

LNF-71/75
17 Novembre 1971

P. Del Vecchio, G. Sacerdoti e G. M. Veca : PERDITE ELETTRICHE
IN CONDUTTORI E SUPERCONDUTTORI ECCITATI CON TENSIONI
A GRADINO. -

P. Del Vecchio^(x), G. Sacerdoti e G.M. Veca^(x): PERDITE ELETTRICHE IN CONDUTTORI E SUPERCONDUTTORI ECCITATI CON TENSIONI A GRADINO.

1. - INTRODUZIONE -

I cavi in materiale superconduttore per la costruzione di magneti in c. c. vengono normalmente "stabilizzati" ricorrendo a materiali ad alta conducibilità come rame, argento o alluminio: il conduttore risultante è talvolta una piattina come nel caso del Nb₃Sn o del Va₃Ga (Fig. 1a) o talvolta un cavo, come nel caso del Nb-Ti o Nb-Zr (Figg. 1b, 1c, 1d) ottenuto annegando fili del diametro di pochi micron, talvolta intrecciati e trasposti, in matrici di rame. Nel cavo può essere ricavato un canale per il raffreddamento del conduttore con elio liquido in circolazione forzata (Fig. 1e).

La funzione del rame (o dell'argento o dell'alluminio) è di rendere più efficace il raffreddamento e di costituire uno shunt per la corrente se il superconduttore perde, per qualche ragione, la sua caratteristica conducibilità nulla, evitando così danni al cavo per sovratensioni e per riscaldamento.

Piattine di rame in parallelo a quelle superconduttrici in presenza di campi magnetici, anche se elettricamente isolati dal superconduttore, svolgono efficace azione sia perchè assorbono parte dell'energia associata al processo di penetrazione del campo magnetico nel superconduttore stesso (Fig. 2), sia perchè, rendendo più lento il processo di penetrazione e quindi di dissipazione di energia, riducono la potenza dissipata nel cavo e quindi la sovratemperatura. Si consideri la tabella I. (vedi pagina 2) nella quale sono riportate alcune proprietà termiche ed elettriche dei materiali più largamente usati alla temperatura di 4,2 °K. Dall'esame dei dati riportati, risulta evidente la maggiore efficacia del raffreddamento in presenza del materiale di stabilizzazione (rame). Si può infatti notare che:

- a) La conducibilità termica dei superconduttori è molto piccola in confronto a quella del rame.

(x) - Istituto di Elettrotecnica dell'Università di Roma.

2.

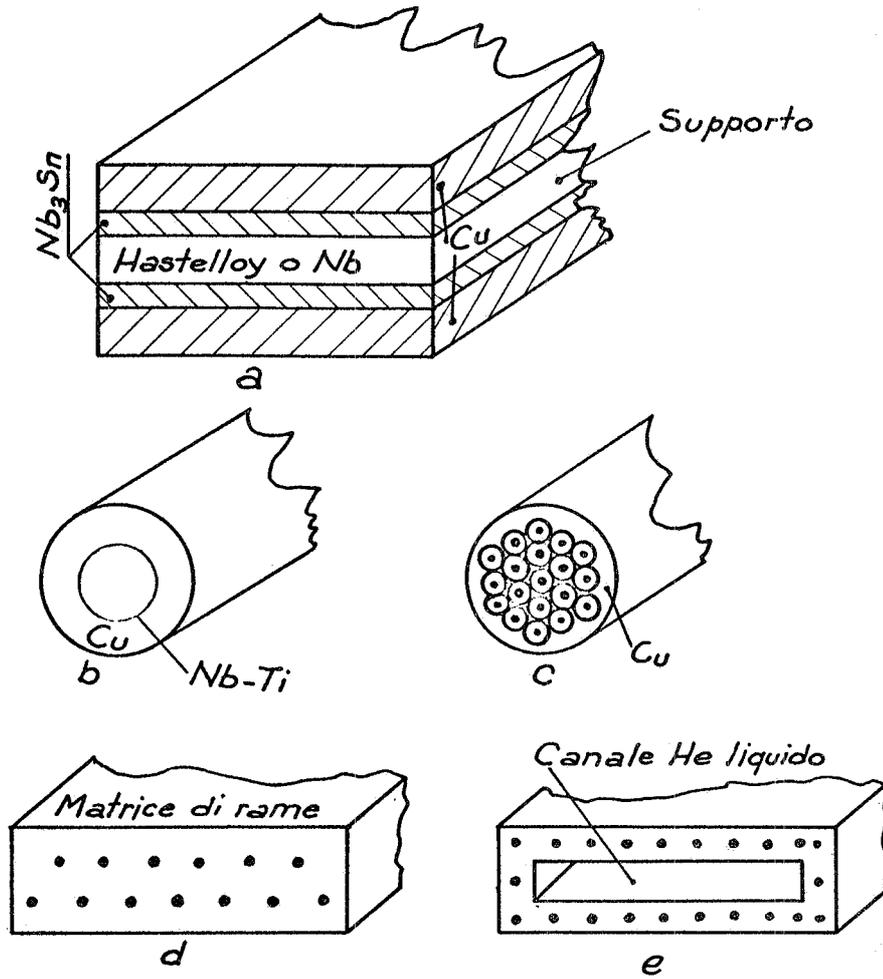


FIG. 1 - Vari tipi di cavi realizzati con superconduttore e rame.

TABELLA I - PROPRIETA' TERMICHE E MAGNETICHE

		Superconduttori			Rame	Elio	
		Nb ₃ Sn	Nb-Zr	Nb-Ti		Liq.	Gas
k	(mw/cm ⁰ K)	0.4	0.8	1.2	70 000	2.72	0.1
c	(mJ/g ⁰ K)	0.21	0.18	0.18	0.099	4480	6000
γc	(mJ/cm ³ ⁰ K)	1.13	1.46	1.01	0.89	560	48
ρ_n	($\mu\Omega \cdot cm$)	26	34	24	0.03	-----	-----
γ	(g/cm ³)	5.4	8.1	5.6	8.9	0.125	0.008
T_c	(⁰ K)	18	10.5	9.5	-----	-----	-----
$k/\gamma c$	(cm ² /sec)	0.35	5.4	1.18	79 000	0.005	0.002
ρ_n/μ_0	(cm ² /sec)	2069	2706	1910	2.5	-----	-----

- b) Il coefficiente di diffusione termica^(x) del rame è molto più alto di quello dei vari superconduttori.
- c) Il coefficiente di diffusione magnetica^(*) è molto più alto per i superconduttori che non per il rame. L'alta conducibilità elettrica infatti rende più lenta la diffusione del campo magnetico e di conseguenza la dissipazione di energia nell'unità di tempo viene a diminuire, a parità di energia finale dissipata, per cui il tempo a disposizione per trasferire questa energia al bagno di elio è più lungo e di conseguenza i riscaldamenti sono inferiori^(1, 2, 3).

Come è noto si hanno riscaldamenti nel superconduttore ogni volta che la distribuzione della corrente cambia, sia che ciò avvenga quando il valore complessivo della corrente aumenta all'aumentare dell'eccitazione del magnete, sia che ciò avvenga per un assestamento della corrente nel superconduttore per effetto delle perturbazioni più disparate (come per es. in presenza di vibrazioni meccaniche), sia che ciò avvenga per il naturale comportamento dei superconduttori di "secondo tipo" i quali tendono a distribuire in tempi lunghi, più o meno uniformemente, la corrente nella sezione del superconduttore (flux jump)^(4, 5).

Questi assestamenti, come avviene in tutti i fenomeni irreversibili, sono accompagnati da riscaldamenti locali.

Lo studio dettagliato delle fluttuazioni di questi assestamenti è stato ed è tuttora oggetto di indagine da parte dei ricercatori; però non è necessario conoscere molti dettagli fisici del fenomeno per il dimensionamento e per la valutazione di prima approssimazione della efficacia della stabilizzazione per la loro utilizzazione in corrente continua.

La stabilizzazione di un magnete può essere di tre tipi^(7, 8) (fig. 3):

- a) completa. Quando all'aumentare della corrente $I(t)$ di eccitazione del magnete, la relazione che lega la tensione alla corrente, è rappresentata dalla curva a reversibile.
- b) parziale. Quando la caratteristica $I(t)$, $V-(d\phi/dt)$ è la curva b di tipo irreversibile.
- c) protettiva. Quando, incominciata la transizione del superconduttore, la corrente di eccitazione del magnete va a zero, in tempi sufficientemente lunghi tali da non dare luogo né a sovratensioni né a sovrariscaldamenti così gravi da danneggiare il magnete in forma definitiva (curva c).

(x) - Il coefficiente di diffusione termica D_T per un caso piano e per un mezzo isotropo è definito dall'equazione $\partial T / \partial x = (1/D_T)(\partial T / \partial t)$, ove T è la temperatura. Tale coefficiente dipende dalla conduttività termica interna (K), dal calore specifico (c), e dalla densità (γ) del materiale secondo la relazione

$$D_T = \frac{K}{\gamma C}$$

(*) - Il coefficiente di diffusione magnetica D_M per un caso piano e per un mezzo isotropo è definito dall'equazione:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{D_M} \frac{\partial B}{\partial t}$$

ove B è l'induzione del campo magnetico. Esso risulta proporzionale a ρ/μ_0 ove ρ è la resistività elettrica del materiale.

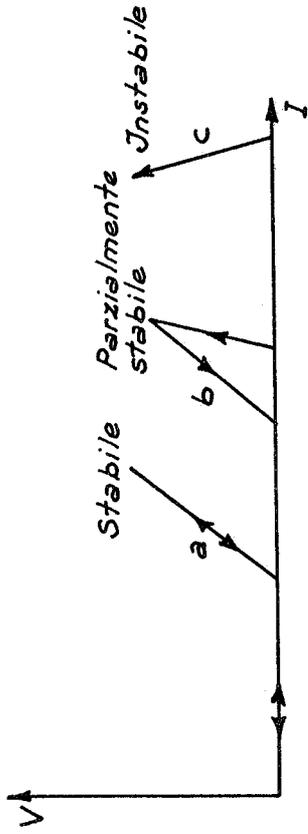


FIG. 3 - Diversi tipi di comportamento alla transizione dei magneti.

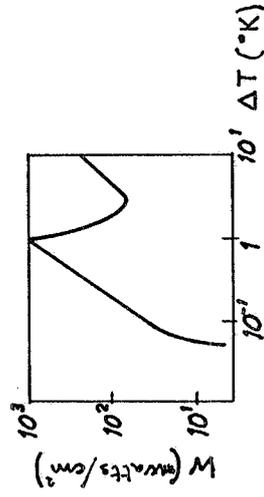


FIG. 4 - Quantità di calore trasmessa in elio liquido in fusione del salto di temperatura tra i conduttori e l'elio.

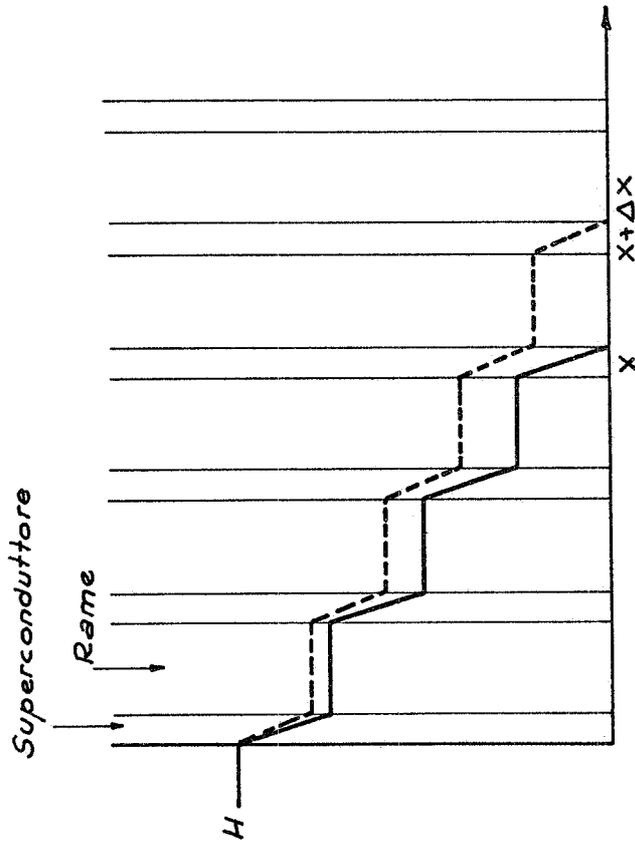


FIG. 2 - Stabilità dinamica: distribuzione del campo prima (linea continua) e dopo (linea tratteggiata) una lieve perturbazione di temperatura in una piattina di rame e superconduttore.

Il grado di stabilizzazione dipende dalla geometria dei conduttori e dagli schermi (realizzati con un materiale conduttore) che di solito si mettono nel magnete il cui comportamento è determinato dalle seguenti proprietà:

a) coefficiente di diffusione termica (D_T). Poichè il conduttore è disomogeneo si possono individuare diversi coefficienti di diffusione termica: quello del superconduttore, quello del materiale di stabilizzazione, e infine un coefficiente di diffusione termica medio che interviene nella valutazione del sistema nel suo complesso e che dipende fortemente dalla geometria dei cavi e dal sistema di raffreddamento.

b) coefficiente di diffusione magnetica (D_M). Per esso valgono le stesse considerazioni svolte per il coefficiente di diffusione termica.

c) trasmissione termica conduttore-elio il cui andamento è indicato in figura 4.

d) andamento della densità di corrente critica nel superconduttore in funzione della temperatura e del campo magnetico (fig. 5a, 5b).

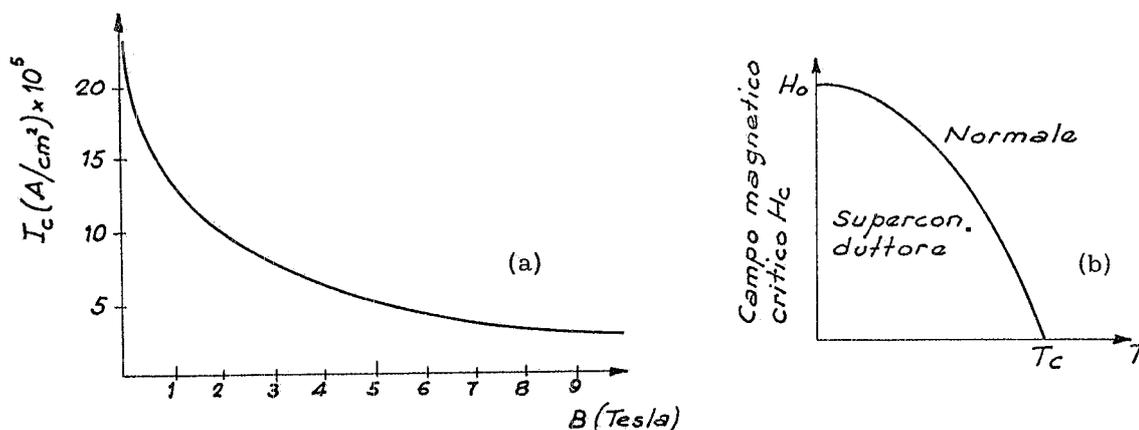


FIG. 5 - a) Andamento della densità di corrente critica (I_c) in funzione del campo magnetico trasverso. b) Andamento del campo magnetico critico in funzione della temperatura.

e) andamento della conducibilità elettrica del materiale di stabilizzazione con la temperatura e il campo magnetico.

2. - ANALISI DI ALCUNE GEOMETRIE PARTICOLARI -

Nel presente articolo abbiamo svolto dei calcoli sulla diffusione del campo magnetico e sulla dissipazione associata in alcuni tipi di avvolgimenti realizzati con materiale superconduttore e conduttore normale, eccitati con una tensione a gradino; questi calcoli permettono di chiarire alcuni aspetti relativi ai processi di dissipazione e possono essere utilizzati per valutare gli aumenti di temperatura del sistema e quindi l'efficacia della stabilizzazione mediante la differenza dell'energia magnetica immagazzinata nel conduttore tra l'inizio e la fine del fenomeno.

I calcoli sono stati eseguiti per uno spessore unitario di cavo realizzato con diversi tipi di materiale oltre che per diverse configurazioni e per diverse geometrie con una tensione di eccitazione a gradino V pari a 0,5 V per metro lineare e precisamente nei seguenti casi:

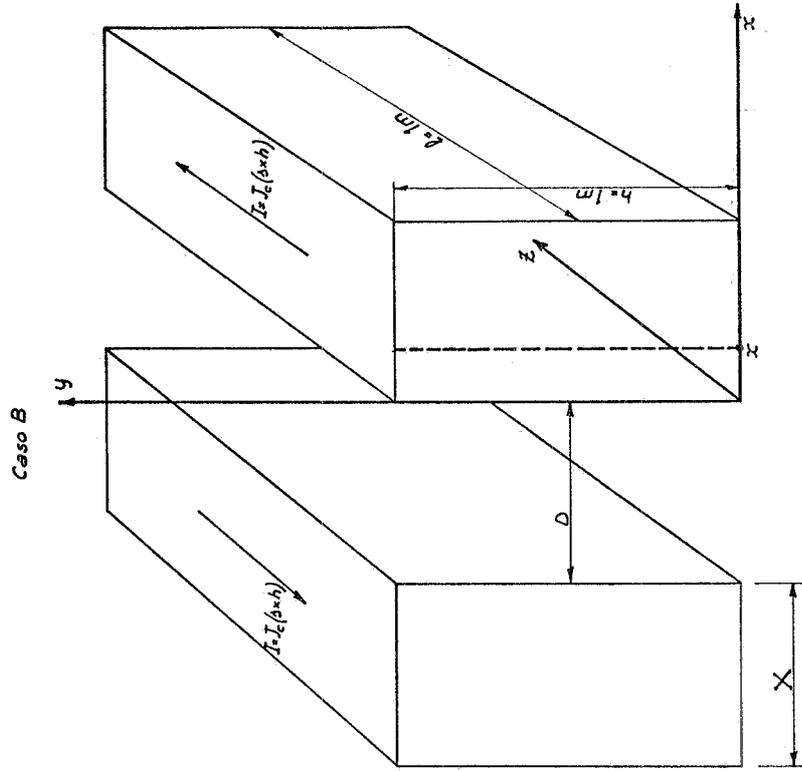


FIG. 7 - Spezzone di lunghezza unitaria di cavo realizzato con piattina massiccia di materiale superconduttore.

