

LNF-71/20
5 Maggio 1971

L. E. Casano, F. Moscati e G. Sacerdoti : CALCOLO DEL CAMPO
MAGNETICO PRODOTTO DA UN MAGNETE PERMANENTE
NEL CASO DI GEOMETRIE PIANA E CILINDRICA. -

LNF-71/20
5 Maggio 1971

L.E. Casano^(x), F. Moscati^(x), e G. Sacerdoti: CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UN MAGNETE PERMANENTE NEL CASO DI GEOMETRIE PIANA E CILINDRICA.

1. - INTRODUZIONE -

Per il dimensionamento di una sospensione magnetica di un corpo ad asse di simmetria cilindrica si è presentata la necessità di calcolare la distribuzione di campo magnetico tra un magnete permanente e un nucleo di ferro non saturato. Un tale calcolo non è nè facile nè agevole anche se si introducono semplificazioni.

A calcoli finiti, rimangono le incertezze che seguono ad una schematizzazione troppo semplice del comportamento del materiale magnetico, nonchè al fatto che il reticolo considerato per il calcolo del potenziale magnetico è, per economia di calcolo, necessariamente a largo passo.

La laboriosità del procedimento, suggerito dal Prof. Sacerdoti, e le incertezze, da cui sono affetti i risultati, pongono alcuni dubbi anche agli autori sull'utilità dei calcoli svolti.

Ugualmente però, data l'originalità del procedimento e per il fatto che i calcolatori più grossi di quelli a disposizione degli autori, permettono

(x) - Laureandi presso i Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN.

2.

teranno di diminuire le incertezze con l'adozione di reticoli base più fit ti e tenendo conto di un comportamento più reale del materiale magnetico, abbiamo creduto opportuno presentare i procedimenti e i risultati ottenuti.

Le geometrie a cui ci riferiremo sono due:

- a) Piana con un asse di simmetria (fig. 1 a)
- b) Cilindrica con un asse di simmetria (fig. 1 b).

I procedimenti proposti per i due casi (piano e cilindrico) prevedono i seguenti passi:

a) calcolo del campo magnetico sul contorno in funzione dei potenziali magnetici sul contorno stesso.

b) Ricerca, attraverso le proprietà dei materiali magnetici del magnete permanente, delle relazioni che legano i potenziali magnetici all'introduzione magnetica sul contorno del magnete permanente.

c) Facendo uso delle relazioni tra i potenziali e i gradienti così stabilite, ricavare i valori degli stessi.

Per il punto b) proporremo due metodi: uno di prima approssimazione, in cui si fanno a priori ipotesi sull'andamento del flusso magnetico nel magnete permanente; un secondo che permette di risolvere il problema in modo più preciso, di tipo iterativo, per cui non si fa a priori alcuna ipotesi sull'andamento del flusso magnetico.

Ricavato il potenziale tra il magnete permanente e il nucleo di ferro si risale facilmente alla forza che si esercita sul nucleo di ferro solido con il corpo sospeso.

Riporteremo e discuteremo alcuni risultati ottenuti. Nelle conclusioni esamineremo la convenienza e il costo del calcolo in relazione ai mezzi di calcolo disponibili sul mercato.

In appendice sono riportati i programmi scritti in linguaggio Fortram per eseguire i calcoli sia nel caso piano che nel caso cilindrico.

2. - CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO IN FUNZIONE DEL POTENZIALE MAGNETICO SUL CONTORNO. CASO PIANO IN MATERIALE A PERMEABILITA' COSTANTE. -

In questo paragrafo illustreremo un metodo per il calcolo del cam po magnetico piano in un materiale a permeabilità uniforme. Considerato un contorno C che delimita un'area D (fig. 2), ci proponiamo di esprimere il potenziale magnetico nel dominio D noto il potenzuale sul contorno C.

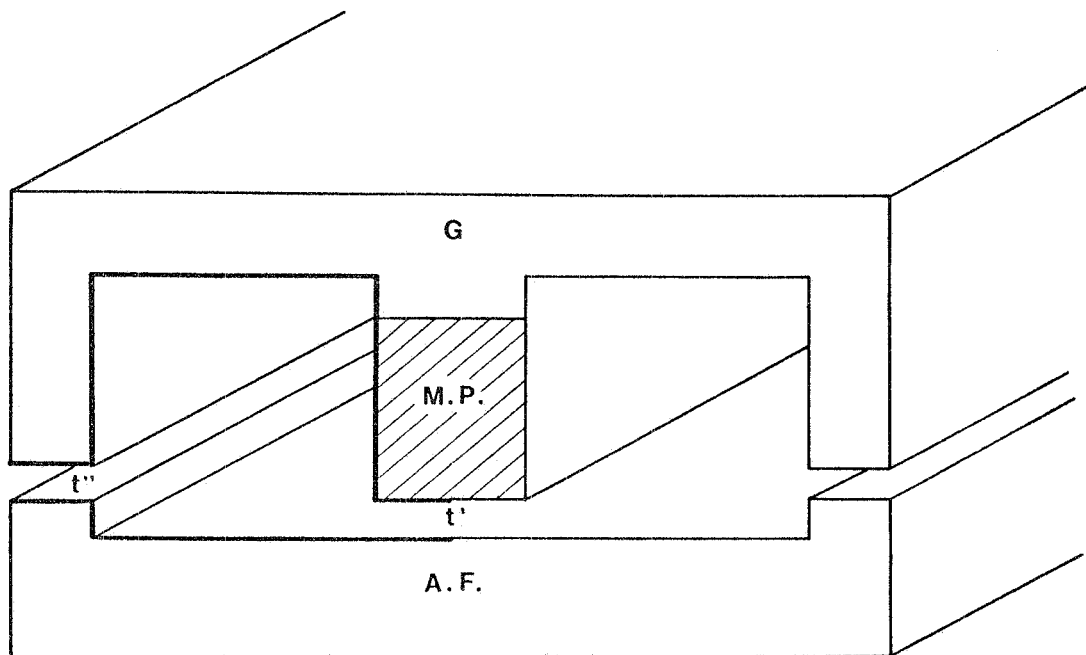


FIG. 1a - Sospensione magnetica piana con asse di simmetria.

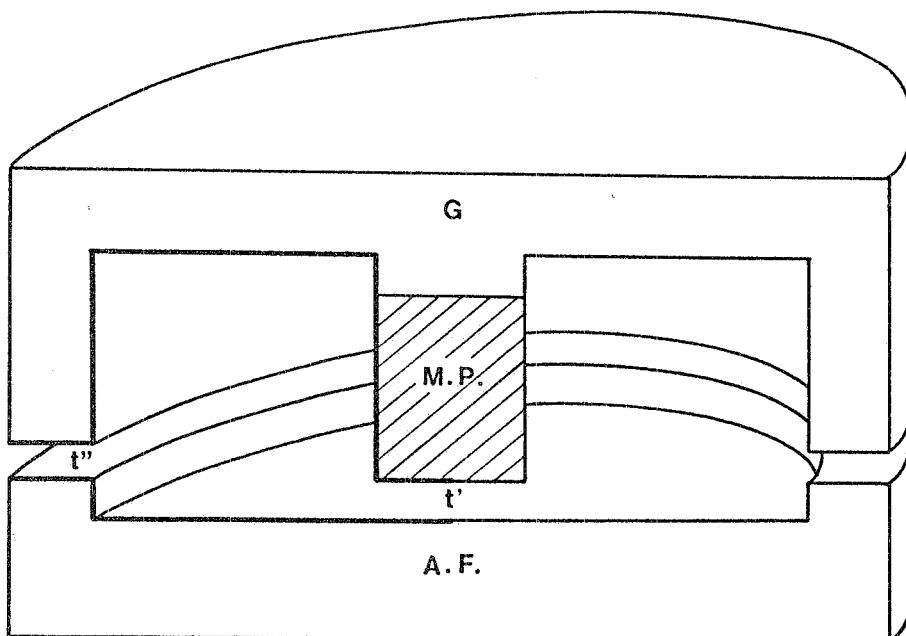


FIG. 1b - Sospensione magnetica cilindrica con asse di simmetria.

4.

A tale scopo approssimiamo il contorno C con una spezzata C_s costituita da un reticolo di rette perpendicolari distanziate tra loro di un prefissato passo a (fig. 2): l'approssimazione può essere tanto migliore quanto minore è il passo a.

Indicando con $i = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ la generica riga del reticolo e con $j = 0, 1, 2, \dots, n + 1$ la generica colonna del reticolo, è possibile definire il contorno C_s mediante $N + 2$ matrici M_j diagonali $[(N + 2) \times (N + 2)]$ in cui sono nulli tutti gli elementi delle righe i corrispondenti a punti esterni o sul contorno C_s mentre sono uguali a 1 tutti gli altri elementi diagonali e uguali a zero gli altri elementi.

Nel caso della j-esima colonna indicata nella fig. 2, M_j assume l'espressione esplicita di figura 3.

Considerando la j-esima colonna si pongono le seguenti definizioni:

- $|X_{Dj}|$ = vettore di $N+2$ componenti. Il componente i-esimo, ove i, j , sono le coordinate di un punto interno al dominio D, è pari a V_{ij} potenziale nel punto ij . Gli altri componenti sono nulli.
- $|X_{Cj}|$ = vettore di $N+2$ componenti. Il componente i-esimo, ove i, j sono le coordinate di un punto sul contorno, è pari a V_{ij} potenziale del punto ij . Gli altri componenti sono nulli. Il vettore $|X_{Cj}|$ è un vettore noto nel nostro problema.
- $|X_j| = |X_{Dj}| + |X_{Cj}|$.

