right]\right\}.$$

Effettuando le derivazioni e tenendo presenti le (I.9) si ottiene infine:

$$\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{1}{s'^3}\left\{\left[(h'r+2hr')s' - (1+hr)s''\right]\vec{t} + \right.$$
$$\left. + \left[-(1+hr)hs' + r''s' - r's''\right]\vec{r} + \left[z''s' - z's''\right]\vec{z}\right\}. \qquad \text{(I.11)}$$

Per esplicitare le espressioni di s' ed s'' che compaiono nelle (I.10) ed (I.11) è sufficiente tener conto della (I.6).

Da questa relazione si ricavano immediatamente le espressioni cercate per s' ed s''.

$$s' = \left[(1+hr)^2 + r'^2 + z'^2\right]^{1/2} \tag{I.12}$$

e:

$$s'' = \frac{1}{s'}\left[(1+hr)(h'r + hr') + r'r'' + r'z''\right] . \tag{I.13}$$

I.4. - FORMA SCALARE DELL'EQUAZIONE DELLE TRAIETTORIE. -

Esprimiamo ora l'induzione $\vec{B} = \vec{B}(t, r, z)$ mediante le sue componenti rispetto alla terna $\vec{t}, \vec{r}, \vec{z}$. Si ha:

$$\vec{B}(t, r, z) = B_t \vec{t} + B_r \vec{r} + B_z \vec{z} , \tag{I.14}$$

dove:

$$\begin{aligned} B_t &= B_t(t, r, z) \\ B_r &= B_r(t, r, z) \\ B_z &= B_z(t, r, z) \end{aligned} \tag{I.14'}$$

sono le componenti suddette che supporremo funzioni assegnate. Consideriamo nuovamente l'equazione (I.2), valida per la generica traiettoria τ , e proiettiamola sugli assi della terna $\vec{t}, \vec{r}, \vec{z}$ intrinseca a τ_0 nel punto corrente P(t, 0, 0). Si ottengono così le equazioni scalari:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{ds}\right)_t = \frac{q}{p}\,(u_r B_z - u_z B_r); \qquad \left(\frac{d\vec{u}}{ds}\right)_r = \frac{q}{p}\,(u_z B_t - u_t B_z);$$

$$\left(\frac{d\vec{u}}{ds}\right)_z = \frac{q}{p}\,(u_t B_r - u_r B_t) . \tag{I.15}$$

In virtù dell'osservazione fatta al § 1.2 sull'ortogonalità di $\vec{u}$ e $d\vec{u}/ds$ si ha che scelte due qualsiasi delle 3 equazioni (I.15) la terza equazione è ottenibile da queste e dalla condizione di ortogonalità(x). Pertanto,

---

(x) - Infatti, dalla condizione $(d\vec{u}/ds)\cdot\vec{u} = 0$, si ricava ad esempio:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{ds}\right)_t = -\frac{1}{u_t}\left\{\left(\frac{d\vec{u}}{ds}\right)_r u_r + \left(\frac{d\vec{u}}{ds}\right)_z u_z\right\}.$$

Sostituendo in questa la (I.15, 2ª) e la (I.15, 3ª) e semplificando si ottiene la (I.15, 1ª).

solo due equazioni sono indipendenti e nel seguito, ci limiteremo a considerare le ultime due delle (I.15). Sostituendo in queste le espressioni di $\vec{u}$ e $d\vec{u}/ds$ date dalle (I.10) ed (1.11) si ottiene il sistema di equazioni differenziali scalari:

$$
(I.16)\qquad
\begin{aligned}
& r'' - (1+hr)\,h - r'\frac{s''}{s'} = \frac{q}{p}\left[z'B_t - (1+hr)B_z\right]s' \\
& z'' - z'\frac{s''}{s'} = \frac{q}{p}\left[(1+hr)B_r - r'B_t\right]s' .
\end{aligned}
$$

Esplicitando s' ed s'' mediante le (I.12) ed (I.13), si ottiene in definitiva:

$$
(I.17)\qquad
\begin{aligned}
& r''-(1+hr)h-r'\left[(1+hr)(h'r+hr')+r'r''+z'z''\right]\left[(1+hr)^2+r'^2+z'^2\right]^{-1} = \\
& = \frac{q}{p}\left[z'B_t-(1+hr)B_z\right]\left[(1+hr)^2+r'^2+z'^2\right]^{1/2} , \\
& z''-z'\left[(1+hr)(h'r+hr')+r'r''+z'z''\right]\left[(1+hr)^2+r'^2+z'^2\right]^{-1} = \\
& = \frac{q}{p}\left[(1+hr)B_r-r'B_t\right]\left[(1+hr)^2+r'^2+z'^2\right]^{1/2} .
\end{aligned}
$$

L'integrazione dell'equazione vettoriale (I.2) valida per la τ è quindi ricondotta a quella del sistema di equazioni scalari (I.17). E' opportuno osservare a questo proposito che negli sviluppi effettuati per giungere al sistema (I.17) nessuna approssimazione è stata introdotta e pertanto le equazioni di tale sistema devono ritenersi esatte.

Una soluzione particolare del tipo (I.4) del sistema (I.17), soddisfacente a valori assegnati di:

$$
r_o = r(t=0), \quad z_o = z(t=0), \quad r'_o = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0}, \quad z'_o = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0}, \quad p,
$$

individua una particolare traiettoria τ. Infatti assegnare le quantità r_o, z_o, r'_o, z'_o, p corrisponde ad assegnare gli elementi A, $\vec{u}_A$, p (condizioni iniziali) di τ, avendosi:

$$
A \equiv (0, r_o, z_o)
$$

$$
\vec{u}_A = \frac{\left[1+h(0)\,r_o\right]\vec{t} + r'_o\,\vec{r} + z'_o\,\vec{z}}{\left\{\left[1+h(0)\,r_o\right]^2 + r'^2_o + z'^2_o\right\}^{1/2}}
$$

nelle quali la quantità $h(0) = h(t=0)$ è nota essendo τ_o assegnata.