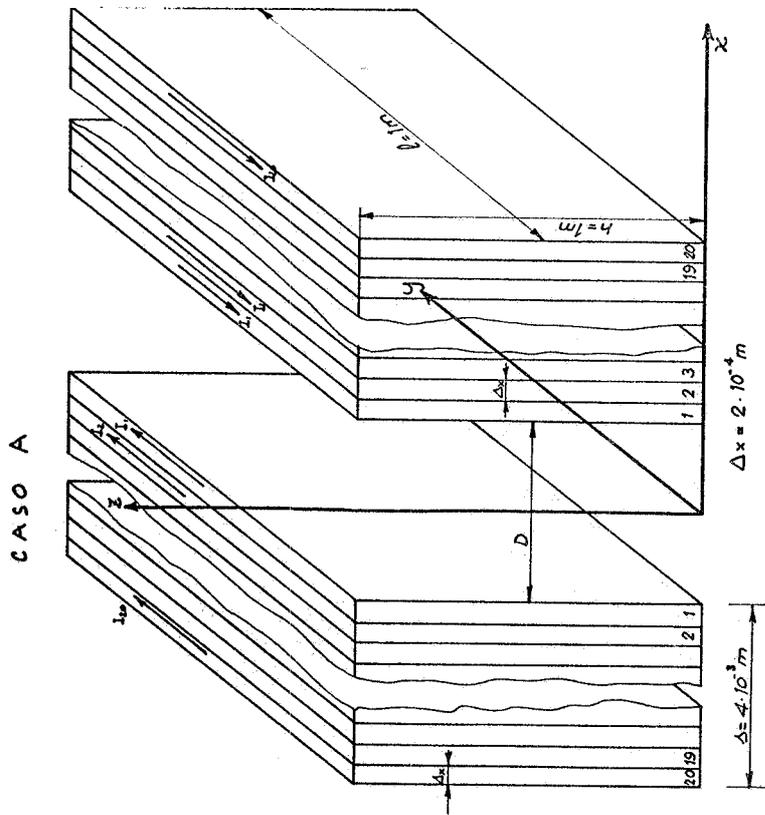


FIG. 6 - Spezzone di lunghezza unitaria di cavo realizzato con piattina di rame dello spessore $4 \times 10^{-3} \text{ m}$.

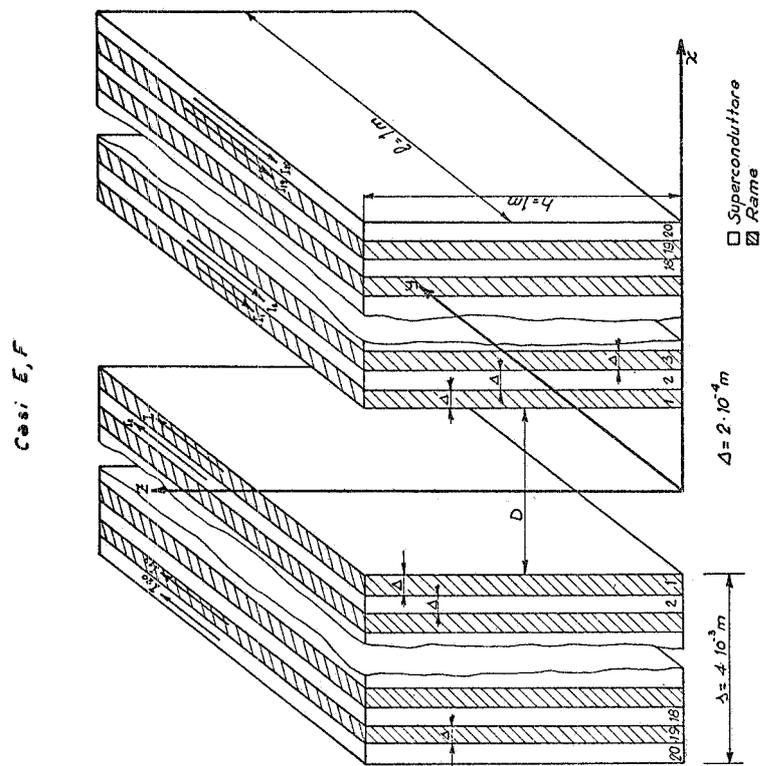


FIG. 9 - Spezzone di lunghezza unitaria di cavo realizzato con piattina composta (rame-superconduttore).

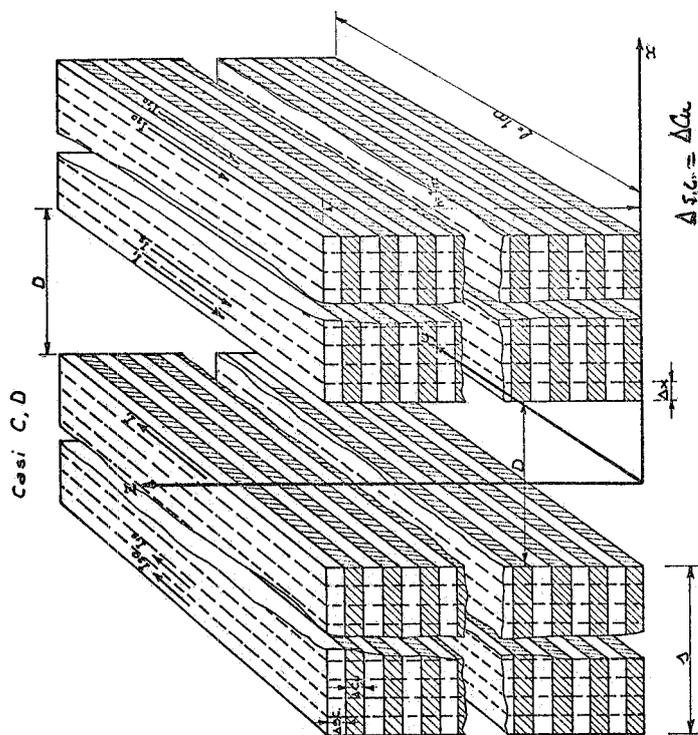


FIG. 8 - Spezzone di lunghezza unitaria di cavo realizzato con piattina composta (rame-superconduttore)

8.

- A) - conduttore massiccio di rame (fig. 6) con distanza D tra l'andata e il ritorno variabile tra 0 e 10^{-3} m.
- B) - superconduttore massiccio (fig. 7) con una distanza D qualunque, purchè sempre piccola a confronto con la lunghezza.
- C) - cavo composto (superconduttore-rame) realizzato con piattina disposta perpendicolarmente alla direzione del campo. Distanza tra le due facce interne (D) variabile tra 0 e 10^{-3} m. (fig. 8). Il rame e il superconduttore sono in contatto elettrico tra loro.
- D) - differisce dal caso C in quanto il rame, elettricamente isolato dal superconduttore, non è eccitato.
- E) - cavo composto (rame-superconduttore) realizzato con piattina disposta in direzione parallela al campo. Distanza tra andata e ritorno (D) variabile tra 0 e 10^{-3} m. Il rame e il superconduttore sono in contatto elettrico tra loro (fig. 9).
- F) - analogo al caso E) con la differenza che il rame e il superconduttore sono isolati elettricamente tra loro e il rame non è eccitato.
- G) - spezzone di bobina realizzata con una spirale (20 spire) di cavo superconduttore e con 20 schermi di rame elettricamente isolati tra loro e dal superconduttore intercalati tra spira e spira (fig. 10).

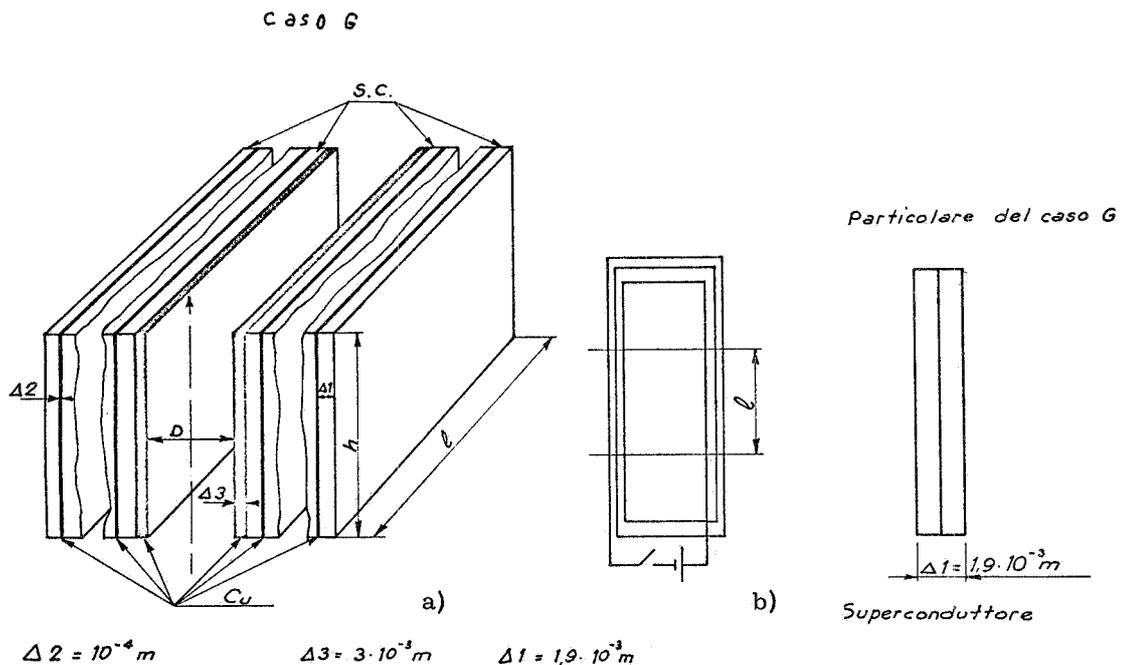


FIG. 10 - a) Sezione unitaria di un avvolgimento di un magnete conduttore. b) Sezione frontale di cavo superconduttore per l'avvolgimento della bobina di cui alla fig. 10 a).

I risultati ottenuti dai calcoli sono riportati nel seguito sotto forma di diagrammi.

Come si è detto nei problemi di superconduttività e nella stabilizzazione dei cavi superconduttori è utile conoscere di quanto si riscalda il conduttore durante la penetrazione del campo; per cui, poter mettere in relazione le dissipazioni in esso avvenute con l'energia magnetica immagazzinata nel volume del cavo, può facilitarne la valutazione.

Per questo motivo si sono eseguiti dei calcoli che hanno permesso di tracciare diversi grafici riportanti in funzione del tempo l'andamento del rapporto tra l'energia totale che è stata dissipata e la corrispondente energia magnetica che si è accumulata nel solo volume occupato dal cavo.

Nel caso di struttura composta (superconduttore-rame) la dissipazione è la somma di due termini distinti; l'uno dovuto alla dissipazione nel rame e l'altro a quella nel superconduttore, giacchè, come è noto, un superconduttore al di sopra di certi valori critici, perde la sua caratteristica conducibilità nulla e diventa un pessimo conduttore.

Nei casi, quindi, in cui sono presenti ambedue materiali accoppiati (sia in contatto elettrico che isolati tra loro) si è ritenuto interessante riportare oltre al rapporto α anche i due rapporti parziali relativi alla quota parte di energia dissipata rispettivamente nel rame (β) e nel superconduttore (γ).

L'andamento dei rapporti è stato calcolato mediante l'uso iterativo di formule^(x), nelle quali i valori dei singoli parametri ottenuti dalla risoluzione del corrispondente sistema di equazioni elettriche caratterizzano istante per istante il comportamento del cavo.

In generale possiamo dire che sono state calcolate l'energia Joule e quella totale erogata dal generatore e quindi per differenza si è determinata l'energia magnetica via via accumulata nel cavo; si noti che nei casi in cui D è diverso da zero si è sottratto all'energia magnetica così calcolata il contributo della parte centrale.

I sistemi di equazioni differenziali con cui si ha a che fare sono tutti lineari e del primo ordine per cui il metodo adottato per la risoluzione è quello delle differenze finite: cioè la sostituzione della derivata con il rapporto incrementale. Nel calcolo si è assunto un intervallo di tempo elementare di 10^{-6} s e solo talvolta 10^{-5} s; per valori più bassi si ottenevano delle soluzioni con oscillazioni che nulla avevano di rispondente alla realtà. Ciò d'altra parte ha comportato un maggiore onere di tempo di calcolo per cui per limitare il costo dei programmi ci si è generalmente arrestati con il tempo solo alla prima fase, trascurando cioè la parte finale del transitorio nella quale si possono facilmente estrapolare con semplici considerazioni, gli andamenti, noto il comportamento dei rapporti della prima fase.

Prima di passare a vedere in dettaglio i 7 casi studiati premettiamo le ipotesi generali e semplificative che sono state adottate; quelle particolari saranno specificate caso per caso.

Innanzitutto si è trascurata la variazione della resistività con la variazione della temperatura dovuta all'energia dissipata nel volume del materiale per effetto Joule. Quindi nella realtà c'è da prevedere una diminuzione dell'effettiva energia dissipata nel rame a causa dell'aumentata resistenza; per cui le effettive curve α e β risulteranno tutte inferiori a quelle calcolate con l'approssimazione sopradetta.

Per quanto concerne invece il superconduttore di II specie non si sono fatte ipotesi particolari sulla sua natura e si è fissato un valore di densità critica di corrente (J_c), indipendente dal valore dell'induzione, pari a 20.000 A/cm^2 ; è questo un valore medio che tiene conto di casi concreti di avvolgimenti di magneti con induzioni di $3 \div 5$ tesla sull'asse.

Inoltre si è convenuto, analogamente alla variazione della resistività del rame, di trascurare la variabilità della J_c con la temperatura considerandola costante; si

(x) - Le formule specifiche sono riportate per ogni singolo caso in appendice.

rammenti che la densità critica tende a decrescere all'aumentare della temperatura giacchè il campo decresce con T (Fig. 5a).

Inoltre per il materiale superconduttore si trascura la dissipazione associata al "flux jump", cioè all'aumento del campo all'interno del materiale anche quando $V = 0$.

E' inoltre utile precisare che si sono scelti 5 valori di resistività del rame, tenendo presente sia che il cavo si trova alla temperatura dell'elio liquido ($T = 4,2^{\circ}\text{K}$), sia che la resistività del rame può variare per diversi motivi (purezza, ricottura, eventuali trattamenti meccanici ecc.).

I valori scelti sono:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1 \times 10^{-10} \text{ } \Omega\text{M}; & \rho_2 &= 1,25 \times 10^{-10} \text{ } \Omega\text{M}; & \rho_3 &= 1,67 \times 10^{-10} \text{ } \Omega\text{M}; \\ \rho_4 &= 2,5 \times 10^{-10} \text{ } \Omega\text{M}; & \rho_5 &= 5 \times 10^{-10} \text{ } \Omega\text{M}. \end{aligned}$$

I tre valori scelti ($D = 0 \text{ m}$, $D = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$, $D = 10^{-3} \text{ m}$) per la distanza tra i conduttori più interni della bobina, sono quelli che normalmente si usano per i cavi in Nb_3Sn . Per il solo caso G il valore $D = 56 \text{ mm}$ si riferisce ad un magnete già realizzato presso i Laboratori di Frascati.

3. - CASO A -

I calcoli sviluppati si riferiscono alla situazione di cui alla figura 6: due conduttori piani indefiniti di spessore s (pensati come andata e ritorno di un unico conduttore massiccio ripiegato su se stesso) sono eccitati con una tensione a gradino $V = 0,5 \text{ Volt/metro}$ lineare di conduttore.

La corrente provocata dalla f.e.m., applicata in direzione y , per effetto pelle, sarà inizialmente limitata alle superfici affacciate $x = +D/2$ e $x = -D/2$; con il passare del tempo la corrente tenderà a penetrare nel conduttore con una velocità che dipende dalla conducibilità del materiale ($1/\rho$) nonchè dalla geometria.

Per effettuare i calcoli si è suddiviso il conduttore massiccio in 20 conduttori di spessore Δx , di valore pari a $2 \times 10^{-4} \text{ m}$, in tal modo si è potuto scrivere il sistema (1) di equazioni i cui coefficienti si riferiscono ad un caso di lunghezza (l) ed altezza (h) unitarie. (v. Tab. A).

Detto sistema di equazioni differenziali lineari è stato risolto con l'ausilio di un elaboratore elettronico: per ogni intervallo Δt di tempo si è calcolato il valore dell'incremento delle singole correnti (ΔI_i). Detti incrementi sommati ai precedenti, determinano i valori delle correnti $I_i(t)$, mediante le quali si impongono le nuove condizioni iniziali ($2V - (2\rho/\Delta x)I_i$) per la determinazione del successivo valore incrementale ΔI_i .

Il metodo è iterativo e ha termine quando le $I_i(t)$ raggiungono il loro valore di regime.

Il rapporto tra l'energia Joule (E_J) dissipata nel rame e l'energia magnetica (E_M) racchiusa nel volume occupato dal conduttore è stato calcolato, al variare del tempo, con l'espressione (β) riportata in Appendice.

I tre diagrammi riportati in Figg. 11, 12, 13 si riferiscono rispettivamente

TABELLA A

Sistema (1)

n = 20

$$2V = \frac{2q}{\Delta x} I_1 + \mu_o (D+\Delta x) \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \mu_o (D+\Delta x) \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \mu_o (D+\Delta x) \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \mu_o (D+\Delta x) \frac{\Delta I_4}{\Delta t} + \dots + \mu_o (D+\Delta x) \frac{\Delta I_n}{\Delta t}$$

$$2V = \frac{2q}{\Delta x} I_2 + \mu_o (D+\Delta x) \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \mu_o (D+3\Delta x) \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \mu_o (D+3\Delta x) \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \mu_o (D+3\Delta x) \frac{\Delta I_4}{\Delta t} + \dots + \mu_o (D+3\Delta x) \frac{\Delta I_n}{\Delta t}$$

$$2V = \frac{2q}{\Delta x} I_n + \mu_o (D+\Delta x) \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \mu_o (D+3\Delta x) \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \mu_o (D+5\Delta x) \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \mu_o (D+7\Delta x) \frac{\Delta I_4}{\Delta t} + \dots + \mu_o (D+(2n-1)\Delta x) \frac{\Delta I_n}{\Delta t}$$

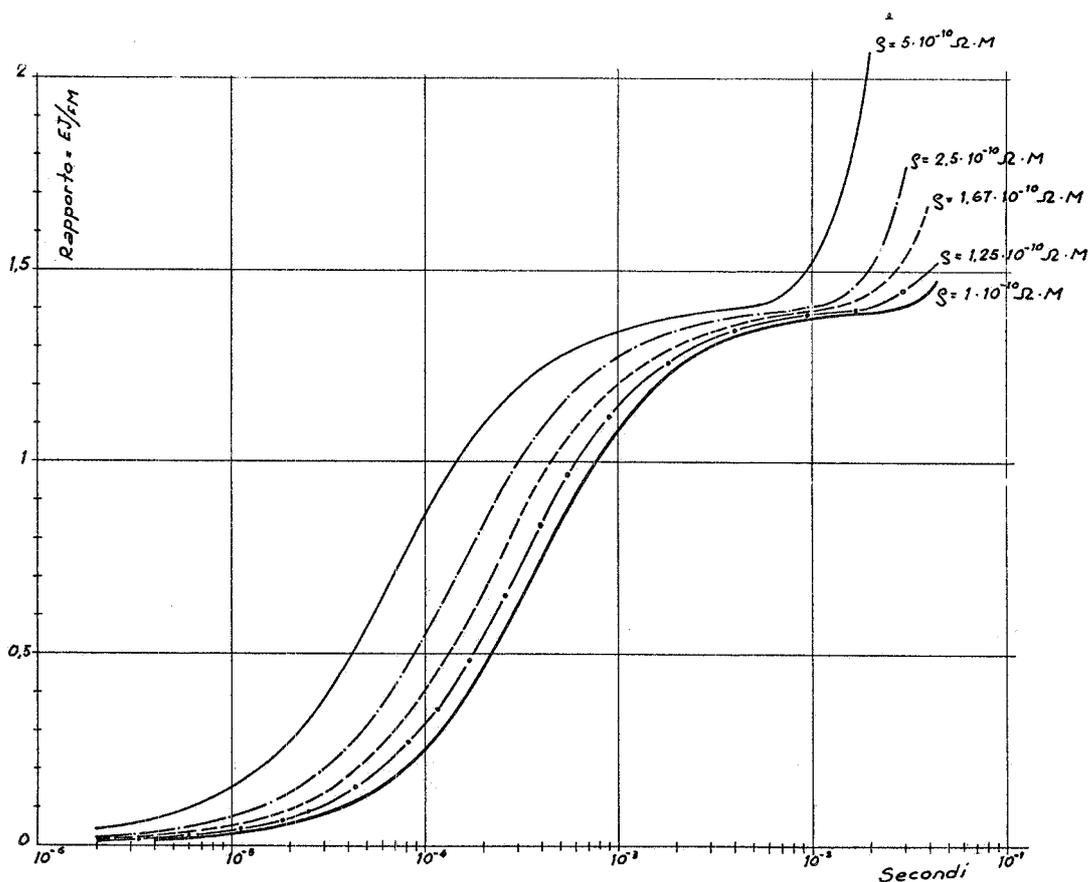


FIG. 11 - Andamento del rapporto $\alpha(t)$ per un cavo del tipo di cui alla Fig. 6, per valore 0 del parametro D.