Definiamo anche la matrice M_j^* che ha la proprietà di trasformare il vettore $|X_{Cj}|$ in un altro $|X_{Cj}^*|$: gli elementi non nulli di $|X_{Cj}^*|$ sono quelli appena interni al dominio D e che risultano in valore uguali alle componenti di $|X_{Cj}|$ che "vedono" sul contorno. La definizione risulta più chiara scrivendo esplicitamente un vettore $|X_{Cj}|$ e quello derivato $|X_{Cj}^*|$:

$$(1) \quad |X_{Cj}| = \begin{vmatrix} 0 \\ V_{p-1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{q+1} \\ V_{q+2} \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ 0 \\ \vdots \\ V_s \\ V_{N+1} \end{vmatrix} \quad |X_{Cj}^*| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ V_{p-1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{q+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ V_{r-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ p\text{-esima} \\ \text{riga} \\ \\ \\ q\text{-esima} \\ \text{riga} \\ \\ \\ r\text{-esima} \\ \text{riga} \\ \\ (s-1)\text{-esima} \\ \text{riga} \\ \\ \end{matrix}$$

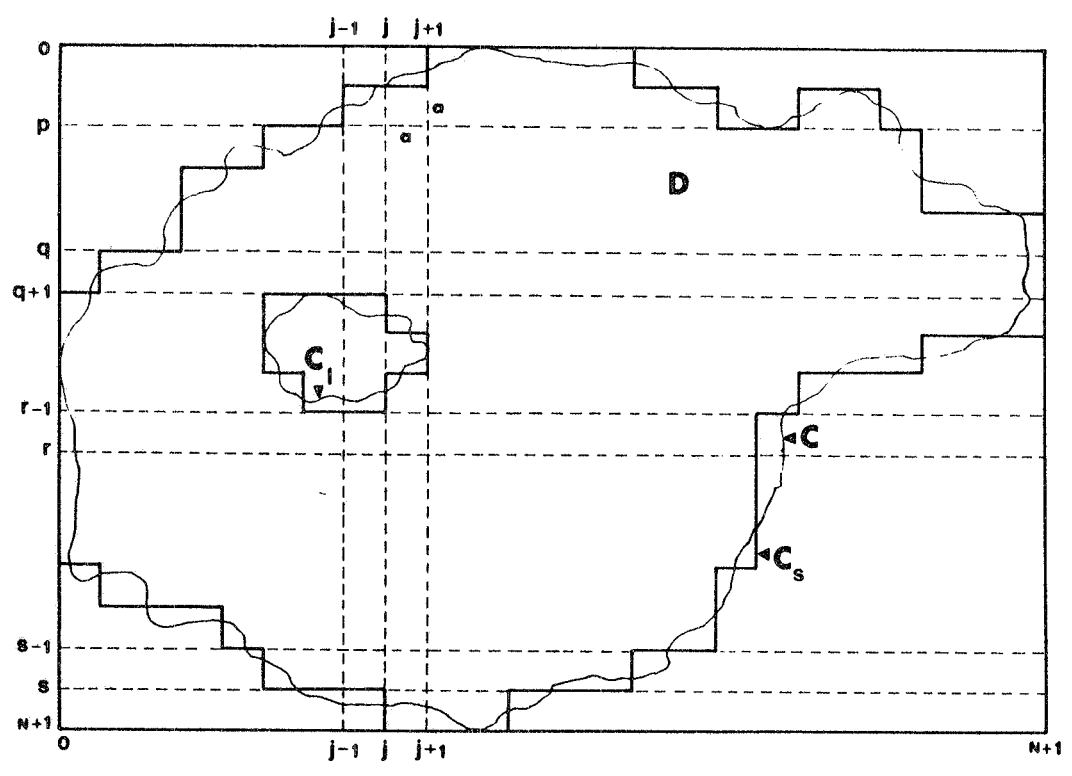


FIG. 2 - Sezione piana di un contorno magnetico generico.

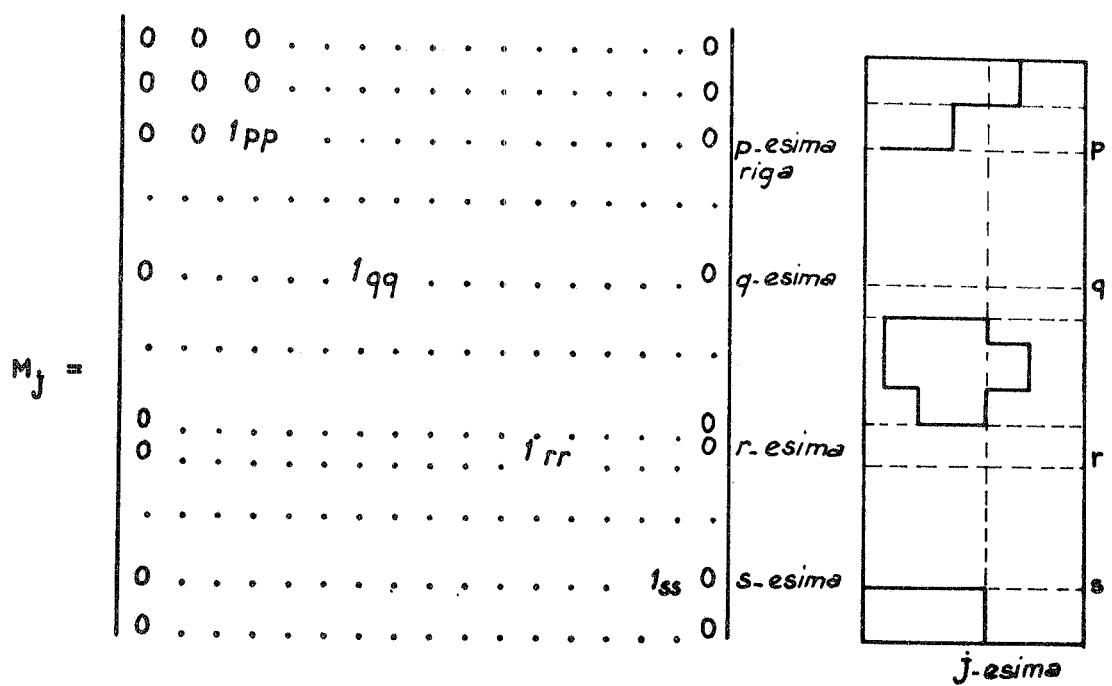


FIG. 3 - Matrice M_j relativa al caso di Fig. 2.

6.

Definiamo quindi la matrice M di NxN elementi:

$$(2) \quad M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 - \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 - \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{4} & 1 - \frac{1}{4} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Come è noto il potenziale magnetico $V(xy)$ soddisfa, in mancanza di correnti in D, l'equazione:

$$(3) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} = 0$$

L'equazione (3) si può scrivere alle differenze finite:

$$(4) \quad V_{ij} = \frac{1}{4} V_{i,j+1} + \frac{1}{4} V_{i,j-1} + \frac{1}{4} V_{i-1,j} + \frac{1}{4} V_{i+1,j}$$

per (i, j) punti interni al contorno da cui, ricordando le definizioni precedenti, possiamo scrivere:

$$(5) \quad MM_K |X_K| = \frac{M_K}{4} |X_{K+1}| + \frac{M_K}{4} |X_{K-1}| + \frac{M_K^*}{4} |X_{CK}|$$

valida per ogni j.

Il sistema di equazioni che ne risulta è il seguente:

$$(6) \quad \begin{aligned} MM_1 |X_1| - \frac{1}{4} M_1 |X_2| &= \frac{1}{4} M_1 |X_0| + \frac{1}{4} M_1^* |X_{C1}| \\ MM_2 |X_2| - \frac{1}{4} M_2 |X_3| - \frac{1}{4} M_2 |X_1| &= \frac{1}{4} M_2^* |X_{C2}| \end{aligned}$$

$$(6) \quad MM_3 |X_3| - \frac{1}{4} M_3 |X_4| - \frac{1}{4} M_3 |X_2| = \frac{1}{4} M_3^* |X_{C3}|$$

$$- \frac{1}{4} M_N |X_{N-1}| + MM_N |X_N| - \frac{1}{4} M_N |X_{N+1}| = \frac{1}{4} M_N^* |X_{CN}|$$

Formalmente le equazioni si possono riassumere nella espressione:

$$(7) \quad \begin{pmatrix} MM_1 - \frac{M_1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{M_2}{4} & MM_2 - \frac{M_2}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 - \frac{M_3}{4} & MM_3 - \frac{M_3}{4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 - \frac{M_N}{4} & MM_N & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |X_1| \\ |X_2| \\ \vdots \\ |X_N| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} (M_1 |X_0| + M_1^* |X_{C1}|) \\ \frac{1}{4} M_2^* |X_{C2}| \\ \vdots \\ \frac{1}{4} (M_N^* |X_{CN}| + M_N |X_{N+1}|) \end{pmatrix}$$

Per risolvere il sistema nel caso più generale si deve dalla prima equazione ricavare $|X_1|$ in funzione di $|X_0|$ e $|X_2|$, sostituirla nella seconda e ricavare $|X_2|$ in funzione di $|X_3|$, e così di seguito fino ad avere $|X_N|$ in funzione di $|X_{N+1}|$. Procedendo di questo passo si ottiene dalla equazione (6):

$$(6)'b \quad 4M_1^{-1} M M_1 |X_1| - |X_0| - M_1^{-1} M_1^* |X_{c1}| = |X_2|$$

Chiamando

$$P_1 = 4 M_1^{-1} M M_1 - |X_{c1}| = M_1^{-1} M_1^* |X_{c1}| + |X_0|$$

si può scrivere:

$$(6)'c \quad \begin{aligned} P_1 |X_1| + |X_{c1}| &= |X_2| \\ |X_1| &= P_1^{-1} |X_2| - P_1^{-1} |X_{c1}| \end{aligned}$$

8.

Dalla seconda equazione si ha:

$$(6)''b \quad P_2 |X_2| - |X_3| - |X_1| = - |X_{c2}|$$

ove

$$|X_{c2}| = M_2^{-1} M_2^* |X_{c2}| \quad P = 4 M_2^{-1} M M_2$$

Ponendo la seconda equazione delle (6)'c nella (6)''b si ottiene:

$$P_2 |X_2| - |X_3| - P_1^{-1} |X_2| + P_1^{-1} |X_{c1}| = - |X_{c2}|$$

$$(P_2 - P_1^{-1}) |X_2| = |X_3| - P_1^{-1} |X_{c1}| - |X_{c2}|$$

$$|X_2| = (P_2 - P_1^{-1})^{-1} |X_3| - (P_2 - P_1^{-1})^{-1} P_1^{-1} |X_{c1}| - (P_2 - P_1^{-1})^{-1} |X_{c2}|$$

Si può procedere dalla terza equazione nella stessa maniera, così di seguito fino ad ottenere la formula ricorrente degli $|X_i| = f(|X_{i+1}|)$. Le espressioni si semplificano notevolmente nel caso di contorno rettangolare. E' possibile in questo caso formulare la teoria in modo da rendere utilizzabile per la soluzione del problema, con un programma di ragionevoli dimensioni, un normale calcolatore elettronico. Questo caso è illustrato nel paragrafo seguente.

3. - CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO PIANO IN FUNZIONE DEL POTENZIALE MAGNETICO SU UN CONTORNO RETTANGOLARE IN UN MATERIALE A PERMEABILITA' COSTANTE -

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, dividiamo il rettangolo, che costituisce il contorno della nostra area, in un reticolo (fig. 4).

