

LNF-71/54

6 Settembre 1971

F.G. Moscati e G. Sacerdoti: OSSERVAZIONI SUL CALCOLO  
DELLA FORZA DI SOSTENTAMENTO ESERCITATA DA UN  
CILINDRO MAGNETICO SU UN'ANCORA DI FERRO IN UNA  
GEOMETRIA A SIMMETRIA CILINDRICA. -

F. G. Moscati e G. Sacerdoti: OSSERVAZIONI SUL CALCOLO DELLA FORZA DI SOSTENTAMENTO ESERCITATA DA UN CILINDRO MAGNETICO SU UN'ANCORA DI FERRO IN UNA GEOMETRIA A SIMMETRIA CILINDRICA. -

1. - INTRODUZIONE. -

In una precedente nota<sup>(\*)</sup> è stato proposto un metodo per il calcolo della forza di sostentamento esercitata da un cilindro magnetico su un'ancora di ferro (in una geometria piana ed in una cilindrica).

Oltre alle imprecisioni che nascono da una rigida schematizzazione delle proprietà magnetiche dei materiali (magnete permanente ed ancora), vi sono imprecisazioni di origine matematica che nascono dal meccanismo con cui si propagano gli errori numerici conseguenza dei procedimenti adottati (v. art. cit. pag.35 ). Questi errori dipendono (una volta fissata la precisione con cui opera il calcolatore) dal numero delle colonne del reticolo adottato (non dalle righe).

Nel caso in cui si operi in doppia precisione e con simmetria cilindrica, con i programmi sviluppati per il calcolo del campo magnetico, si è visto che per non introdurre errori superiori all'1%, non si possono avere più di 22 colonne nello spazio vuoto.

Abbiamo nella nota succitata indicato come operare (il metodo è però più laborioso e più costoso) per raddoppiare il numero delle colonne (v. art. cit. pag.35 ). Talvolta però, pur rimanendo fissati i valori del traferro ad  $1 \div 2$  mm, è necessario ricorrere a strutture a simmetria cilindrica di diametro più grande di quelli fino ad ora considerati.

Risulta quindi necessario aumentare il numero delle colonne o ricorrere a reticoli rettangolari, anziché quadrati.

---

(\*) - L. E. Casano, A. Catitti, F. G. Moscati, G. Sacerdoti e L. L. Soglia : Calcolo delle forze di sostentamento di magneti permanenti a simmetria piana e cilindrica, LNF-71/36 (1971).

2.

In questo ultimo caso però, come vedremo, il meccanismo di propagazione degli errori peggiora, per cui se si vuole conservare lo stesso numero di colonne del reticolo quadrato, si impone l'uso di una formula correttiva.

Riporteremo infine alcuni risultati relativi a calcoli effettuati su strutture a simmetria cilindrica con l'adozione di reticoli rettangolari.

## 2. - ESTENSIONE DELLA TEORIA DAL RETICOLO QUADRATO A QUELLO RETTANGOLARE. -

Nello spazio vuoto, come è noto, il potenziale scalare  $V(x, y)$  soddisfa l'equazione di Laplace

$$(1) \quad \Delta^2 V = 0$$

Se introduciamo in tale spazio un reticolo rettangolare, di cui a sia il passo orizzontale e b quello verticale, scrivendo la (1) in termini di differenze finite per ogni nodo del reticolo, si trova

$$(2) \quad V_{i,j} = (V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)} + (V_{i-1,j} + V_{i+1,j}) \frac{a^2}{2(a^2 + b^2)}$$

per il caso piano e

$$(3) \quad V_{i,j} = \left[ \left(1 - \frac{a}{2r_j}\right) V_{i,j+1} + \left(1 + \frac{a}{2r_j}\right) V_{i,j-1} \right] \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)} + \frac{a^2}{2(a^2 + b^2)} (V_{i-1,j} + V_{i+1,j})$$

per il caso cilindrico, che è quello che ci interessa.