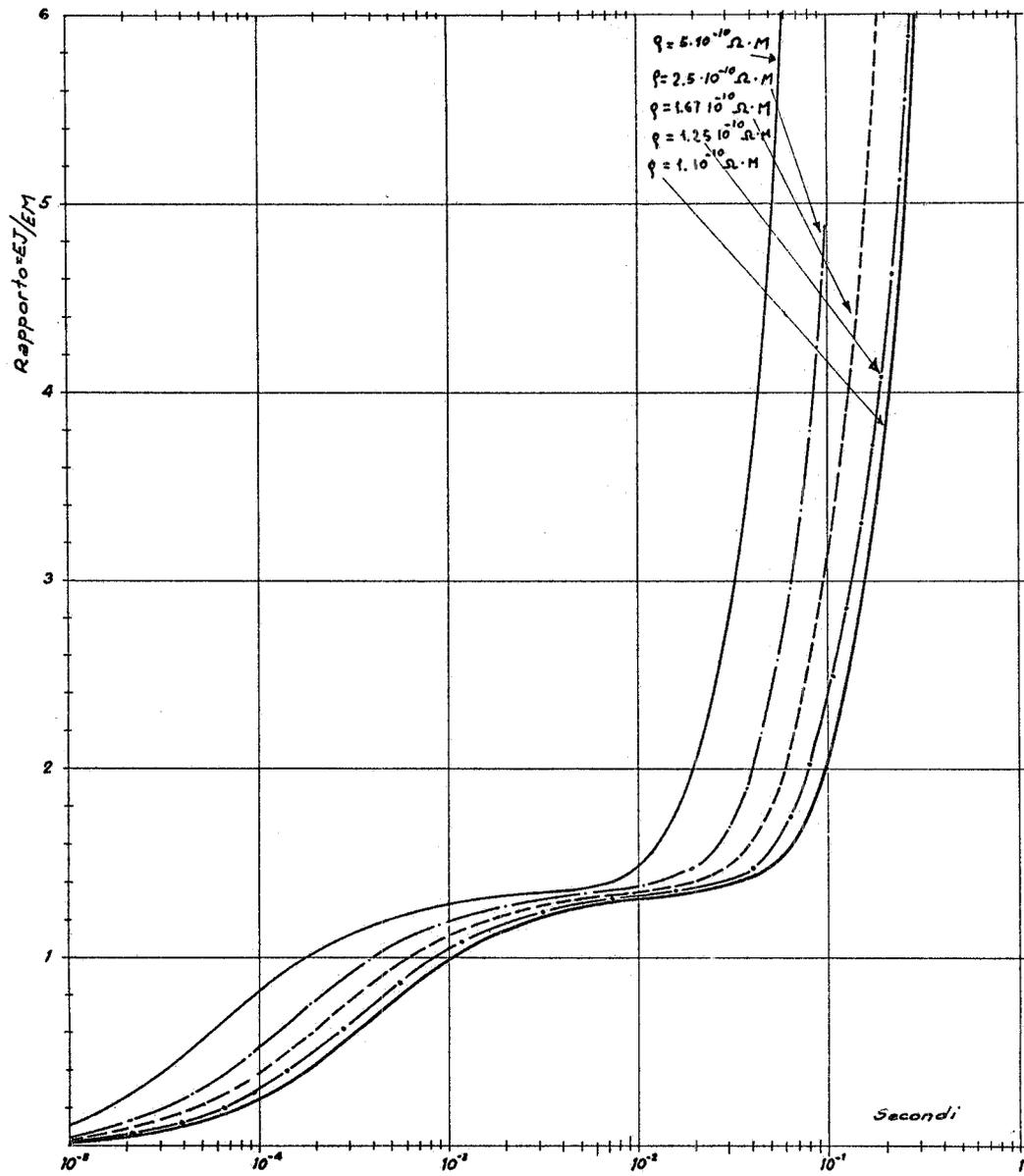


FIG. 12 - Andamento del rapporto $d(t)$ per un cavo del tipo di cui alle Fig. 6, per valore $4 \times 10^{-4} M$ del parametro D.

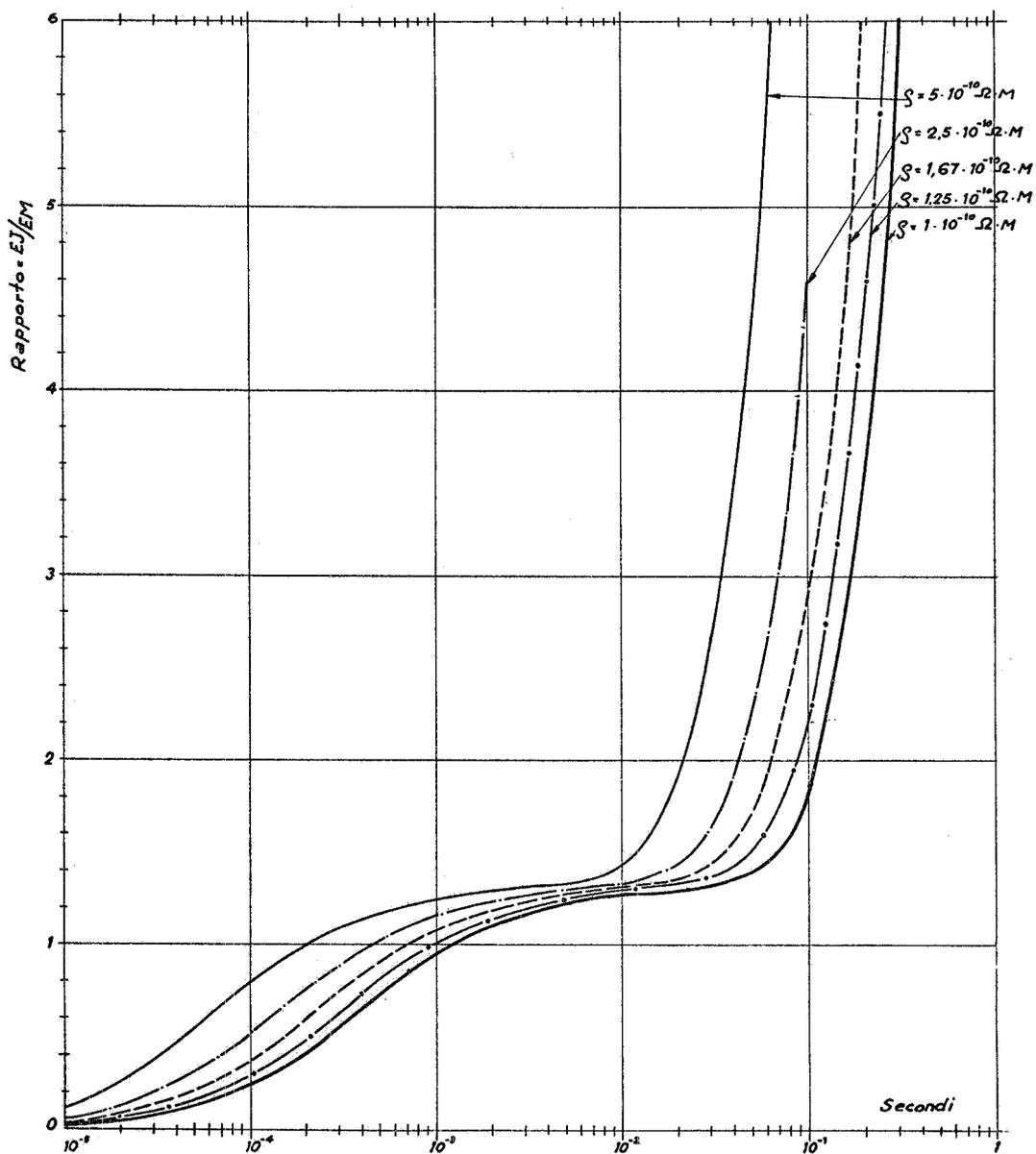


FIG. 13 - Andamento del rapporto $\alpha(t)$ per un cavo del tipo di cui alla Fig. 6, per valore $10^{-3} M$ del parametro D .

14.

ai 3 casi: $D = 0$ m, $D = 4 \times 10^{-4}$ m; $D = 10^{-3}$ m.

Come si può vedere dalle figure il valore del rapporto a parità di geometria decresce con il decrescere della resistività.

Negli andamenti in esame si possono distinguere 2 fasi diverse: una relativa alla parte iniziale del transitorio (cioè fino a $\sim 10^{-2}$ sec) un'altra relativa alla parte finale del transitorio, in cui si ha ovviamente un forte aumento del valore del rapporto dovuto all'aumentare molto rapido dell'energia dissipata contro un aumento molto limitato (al limite nullo) dell'energia magnetica accumulata nel volume.

Nella prima fase il rapporto cresce con una certa lentezza e si mantiene attorno ai valori inferiori all'unità o di poco superiore. Questo fatto è dovuto alla bassa diffusività che cresce con il crescere della resistività.

4. - CASO B -

I calcoli si riferiscono alla geometria di figura 7; il circuito è realizzato con un materiale superconduttore di II^o specie ed ha una simmetria piana (si può pensare ad una piattina ripiegata ad U); il tutto è eccitato con una tensione a gradino uniformemente distribuita secondo l'asse y di valore pari a V Volt/metro lineare.

Come si è detto si è fatta l'ipotesi semplificativa che la densità di corrente critica (J_c) sia costante al variare del campo magnetico e della temperatura. Non entreremo nel dettaglio fisico del meccanismo con cui penetra il flusso (flux jump) all'interno del superconduttore nè quindi nel meccanismo per cui si ha dissipazione all'interno dello stesso.

L'energia magnetica accumulata nel volume v occupato dal materiale nel caso di altezza (h) e lunghezza (l) unitarie, è pari a:

$$E_M(t) = \frac{1}{2} \mu_o \int_v H^2(v) dv = \mu_o \int_0^X H^2(x) dx = \mu_o J_c^2 \int_0^X (X-x)^2 dx = \mu_o J_c^2 \frac{X^3}{3} \text{ Joule}$$

Ricordando che $2V = d\phi/dt$ ove V è il valore della tensione costante applicata e distribuita uniformemente lungo il superconduttore, secondo la direzione dell'asse z, l'energia totale (E_T) erogata dal generatore (se la sua impedenza è nulla) vale:

$$\begin{aligned} E_T &= \int_0^t 2V I dt = \int_0^{\phi} I d\phi = \int_0^X J_c x d \left[\mu_o (D+x) J_c x \right] = \\ &= \mu_o J_c^2 \int_0^X x (D+2x) dx = \mu_o J_c^2 \left[\frac{X^2 D}{2} + \frac{2}{3} X^3 \right] \text{ Joule} \end{aligned}$$

L'energia magnetica che si accumula nel volume racchiuso tra i due conduttori (E_{MC}), quando $D \neq 0$, vale

$$E_{MC}(t) = \frac{1}{2} \mu_o \int_v H^2 dv = \frac{1}{2} \mu_o J_c^2 X^2 D \text{ Joule}$$

Allora l'energia dissipata nel superconduttore, per effetto della penetrazione del campo, varrà:

$$E_J(t) = E_T(t) - E_M(t) - E_{MC}(t) = \mu_0 J_c^2 \frac{X^3}{3} \text{ Joule}$$

Quindi il rapporto $\alpha(t)$ tra l'energia dissipata $E_J(t)$ e l'energia magnetica $E_M(t)$ è costante nel tempo e vale 1:

$$\alpha(t) = \frac{E_J(t)}{E_M(t)} = \frac{\mu_0 J_c^2 \frac{X^3}{3}}{\mu_0 J_c^2 \frac{X^3}{3}} = 1$$

5. - CASO C -

La geometria è quella di figura 8: i due conduttori paralleli, distanti tra loro D , sono realizzati con strati alterni di rame e superconduttore disposti perpendicolarmente alla direzione del campo; lo spessore del superconduttore è pari a quello del rame; i materiali sono a contatto elettrico tra loro e il sistema è eccitato da una tensione a gradino V , uniformemente distribuita secondo la direzione y .

Analogamente al caso A si è suddiviso lo spessore s in 20 parti di ampiezza $\Delta x = 2 \times 10^{-4}$ m e per ciascuno dei venti circuiti elementari così ottenuti si sono scritte le relative equazioni di equilibrio elettrico.

Dal punto di vista fisico la situazione di ciascun circuito è pressochè schematizzabile con il parallelo di due conduttori di cui uno in rame di conducibilità finita e l'altro superconduttore di conducibilità infinita per corrente inferiore al valore critico $I_c(x)$, nulla per corrente superiore al valore critico.

Per calcolare quindi l'andamento della corrente nell' i -esimo circuito elementare occorre distinguere due fasi: una prima nella quale la corrente I_i , di valore inferiore a quello critico, interessa solo il superconduttore che costituisce la via di minor resistenza; una seconda fase in cui la I_i ha un valore superiore a quello critico per cui nel superconduttore continua a passare una corrente di valore I_c , mentre la differenza $(I_i - I_c)$, che rappresenta il "supero", è indirizzata sul rame giacchè fisicamente si è invertita la situazione a causa della mutata conducibilità differenziale del superconduttore rispetto al rame.

Ogni volta che si passa da una fase all'altra le equazioni si modificano di conseguenza. Pertanto se immaginiamo di dare tensione all'istante $t = 0$ tutte le correnti sono nulle meno la prima che riguarda il circuito elementare più interno (sistema 1 - tabella C).

Solo dopo che la corrente I_1 ha raggiunto il valore $I_c(t = \Delta T_1)$ il comportamento elettrico del complesso è caratterizzato dal sistema (2), costituito da due equazioni(+).

(x) - Il valore della corrente critica I_c è ricavabile moltiplicando la densità critica (J_c) per l'area della sezione netta del superconduttore.

(+) - Si è adottata la convenzione di numerare da 1 a 20 i circuiti elementari a partire dal più interno.

TABELLA C

<u>Sistema (1)</u>	per $t \leq \Delta T_1$
$2V = \mu_0(D + \Delta x) \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$	
<u>Sistema (2)</u>	per $\Delta T_1 < t \leq \Delta T_1 + \Delta T_2$
$2V = \frac{4\varrho}{\Delta x} (I_1 - I_c) + \mu_0(D + \Delta x) \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \mu_0(D + \Delta x) \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$	
$2V = \mu_0(D + \Delta x) \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \mu_0(D + 3\Delta x) \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$	

<u>Sistema (h)</u>	per $\sum_1^{n-1} \Delta T_i < t \leq \sum_1^n \Delta T_i$
$2V = \frac{4\varrho}{\Delta x} (I_1 - I_c) + \mu_0(D + \Delta x) \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \mu_0(D + \Delta x) \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \mu_0(D + \Delta x) \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \dots$	
$2V = \frac{4\varrho}{\Delta x} (I_2 - I_c) + \mu_0(D + \Delta x) \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \mu_0(D + 3\Delta x) \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \mu_0(D + 3\Delta x) \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \dots$	
$2V = \mu_0(D + \Delta x) \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \mu_0(D + 3\Delta x) \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \mu_0(D + 5\Delta x) \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \dots$	

Con h al massimo pari a 20.

Successivamente dopo l'istante $t = \Delta T_1 + \Delta T_2$, cioè dopo che anche la corrente I_2 ha raggiunto il valore critico, il comportamento elettrico del complesso è caratterizzato dal sistema di equazioni (3) e così via fino al circuito più esterno.

In Figg. 14, 15, 16 sono riportati i diagrammi di α , β e γ relativi a tre valori di D e cinque di resistività, ove α è il rapporto tra l'energia dissipata complessivamente nel cavo e l'energia magnetica accumulata nello stesso, β è il rapporto tra l'energia dissipata nel solo rame e l'energia magnetica e γ è il rapporto tra l'energia dissipata nel superconduttore e l'energia magnetica.

Per limitare l'onere finanziario connesso con la esecuzione dei programmi necessari per la determinazione di α , β e γ si è stabilito di interrompere i calcoli all'istante in cui nell'ultimo circuito elementare la corrente raggiunge il valore critico; solo per un caso, figura 17, si è andati un pò oltre nel tempo.

Dai diagrammi di figg. 14, 15, 16 possiamo osservare che a parità di geometria con l'aumentare della resistività, nella parte iniziale del transitorio, i valori dei tre rapporti risultano più elevati mentre nella parte finale si ha l'opposto.

Ciò è dovuto all'aumento della velocità di penetrazione del campo magnetico, ovvero del coefficiente di diffusione magnetica, con l'aumentare della resistenza del rame; mentre la riduzione del rapporto α verso il termine del transitorio è giustificata dal fatto che a parità di tensione la potenza e di conseguenza l'energia è inversamente proporzionale alla resistenza.