Le relazioni trovate tra i vettori che rappresentano i valori discreti del potenziale in una colonna del reticolo, di cui alla formula (5) si riducono al sistema semplificato seguente:

$$(8) \quad \begin{aligned} |X_1| - \frac{M^{-1}}{4} |X_2| &= \frac{M^{-1}}{4} |X_{01}| + \frac{M^{-1}}{4} |X_{N+1,1}| \\ - \frac{M^{-1}}{4} |X_1| + |X_2| - \frac{M^{-1}}{4} |X_3| &= \frac{M^{-1}}{4} |X_{N+1,2}| \\ - \frac{M^{-1}}{4} |X_2| + |X_3| - \frac{M^{-1}}{4} |X_4| &= \frac{M^{-1}}{4} |X_{N+1,3}| \end{aligned}$$

$$-\frac{M^{-1}}{4} |X_{n-1}| + |X_n| = \frac{M^{-1}}{4} |X_{n+1}| + \frac{M^{-1}}{4} |X_{N+1,n}|$$

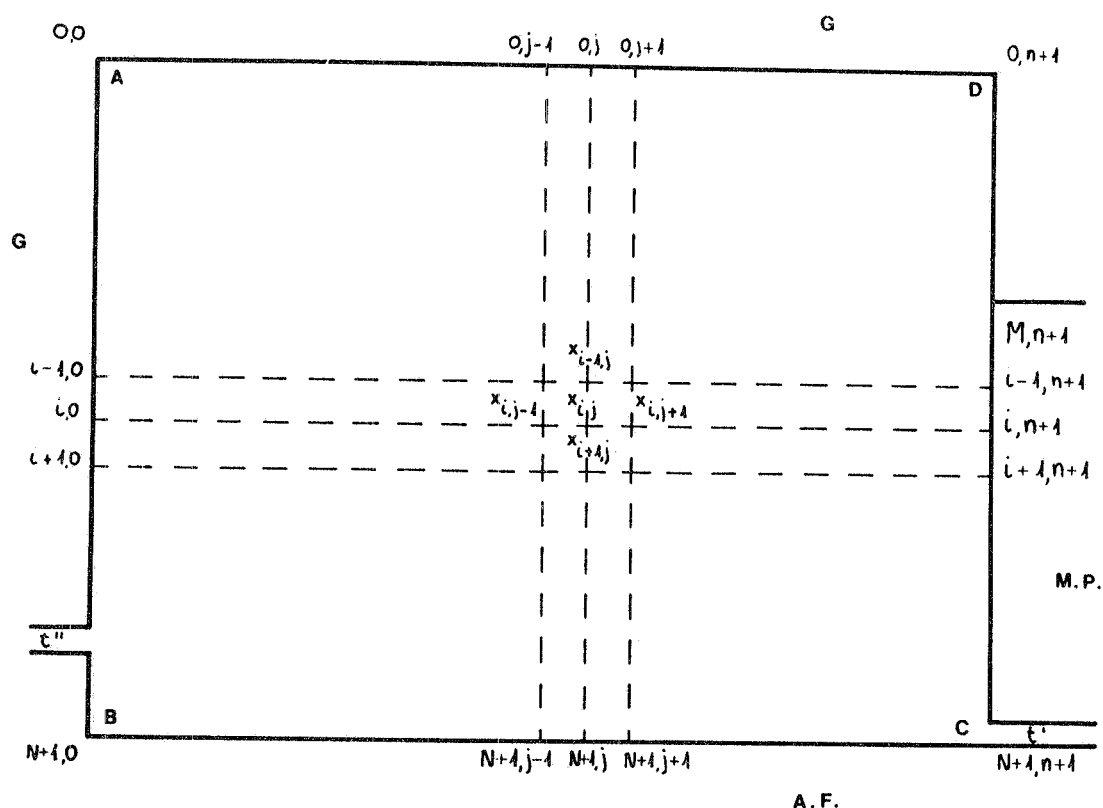


FIG. 4 - Sezione piana di un contorno magnetico rettangolare.

dove M^{-1} è la matrice inversa di M definita nella (2), di ordine $n \times n$.

Le (6) costituiscono un sistema di n equazioni negli n vettori incogniti $|X_j|$ (per $j = 1, 2, \dots, n$).

Nel caso in cui il contorno sia costituito da un mezzo a permeabilità infinita e da un magnete permanente come in fig. 1a il termine $|X_0|$, come vettore che riassume i potenziali della colonna 0-esima, avrà diversi da zero alcuni degli ultimi elementi e precisamente quelli che vengono a cadere nel traferro e sul dente in ferro sottostante (fig. 1a).

Riportiamo i simboli che compaiono nel sistema per maggior chiarezza nel caso in cui, come indicato in fig. 1a, il contorno sia costituito da un pezzo di ferro G, da un magnete permanente M.P. da un'an^{co}ra A.F. per il calcolo del quale caso sono state svolte le presenti teorie.

10.

$$\begin{aligned}
 |X_j| &= \begin{vmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{Nj} \end{vmatrix} & |X_{j+1}| &= \begin{vmatrix} X_{1,j+1} \\ X_{2,j+1} \\ \vdots \\ X_{N,j+1} \end{vmatrix} \\
 |X_{j-1}| &= \begin{vmatrix} X_{1,j-1} \\ X_{2,j-1} \\ \vdots \\ X_{N,j-1} \end{vmatrix} & |X_{N+1,j}| &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{N+1,j} \end{vmatrix} = V_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la (8) per M^{-1} , matrice inversa di M e diagonalizziamo i coefficienti delle singole equazioni con una matrice diagonalizzante U ⁽⁵⁾.

Si ottiene:

$$(9) \quad U|X_j| = \frac{1}{4} \Lambda U \left[|X_{j-1}| + |X_{j+1}| + |X_{N+1,j}| \right]$$

in cui con $(1/4) \Lambda$ si è indicata la matrice diagonale degli autovalori λ_k di M^{-1} , dati dalla formula:

$$(10) \quad \lambda_k = \frac{1}{4 \lambda'_k}$$

ove

$$(10') \quad \lambda'_k = a + 2b \cos \frac{k\pi}{N+1} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

con $a = 1$, $b = -(1/4)$ e $N = \text{ordine di } M$ ⁽⁶⁾.

Se poniamo

$$\begin{aligned}
 U|X_j| &= |Y_j| & U|X_{j-1}| &= |Y_{j-1}| \\
 U|X_{j+1}| &= |Y_{j+1}| & U|X_{N+1,j}| &= |Y_{N+1,j}|
 \end{aligned}$$

la (9) scritta per le n colonne dà per la componente p -esima:

$$\begin{aligned}
 |Y_1|_p - \lambda_p |Y_2|_p &= \lambda_p |Y_0|_p + \lambda_p |Y_{N+1,1}|_p \\
 -\lambda_p |Y_1|_p + |Y_2|_p - \lambda_p |Y_3|_p &= \lambda_p |Y_{N+1,2}|_p \\
 (11) \quad -\lambda_p |Y_2|_p + |Y_3|_p - \lambda_p |Y_4|_p &= \lambda_p |Y_{N+1,3}|_p \\
 &\vdots \\
 -\lambda_p |Y_{n-1}|_p + |Y_n|_p &= \lambda_p |Y_{n+1}|_p + \lambda_p |Y_{N+1,n}|_p
 \end{aligned}$$

Per $p = 1, 2, \dots, N$ le (11) rappresentano N sistemi di n equazioni negli n vettori incogniti $|Y_j|_p$ con $j = 1, 2, \dots, n$. Il termine $|Y_0|_p$, essendo il vettore che deriva dai potenziali della colonna 0-esima, avrà diversi da 0 solo gli elementi che derivano solo dai potenziali relativi al traferro t'' e al dente in ferro dell'ancora A.F. sottostante (fig. 4). La matrice del sistema (11) è:

$$(12) \quad G_p(n) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda_p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda_p & 1 & -\lambda_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_p & 1 & -\lambda_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda_p & 1 \end{vmatrix}$$

e pertanto i valori dei potenziali e quindi dei gradienti del campo magnetico, in prossimità del contorno del magnete permanente, che a noi interessano, sono dati da:

$$(13) \quad G_p(n) Y_{np} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda_p & 0 & \dots & \dots & \lambda_p (|Y_{N+1,1}|_p + |Y_0|_p) \\ -\lambda_p & 1 & -\lambda_p & 0 & \dots & \lambda_p |Y_{N+1,2}|_p \\ 0 & -\lambda_p & 1 & -\lambda_p & 0 & \dots & \lambda_p |Y_{N+1,3}|_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \lambda_p |Y_{N+1,n-1}|_p \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda_p & \lambda_p (|Y_{N+1,n}|_p + |Y_{n+1}|_p) \end{vmatrix}$$

12.

Sviluppando la (13) secondo l'ultima colonna, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 G_p(n) |Y_n|_p &= (-1)^{n+1} \lambda_p^n G_p(0) \left[|Y_{N+1,1}|_p + |Y_0|_p \right] + \\
 (14) \quad &+ (-1)^{n+2} \lambda_p^{n-1} G_p(1) |Y_{N+1,2}|_p + (-1)^{n+2} \lambda_p^{n-2} G_p(2) |Y_{N+1,3}|_p + \dots + \\
 &+ \lambda_p G_p(n-1) \left[|Y_{N+1,n}|_p + |Y_{n+1}|_p \right]
 \end{aligned}$$

Per i termini $G(k)$ vale la formula ricorrente

$$(15) \quad G_p(k) = G_p(k-1) - \lambda_p^2 G_p(k-2)$$

Sottraendo ad ambo i membri della (14) il termine $G(n) |Y_{n+1}|_p$ e ponendo

$$(\text{grad } v)_{kp} = U^{-1} |Y_{k,n}|_p - U^{-1} |Y_{k,n+1}|_p$$

$$(V_{k,n})_p = U^{-1} |Y_{k,n}|_p$$

si ottiene esplicitando la (14)

$$(16) \quad G_p(n)U \begin{vmatrix} (\text{grad } v)_1 \\ (\text{grad } v)_2 \\ \vdots \\ (\text{grad } v)_N \end{vmatrix} + \left[(\lambda_p - 1)G_p(n-1) + \lambda_p^2 G_p(n-2) \right] U \begin{vmatrix} V_{1,n+1} \\ V_{2,n+1} \\ \vdots \\ V_{N,n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p \end{vmatrix}$$

$$= V_0 \left[(-1)^{n+1} \lambda_p^n G_p(0) + \dots + (-1)^{2n} \lambda_p G_p^{(n-1)} \right] \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} +$$

(16)

$$+ (-1)^{n+1} \lambda_p^n V_0 G_p(0) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Nella (16) compaiono i termini $G_p(k)^{n-k}$ che la (15) permette di ricavare come polinomi in λ .

Le relazioni (16) costituiscono un sistema di N equazioni in $2N$ incognite in base alle sole proprietà del campo magnetico nel vuoto. Per tanto tale sistema non è sufficiente a determinare le incognite. Le equazioni ulteriori che permetteranno di risolvere il problema, saranno fornite dalle proprietà del campo magnetico nella materia, più propriamente nella regione di spazio occupata dal magnete permanente.

La ricerca delle nuove equazioni che completano il sistema (16) è l'argomento di cui ci occuperemo nel paragrafo 5.

4. - CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO IN FUNZIONE DEL POTENZIALE NEL CASO DI UN CORPO AD ASSE DI SIMMETRIA CILINDRICA.

Nello spazio vuoto A (fig. 1b e fig. 5) l'equazione del potenziale in coordinate cilindriche r e z è data da;

$$(17) \quad \Delta X = \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dX}{dr} \right) + \frac{d^2(rX)}{dz^2} \right] = 0$$

in cui X è il potenziale magnetico incognito.

La (17) può essere approssimata in termini di differenze finite. A tal fine si tracci in un piano passante per l'asse del cilindro un reticolo r, z ortogonale ($N+1$ rette orizzontali ed $n+1$ verticali). Si ottiene nello spazio vuoto A e nel contorno, che supponiamo rettangolare, un reticolo di $[(N+1) \times (n+1)]$ punti, il cui potenziale sarà indicato da $X_{i,j}$ con $i = 0, 1, 2, \dots, N+1$ coordinata assiale e con $j = 0, 1, 2, \dots, n+1$ coordinata radiale (fig. 5)

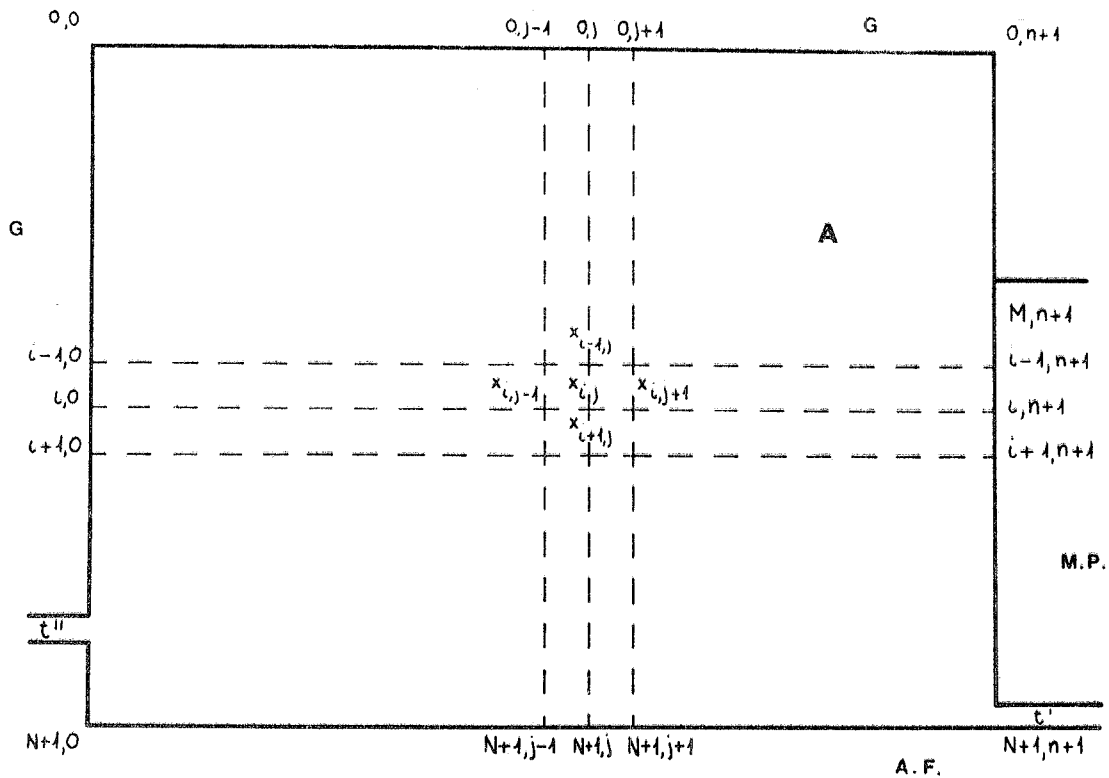


FIG. 5 - Sezione piana di un contorno magnetico: caso cilindrico.

La (17) si può scrivere quindi per ciascun punto:

$$(17)' \quad \frac{1}{r_j} \left[\frac{r_{j+1} + r_j}{2a} \left(\frac{|X_{i,j+1}| - |X_{i,j}|}{a} \right) - \frac{r_j + r_{j-1}}{2a} \left(\frac{|X_{i,j}| - |X_{i,j-1}|}{a} \right) + \frac{r_j}{a} (|X_{i-1,j}| + |X_{i+1,j}| - 2|X_{i,j}|) \right] = 0$$

Poichè è:

$$r_{j+1} = r_j + a \qquad r_{j-1} = r_j + a$$

si ricava:

$$(18) \quad \begin{aligned} |X_{i,j}| &= \frac{|X_{i,j+1}|}{4} \left(1 - \frac{a}{2r_j}\right) + \frac{|X_{i,j-1}|}{4} \left(1 + \frac{a}{2r_j}\right) + \\ &+ \frac{|X_{i+1,j}|}{4} + \frac{|X_{i-1,j}|}{4} \end{aligned}$$

Da quest'ultima relazione si ottiene per $i = 1, 2, \dots, N$ un sistema di N equazioni che si riassume nella relazione:

$$(19) \quad M |X_j| = \left(1 - \frac{a}{2r_j}\right) \frac{|X_{j+1}|}{4} + \left(1 + \frac{a}{2r_j}\right) \frac{|X_{j-1}|}{4} + \frac{|X_{N+1,j}|}{4}$$

i cui termini, scritti in forma esplicita, sono analoghi alla matrice e ai vettori che compaiono nelle espressioni di (2) e (7').

Con procedimento analogo a quello del paragrafo precedente, moltiplicando la (19) a sinistra per la matrice M^{-1} e diagonalizzando mediante una matrice U , si ottiene:

$$U |X_j| = \left(1 - \frac{a}{2r_j}\right) \Lambda U |X_{j+1}| + \left(1 + \frac{a}{2r_j}\right) \Lambda U |X_{j-1}| + \Lambda U |X_{N+1,j}|$$

dove Λ è la matrice diagonale degli autovalori di $M^{-1}/4$ e r_j la distanza di $|X_j|$ dall'asse centrale (fig. 6).

La relazione tra le componenti corrispondenti p -esime dei vettori $|Y|$ legati ai vettori $|X|$ dalle relazioni seguenti: (*)

$$(20) \quad U |X_j| = |Y_j| \qquad U |X_{j+1}| = |Y_{j+1}| \qquad U |X_{j-1}| = |Y_{j-1}|$$

$$U |X_{N+1,j}| = |Y_{N+1,j}| = |C_j|$$

diventa del tipo:

(*) - La matrice diagonalizzante U e i valori dei λ sono quelli ricavati per il caso piano nel par. 3.

16.

$$(21) \quad |Y_{j,p}| - \left(1 - \frac{a}{2r_j}\right) \lambda_p |Y_{j+1,p}| - \left(1 + \frac{a}{2r_j}\right) \lambda_p |Y_{j-1,p}| = \lambda_p |C_{j,p}|$$

in cui $|C_j|$ è dato da:

$$(22) \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = |C_j| = U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ V_{0,j} \end{pmatrix}$$

Il sistema (21) si può scrivere:

$$(23) \quad M_p |Y_p| = |C_p|$$

dove con M_p e $|Y_p|$ si sono indicati rispettivamente la matrice e il vettore seguenti:

$$(23)' \quad M_p = \begin{pmatrix} 1 & -\left(1 - \frac{a}{2r_1}\right) \lambda_p & 0 & \dots & 0 \\ -\left(1 + \frac{a}{2r_2}\right) \lambda_p & 1 & -\left(1 - \frac{a}{2r_2}\right) \lambda_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\left(1 + \frac{a}{2r_3}\right) \lambda_p & 1 & -\left(1 - \frac{a}{2r_3}\right) \lambda_p & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\left(1 + \frac{a}{2r_n}\right) \lambda_p & 1 \end{pmatrix}$$

$$(23)'' \quad |Y_p| = \begin{pmatrix} Y_{1,p} \\ Y_{2,p} \\ Y_{3,p} \\ \vdots \\ Y_{N,p} \end{pmatrix}$$

Dai sistemi di n equazioni in n incognite che si ricavano dal sistema (21) per $p = 1, 2, \dots, N$ e per $j = 1, 2, \dots, n$ si possono ricavare i valori degli $|Y_{jp}|$ con i normali metodi.

Poichè interessa conoscere i valori dei gradienti e dei potenziali del campo nei punti in prossimità del contorno del magnete, è necessario ricavare dal sistema (23) l'incognita $|Y_{np}|$, cioè il potenziale $|X_n|$.

Se si pone per brevità:

$$(24) \quad \begin{aligned} A_{jp} &= - \left(1 + \frac{a}{2r_j}\right) \lambda_p \\ A_{jp}^* &= - \left(1 - \frac{a}{2r_j}\right) \lambda_p \end{aligned}$$

si ottiene:

$$(25) \quad \left| \text{Det } M_p \right| |Y_{np}| = \begin{vmatrix} 1 & A_{1p}^* & 0 & \dots & 0 & \lambda_p (|C_{1p}| + (1 + \frac{a}{2r_1}) |Y_{0p}|) \\ A_{2p} & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_p |C_{2p}| \\ 0 & A_{3p} & A_{3p}^* & \dots & 0 & \lambda_p |C_{3p}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & A_{n-1,p}^{11} & & \lambda_p |C_{n-1,p}| \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{n,p} & \lambda_p (|C_{n,p}| + (1 - \frac{a}{2r_n}) |Y_{n+1,p}|) \end{vmatrix}$$

Sviluppando la (25) secondo l'ultima colonna, si ricava:

$$(26) \quad \begin{aligned} M_p |Y_{np}| &= (-1)^{n+1} G_p(0) \prod_{j=2}^n A_j \left[|C_{1p}| + (1 + \frac{a}{2r_1}) |Y_{0p}| \right] + \\ &+ (-1)^{n+2} G_p(1) \prod_{j=3}^n A_j |C_{2p}| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{n+3} G_p(2) \prod_{j=4}^n A_j |C_{3p}| + \\
 (26) \quad & + \dots + \\
 & + (-1)^{2n+1} G_p^{(n-2)} A_n |C_{n-1,p}| + \\
 & + G_p^{(n-1)} \left[|G_{np}| + \left(1 - \frac{a}{2r_n}\right) |Y_{n+1,p}| \right]
 \end{aligned}$$

Per i $G_p(k)$ non vale la formula ricorrente (15) già ricordata nel paragrafo precedente, per il caso piano. Infatti i $G_p(k)$ sono funzione dei raggi r_j , con $j = 1, 2, \dots, n$ e pertanto i termini $G_p(k) \prod_{j=k+2}^n A_j$ dovranno essere calcolati con un computer.