Fermo restando il procedimento di calcolo visto nella nota succitata, c'è da osservare che la diversa forma che assume ora la (3) origina dalle modifiche nelle matrici e nei vettori che compaiono in quel procedimento. Così la matrice  $M$  (v. art. cit. pag. 6), pur rimanendo trigonale e simmetrica, ha ora il posto dell'elemento  $-1/4$  il fattore  $-(a^2/2(a^2+b^2))$ , mentre gli autovalori elementi della matrice diagonale  $\lambda_p$  sono dati da

$$(4) \quad \lambda_{p,k} = \frac{B}{\lambda_k}$$

con

$$(5) \quad B = \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)} \quad \text{e} \quad \lambda_k = 1 - 2A \cos \frac{k \pi}{N+1}$$

$$\text{ove} \quad A = \frac{a^2}{2(a^2 + b^2)}$$

Inoltre il valore del potenziale dell'ancora  $V_0$  va moltiplicato per  $a^2/b^2$ .

Per quanto riguarda le equazioni nella materia, l'unica di esse che viene modificata rispetto al caso di reticolo quadrato è quella che proviene da

$$(6) \quad \text{div } B = 0$$

Scrivendo la (6) per il generico elemento di volume del cilindro magnetico si ottiene, con facili passaggi:

$$(7) \quad B_{i,j}^N \left(1 + \frac{a}{2r_j}\right) = B_{i,j-1}^N \left(1 - \frac{a}{2r_{j-1}}\right) + \frac{a}{b} (B_{i-1,j-1}^T - B_{i,j-1}^T)$$

## 2. - CONSIDERAZIONI SULLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI IN UN RETICOLO RETTANGOLARE. -

Nel paragrafo precedente abbiamo visto quale forma assuma la equazione puntuale del potenziale scalare nel caso più generale di un reticolo rettangolare di passi  $a$  e  $b$ , (equazioni (2) e (3)).

Rifacendoci, per semplicità, alla (2) (caso piano) è facile vedere che quando sia  $a \neq b$  (reticolo rettangolare) il meccanismo di propagazione degli errori peggiora rispetto al caso di  $a = b$  (reticolo quadrato).

Infatti dette  $a_1$  e  $a_2$  le incertezze con cui sono noti i valori dei potenziali  $V_j$  e  $V_{j-1}$ , si può ricavare l'incertezza  $a_3$  da cui sono affetti i potenziali  $V_{j+1}$ . Dalla (2) si ha infatti

$$(8) \quad a_3 = \frac{2A + 1}{B} a_1 + a_2 \quad \text{nel caso peggiore ed invece}$$

$$(8') \quad a_3 = \left[ \left( \frac{1}{B^2} + 2 \frac{A^2}{B^2} \right) a_1^2 + a_2^2 \right]^{1/2} \quad \text{se gli errori si possono}$$

ritenere casuali.

Nelle (8) e (8')  $A$  e  $B$  sono le grandezze definite nel modo che segue

4.

$$A = \frac{a^2}{2(a^2 + b^2)} \quad B = \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)}$$

Nel caso di reticolo quadrato  $a = b$ , per cui

$$A = B = \frac{1}{4}$$

e quindi

$$a_3 = 6a_1 + a_2 \approx 7a_1$$

oppure

$$a_3 = (18a_1^2 + a_2^2)^{1/2} \approx 4a_1$$

Se il reticolo è rettangolare ed in particolare si ha, come nel caso trattato,  $a > b$ , p. e.

$$a = 1,5 \quad b = 1$$

ne deriva

$$a_3 = 11a_1 + a_2 \approx 12a_1$$

oppure

$$a_3 = (62a_1^2 + a_2^2)^{1/2} \approx 8a_1$$

In tal caso il fattore di propagazione degli errori per ogni colonna risulta praticamente raddoppiato rispetto a quello che si ha in un reticolo quadrato. Adottando allora un reticolo rettangolare e volendo conservare lo stesso numero di colonne del reticolo quadrato appare la necessità di introdurre delle opportune correzioni in corrispondenza di quelle colonne sulle quali l'andamento della funzione potenziale, a causa della propagazione degli errori, comincia a divenire oscillatorio. Ciò va fatto per tutte le colonne a partire da quella sulla quale si evidenzia il suddetto fenomeno oscillatorio.