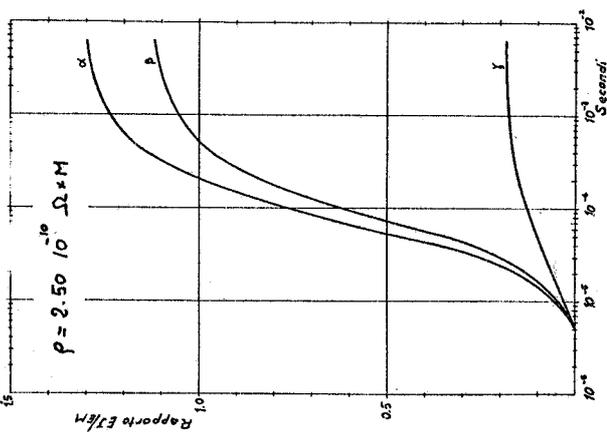
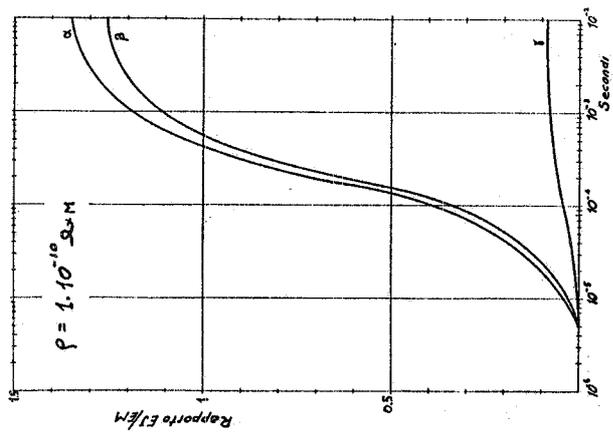
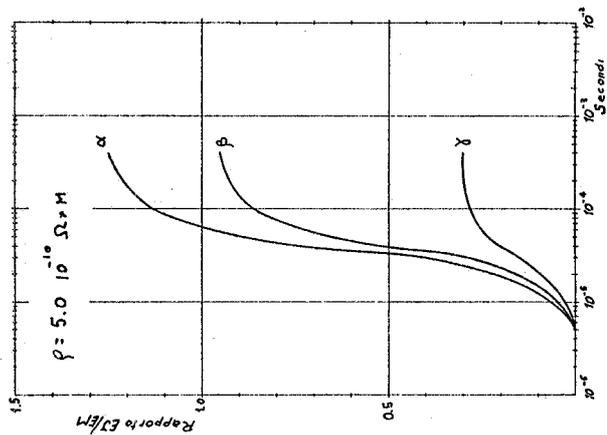
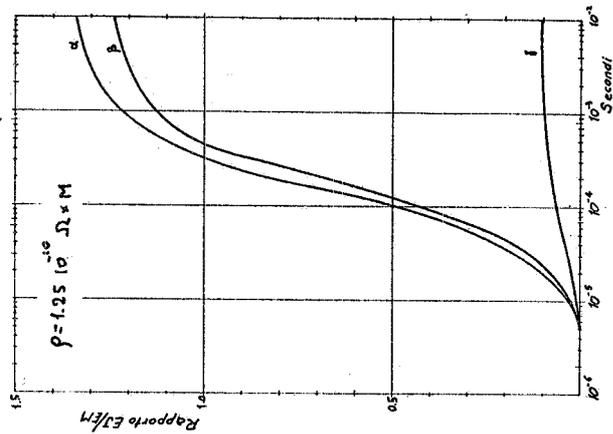
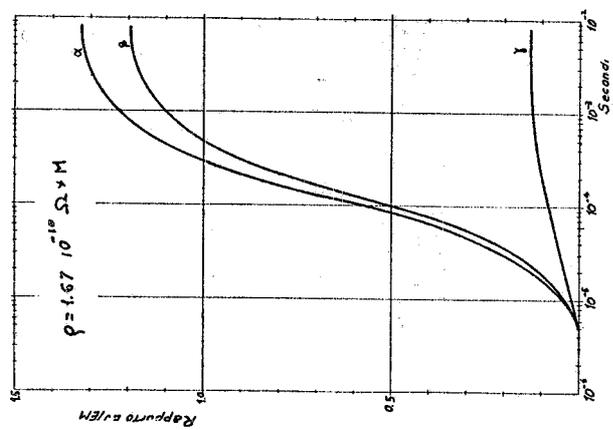


FIG. 14 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo riportato in Fig. 8, per diversi valori della resistività del rame e per valore C del parametro D.

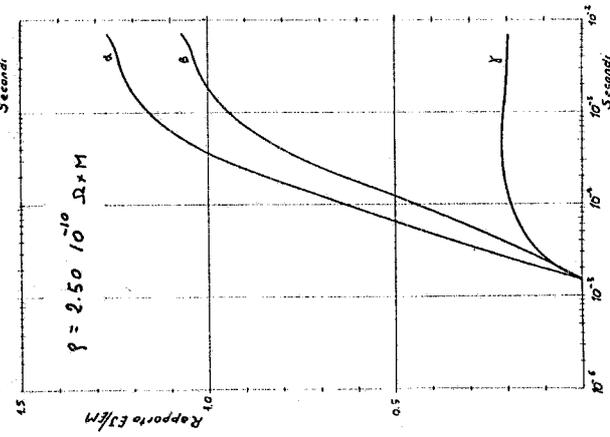
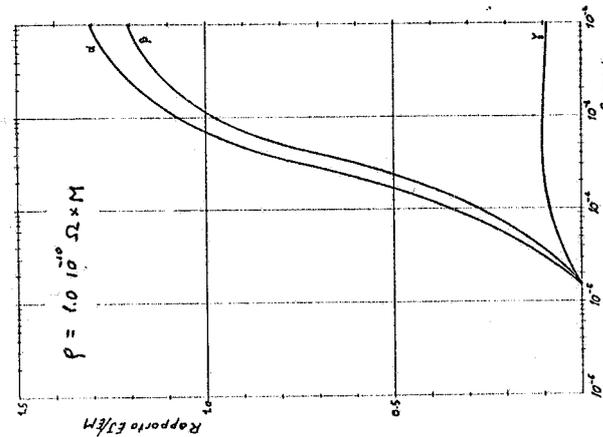
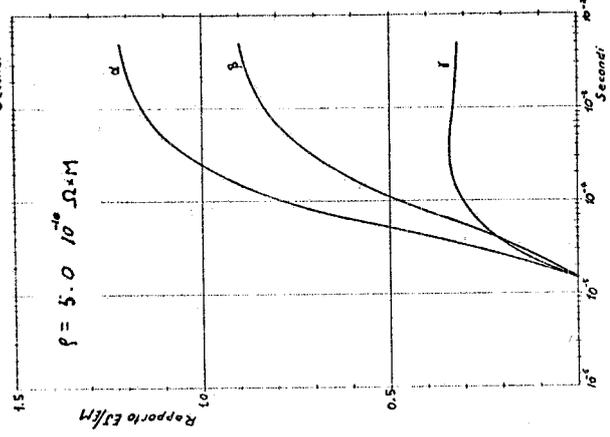
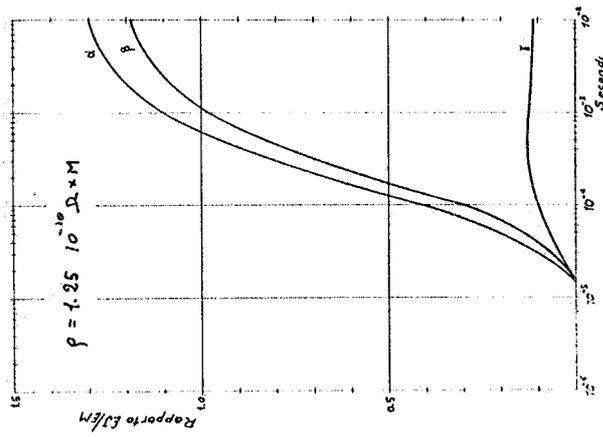
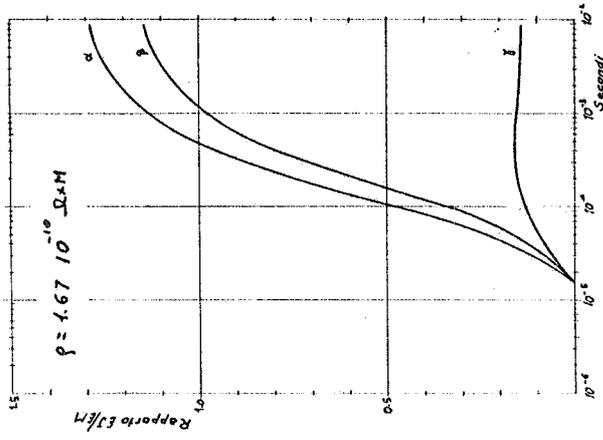


FIG. 15 - Andamento dei rapporti $\frac{\alpha(t)}{\alpha(0)}$, $\frac{\beta(t)}{\beta(0)}$, $\frac{\gamma(t)}{\gamma(0)}$ per un cavo del tipo riportato in Fig. 8 per diversi valori della resistività del rame e per valore 4×10^{-4} M del parametro D.

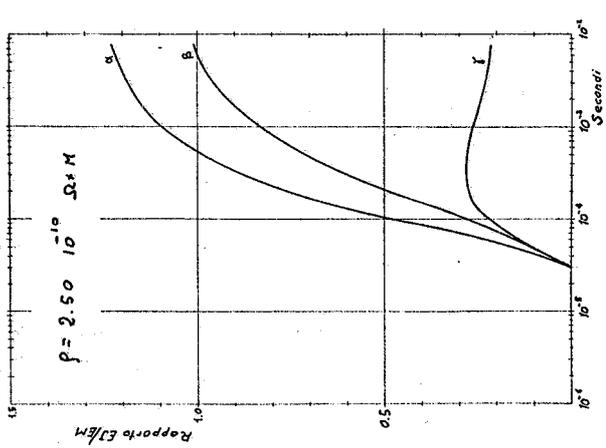
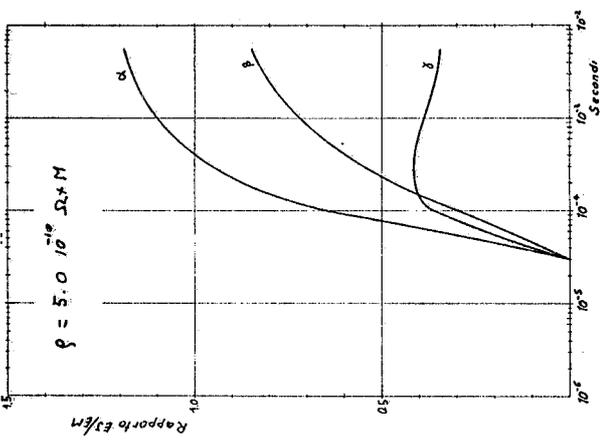
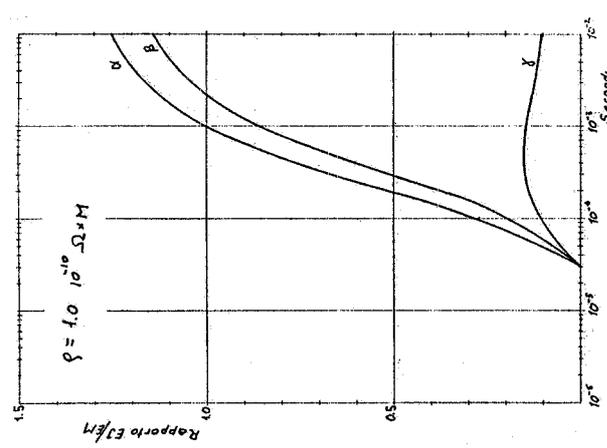
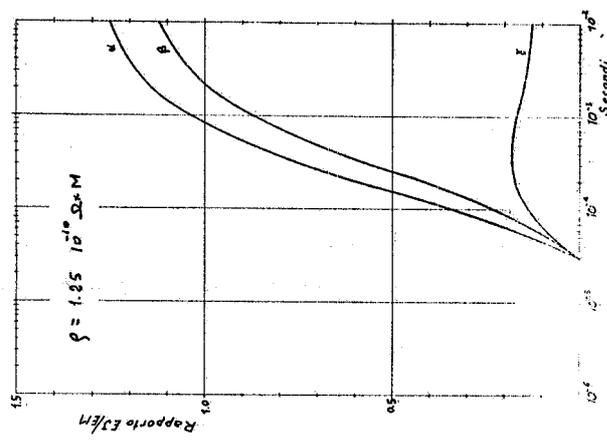
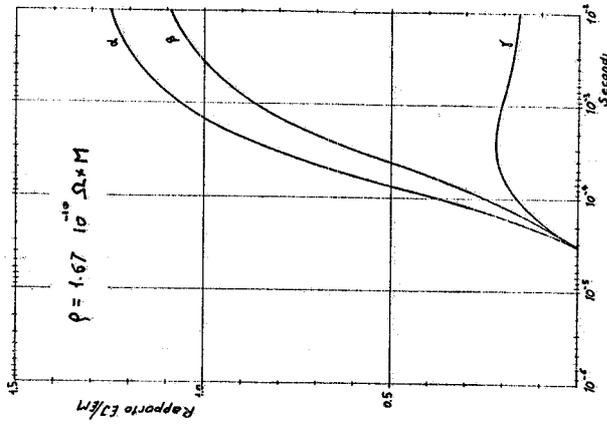


FIG. 16 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo riportato in Fig. 8, per diversi valori della resistività del rame e per valore $10^{-3} M$ del parametro D.

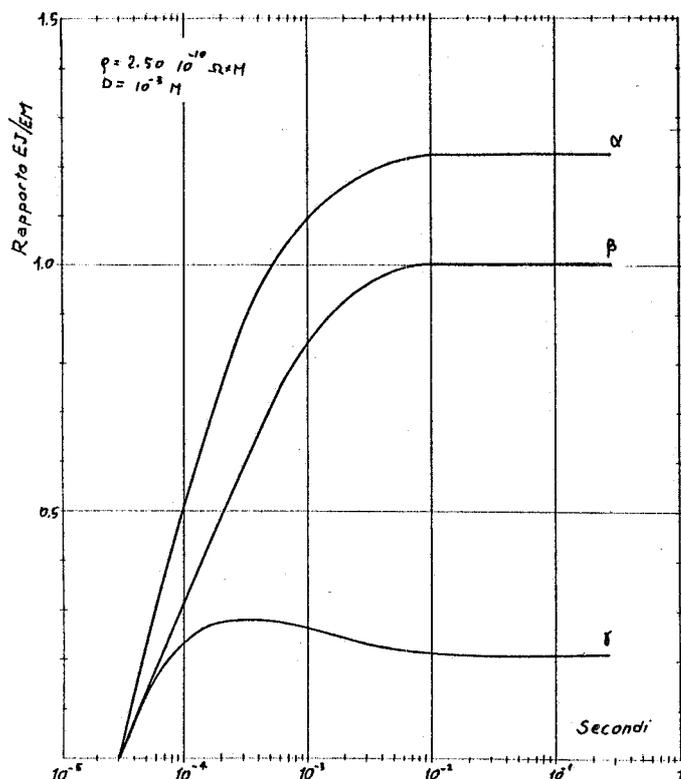


FIG. 17 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per uno dei casi di cui alle Figg. 16 i cui calcoli sono stati protratti per un tempo più lungo.

A parità di resistività l'aumento del parametro D dà luogo a due effetti:

- i valori dei rapporti α e β diventano a parità di tempo sempre inferiori mentre γ si comporta in modo opposto.
- si ha uno spostamento verso destra nell'istante d'inizio del transitorio.

Questi effetti sono dovuti all'aumento dell'induttanza offerta dal sistema con l'andamento di D.

Se confrontiamo il caso in esame con il caso A possiamo dire che a parità di ogni condizione il corrispondente valore di regime del rapporto α non è molto diverso nei due casi (1, 2 + 1, 3) con la differenza che mentre nel rame questa situazione è raggiunta intorno ai $6 \div 9 \times 10^{-3} \text{ s}$, nel caso misto è raggiunta intorno ai 10^{-1} s , cioè circa dieci volte più tardi per cui a parità di energia immagazzinata la dissipazione conseguente avverrà in tempi più lenti con evidente vantaggio per l'integrità del superconduttore.

6. - CASO D -

La geometria è la stessa del caso precedente; la sola differenza consiste nell'aver applicato la tensione al solo superconduttore elettricamente isolato dal rame.

In questa condizione nel circuito in rame non passa più il "supero" della corrente critica, come nel caso precedente, ma circola corrente fin dall'inizio del transitorio a causa dell'accoppiamento mutuo. Allora i sistemi di equazioni scritti

TABELLA D

Sistema 1

$$2V = L_{1,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{1,1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} \quad \text{per } I_1 < I_c$$

$$0 = R I_1' + L_{1',1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{1',1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$$

Sistema 2

$$2V = \Delta V_1 + M_{1,1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{1,2} \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + M_{1,2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t} \quad \text{Per } I_1 = I_c \text{ e } I_2 < I_c$$

$$0 = R I_1' + L_{1',1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{1',2} \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + M_{1',2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t}$$

$$2V = L_{2,2} \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + M_{2,1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{2,2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t}$$

$$0 = R I_2' + M_{2',1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + L_{2',2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t} + M_{2',2} \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

(Sistema h)

$$2V = V_1(t) + M_{1,1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{1,2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t} + M_{1,3'} \frac{\Delta I_3'}{\Delta t} + \dots$$

$$0 = R I_1' + L_{1',1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{1',2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t} + M_{1',3'} \frac{\Delta I_3'}{\Delta t} + \dots$$

$$2V = V_2(t) + M_{2,1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{2,2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t} + M_{2,3'} \frac{\Delta I_3'}{\Delta t} + \dots$$

$$0 = R I_3' + M_{3',1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{3',2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t} + L_{3',3'} \frac{\Delta I_3'}{\Delta t} + \dots$$

$$2V = L_{h,h} \frac{\Delta I_h}{\Delta t} + M_{h,1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{h,2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t} + M_{h,3'} \frac{\Delta I_3'}{\Delta t} + \dots$$

$$0 = R I_h' + L_{h',h'} \frac{\Delta I_h'}{\Delta t} + M_{h',1'} \frac{\Delta I_1'}{\Delta t} + M_{h',2'} \frac{\Delta I_2'}{\Delta t} + M_{h',3'} \frac{\Delta I_3'}{\Delta t} + \dots$$

$$\text{per } I_1 = I_2 = \dots = I_{n-1} = I_c \text{ e } I_h < I_c$$

(N. B. - Per i valori di "L" vedi Tabella E - pag. 27)

per il caso precedente si modificano come riportati in tabella D. ^(x)

Per risolvere il sistema (1) osserviamo che all'istante $T = 0$ in cui immaginiamo di dare tensione, sia nel rame che nel superconduttore circola istantaneamente una corrente di valore $2V/R$, con versi ovviamente contrari, come risulta osservando le due equazioni del sistema (1).

Inoltre poichè la tensione indotta nel rame non varia, la corrente I_1' rimane costante mentre quella nel superconduttore si accresce con la legge:

$$I_1 = \frac{2V}{L_{1,1}} \Delta t$$

Quando la corrente I_1 ha raggiunto il valore critico ^(*), le equazioni di equilibrio si modificano come indicato nel sistema (2). In queste condizioni la corrente I_1 non aumenta più: pertanto la $\Delta I_1 / \Delta t$ è identicamente nulla e al suo posto nella equazione del primo circuito appare una $\Delta V_1(t)$ che è una contro forza elettromotrice tale da annullare la variazione di I_1 .

La corrente I_1' nel rame decresce, mentre, per la penetrazione del campo magnetico, che ora interessa anche il secondo circuito ⁽⁺⁾, le correnti I_2 e I_2' raggiungono istantaneamente il valore $2V/R$.