Pertanto esplicitando la (26) mediante le (20) e ponendo:

$$\begin{aligned}
 & U^{-1} |Y_{i,j}| = |X_{i,j}| = V_{i,j} \\
 (27) \quad & U^{-1} |Y_{k,n}| - U^{-1} |Y_{k,n+1}| = |X_{k,n}| - |X_{k,n+1}| = (\text{grad } v)_k
 \end{aligned}$$

se si sottrae a primo e secondo membro $M_p |X_{k,n+1}|$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & P_n(\lambda) \begin{vmatrix} (\text{grad } v)_1 \\ (\text{grad } v)_2 \\ \vdots \\ (\text{grad } v)_n \end{vmatrix} - \left[\left(1 - \frac{a}{2r_n}\right) P_{n-1}(\lambda) - P_n(\lambda) \right] \begin{vmatrix} V_{1,n+1} \\ V_{2,n+1} \\ \vdots \\ V_{N,n+1} \end{vmatrix} = \\
 (28) \quad & = V_0 \left[(-1)^{n+1} P_0(\lambda) + (-1)^{n+2} P_1(\lambda) + \dots + P_{n-1}(\lambda) \right] \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$+(-1)^{n+1} \left(1 + \frac{a}{2r_1}\right) V_0 P_0(\lambda)$$

0
0
0
1
1
1

Anche in questo caso, come si è già visto nel paragrafo 3 si è giunti con la (28) ad un sistema di N equazioni in 2N incognite in base alle sole proprietà del campo magnetico nel vuoto e sarà necessario ricorrere alle proprietà che assume il campo magnetico nella materia per ottenere le altre equazioni per determinare completamente il problema.

5. - CALCOLO DEL MAGNETE PERMANENTE. CASO DI UN MAGNETE PERMANENTE PIANO A SEZIONE RETTANGOLARE CON ASSE DI SIMMETRIA PIANO. -

Nel paragrafo 3 abbiamo ricavato le relazioni che legano i potenziali su un contorno rettangolare, ai gradienti del potenziale su un lato del rettangolo per il caso piano (fig. 4).

Sia il magnete permanente, cui è dovuto il campo magnetico che dobbiamo calcolare nel rettangolo (A, B, C, D), adiacente ad un lato di tale rettangolo. Le relazioni che legano il campo e l'induzione nei singoli punti del magnete permanente, ci permettono di scrivere le relazioni tra i gradienti sul contorno e i potenziali sul contorno che, con le equazioni ricavate nel paragrafo 3, permettono di ricavare appunto i potenziali incogniti sulla superficie del magnete. Si può procedere in due modi: uno semplice e grossolanamente approssimato, che chiameremo Metodo A, un secondo, che in linea di principio permette di ricavare una precisione qualsivoglia, di tipo iterativo e molto laborioso, che chiameremo Metodo B.

Nel magnete permanente l'induzione magnetica B non è proporzionale al campo H . Se usiamo materiali tipo il Sinterox III, la cui curva di magnetizzazione è quella indicata nella figura 7a, la relazione tra i vettori \underline{H} e \underline{B} è approssimativamente lineare:

$$(29) \quad \underline{H} = \frac{1}{\mu} (\underline{B} - \underline{B}_r)$$

20.

con

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

Questa relazione vettoriale può scindersi in due relazioni scalari fra le componenti di H e di B, scegliendo opportunamente i riferimenti come in fig. 6:

$$(29)' \quad H^T = \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^T - \frac{B_r}{\mu_r \mu_0} \cos \delta$$

$$(29)'' \quad H^N = \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^N - \frac{B_r}{\mu_r \mu_0} \sin \delta$$

ove δ è l'angolo del vettore induzione rispetto all'asse $x = T$ del sistema di riferimento.

Nel caso del materiale citato le costanti che compaiono nella (29) assumono i seguenti valori:

$$\mu_r = 1,17 \qquad B_r = 0,37$$

Metodo A. -

Si fa l'ipotesi, peraltro sufficientemente approssimata nel caso di magneti permanenti in cui $2l \ll h$, che il campo magnetico nel magnete permanente sia uniforme in ogni sezione.

Se consideriamo (vedi fig. 7) i flussi magnetici nelle sezioni i -esima e $(i-1)$ -esima avremo che differiscono tra loro del flusso ϕ_{Ci} che entra nel magnete permanente dal vuoto:

$$(30) \quad \phi_{i-1} = \phi_i + a \frac{v_{i,n} - v_{i,n+1}}{a} \mu_0 = \phi_i + \phi_{Ci}$$

La relazione (30) può essere scritta per ogni valore di i compreso tra p e q , sezioni esterne del magnete permanente. Possiamo perciò scrivere:

$$(30)' \quad \phi_0 - \sum_{k=p}^q (v_{k,n} - v_{k,n+1}) \mu_0 = \phi_i$$

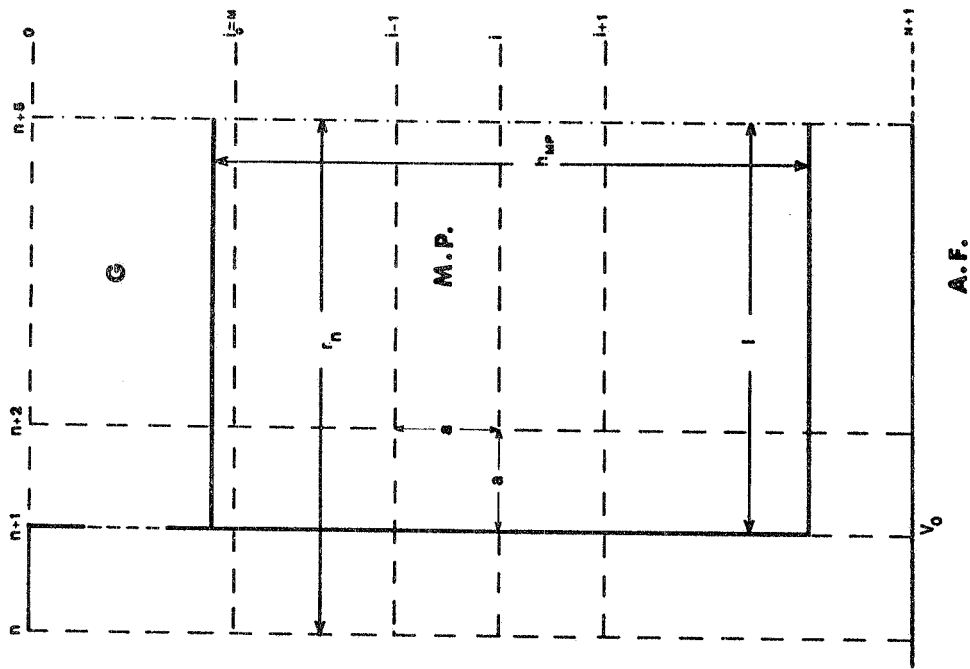


FIG. 7 - Sezione piana di un semimagnete permanente; caso piano.

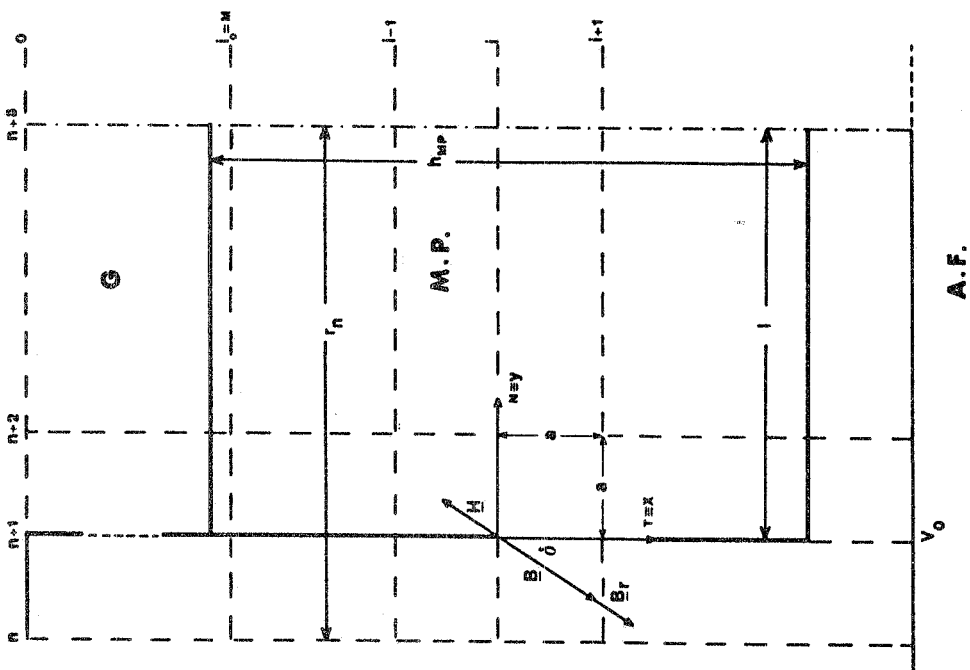


FIG. 6 - Sezione piana di un semimagnete permanente; caso cilindrico

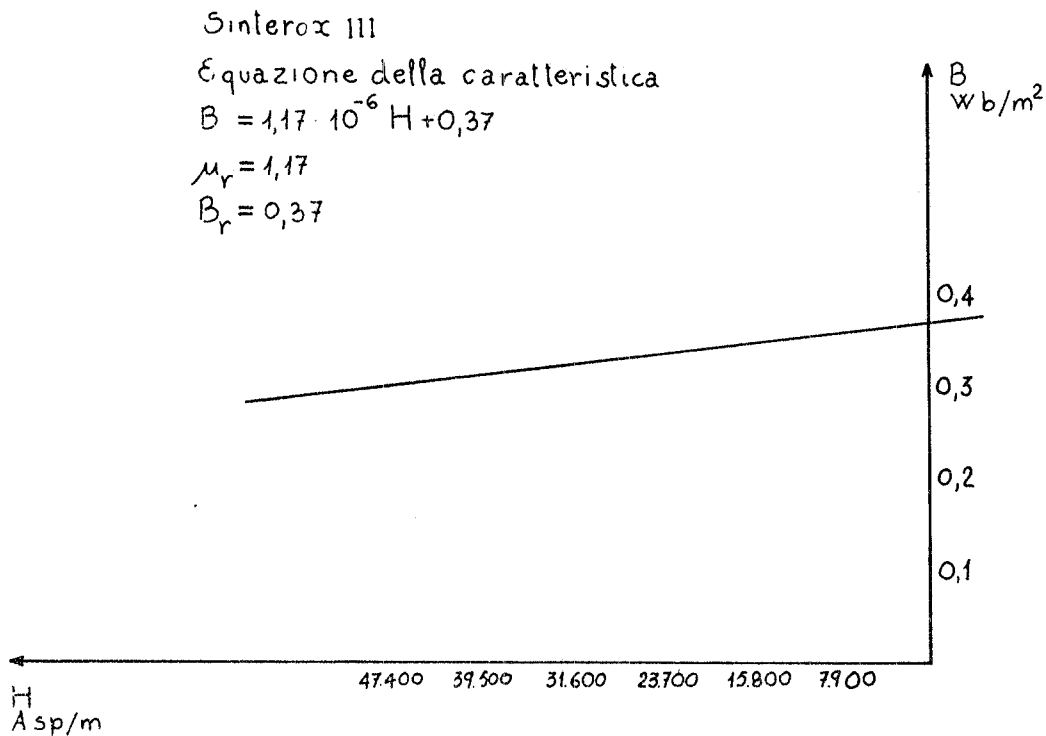


FIG. 7a) - Caratteristica magnetica del Sinterox III.

dove ϕ_0 è il flusso attraverso la sezione 0-esima.