In vista di una trattazione dell'ottica di uno spettrometro magnetico nell'approssimazione del 2° ordine, converrà ottenere, al posto del sistema di equazioni esatte (I.17), un sistema di equazioni approssimate ma di più semplice integrazione. Per ottenere ciò dovremmo ricorrere a sviluppi in serie, nell'intorno di τ_o, di alcuni termini presenti nelle (I.17) come B_t, B_r, B_z, $1/p$, $[(1+hr)^2 + r'^2 + z'^2]^{-1}$, $[(1+hr)^2 + r'^2 + z'^2]^{1/2}$.

Questo programma verrà sviluppato nelle successive Parti II e III.

I.5. - LE EQUAZIONI DELLE TRAIETTORIE IN ALCUNI CASI PARTICOLARI. -

Prima di procedere nello sviluppo del programma indicato sarà interessante specificare in qualche caso particolare le equazioni differenziali (I.17) delle traiettorie. Ricordiamo a tale proposito che τ_o non è necessariamente una traiettoria effettiva, ma una generica curva piana τ_o assegnata.

Supponiamo che τ_o sia una retta. Il sistema di coordinate t, r, z si identifica allora con un sistema cartesiano ortogonale. Avendosi poi:

$$h = h' = h'' = \ldots\ldots = 0\,,$$

le (I.17) divengono:

$$\text{(I.18)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad r'' - r'(r'r'' + z'z'')(1+r'^2+z'^2)^{-1} = \frac{q}{p}(z' B_t - B_z)(1+r'^2+z'^2)^{1/2} \\ &\text{(b)}\quad z'' - z'(r'r'' + z'z'')(1+r'^2+z'^2)^{-1} = \frac{q}{p}(B_r - r' B_t)(1+r'^2+z'^2)^{1/2}\,. \end{aligned}$$

Sono queste le equazioni differenziali scalari di una generica traiettoria τ dello spazio riferito a coordinate cartesiane ortogonali (t, r, z). Si riconosce subito che le equazioni (I.18, a) ed (I.18, b) risultano perfettamente simmetriche nelle variabili r e z. Supponiamo ora che, continuando ad essere τ_o rettilinea, la τ sia tutta contenuta nel piano di simmetria della distribuzione di campo. Sarà perciò:

$$z_o = z(t) = 0$$

$$z'(t) = z''(t) = \ldots\ldots = 0$$

ed inoltre(x):

$$B_t\,(t,0,0) = B_r\,(t,0,0) = 0, \qquad B_z\,(t,0,0) \neq 0\,.$$

Le (I.18) si riducono in tal caso alla sola equazione:

$$r'' - r'\,r''\,(1+r'^2)^{-1} = -\frac{q}{p}\,B_z\,(1+r'^2)^{1/2},$$

ovvero:

$$r'' + \frac{q}{p}\,B_z(1+r'^2)^{3/2} = 0\,. \qquad \text{(I.19)}$$

Questa è l'equazione differenziale in coordinate cartesiane ortogonali (t, r) soddisfatta da una generica traiettoria piana. Quando $B_z(t,r)$ sia nota, la (I.19) può essere risolta con metodi numerici, permettendo di ottenere un tracciamento delle traiettorie corrispondenti ad assegnate condizioni iniziali r(0), r'(0) (Ray Tracing).

Sempre assumendo τ_o rettilinea ed il sistema t, r, z ortogonale consideriamo ora l'equazione (I.15, 1ª) precedentemente trascurata. Sostituendo in essa le (I.10) ed (I.11) con h = h' = ... 0, si ha:

$$-\frac{s''}{s'} = \frac{q}{p}(r'\,B_z - z'\,B_r)\,s'\,.$$

Inoltre le (I.16), nell'ipotesi fatta, divengono:

$$\text{(I.16')} \qquad \begin{aligned} r'' - r'\,\frac{s''}{s'} &= \frac{q}{p}\,(z'\,B_t - B_z)\,s' \\ z'' - z'\,\frac{s''}{s'} &= \frac{q}{p}\,(B_r - r'\,B_t)\,s'\,, \end{aligned}$$

sostituendo in queste la relazione precedente, si ottengono le equazioni delle traiettorie nella forma:

$$\text{(I.20)} \qquad \begin{aligned} r'' + \frac{q}{p}\left[(1+r'^2)\,B_z - r'\,z'\,B_r - z'\,B_t\right](1+r'^2+z'^2)^{1/2} &= 0 \\ z'' + \frac{q}{p}\left[r'z'\,B_z + r'\,B_t - (1+z'^2)\,B_r\right](1+r'^2+z'^2)^{1/2} &= 0\,. \end{aligned}$$

(x) - Cfr. quanto detto in proposito al § I.2. Questo punto sarà estesamente sviluppato nella Parte II.

Questa forma delle equazioni delle traiettorie è riportata, ad esempio, in bibl. (5).

BIBLIOGRAFIA. -

(1) - J.F. Streib, HEPL 104 Stanford University 1960.
(2) - L. Landau and E. Lifshitz, Mechanics (Pergamon Press, London 1960), Chap. VII, pag. 140.
(3) - P. Bounin, Rev. Sci. Instr. 38, 1305 (1967).
(4) - P. Moon and D. Spencer, Vectors (Van Nostrand, Princeton 1965), Chap. 6, pag. 186.
(5) - K.G. Steffen, High Energy Beam Optics (Interscience Publishers New York 1965), Cap. 1, pag. 2.