La formula correttiva adottata per risolvere il problema trattato ( $a = 1,5$ ,  $b = 1$ ), in maniera tale da conservare lo stesso numero (22) di colonne dell'analogo problema a simmetria cilindrico studiato con reticolo quadrato consiste nel sostituire a ciascun punto della curva del potenziale relativa alla colonna in esame il valor medio tra quello e il punto

medio tra i due valori circostanti. Cioè

$$(9) \quad V_{i,j}^* = \frac{1}{2} (V_{i,j} + \frac{V_{i-1,j} + V_{i+1,j}}{2})$$

Tale formula applicata alle ultime 4 colonne del reticolo (da ciascuna ban da) ha permesso di risolvere soddisfacentemente il problema, nel senso che il ricoprimento dei potenziali, partendo dal magnete e dal ferro, avviene esattamente fino alla prima cifra decimale.

#### 4. - RISULTATI NUMERICI E CONCLUSIONI. -

La teoria esposta nei paragrafi precedenti è stata applicata allo studio di un sistema a struttura cilindrica, la cui sezione assiale con le re lative dimensioni è riportata in Fig. 1.

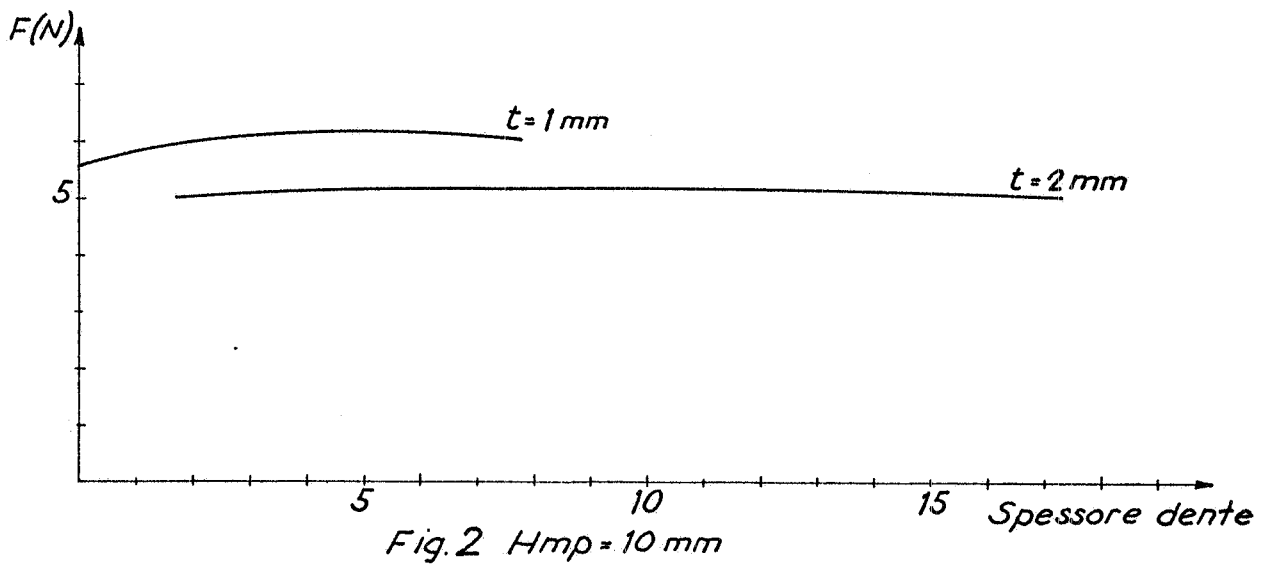
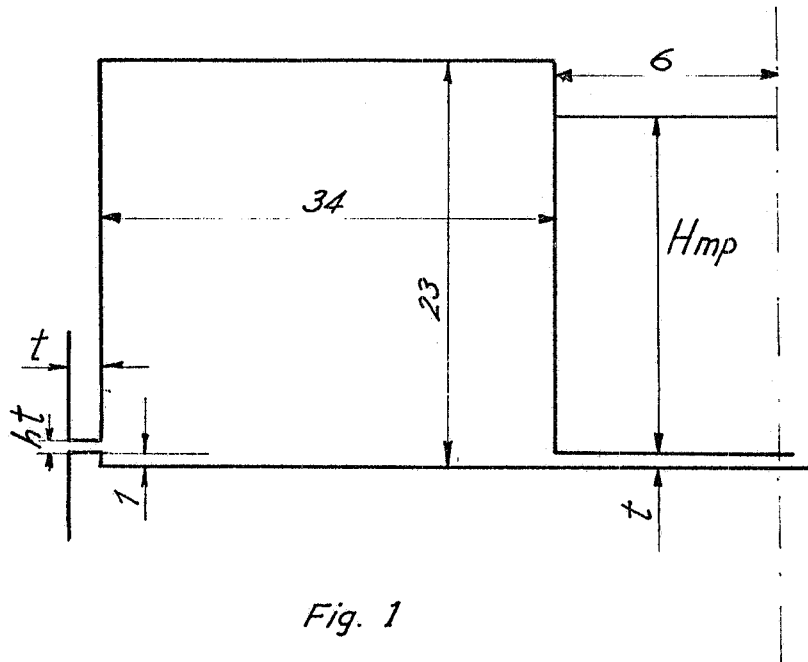
E' stato fissato un reticolo rettangolare con  $a = 1,5$  mm e  $b = 1$  mm di 22 colonne e 22 righe. Le colonne del reticolo dentro il magnete so no 5, mentre la sua altezza è stata fatta variare tra 10 e 20 mm. Si sono presi in esame 2 valori del traferro,  $t = 1$  e 2 mm. Con lo stesso procedi- mento indicato nella nota più volte citata si è calcolata anche, di volta in volta, la forza di sostentamento esercitata sull'ancora e lo spessore del dente esterno.