Dalla relazione (30)' si può ricavare il valore di B_i , induzione nella sezione i-esima, pari a:

$$(31) \quad B_i = \frac{\phi_0 - \sum_{k=p}^q (v_{k,n} - v_{k,n+1}) \cdot o}{\ell}$$

ove ℓ è la semilarghezza del magnete permanente.

D'altro canto, come abbiamo detto, nel magnete permanente esiste tra B_i e H_i (induzione e campo nella sezione i-esima) la relazione lineare (29) che, per la sezione i-esima, diviene:

$$(32) \quad H_i = \frac{1}{\mu} (B_i - B_r)$$

Inoltre H_i , se è valida l'ipotesi che sia uniforme nella sezione del magnete permanente, risulta nella i-esima, essendo uguale a quella del vuoto, pari a:

$$(33) \quad a H_i = v_{i-1, n+1} - v_{i, n+1}$$

Sostituendo la (33) nella (32) si ottengono $q-p = N+1$ relazioni lineari tra i $(\text{grad } v)_j = v_{n,j} - v_{n+1,j}$, i $v_{n+1,j}$ e ϕ_0 , flusso nella sezione 0-esima, che con le relazioni già ottenute tra i $\text{grad } v$ e i v per il vuoto, permettono di calcolare sia i gradienti che i potenziali, una volta fissato V_0 , che dipende dalla sezione della gamba di ritorno.

Metodo B. -

Come si è già detto, è un metodo iterativo, che consente di ricavare i potenziali v e i $(\text{grad } v)$ con maggior precisione.

Riferendoci alla fig. 6, risulta comodo definire i seguenti vettori e matrici:

$|v_j|$ = vettore di $(N-M+2)$ componenti, con $j = n+1, n+2, \dots, n+s$, se s rappresenta il numero di colonne del reticolo nel semimagnete M.P. L'ultimo componente è il potenziale V_0 dell'ancora A.F.

$|\text{grad } v|$ = vettore di $(N-M+2)$ componenti. L'ultimo componente, rappresentando il gradiente del potenziale dell'ancora A.F., è uguale a zero.

$$(34) \quad |C_j| = B_r \quad |S_j| = \frac{B_r}{\mu}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \cos \delta_1^i & & & -\text{sen} \delta_1^j \\ \cos \delta_2^j & & & -\text{sen} \delta_2^j \\ & & & \\ & & & \\ \cos \delta_{N-1}^j & & & -\text{sen} \delta_{N-1}^j \\ 0 & & & 0 \end{array}$$

$$M_H = \begin{array}{c} (N-M+2) \times (N-M+2) \\ \begin{array}{ccccccc} -\frac{\mu}{a} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\mu}{a} & -\frac{\mu}{a} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{a} & -\frac{\mu}{a} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\mu}{a} & -\frac{\mu}{a} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\mu_0}{a} & -\frac{\mu_0}{a} \end{array} \end{array}$$

$$(35) \quad A = \begin{array}{c} (N-M+2) \times (N-M+2) \\ \left| \begin{array}{cccccccc} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \end{array} \right| \end{array}$$

Mediante queste notazioni, per $j > 1$ le (29) diventano rispettivamente:

$$(36) \quad |B_j^T| = M_H |v_j| + |C_j|$$

$$|H_j^N| = |Q_j| + |S_j|$$

in cui

$$(37) \quad |Q_j| = \frac{|B_j^N|}{\mu}$$

Dall'equazione della div $B = 0$, applicata al volume compreso fra le sezioni j -esima e $(j-1)$ -esima del magnete permanente M. P. (fig. 8), si ottiene:

$$(38) \quad B_{i,j}^N = B_{i,j-1}^N - B_{i,j-1}^T + B_{i-1,j-1}^T$$

che in forma vettoriale compatta dà per la (36)'

$$(38)' \quad |B_j^N| = |B_{j-1}^N| + A (M_H |v_{j-1}| + |C_{j-1}|)$$

mentre la (33) diviene:

$$(39) \quad a |H_j^N| = -A |v_j|$$

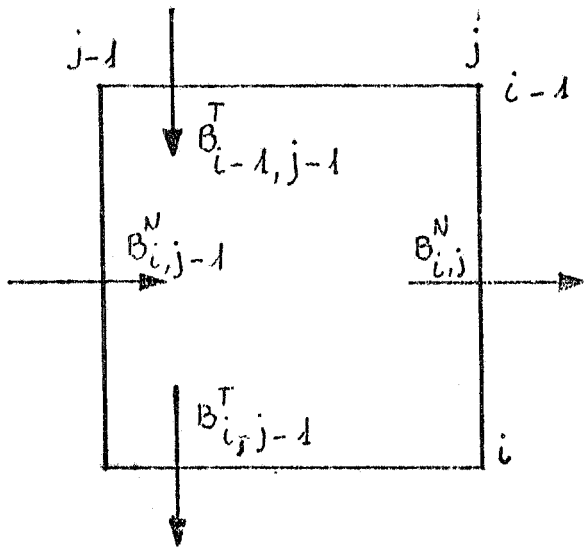


FIG. 8 - Cella elementare di sezione del magnete permanente.

Per $j = n+1 = 1$ sono valide inoltre le relazioni:

$$(40) \quad |B_1^N| = \frac{\mu_0}{a} |\text{grad } v| = \mu |Q_1|$$

avendo posto per brevità

$$(41) \quad |Q_1| = \frac{1}{a\mu_r} |\text{grad } v|$$

e la

$$(42) \quad a |H_1^T| = A |v_{n+1}|$$

le (40) e (42) legano i valori delle grandezze magnetiche nel vuoto ai valori che le stesse grandezze assumono nella materia.

Facendo uso delle relazioni scritte precedentemente si può procedere come segue: dalle (36) e (41) si ricava per $j = i$

$$|B_1^T| = M_H |v_1| + C_1$$

$$|H_i^N| = \frac{1}{a\mu_r} |\text{grad } v| + |S_1| = |Q_1| + |S_1|$$

mentre dalle (39) e (36) si ha per $j = 2$:

$$|v_2| = |v_1| - a|Q_1| - a|S_1|$$

$$|B_2^N| = |B_1^N| + A(M_H|v_1| + |C_1|)$$

e sostituendo successivamente, secondo quanto detto, nelle (36) e (37) con $j = n+2 = 2$ si ottiene:

$$|B_2^T| = M_H|v_1| - a M_H|Q_1| - a M_H|S_1| + |C_2|$$

$$|H_2^N| = |Q_1| + \frac{A}{\mu} M_H|v_1| + \frac{A}{\mu} |C_1| + |S_2|$$

$$|v_3| = |v_2| - a|Q_2| - a|S_2| = (I - \frac{a}{\mu} A M_H)|v_1| - 2a|Q_1| +$$

$$- \frac{a}{\mu} A |C_1| - a(|S_1| + |S_2|)$$

$$|B_3^N| = (\mu I - a A M_H)|Q_1| + 2 A M_H|v_1| - a A M_H|S_1| +$$

$$+ A(|C_1| + |C_2|).$$

Se s sono le colonne che vengono a cadere sul magnete si dovranno effettuare $s-1$ sostituzioni successive, fino a giungere sull'asse di simmetria del magnete (colonna $(n+s)$ -esima) per la quale vale la condizione al contorno per la componente normale di B :

$$(43) \quad |B_s^N| = 0$$

$|B_s^N|$ risulterà quindi funzione di $|Q_1|$ e $|v_1|$, che sono le incognite gradienti e potenziali, che ci interessano. Nelle espressioni finali compaiono, tramite le funzioni seno e coseno contenute nei vettori $|S_j|$, con $j = 1, 2, \dots, S-2$ e $|C_j|$ con $j = 1, 2, \dots, S-1$, gli angoli δ_j , che individuano la direzione del vettore \underline{B} rispetto all'asse $x = T$ (fig. 6). Questi angoli non sono noti a priori e bisognerà determinarli con un metodo iterativo.

Il procedimento iterativo consiste nel porre alcuni δ_j iniziali, ricavare i valori del campo e dell'induzione nel magnete permanente, ricalcolare δ_j mediante la formula:

$$(43)' \quad \operatorname{tg} \delta_j = \frac{B_j^N}{B_j^T}$$

che risulterà diversa dal rapporto:

$$(43)'' \quad \operatorname{tg} \delta_j = \frac{H_j^N}{H_j^T}$$

Questi valori saranno quindi riportati all'inizio e si riprocederà allo stesso modo fino a trovare i valori corretti di questi angoli, cioè fino a quando le (43) e (43)'' coincideranno.

Nel caso cui si riferiscono i programmi Fortran riportati, è $s = 5$ e pertanto la (43) dà:

$$(44) \quad |B_5^N| = |B_4^N| + A (M_H |v_4| + |C_4|) = 0$$

ed effettuando le sostituzioni la (44) dà:

$$\begin{aligned} & (\mu I - 6 A M + \frac{(AM)^2}{\mu}) |Q_1| + \frac{4}{a} (A M - \frac{(AM)^2}{\mu}) |v_1| + \\ & + (A - 3 \frac{AMA}{\mu}) |C_1| + (A - \frac{AMA}{\mu}) |C_2| + A (|C_3| + |C_4|) + \\ & - (3AM - \frac{(AM)^2}{\mu}) |S_1| - A M (2|S_2| + |S_3|) = 0 \end{aligned}$$

dove si è posto per brevità:

$$M = a M_H = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu & -\mu & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu_0 & -\mu_0 \end{pmatrix}$$

(N-M+2)x(N-M+2)

$$\begin{array}{l}
 I \\
 (N-M+2) \times (N-M+2)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|cccc}
 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & & 1 & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
 \end{array}$$

6. - CALCOLO DEL MAGNETE PERMANENTE. CASO DI UN MAGNETE PERMANENTE CON ASSE DI SIMMETRIA CILINDRICA A SEZIONE RETTANGOLARE -

Nel par. 4 abbiamo ricavato le relazioni che legano i potenziali sulla periferia su un contorno rettangolare ai gradienti del potenziale su un lato del rettangolo per il caso a simmetria cilindrica di fig. 5.