Per i motivi precedentemente esposti la I_2 cresce con un certo andamento che è funzione dei coefficienti di auto e mutua induzione, mentre la I_2' rimane costante.

Il sistema (2) di tabella D si riduce quindi ad un sistema di 3 equazioni in 3 incognite: I_2 , I_1' , $\Delta V_1(t)$. Lo stesso meccanismo si applica ai circuiti successivi per cui per il generico sistema (h) di tabella D, le equazioni si riducono a $2h-1$ e le incognite sono $V_1(t)$, $V_2(t)$ $V_{h-1}(t)$, I_h , I_1' , I_2' I_{h-1}' .

In figura 18 è riportato l'andamento qualitativo delle 20 correnti nel rame e nel superconduttore.

I calcoli sono stati eseguiti con gli stessi parametri geometrici del caso immediatamente precedente. Si osservi che dalla figura 18 al diminuire della resistenza complessiva offerta dal generico circuito in rame, si riduce il tempo necessario perchè l'ultimo superconduttore sia percorso da corrente critica. Al limite infatti per un valore critico di R pari a $5 \times 10^{-5} \Omega$ si ha presenza di corrente contemporaneamente in tutti i circuiti superconduttori e di rame.

In conseguenza di questo diverso comportamento del sistema al variare della resistenza ^(o) si sono sviluppati due casi e precisamente:

Caso I) la R è maggiore della resistenza critica e vale $10^{-4} \Omega$.

(x) - Nel sistema (1) la corrente I_1 è quella che passa nel superconduttore mentre la I_1' è la corrente che circola nel rame (i versi di percorrenza sono ovviamente contrari).

(*) - La corrente critica si ricava moltiplicando la densità critica di corrente per la sezione del superconduttore: $I_c = J_c A_{SC}$ e nel caso particolare preso in esame, vale 20.000 A;

(+) - Si sono numerati i circuiti da 1 a 20 a partire dal più interno verso l'esterno.

(o) - Si è ritenuto, quindi, superfluo il considerare una variazione di resistività.

Caso II) la R è minore della resistenza critica e vale $10^{-5} \Omega$.

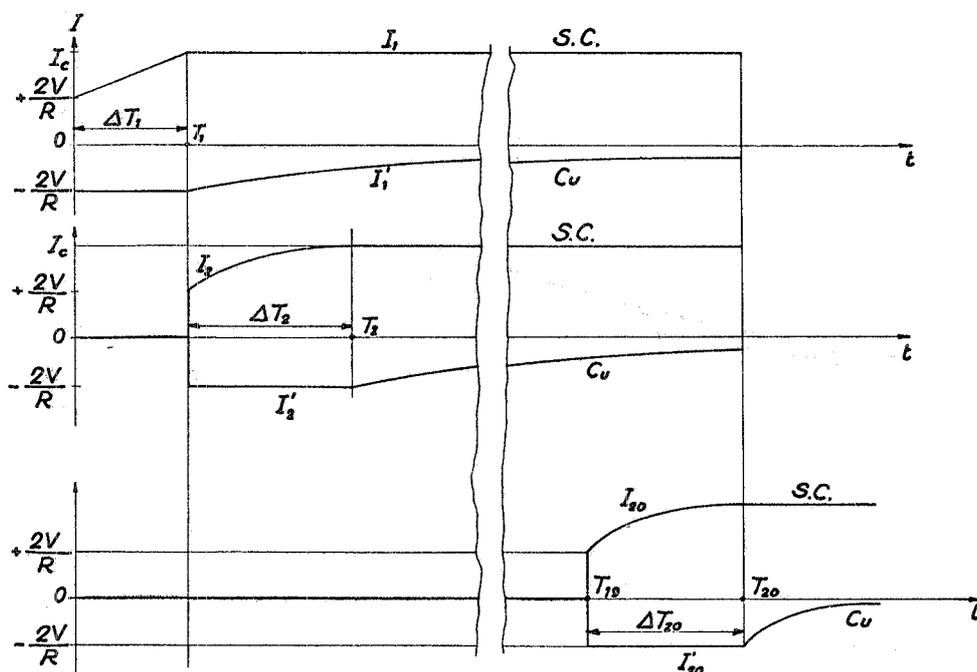


FIG. 18 - Andamento qualitativo delle correnti nel rame e nel superconduttore per cavo con geometria indicata in Fig. 8 nel caso in cui il rame sia isolato elettricamente dal superconduttore e non eccitato. La resistenza del rame è inferiore alla resistenza critica.

Per ottenere questi due valori distinti di resistenza senza variare la geometria del sistema basta pensare di variare l'altezza della sezione del rame interponendo fra rame e superconduttore diversi spessori di isolante.

6.1. - Caso I. -

In fig. 19 sono riportati gli andamenti dei 3 rapporti α , β , γ per le tre geometrie. Notiamo subito che α tende nei tre casi verso uno stesso valore per poi aumentare rapidamente come si può vedere nella fig. 20 relativa alla geometria maggiore^(x), che è l'unica per la quale si sono protratti i calcoli per un tempo più lungo.

All'inizio il valore del rapporto α è più elevato all'aumentare di D giacché l'acrescimento dell'energia magnetica è più lenta.

Per questo stesso motivo anche β ha un andamento simile ad α fino a che la corrente nell'ultimo circuito superconduttore non ha raggiunto il valore critico, dopo di che mentre α cresce, β decresce tendendo asintoticamente ad un valore limite che compete al rapporto tra l'energia complessivamente dissipata nel rame, quando la corrente indotta è nulla, e la relativa energia magnetica presente.

(x) - Per geometria maggiore si intende quella relativa al caso in cui la distanza tra i conduttori più interni vale 10^{-3} metri.

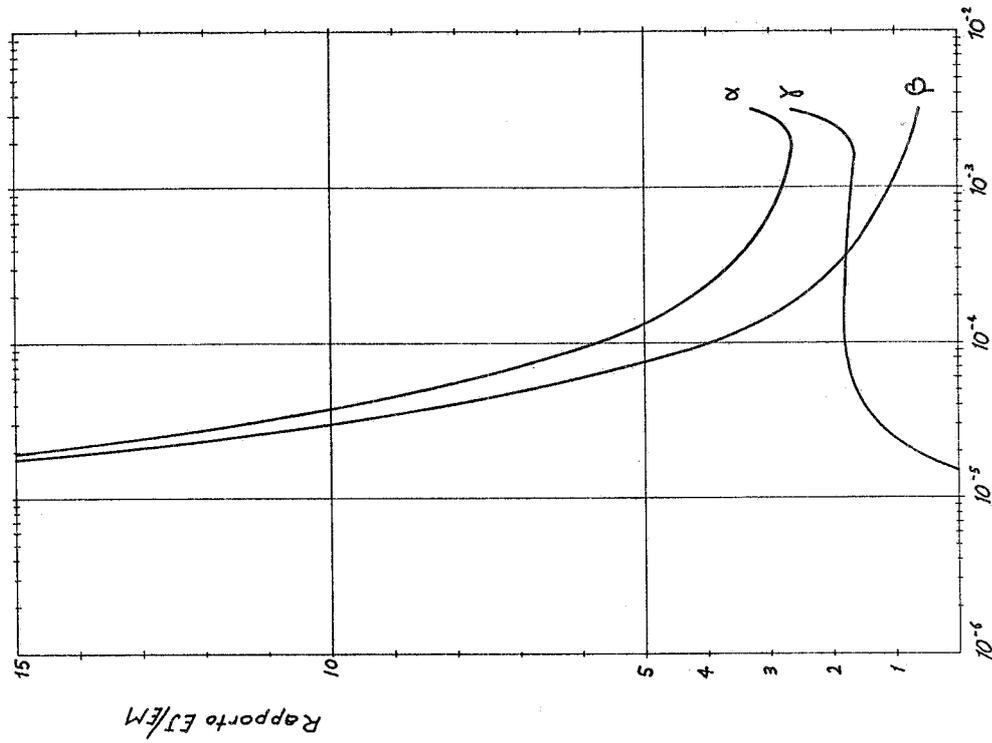


FIG. 20 - Andamenti dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per il caso di cui alla Fig. 19, per un valore del parametro $D = 10^{-3}$ m.

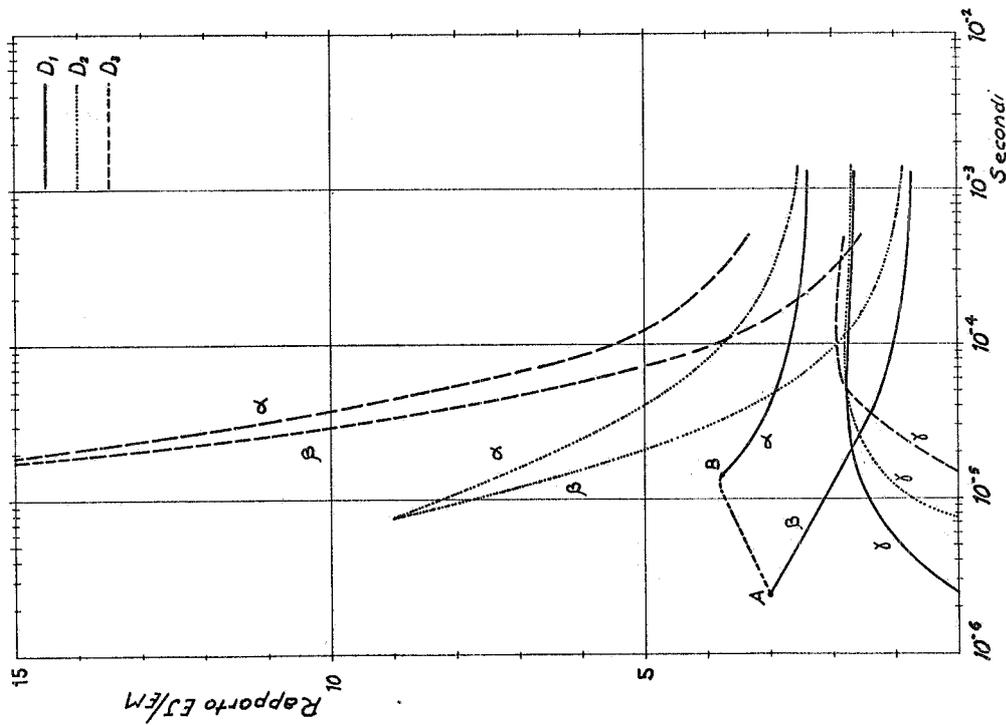


FIG. 19 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo di cui alla Fig. 8, con il rame non eccitato ed isolato dal superconduttore, per diversi valori del parametro D ($D_1 = 0$; $D_2 = 4 \times 10^{-4}$ m; $D_3 = 10^{-3}$ m). La resistenza del rame è inferiore alla resistenza critica. ($R = 10^{-4} \Omega$).

Per quel che riguarda il rapporto γ si nota che per geometrie maggiori si ha un ritardo nell'inizio della dissipazione che per i tre casi tende ad uno stesso valore nell'intorno dell'istante in cui si ha la penetrazione completa della corrente nel superconduttore. Successivamente il rapporto γ tende con lo stesso andamento di α verso valori sempre più elevati come si può notare dal grafico di fig. 20.

Si nota che per il caso $D = 0$ il rapporto α presenta una anomalia nel tratto AB; anomalia che non traspare negli altri casi per i più alti valori in gioco dei rapporti α e β .

Il motivo di questa anomalia è da ricercarsi nell'aver trascurato la dissipazione propria del superconduttore (flux jump) quando la corrente lo investe: il tratto AB, quindi, non ha un significato fisico.

6.2. - Caso II. -

Si noti, innanzitutto, che a causa dell'istantanea penetrazione della corrente in tutto il cavo i valori dei rapporti (v. fig. 21) sono notevolmente più alti rispetto al caso precedente e si mantengono tali anche successivamente per α e γ , che raggiungeranno un minimo intorno ad un valore pari a 50, mentre i rapporti β tendono ovviamente a decrescere verso un valore limite, per geometrie crescenti si hanno valori maggiori di tutti e tre i rapporti a parità di tempo.

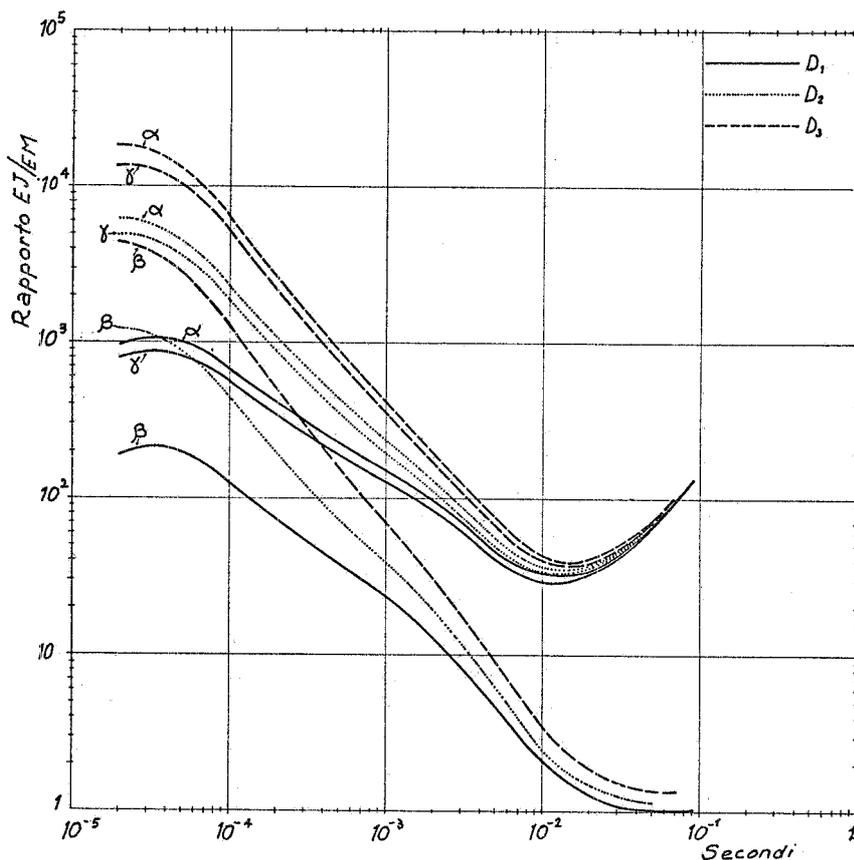


FIG. 21 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo di cui alla Fig. 8, con il rame non eccitato ed isolato dal superconduttore, per diversi valori del parametro D ($D_1 = 0$; $D_2 = 4 \times 10^{-4}$ m; $D_3 = 10^{-3}$ m). La resistenza del rame è inferiore a quella critica ($R = 10^{-5} \Omega$).

Dalle considerazioni sopra esposte si conclude, quindi, che per la geometria in esame è senz'altro da escludersi un valore per la resistenza del rame che superi la resistenza critica.

7. - CASO E -

Il cavo, realizzato con nastri di superconduttore e di rame di spessore $\Delta x = 2 \times 10^{-4}$ m disposti alternativamente in direzione parallela al campo e in contatto elettrico tra loro, è eccitato da una tensione a gradino uniformemente distribuita in direzione y pari a V Volt/metro lineare (fig. 9).

All'istante iniziale ($t = 0$) solo la corrente I_1 , del conduttore più interno che è di rame^(x), e la I_2 , del secondo circuito realizzato in superconduttore, incomincia ad aumentare, ovviamente con velocità diverse, fino a che la I_2 non raggiunge il valore critico I_c .

Relativamente a questo periodo le equazioni di equilibrio del sistema sono quelle riportate in tabella E (sistema 1).

Dopo l'istante $t = \Delta t_1$ in cui $I_2 = I_c$ a causa della ulteriore penetrazione della corrente le equazioni caratterizzanti il comportamento elettrico del cavo si modificano nel sistema 2 di tabella E.

Si noti che nella seconda equazione di questo sistema, cioè in quella relativa al circuito superconduttore numero 2, compare il termine $\Delta V_2(t)$ che sta a rappresentare la contro forza elettromotrice che nasce all'interno dello stesso e che impedisce alla corrente di superare il valore critico. All'istante $t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ anche la I_4 raggiunge il valore critico per cui il campo magnetico passa ad interessare il conduttore 6 e così via.

Ad un generico istante t la corrente sarà arrivata all'h-esimo circuito (con h numero pari) per cui il comportamento elettrico del cavo sarà schematizzabile con il sistema h di tabella E.

In figg. 22, 23, 24 sono riportati i risultati dei calcoli effettuati.

A parità di geometria si può notare come l'aumento della resistività del rame dia luogo ad un più rapido evolversi del fenomeno per l'influenza che essa ha sul valore della diffusività magnetica. In conseguenza dell'aumentata rapidità si ha, come era del resto facilmente prevedibile, un notevole incremento dell'energia dissipata nel superconduttore, la qualcosa non è desiderabile.

Inoltre si può notare una diminuzione dell'energia dissipata nel rame con una conseguente diminuzione dell'energia totale.

A parità di resistività invece il fenomeno si evolve più lentamente con l'aumentare della distanza tra i conduttori più interni a causa del valore più elevato dell'induttanza del sistema. In conseguenza di ciò l'energia dissipata nel rame è più bassa, mentre quella dissipata nel superconduttore è più elevata e in totale l'energia dissipata diminuisce.

(x) - La numerazione adottata in figura 9, è tale per cui I_1 è la corrente che interessa il conduttore più interno di rame, mentre I_2 è la corrente che interessa il superconduttore immediatamente esterno al rame e così via fino all'elemento ventesimo.