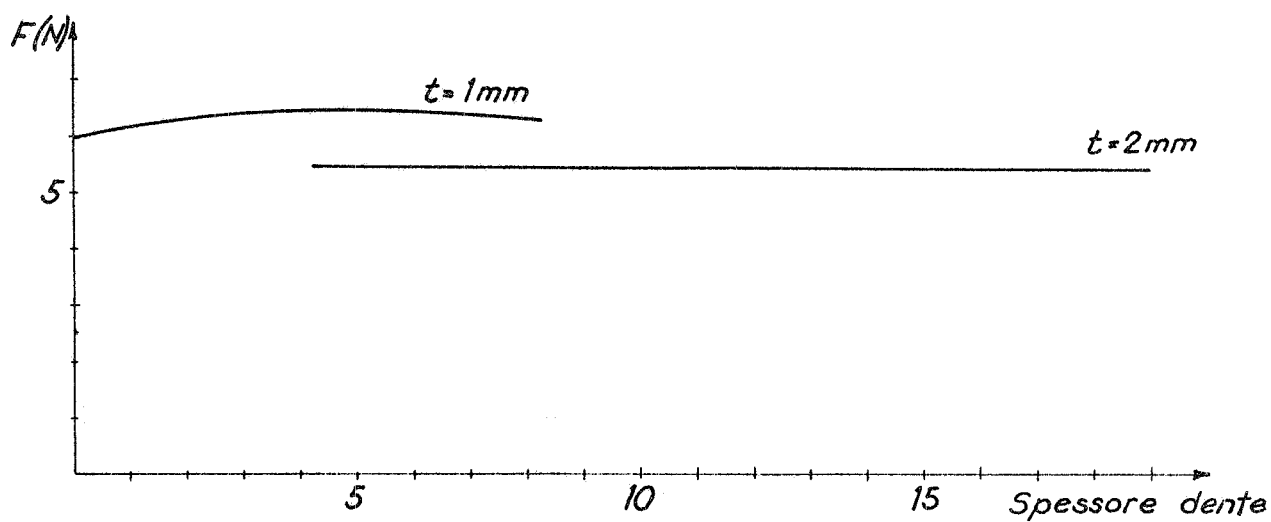
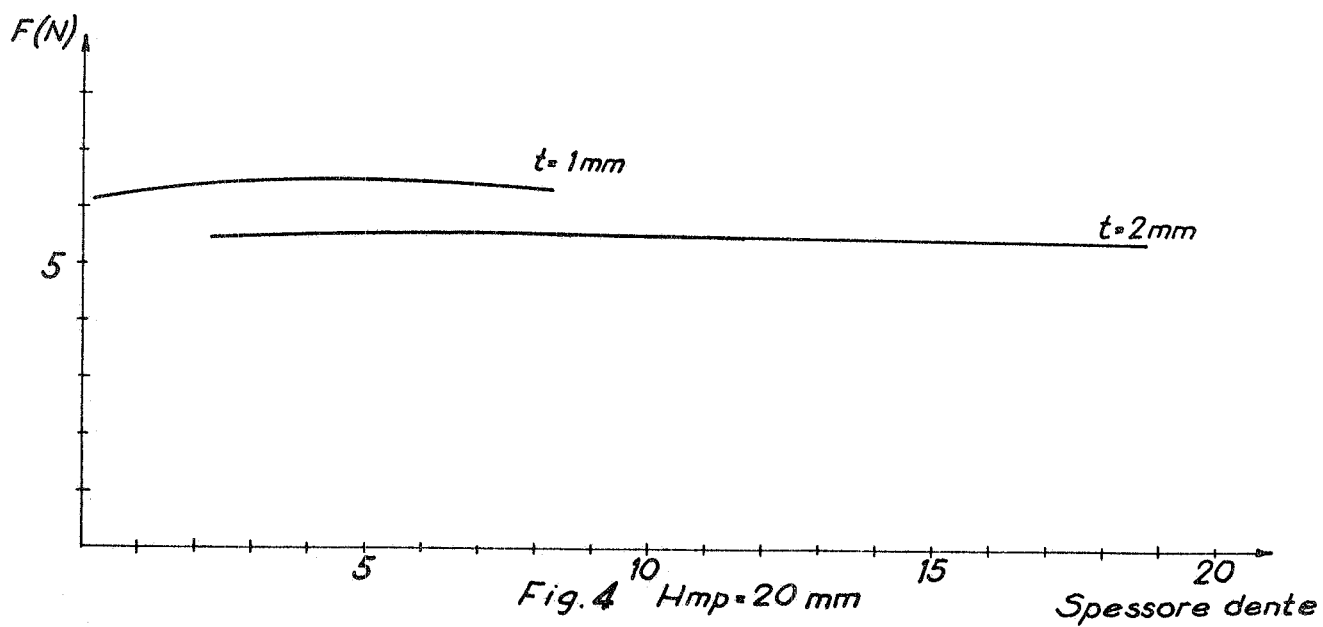
Alcuni dei risultati ottenuti sono riportati nei diagrammi di Fig. 2, 3, 4. Da questi può in particolare vedersi come passando da  $t = 1$  mm a  $t = 2$  mm la forza di sostentamento diminuisca, all'incirca, del 20%, men tre nel caso di reticolo quadrato, a parità di ogni altra condizione tale va- riazione era inferiore al 15%.

I programmi sono stati svolti in doppia precisione, e l'occupa- zione di memoria del calcolatore non è variata rispetto a quella illustrata nella nota precedentemente citata, poiché le maggiori dimensioni della struttura sono state affrontate aumentando il passo orizzontale, rispetto a quello verticale, del reticolo.

L'elaboratore utilizzato è un UNIVAC 1108 del Centro di Calco lo dell'Università di Roma. Il tempo richiesto per l'elaborazione in "sha- ring-time" si aggira mediamente sui 5 minuti. Gli autori ritengono però di poter portare tale tempo a 3 minuti, qualora si riesca ad utilizzare un sottoprogramma, per il calcolo di un determinante, più veloce della Sub- routine MATINV fornita dalla libreria del Centro.

6.



Fig. 3  $H_{mp} = 15 \text{ mm}$ Fig. 4  $H_{mp} = 20 \text{ mm}$