Le relazioni che legano il campo e l'induzione nei singoli punti del magnete permanente sono state poste nel par. 5^o e da esse possiamo ancora sviluppare con alcune varianti, un Metodo A e un Metodo B, in analogia con quanto fatto nel par. 5.

Metodo A. -

Le relazioni (30), (30)', (31) e (33) divengono rispettivamente:

$$(45) \quad \phi_{i-1} = \phi_i + \left(\frac{a}{2r_n} + 1\right) 2\pi r_n (v_{i,n} - v_{i,n+1}) \mu_o = \phi_i + \phi_{Cl}$$

$$(46) \quad \phi_o - \left(\frac{a}{2r_n} + 1\right) 2\pi r_n \sum_{k=p}^p (v_{k,n} - v_{k,n+1}) \mu_o = \phi_i$$

$$(47) \quad B_i = \frac{\phi_o}{\pi r_n^2} - \left(\frac{a}{2r_n} + 1\right) \frac{2}{r_n} \sum_{k=p}^q (v_{k,n} - v_{k,n+1}) \mu_o$$

$$(48) \quad a H_i = v_{i-1, n+1} - v_{i, n+1} = (\text{grad } v)_i$$

essendo r_n il raggio che unisce $X_{i, n}$ ad $X_{i, n+5}$ (fig. 6).

Sostituendo le (45) e (46) nella (32) si ottengono $q-p = N$ relazioni lineari fra i $(\text{grad } v)_j = v_{n, j} - v_{n+1, j}$, i potenziali $v_{n+1, j}$ e ϕ_0^i , flusso nella sezione 0-esima, che con le relazioni già ricavate nel paragrafo 4 per il vuoto permettono di calcolare sia i gradienti che i potenziali, una volta fissato V_0 .

Metodo B. -

Analogamente a quello che abbiamo ora fatto col Metodo A, è possibile completare la teoria svolta nel paragrafo 5 anche con il Metodo B e trovare le N relazioni atte a completare il sistema di equazioni (28). Bisogna tener conto che la relazione (38) relativa alla $\text{div } B = 0$ viene modificata nell'espressione seguente:

$$(49) \quad B_{ij}^N \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r_j}\right) = B_{i, j-1}^N \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r_{j-1}}\right) - B_{i, j-1}^T + B_{i-1, j-1}^T$$

7. - ESAME DEI CASI TRATTATI: RISULTATI E CONCLUSIONI -

Sulla base delle discussioni e dei procedimenti indicati nei paragrafi precedenti sono stati preparati i programmi in linguaggio Fortran per i seguenti casi:

1) Calcolo del campo magnetico tra un'ancora di ferro dolce G. con un dente di magnete permanente M. P. di tipo Sinterox III ed una piastra di ferro A. F. a permeabilità infinita, affacciata all'ancora stessa.

Il passo del reticolo, assunto nel vuoto di 6×6 , è indicato in fig. 9.

2) Calcolo del campo magnetico di una struttura analoga alla precedente, con le dimensioni indicate nelle fig. 10 e 11.

Il numero di punti del reticolo, in cui si è suddiviso lo spazio vuoto di una semiancora è di 25×25 .

Viceversa il reticolo in cui si è suddiviso il magnete permanente M. P. è $i \times 5$, dove i è stato fatto variare variando l'altezza h del magnete permanente tra 10 e 20 mm. Il passo a del reticolo è di 1 mm. Oltre all'altezza del magnete permanente, abbiamo variato anche il valore del potenziale V_0 della piastra, che è legata in maniera univoca alla larghezza della gamba di ritorno, per ogni fissata struttura, nonché all'altezza del traferro.

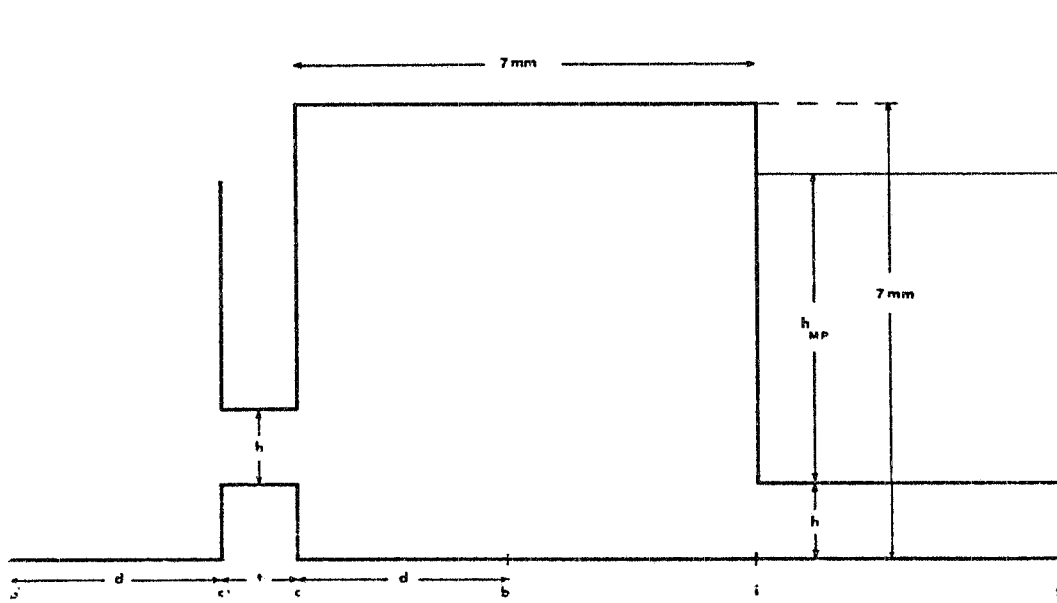


FIG. 9 - Dimensioni di una "semiancora" con un reticolo nel vuoto di $6 \times 6 \text{ mm}^2$ con magneti permanente alto 5 mm (caso piano). Nella figura sono anche riportati i simboli usati nel par. 7.

3) Calcolo del campo magnetico tra un'ancora cilindrica di ferro dolce con un dente di magneti permanente ed una piastra di ferro dolce.

Le dimensioni di questa struttura e il numero di punti del reticolo sono indicati nelle figg. 12 e 13. E' stato fatto ancora variare il potenziale V_0 della piastra.

Nei casi precedenti si sono ricavate le mappe dei potenziali magnetici nello spazio vuoto. Nei casi 2) e 3), indicato con b il punto in cui il campo magnetico cambia verso nella piastra in ferro da sostenere (fig. 10, 11, 12 e 13) si è calcolata la larghezza di t'' , una volta fissato V_0 , con la condizione che tra il flusso ϕ_{sb} , compreso fra s e b , il flusso ϕ_{bc} , compreso fra b e c , ϕ_0 , flusso nella sezione estrema, valga la relazione^(*)

$$\phi_{sb} - 2 \phi_{bc} = \phi_0$$

e inoltre sia

$$\frac{V_0}{h_{t''}} S_{t''} = \phi_0$$

(*) - Questa ipotesi equivale ad assumere che l'ancora sospesa si prolunghi oltre il dente di una lunghezza circa pari a bc (fig. 9). Si possono fare ipotesi di calcolo diverse.

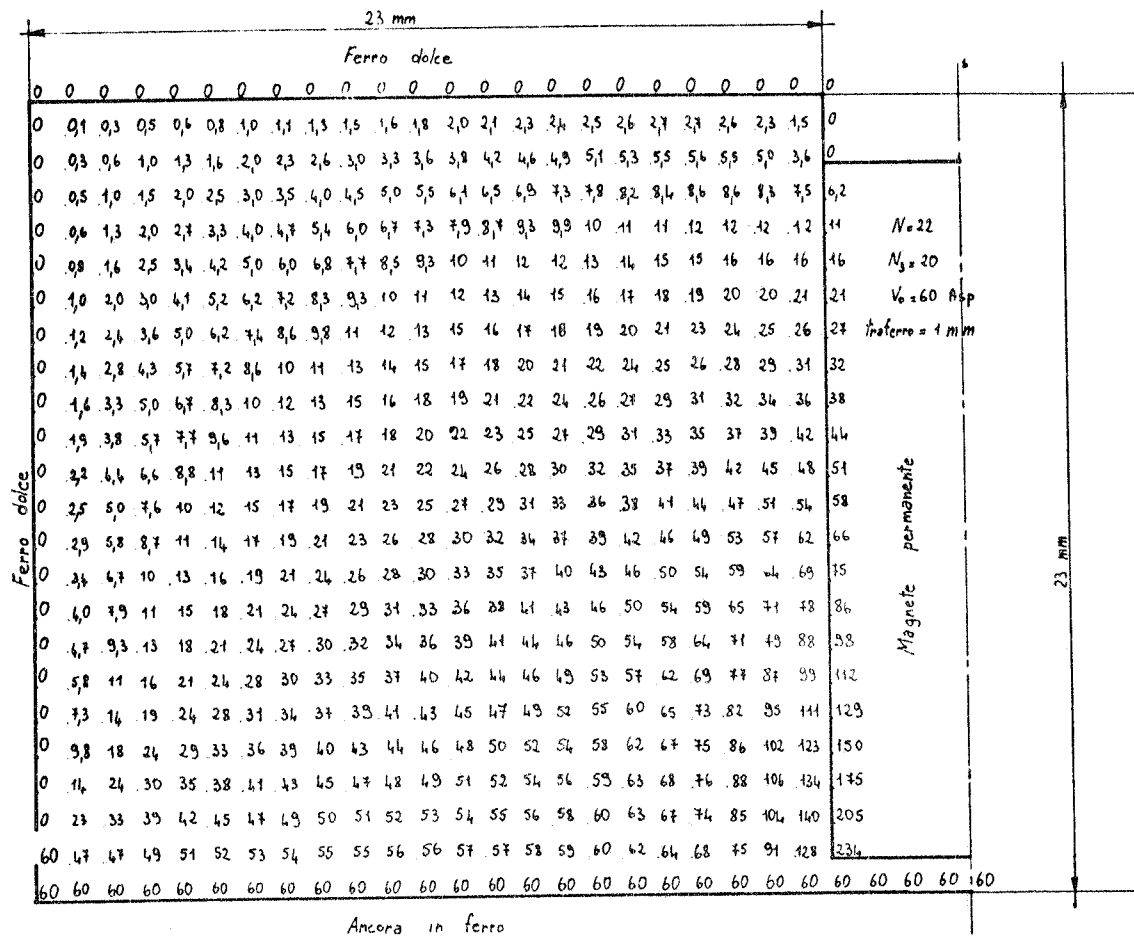


FIG. 13 - Esempio di mappa del campo magnetico di una "semiancra" con un reticolo nel vuoto di 23 x 23 mm² e magnete permanente alto 20 mm (caso cilindrico). Nel disegno sono indicate le dimensioni geometriche.