TABELLA E

Sistema (1)

$$2V = \frac{2q}{\Delta x} I_1 + L_{1,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{1,2} \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

$$2V = M_{2,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + L_{2,2} \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

Sistema (2)

$$2V = \frac{2q}{\Delta x} I_1 + L_{1,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{1,3} \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + M_{1,4} \frac{\Delta I_4}{\Delta t}$$

$$2V = 1 \cdot \Delta V_2(t) + M_{2,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{2,3} \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + M_{2,4} \frac{\Delta I_4}{\Delta t}$$

$$2V = \frac{2qI_3}{\Delta x} + L_{3,3} \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + M_{3,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{3,4} \frac{\Delta I_4}{\Delta t}$$

$$2V = M_{4,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{4,3} \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + L_{4,4} \frac{\Delta I_4}{\Delta t}$$

Sistema (h)

$$2V = \frac{2q}{\Delta x} I_1 + L_{1,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{1,3} \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \dots + M_{1,n} \frac{\Delta I_h}{\Delta t}$$

$$2V = M_{2,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \Delta V_2 + M_{2,3} \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \dots + M_{2,n} \frac{\Delta I_h}{\Delta t}$$

.....

$$2V = M_{h,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{h,3} \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \dots + L_{hh} \frac{\Delta I_h}{\Delta t}$$

con h al massimo eguale a 20.

ove

$$L_{1,1} = M_{1,2} = M_{2,1} = \dots = M_{h,1} = M_{1,h} = \mu_o (D + \Delta x)$$

$$L_{2,2} = M_{2,3} = M_{2,n} \dots = M_{2,4} = \dots = M_{h,2} = \mu_o (D + 3 \Delta x)$$

.....

$$L_{20,20} = \mu_o (D + 39 \Delta x).$$

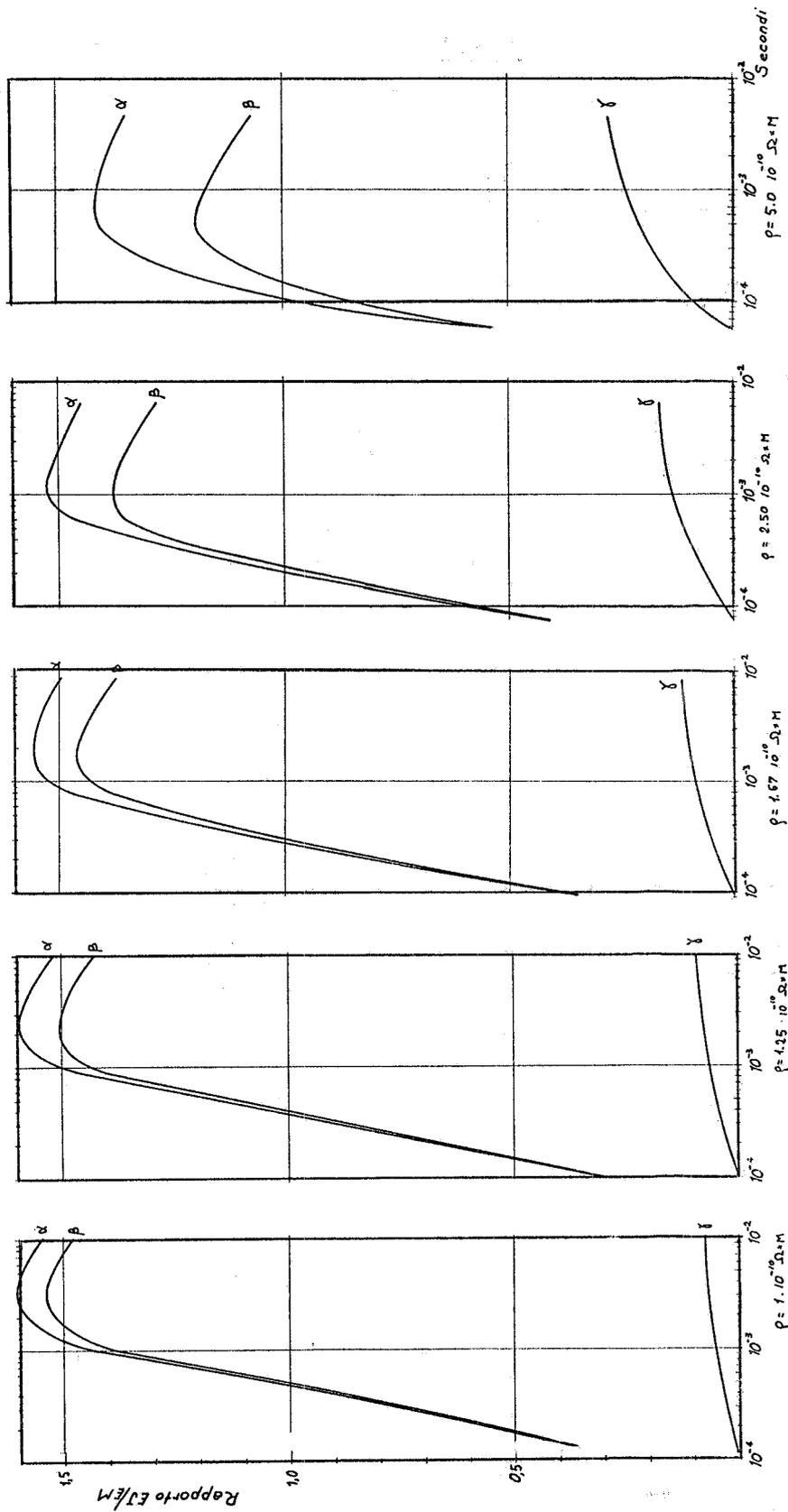


FIG. 22 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo riportato in Fig. 9, per diversi valori della resistività del rame e per valore 0 del parametro D.

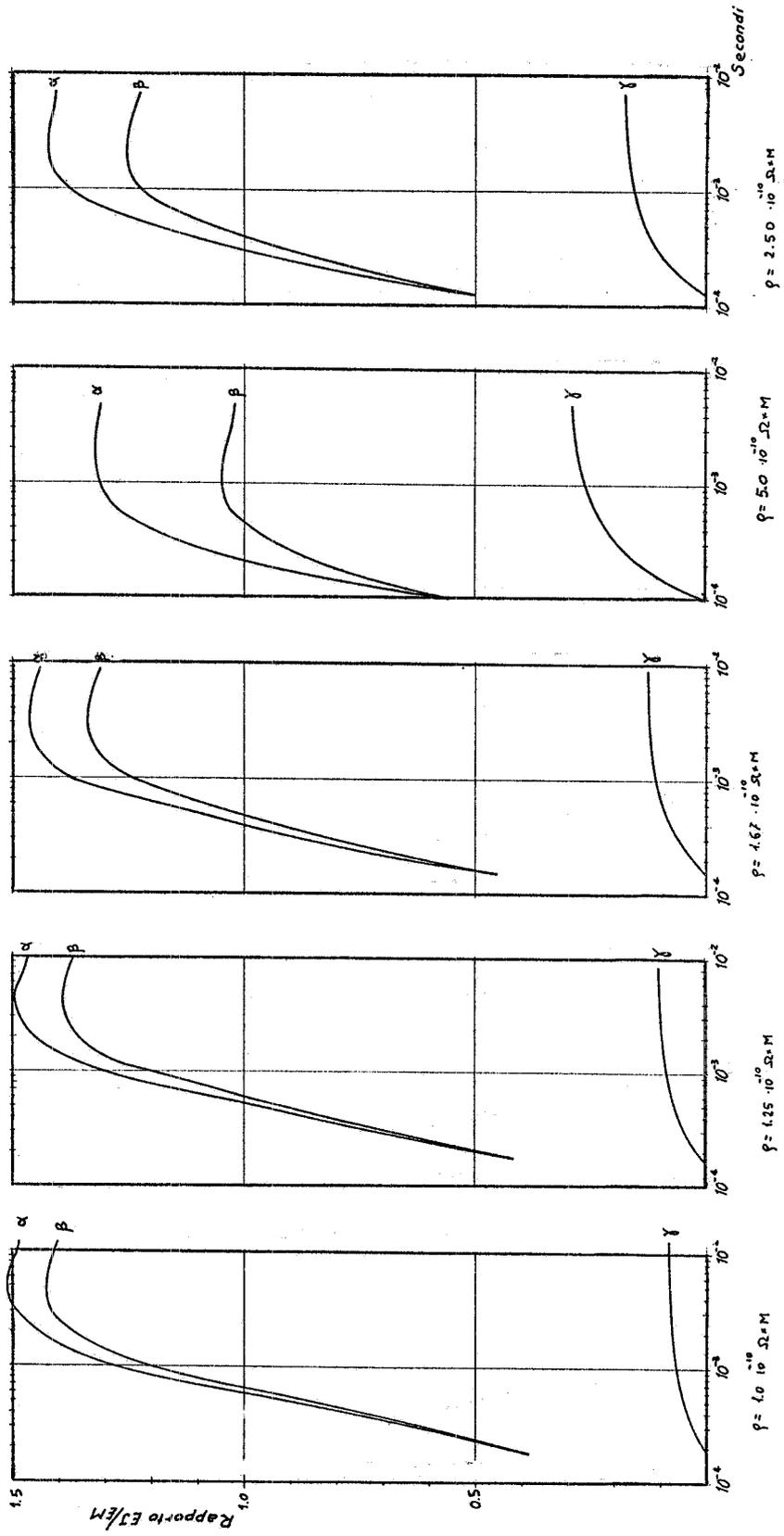


FIG. 23 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo riportato in Fig. 9, per diversi valori della resistività del rame e per valore 4×10^{-4} m del parametro D.

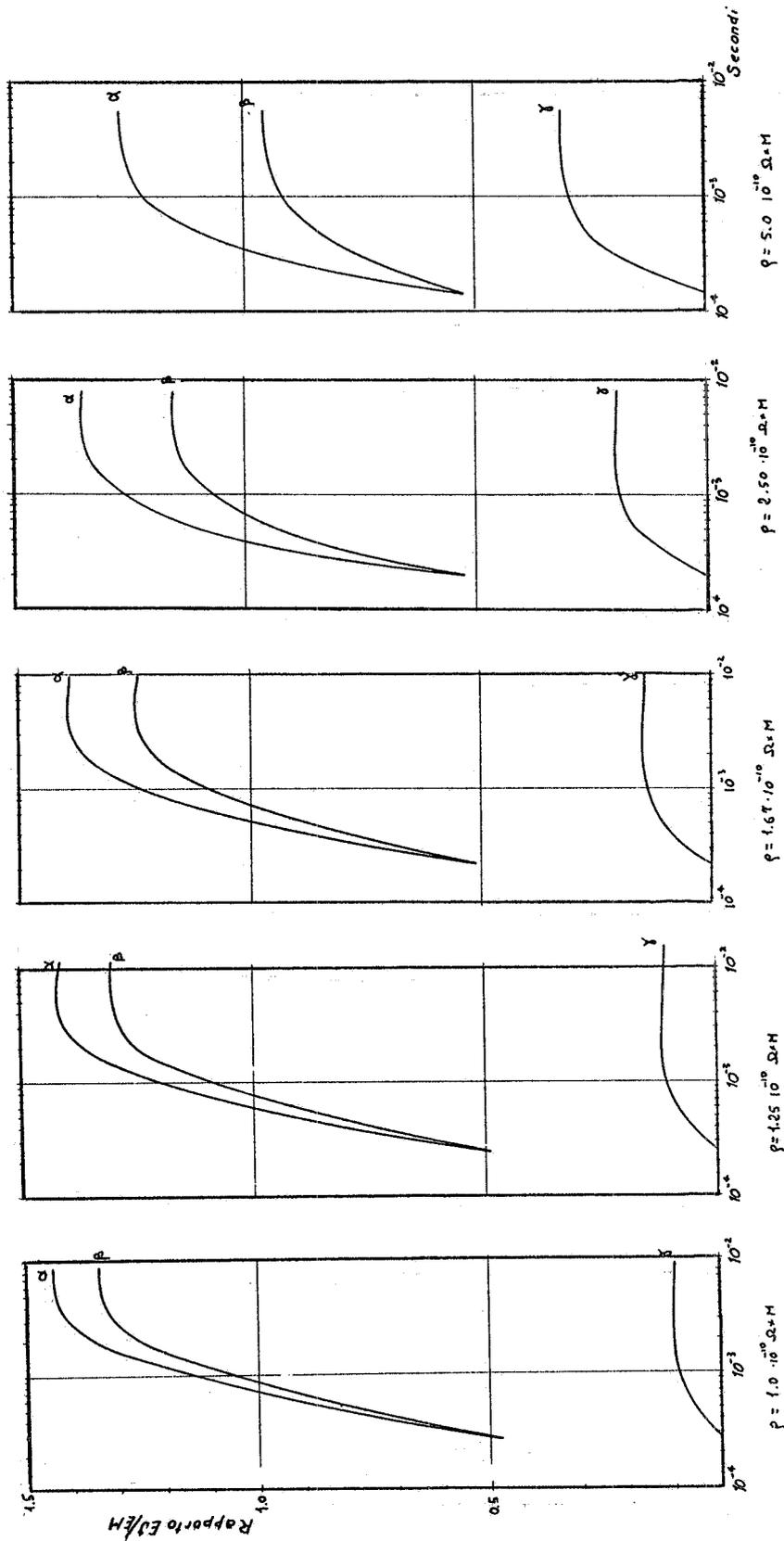


FIG. 24 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo riportato in Fig. 9, per diversi valori della resistività del rame e per valore $10^{-3}m$ del parametro D.

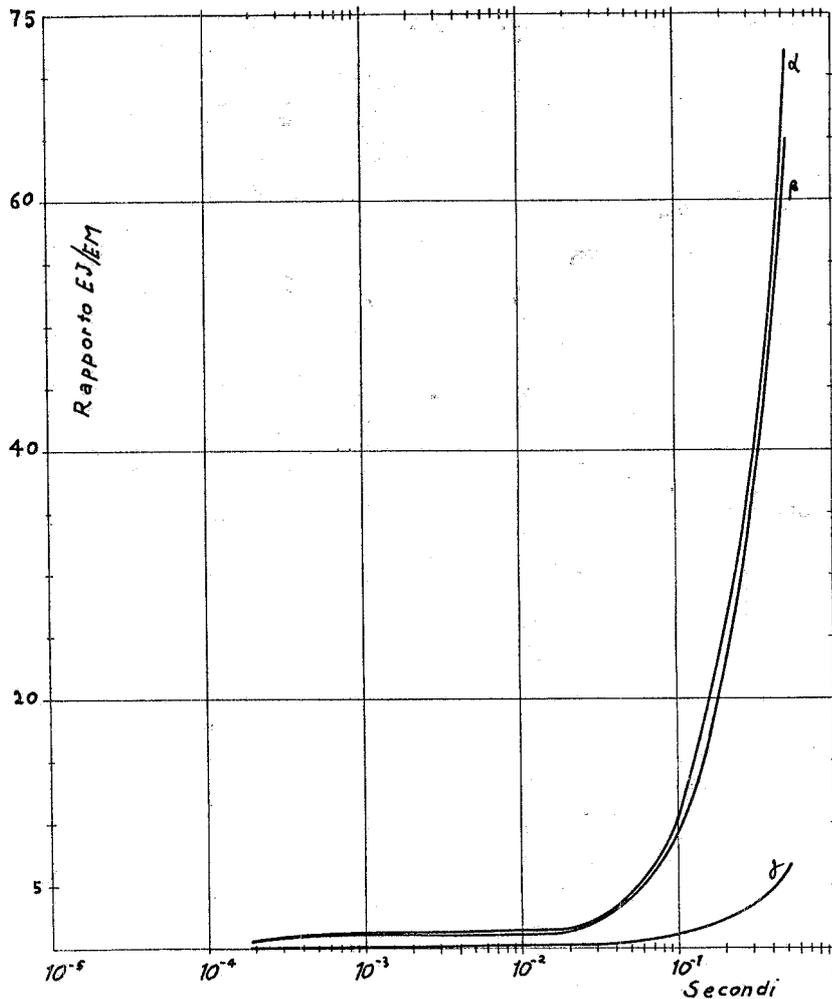


FIG. 25 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per uno dei casi di cui alle Figg. 24 i cui calcoli sono stati protratti per un tempo più lungo ($D=10^{-3}$ m, $\rho = 2.50 \times 10^{-10}$ $\Omega \times M$).

8. - CASO F -

La geometria è la stessa di fig. 9 con la sola differenza che il rame è elettricamente isolato dal superconduttore, e non è eccitato: da un punto di vista matematico questo caso differisce dal precedente solo per la sostituzione del valore 0 al posto di 2 V nelle equazioni.

Da un punto di vista fisico, invece, la diversità è molto maggiore: infatti dalle figure 26, 27, 28 in cui sono diagrammati i risultati dei calcoli, possiamo vedere che a parità di geometria i rapporti α e γ si mantengono al di sopra delle corrispondenti curve a resistività minori, mentre per il rapporto β avviene l'opposto; contrariamente al caso precedente il contributo di β al valore del rapporto α è molto minore giacché l'influenza maggiore è esercitata dalla dissipazione nel superconduttore.

A parità di resistività all'aumentare del parametro D, le curve relative ad

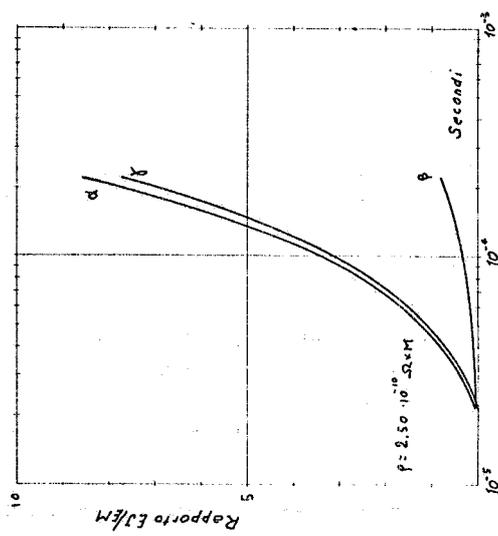
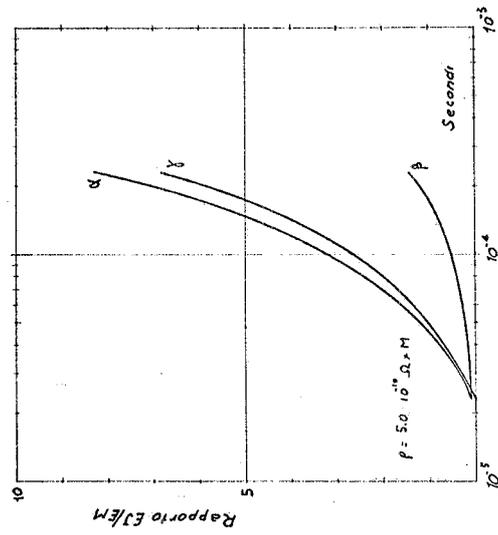
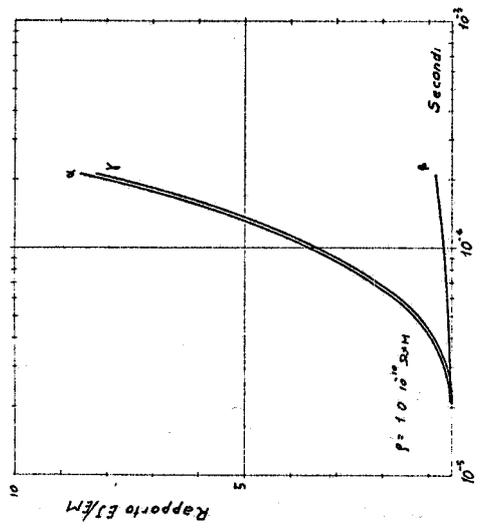
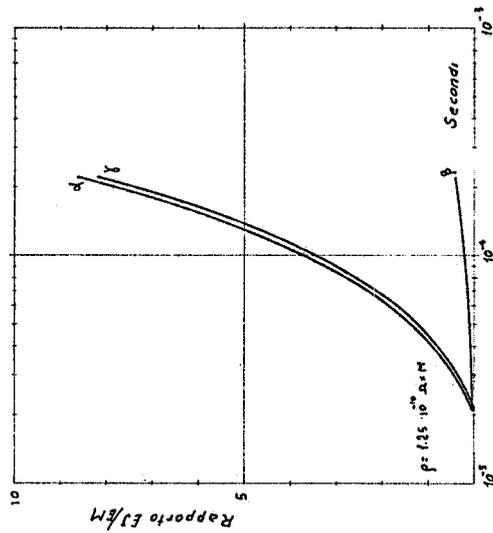
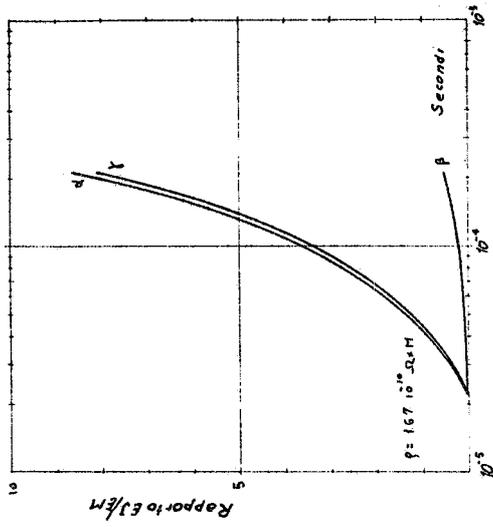


FIG. 26 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo di cui alla Fig. 9, con il rame non ec citato ed isolato dal superconduttore, per diversi valori della resistività del rame e per valore 0 m del parametro D.

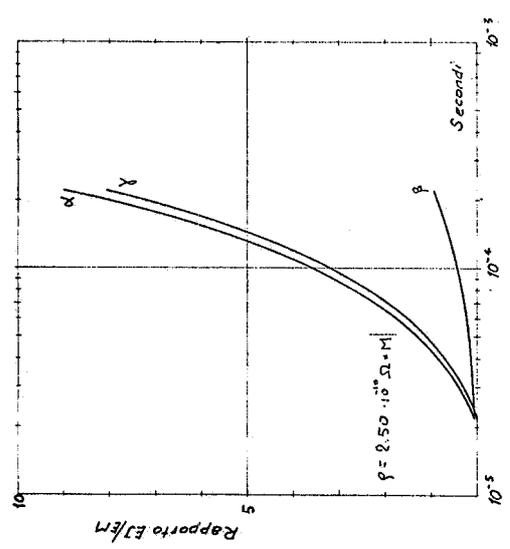
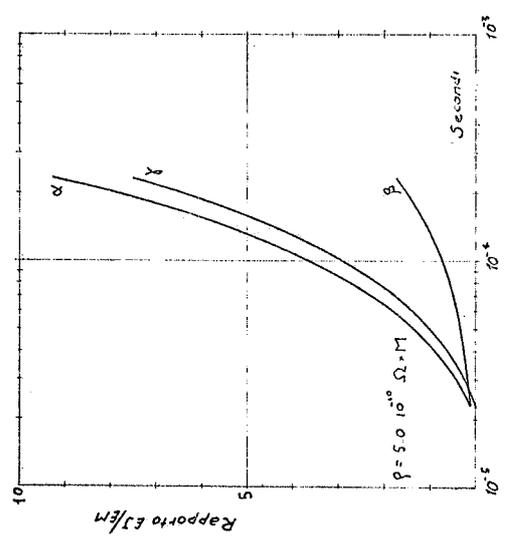
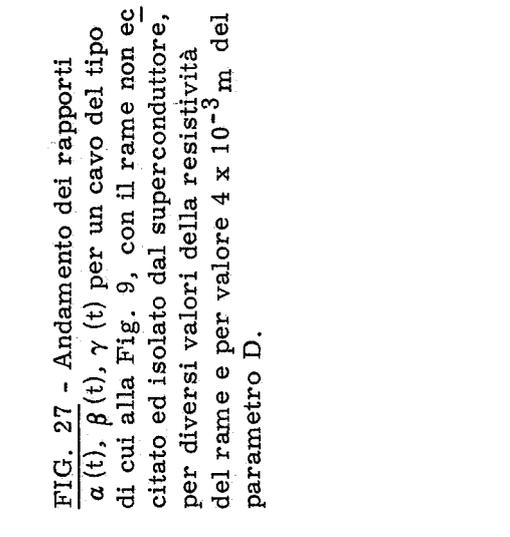
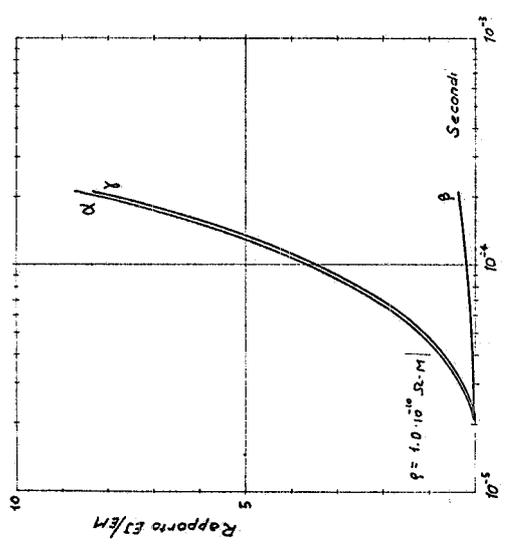
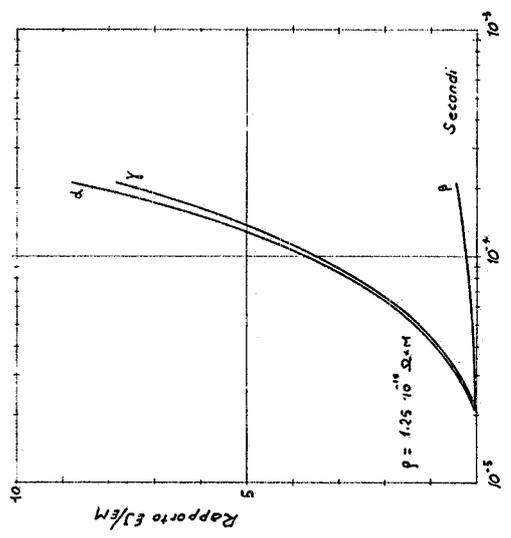
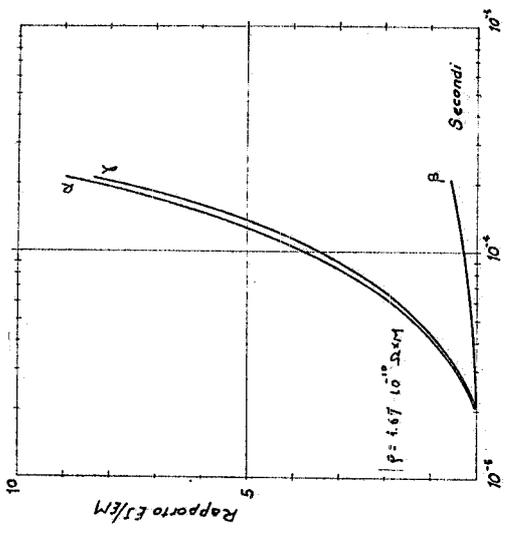


FIG. 27 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo di cui alla Fig. 9, con il rame non ec citato ed isolato dal superconduttore, per diversi valori della resistività del rame e per valore 4×10^{-3} m del parametro D.

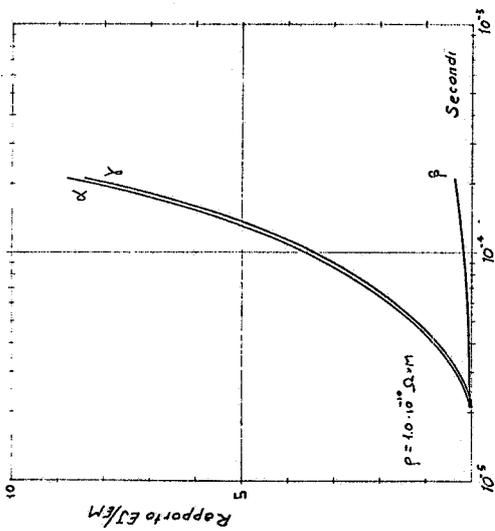
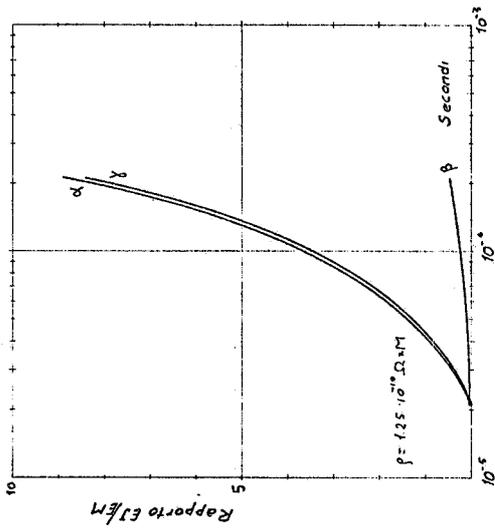
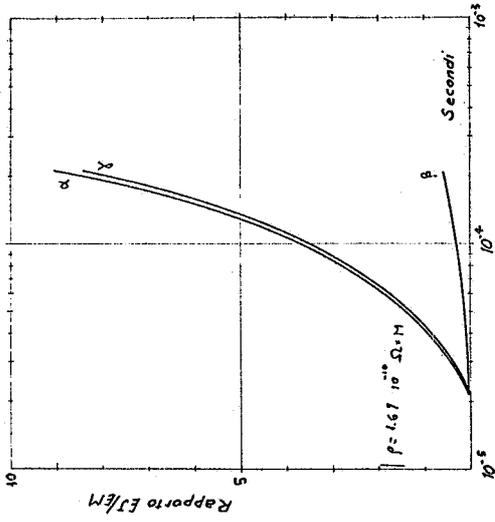
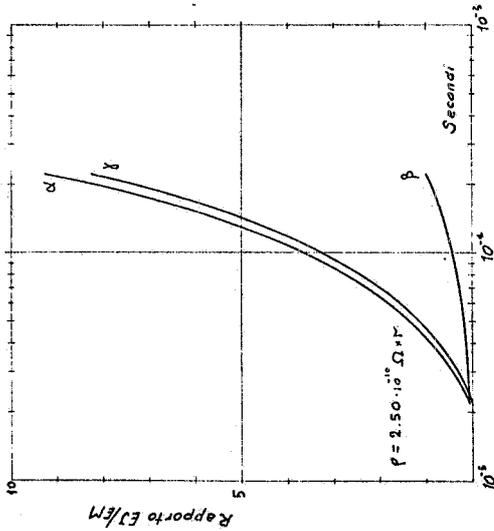
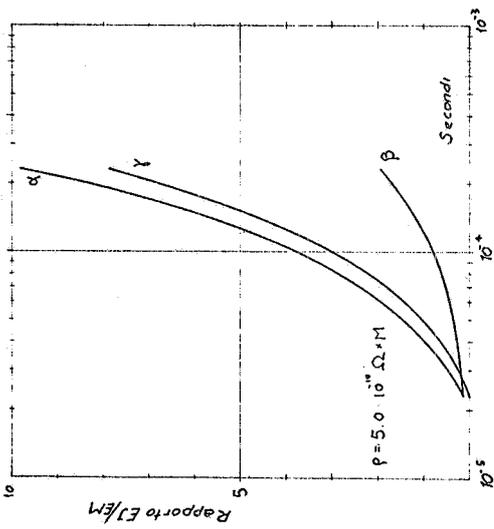


FIG. 28 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per un cavo del tipo di cui alla Fig. 9, con il rame non eccitato ed isolato dal superconduttore, per diversi valori della resistività del rame e per valore 10^{-3} m del parametro D.



α , β e γ risultano al di sopra di quelle ricavabili per i valori corrispondenti a D minori.

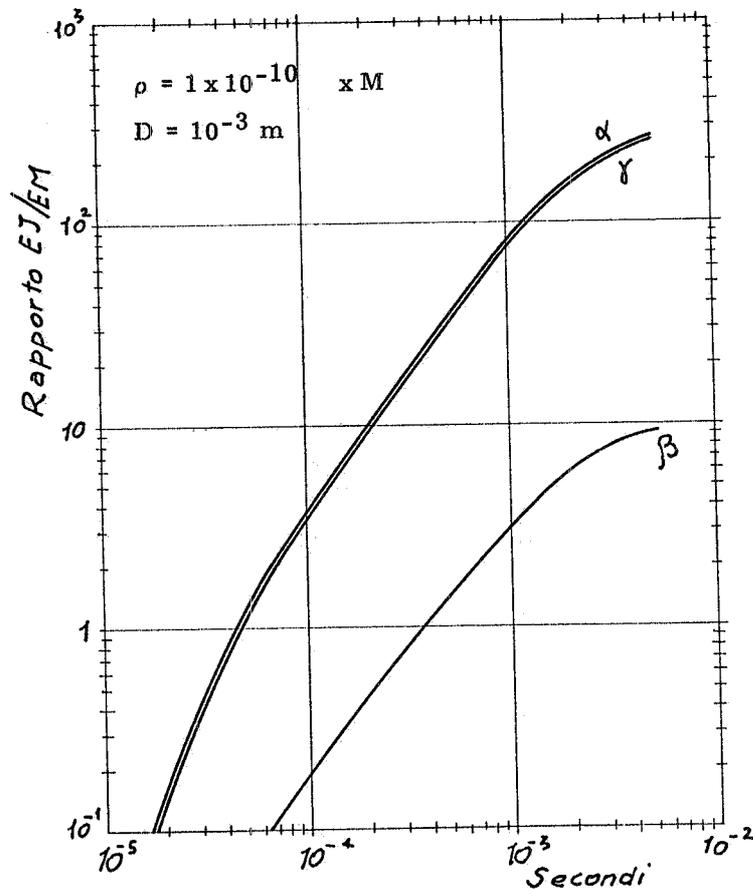


FIG. 29 - Andamento dei rapporti $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ per uno dei cavi di cui alle Figg. 28 i cui calcoli sono stati protratti per un tempo più lungo.

Si può notare che a differenza dei casi precedentemente esaminati, le curve dei rapporti non presentano quel caratteristico "pianerottolo" soltanto perchè il valore scelto per l'intervallo elementare di tempo per la soluzione del sistema di equazioni, risulta troppo elevato rispetto alla rapidità con cui si svolge il fenomeno.

In conseguenza di ciò si nota nei digrammi delle fig. 30 un valore uniforme per la velocità media di penetrazione del campo magnetico.

9. - CASO G.~

Quest'ultimo caso differisce dagli altri perchè rispetta la situazione di un reale avvolgimento di magnete superconduttore la cui carcassa è di materiale conduttore e inoltre il superconduttore va considerato come un cavo unico di spessore $\Delta l = 1,9 \times 10^{-3} \text{ m}$, ripiegato su se stesso 20 volte. Tra una spira e l'altra sono inseriti degli schermi di rame, cioè delle lastre non eccitate, in corto circuito, elettricamente isolate tra loro e dal superconduttore. Lo spessore dello schermo più

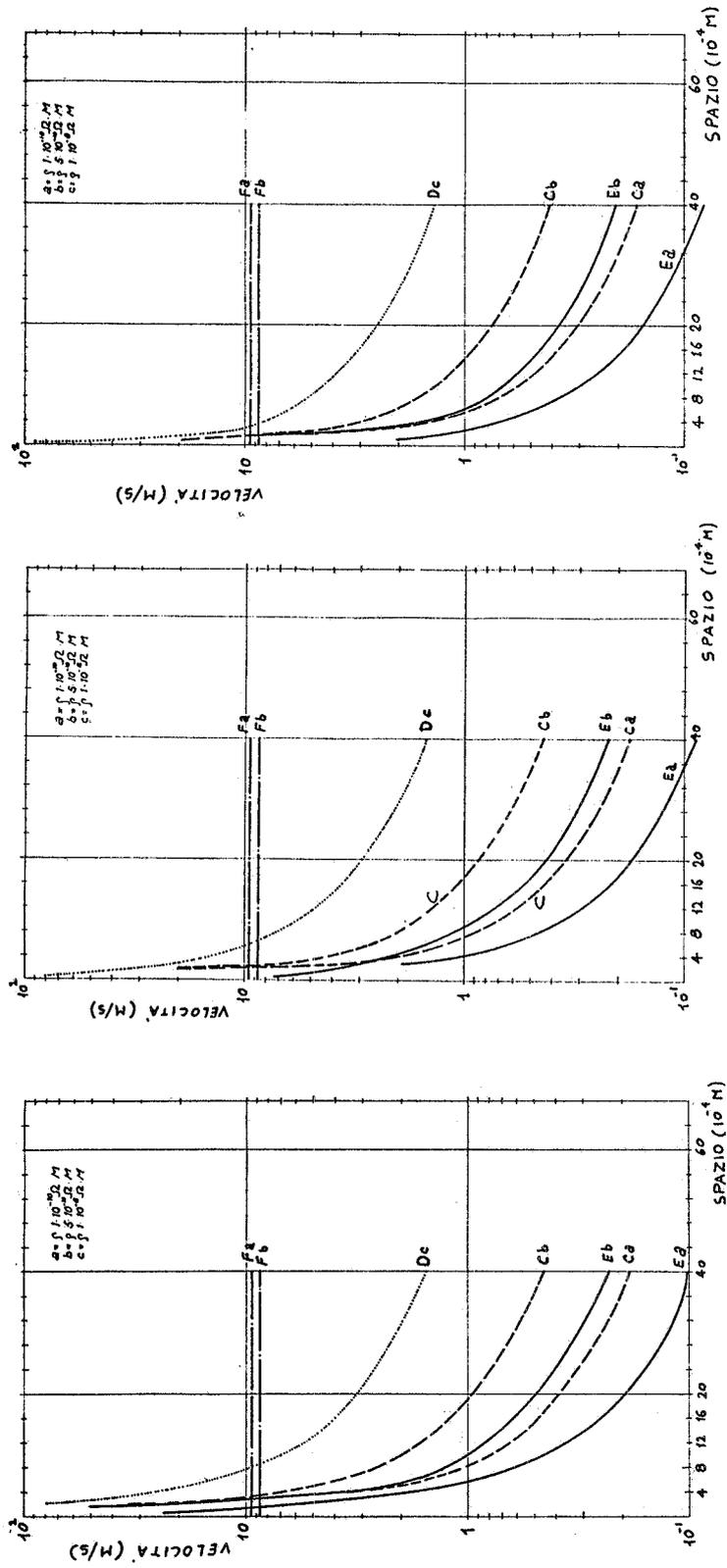


FIG. 30 - Andamenti delle velocità medie di propagazione del campo magnetico in funzione dello spessore per i valori di resistività massima ($b = 5 \times 10^{-10} \Omega \text{ m}$) e minimo ($a = 1 \times 10^{-10} \Omega \text{ m}$) per diversi valori del parametro D ($D_1 = 0$; $D_2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$; $D_3 = 10^{-5} \text{ m}$).

interno ($\Delta 3$) è maggiore di quello degli schermi successivi ($\Delta 2$) tutti uguali tra loro.

Elettricamente il sistema è caratterizzato da 21 equazioni differenziali lineari del primo ordine (tabella G) di cui la prima si riferisce all'avvolgimento super-

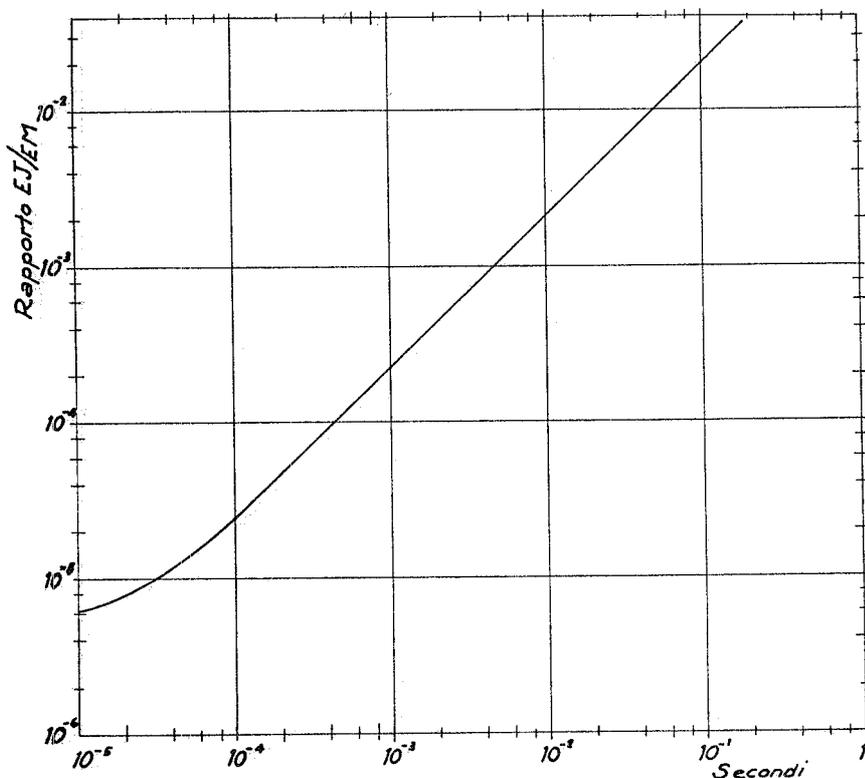


FIG. 31 - Andamento in funzione del tempo del rapporto fra l'energia dissipata e quella magnetica accumulata in una sezione di lunghezza unitaria per l'avvolgimento del magnete superconduttore di cui alla figura 10.

conduttore, mentre le restanti 20 sono le equazioni degli schermi.

La bobina è eccitata da una tensione a gradino uniformemente distribuita pari a V Volt.

Ai parametri del superconduttore è stato attribuito l'indice 1, mentre gli schermi di rame sono stati numerati a partire da 2 (il più interno) fino a 21 (il più esterno).

Nella risoluzione del sistema di equazioni ci si è fermati con i calcoli, all'istante T in cui la corrente I_1 del superconduttore raggiunge il valore critico.

I calcoli sono stati eseguiti per i seguenti valori dei parametri:

$$D = 62 \times 10^{-3} \text{ m}, \Delta 3 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}, \Delta 2 = 10^{-4} \text{ m}, \Delta 1 = 1,9 \times 10^{-3} \text{ m}, 1/\rho = 10^{10} \text{ S/m}$$

ove ρ è la resistività del rame elettrolitico alla temperatura dell'elio liquido.

Quest'ultimo caso si differenzia molto come risultati dai precedenti giacché in esso il rapporto tra l'energia dissipata complessivamente nel superconduttore e

TABELLA G

I coefficienti di auto e mutua indizione, per la situazione geometrica caratterizzata da altezza (h) e lunghezza (l) unitarie, valgono:

$$L_{1,1} = \sum_{i=1}^{20} \mu_0 20(20-i) \left[D + 2 \Delta 3 + (2i - 1) \Delta 1 + 2 (i-1) \Delta 2 \right]$$

$$L_{2,2} = M_{2,3} = M_{2,4} = \dots = M_{2,21} = \mu_0 (D + \Delta 3)$$

$$L_{3,3} = M_{3,4} = M_{3,5} = \dots = M_{3,21} = \mu_0 (D + 2\Delta 3 + 2\Delta 1 + \Delta 2)$$

$$L_{4,4} = M_{4,5} = M_{4,6} = \dots = M_{4,21} = \mu_0 (D + 2\Delta 3 + 4\Delta 1 + 3\Delta 2)$$

$$M_{1,2} = M_{2,1} = 20 \mu_0 (D + \Delta 3)$$

$$M_{1,3} = M_{3,1} = 19 \mu_0 (D + \Delta 2 \Delta 3 + 2 \Delta 1 + \Delta 2)$$

$$M_{1,4} = M_{4,1} = 18 \mu_0 (D + \Delta 2 \Delta 3 + 4 \Delta 1 + 3 \Delta 2)$$

$$V = L_{1,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{1,2} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \dots + M_{1,21} \frac{\Delta I_{21}}{\Delta t}$$

$$- \frac{2q}{\Delta 3} I_2 = M_{2,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + L_{2,2} \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \dots + M_{2,21} \frac{\Delta I_{21}}{\Delta t}$$

$$- \frac{2q}{\Delta 2} I_3 = M_{3,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{3,2} \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \dots + M_{3,21} \frac{\Delta I_{21}}{\Delta t}$$

$$- \frac{2q}{\Delta 2} I_{21} = M_{21,1} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M_{21,2} \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \dots + L_{21,21} \frac{\Delta I_{21}}{\Delta t}$$

nel rame degli schermi non solo è notevolmente minore di 1, ma i tempi necessari alla corrente per raggiungere nel superconduttore il suo valore critico sono dell'ordine di 10^{-1} s, cioè molto più alti dei casi precedenti. Ciò sta ad indicare ancora una volta l'importanza della presenza assieme al superconduttore del materiale conduttore da esso isolato.

In tal modo a parità di energia magnetica la dissipazione per unità di tempo viene a diminuire.

10. - CONSIDERAZIONI SULLA VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO. -

Come si è detto nell'introduzione, la diffusività magnetica di un conduttore è molto maggiore di quella del superconduttore; esiste però una diffusività intermedia per i casi misti che dipende dalla particolare geometria.

Si è ritenuto utile, per alcuni dei casi trattati, ricavare gli andamenti della velocità di propagazione del campo magnetico nel materiale. Si può notare che a parità di ogni condizione la velocità decresce al decrescere della resistività.

Inoltre a parità di ogni altra condizione la velocità decresce all'aumentare di D , a causa dell'aumentata induttanza del sistema^(x).

Dall'esame delle curve si ricava che la geometria E, cioè rame-superconduttore in direzione parallela al campo con il rame non eccitato, ha velocità inferiori. Mentre il caso F presenta una velocità che è costante ed elevata.

11. - CONSIDERAZIONI FINALI -

Si può notare che i rapporti β e γ presentano, per un certo intervallo di tempo, dei valori che sono all'incirca costanti: esiste cioè un intervallo di tempo in cui, sia nel rame che nel superconduttore, l'energia dissipata per effetto Joule aumenta con lo stesso ritmo in cui viene accumulata l'energia magnetica nello spazio occupato dal conduttore composto; dopo questo periodo, se persisterà la tensione applicata, i rapporti β e γ assumeranno valori sempre più elevati: questo accade in corrispondenza del punto in cui tutto il conduttore ha una densità di corrente pari alla densità critica.

Quindi i valori che più interessano per β e γ sono proprio quelli dati dal "pianerottolo" delle funzioni $\beta(t)$ e $\gamma(t)$: appena questi valori sono stati raggiunti la tensione di alimentazione verrà azzerata.

Si è trovato che i valori al "pianerottolo" del rapporto $\alpha = \beta + \gamma$, per i vari casi, rimangono compresi tra ~ 1 e 3 , mentre il rapporto γ si mantiene su valori nettamente inferiori ($0,05 + 0,4$) per i casi in cui il rame è eccitato. Ricordando ora che il rapporto nel caso che sia presente soltanto il superconduttore è 1 (si veda il caso B), risulta evidente l'effetto benefico del rame anche se si considera il fatto che nel caso di conduttore composto - superconduttore più rame - si ha un volume di materiale, in cui è immagazzinato il campo magnetico, esattamente doppio, dal momen-

(x) - Le curve sono state ricavate per punti e rispecchiano la velocità con cui penetra il campo magnetico nel materiale di cui è costituito il cavo.

to che le quantità di rame e di superconduttore impiegate sono le stesse: questo fatto comporta di conseguenza un valore doppio anche della relativa energia magnetica immagazzinata, dal momento che la densità di corrente che circola nel materiale non è variata. Quindi, con un ragionamento più esatto, non si dovranno confrontare i due valori del rapporto γ , per il caso del solo superconduttore e superconduttore più rame, che chiameremo rispettivamente γ' e γ , ma i prodotti $E_M' \gamma'$ e $E_M \gamma$ ove $E_M = 2E_M'$.

Si noti comunque che questa osservazione, data la grande differenza esistente tra i valori dei rapporti γ per i due casi, non comporta variazioni al nostro ragionamento qualitativo.

Si può invece notare che per i casi in cui il rame è elettricamente isolato dal superconduttore e non è eccitato, il rapporto γ , al pianerottolo, risulta maggiore del rapporto β , ed ha un valore intorno all'unità, per cui, in base alle considerazioni sopra esposte, il prodotto $E_M \gamma$ risulta maggiore dello $E_M' \gamma'$.

Pertanto è da preferire l'uso del rame soltanto quando è in contatto elettrico con il superconduttore. Sotto questo profilo si trova che le geometrie migliori sono rappresentate dai casi C ed E che presentano dei valori per γ minori di 0,1 per il valore più basso della resistività del rame.

Come è ovvio pensare per tensioni più basse di quella adottata in questi calcoli (0,5 volt/metro lineare) il tempo impiegato dai rapporti α , β , γ per raggiungere i valori costanti sarà maggiore e come effetto secondario si avrà un maggior tempo per il raffreddamento e una riduzione dell'energia dissipata nel rame: era nostra intenzione estendere i risultati per diversi valori della tensione applicata, ma si è visto che il costo del calcolo diventava notevole; si noti comunque che i calcoli sarebbero stati necessari perchè non si possono ottenere i valori che assumono le funzioni $\alpha(t)$, $\beta(t)$, e $\gamma(t)$ al variare della tensione applicata semplicemente variando la scala dei tempi a causa delle correnti critiche.

Un calcolo molto più approfondito di quello fatto, non è stato ritenuto opportuno perchè problemi di raffreddamento in progettazione del genere possono modificare le conclusioni a cui si è arrivati: nella maggior parte dei casi si è arrestato il calcolo non appena l'ultimo conduttore ha raggiunto la corrente critica, e soltanto in alcuni si è andati un pò oltre per vedere se l'andamento delle funzioni calcolate era quello previsto.

Noto l'andamento della funzione $\gamma(t)$, si può risalire al diagramma della temperatura del superconduttore in funzione del tempo facendo l'ipotesi che il superconduttore sia termicamente isolato, mediante la relazione $E_M \gamma / c$, dove E_M è l'energia magnetica accumulata nel materiale, e c è il calore specifico del superconduttore.

Inoltre, dal valore che assumerà il rapporto:

$$R = \frac{\gamma}{\beta} \frac{C_{Cu}}{C_{Sc}} \quad (\text{ove } C_{Cu} \text{ e } C_{Sc} \text{ indicano rispettivamente il calore specifico del rame e del superconduttore alla temperatura dell'elio liquido})$$

si potrà dedurre se la temperatura raggiunta dal superconduttore sarà maggiore o minore di quella assunta dal rame nei limiti in cui il fenomeno è adiabatico.

Ad esempio per il caso C, con distanza tra i conduttori più interni eguale a zero e resistività minima per il rame, si trova, al tempo t in cui si ha il pianerottolo per le funzioni $\gamma(t)$ e $\beta(t)$:

$$R = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{1,25} \frac{9,9 \cdot 10^{-2}}{2,1 \cdot 10^{-1}} \approx 0,03$$

In questo caso è evidente il vantaggio dell'isolamento termico dal momento che il rame avrà una temperatura all'incirca 30 volte maggiore di quella del superconduttore: si noti che questo calcolo è valido nell'ipotesi che sia il superconduttore, sia il rame siano in una situazione adiabatica.

Si fa presente che i programmi dei vari esempi trattati, ove sono anche riportati i valori assoluti dell'energia dissipata nel rame e nel superconduttore, e l'andamento delle correnti nel rame per i vari casi, sono depositati nei LNF.

APPENDICE -

I rapporti considerati nelle pagine precedenti sono stati calcolati con l'espressione:

$$\alpha(t) = \beta(t) + \gamma(t) = \frac{\int_0^t W_{JCu} dt + \int_0^t W_{JSc} dt}{2 \int_{D/2}^X E_M^*(x) dx}$$

Dove:

$\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ indicano rispettivamente il rapporto tra l'energia totale dissipata nel materiale composto (superconduttore e rame), l'energia dissipata per effetto Joule nel solo rame, l'energia dissipata nel solo superconduttore e l'energia magnetica totale presente nel materiale.

W_{JCu} e W_{JSc} rappresentano rispettivamente la potenza dissipata nel rame e nel superconduttore.

E_M^* indica la densità superficiale di Energia magnetica riferita alla superficie normale all'asse X, come è indicato nelle rispettive figure per ciascun caso considerato.

X è la profondità di penetrazione del campo magnetico all'istante t.

D rappresenta la distanza tra i conduttori più interni nella geometria in esame.

Caso A:

In questo caso, non essendo presente il superconduttore, le espressioni per il calcolo dei rapporti sono:

$$\alpha(n\Delta t) = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{20} \frac{2\varrho}{\Delta x} \bar{I}_{i,j}^2 \right) \Delta t}{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{20} 2V \bar{I}_{i,j} \right) \Delta t - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{20} \frac{2\varrho}{\Delta x} \bar{I}_{i,j}^2 \right) \Delta t - \mu_0 \frac{D}{2} \left(\sum_{j=1}^{20} I_{n,j} \right)}$$

ove $\bar{I}_{i,j}$ è il valore medio della corrente nel conduttore jesimo all'istante generico $t = i\Delta t$, media eseguita tra i valori delle correnti agli istanti $t - \Delta t$ e t , cioè:

$$\bar{I}_{i,j} = \frac{I_{i-1,j} + I_{i,j}}{2}$$

L'espressione al denominatore è rappresentativa dell'energia magnetica accumulata all'istante $t = n\Delta t$ all'interno del materiale e i tre termini rappresentano rispettivamente l'energia totale erogata dal generatore (E_T), l'energia dissipata nel rame per effetto Joule (E_J), l'energia magnetica presente nello spazio compreso tra i conduttori più interni (E_{MC}). In conclusione, quindi, l'energia magnetica totale accumulata nel materiale è stata calcolata con l'espressione:

$$E_M = E_T - E_J - E_{MC}$$

Caso C. -

Nel calcolare il rapporto $\alpha(t)$, sono state considerate le seguenti espressioni:

Energia dissipata nel rame:

$$E_{JCu}(n\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^h \frac{4\varrho}{\Delta x} (\bar{I}_{i,j} - I_c)^2 \right] \Delta t$$

ove h può al massimo raggiungere il valore 20, e $\bar{I}_{i,j}$ ha lo stesso significato del caso precedente.

Energia dissipata nel superconduttore:

$$E_{JSc}(n\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^k \frac{4\varrho}{\Delta x} (\bar{I}_{i,j} - I_c) I_c \right] \Delta t$$

Questa espressione rappresenta la sommatoria dei prodotti delle cadute ohmiche per la corrente critica, ove k è al massimo 19.

Energia totale erogata dal generatore:

$$E_T(n\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^h 2V \bar{I}_{i,j} \right) \Delta t$$

Energia magnetica nello spazio compreso tra i conduttori più interni:

$$E_{MC}(i\Delta t) = \mu_0 \frac{D}{2} \left[\sum_{i=1}^h (\bar{I}_{i,j}) \right]^2$$

Il rapporto $\alpha(t)$ sarà in definitiva dato da:

$$\alpha(t) = \frac{E_{JCu} + E_{JSc}}{E_T - E_{JCu} - E_{JSc} - E_{MC}}$$

Caso D:

Le espressioni considerate per il caso D si modificano come segue:

$$E_{JCu}(n\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^h \frac{4q}{\Delta x} \bar{I}_{i,j}^2 \right) \Delta t$$

$$E_{JSc}(n\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^h \bar{\Delta V}_{i,j} I_c \right) \Delta t$$

ove h può al massimo raggiungere il valore 20, e $\bar{\Delta V}$ rappresenta l'espressione:

$$\bar{\Delta V}_{i,j} = \frac{\Delta V_{i-1,j} + \Delta V_{i,j}}{2}$$

L' E_T ha la stessa espressione del caso precedente.

L' E_{MC} viene modificata come segue:

$$E_{MC}(i\Delta t) = \mu_o \frac{D}{2} \left(\sum_{i=1}^h I_{i,j} + \sum_{i=1}^h I'_{i,j} \right)^2$$

L'espressione di $\alpha(t)$ è del tutto analoga a quella del caso precedente.

Caso E:

$$E_{JCu}(n\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_j \frac{2q}{\Delta x} \bar{I}_{i,j}^2 \right) \Delta t$$

con $j = 1, 3, 5, \dots, 19$.

$$E_{JSc}(n\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_k \bar{\Delta V}_{i,k} I_c \right) \Delta t$$

con $k = 2, 4, 6, \dots, 20$.

$$E_{MC}(n\Delta t) = \mu_o \frac{D}{2} \left(\sum_{j=1}^h I_j \right)^2$$

$$E_T = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^h 2V \bar{I}_{i,j} \right) \Delta t$$

Caso F:

Le formule sono analoghe al caso precedente, eccetto per l' E_T il cui indice j assume soltanto i valori pari, dal momento che il rame è eccitato.

Caso G:

In questo caso, con evidente significato dei simboli, si ha:

$$E_{JCu}(n\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2e}{43} \bar{I}_{i,2}^2 + \sum_{j=3}^{21} \frac{2e}{42} \bar{I}_{i,j}^2 \right) \Delta t$$

$$E_M(n\Delta t) = \frac{1}{2} L_{1,1} I_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{21} L_{j,j} I_j^2 - \mu_o \frac{D}{2} \left[\sum_{j=2}^{21} (I_j - I_1) \right]^2 .$$

BIBLIOGRAFIA E RIFERIMENTI -

- (1) - P.F. Chester, Superconducting magnet (Electricity Council Research Center, Capluhurst, Chester 1969).
- (2) - C. Maverick, Superconducting magnet technology in advances in electronics and electron physics (Academic Press, New York, 1967), vol. 23.
- (3) - C.P. Bean, Rev. Mod. Phys. 36, 31 (1964).
- (4) - Y.B. Kim, C.F. Hempstead and A.R. Struad, Flux creep in hard superconductors, Phys. Rev. 131, 2486 (1963).
- (5) - R. Hancox, Stabilization of superconducting magnets, Proc. Second Intern. Conf. on Magnet Technology, Oxford (1968), p. 477.
- (6) - Gore, W.S. and Edel Sack, E.A., Superconducting devices; A literature survey (Office Naval Research, Washington, 1967).
- (7) - Experimental and theoretical studies of filamentary superconducting composites. Rutherford Preprint, RPP/A73, (1969);
- (8) - R. Hancox, IEEE Trans. Magnetics, 4, 486 (1968).