Risultati numerici di alcuni di questi calcoli, che si riferiscono ai casi precedentemente elencati, sono riportati in Appendice, con i programmi di calcolo in linguaggio Fortran.

Riteniamo utile riportare alcune osservazioni sui programmi Fortran preparati.

Il programma di cui al punto 1) è stato svolto in semplice precisione.

I programmi di cui ai punti 2) e 3) sono stati svolti in doppia precisione. Però si è dovuto cambiare il procedimento per ricavare i valori del potenziale nello spazio vuoto una volta ricavati il potenziale e i gradienti sul magnete permanente.

Infatti chiamati a_1 e a_2 le incertezze dei potenziali sulla colonna 1 e 2 nel ricavare le incertezze dei potenziali magnetici della colonna 3 da questi valori, mediante la relazione (4), si ha un'incertezza, nel caso peggiore di $a_3 = 6 a_1 + a_2$ (se gli errori sono casuali invece $a_3 = (4^2 a_1^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$). Così procedendo da una colonna all'altra si propaga l'incertezza ogni volta di un fattore 7 (4). Se si arriva a calcolare il potenziale nello spazio vuoto partendo dai valori ottenuti nel magnete permanente si amplifica l'errore proporzionalmente a $7^N a_1 (5^N a_1)$, se N è il numero di colonne.

Se invece si ricava il potenziale partendo dal magnete permanente fino ad $N/2$ colonne e per le altre $N/2$ colonne si parte dalla colonna iniziale l'errore diventa proporzionale a $7^{N/2} (5^{N/2})$ con grande giovamento per la precisione.

Per poter procedere al calcolo quando il reticolo è di numero maggiore di righe N_r e colonne N_c , si può prima calcolare il potenziale sul magnete permanente con i procedimenti indicati; poi, facendo uso di questi potenziali e di quelli nel ferro di ritorno, ricavare i potenziali delle colonne $(j-1)$ -esima e j -esima sia partendo dal magnete permanente che partendo dal ferro di ritorno. Si ricavano così $2N_r$ equazioni con $2N_r$ incognite e $(V_{i-1,1}; V_{i-1,2}; \dots; V_{i-1,N_r})$. Il meccanismo con cui si propagano gli errori dovrebbe permettere una maggiore precisione quando si evita di utilizzare per il calcolo dei potenziali di una colonna j -esima, quelli di due colonne adiacenti $(j-1)$ -esima, $(j-2)$ -esima. Questo fatto è comprensibile se si pensa alla fisica del fenomeno: il "quadro" dei potenziali sulle colonne j -esima e $(j+1)$ -esima è "irregolare" (cioè vi sono, per es., cuspidi). Per "provocare" queste irregolarità con una distribuzione di potenziale sulla colonna j -esima lontana, bisogna ricorrere a distribuzioni fortemente irregolari.

Con questo sistema è stato possibile ricavare il potenziale nel vuoto con valori precisi fino alla 3^o cifra decimale, se il reticolo è 20×20 , e fino alla 1^o cifra decimale se è 25×25 . Infatti nella colonna centrale

(fig. 10 e 11) i numeri ottenuti partendo dalle due pareti (magnete permanente M. P. e ritorno in ferro G) coincidono fino alla 3^o cifra decimale, nel caso di 20 x 20, e fino alla 1^o cifra decimale nel caso di 25 x 25. Concludendo è necessario, con reticoli di 25 x 25 punti, ricavare prima il potenziale sulla colonna adiacente alla colonna zero facendo uso della (14), ove i termini noti sono ora i potenziali sul magnete permanente.

D'altro canto anche le memorie del calcolatore a nostra disposizione non sarebbero state sufficienti per un reticolo più vasto e con doppia precisione. Per il calcolo (caso piano) di un reticolo di 25 x 25 rette, sono stati impiegati 1 min e 20 sec dello Univac 1108 del Centro Calcolo dell'Università di Roma. Per il calcolo (caso cilindrico) di un reticolo di 23 x 23 sono stati impiegati 3 min allo stesso calcolatore.

La convergenza del procedimento iterativo nello spazio del magnete permanente risulta buona perché in effetti in 2 + 4 iterazioni si raggiungono i valori presumibilmente corretti nei risultati del calcolo.

BIBLIOGRAFIA. -

- (1) - J. W. Beams, Magnetic suspension ultracentrifuge circuits (University of Virginia, Charlottesville, 1965).
- (2) - W. Brisley and B. S. Thornton, Electromagnetic levitation calculations for axially symmetric systems, Brit. J. Appl. Phys. 14, 682 (1963).
- (3) - C. J. Carpenter, Magnetic field problems, Lecture given at the Engineering Faculty, University of Rome (April, 1967).
- (4) - L. Dadda, Modelli elettrolitici per lo studio dei campi armonici a simmetria di rivoluzione, L'Energia Elettrica 30, 837 (1953).
- (5) - R. K. Eisenschitz, Matrix algebra for physicists (Hainemann, London, 1966).
- (6) - R. T. Gregori and D. L. Karney, A collection of matrices for testing Computational algorithms (Wiley, New York, 1969).

APPENDICE 1. -

Programma Fortran per un reticolo piano di $6 \times 6 \text{ mm}^2$, altezza del magnete permanente $h_{MP} = 4 \text{ mm}$ e l'altezza del traferro $h = 1 \text{ mm}$ (caso 1 del par. 7; Fig. 9).

```
--R0N,B CAMOS2,INSTALLATION,,1,20
--FOR,IN MAIN
  DIMENSION A1(4,4),B(4),A(5,5),AUT(5),U(5,5),PIN4(5,5),C1(5,5)
  DIMENSION G(4,9),F(9,9),D(9),D1(5,4),D2(5,4),C2(5,5),P3(5,5)
  DIMENSION POUT3(5,5),POUT4(5,5),PIN2(5,5),PIN3(5,5),P4(5,5)
  DIMENSION PIN1(5,5),POUT1(5,5),C(5,9),POUT2(5,5),P5(5,5),P6(5,5)
  DIMENSION V5(5,4),V(5,4),V1(4,4),V2(5,4),V4(5,4),S(4,4),P7(5,5)
  DIMENSION ALFA(4,4),BETA(4),V6(5,4),Z(7,7),S1(4,4),C3(5),C4(5)
  DIMENSION C5(5),C6(5),C7(5)
  V0=50.
  C11=1.
  DU=-0.25
  N=5
  N3=4
  N1=N-1
  N2=N+N3
  N4=N+1
  N5=N3+4
  N6=N3+3
  N7=N3-1
  N8=N3+1
  N9=N+2
  N10=N-N3+2
  N11=N-N3+1
  N12=N-N3
  DO 60 J=1,N3
  DO 60 L=1,4
60 ALFA(J,L)=0.
  DO 61 J=1,N3
  PG=3.14159265
  BETA(J)=- (PG/(6*N3))*J
  DO 61 L=1,4
61 ALFA(J,L)=BETA(J)- (BETA(J)/4.)*(L-1)
  DO 63 J=1,N3
  DO 63 L=1,4
63 S(J,L)=0.
  DO 64 J=1,N3
  DO 64 L=1,4
64 S(J,L)=S(J,L)+ALFA(J,L)
  PRINT 400
  DO 65 J=1,N3
65 PRINT 700,(S(J,L),L=1,4)
C CALCOLO DEI COEFFICIENTI NEL VUOTO
  DO 169 JB=1,N
169 U(JB,1)=1.
  CALL SUBU(N,A)
```

38.

```
CALL POLLY(AUT,C11,DO,N,PIN1,PIN2,PIN3,PIN4)
DO 1 K=1,N
DO 35 J=1,N1
DO 35 K1=1,N1
35 A1(J,K1)=A(J+1,K1+1)
DO 50 KK=1,N1
50 A1(KK,KK)=A1(KK,KK)-AUT(K)
DO 2 I=1,N1
2 B(I)=-A(I+1,1)
DO 8001 J=1,N1
8001 PRINT 709,(A1(J,L),L=1,N1)
PRINT 700,(B(J),J=1,N1)
CALL MATINV (A1,N1,B,1,DET)
PRINT 700,DET
DO 8002 J=1,N1
8002 PRINT 709,(A1(J,L),L=1,N1)
PRINT 700,(B(L),L=1,N1)
DO 69 LL=2,N
69 U(K,LL)=B(LL-1)
1 CONTINUE
DO 4000 I=1,N
4000 PRINT 709,(U(I,J),J=1,N)
DO 600 I=1,N
DO 600 J=1,N
POUT1(I,J)=0.
DO 600 K=1,N
600 POUT1(I,J)=POUT1(I,J)+PIN1(I,K)*U(K,J)
DO 601 I=1,N
DO 601 J=1,N
POUT2(I,J)=0.
DO 601 K=1,N
601 POUT2(I,J)=POUT2(I,J)+PIN2(I,K)*U(K,J)
DO 602 I=1,N
DO 602 J=1,N
POUT3(I,J)=0.
DO 602 K=1,N
602 POUT3(I,J)=POUT3(I,J)+PIN3(I,K)*U(K,J)
DO 603 I=1,N
DO 603 J=1,N
POUT4(I,J)=0.
DO 603 K=1,N
603 POUT4(I,J)=POUT4(I,J)+PIN4(I,K)*U(K,J)
DO 7000 I=1,N
PRINT 700,(POUT1(I,J),J=1,N)
PRINT 709,(POUT2(I,J),J=1,N)
PRINT 700,(POUT3(I,J),J=1,N)
7000 PRINT 709,(POUT4(I,J),J=1,N)
DO 4 I=1,N
DO 4 J=1,N2
4 C(I,J)=0.
DO 5 I=1,N
DO 5 J=1,N
5 C(I,J)=POUT1(I,J)
DO 6 I=1,N
```

```

      DO 6 J=N4,N2
      JJ=J-N3
      6 C(I,J)=POUT2(I,JJ)
C     CALCOLO DEI COEFFICIENTI NELLA MATERIA
      CALL DENISE(N3,N8,C1,C2,P3,P4,P5,P6,P7)
      DO 30 I=1,N3
      DO 30 J=1,N2
      30 G(I,J)=0.
      DO 31 I=1,N3
      DO 31 J=N11,N
      K=J-N12
      31 G(I,J)=C1(I,K)
      DO 32 I=1,N3
      DO 32 J=N4,N2
      K=J-N
      32 G(I,J)=C2(I,K)
      DO 70 J7=1,10
      DO 71 K=1,N
      D(K)=0.
      71 D(K)=(POUT3(K,N)+POUT4(K,N))*V0
      PRINT 700,(D(K),K=1,N)
      DO 34 I=1,N2
      DO 34 J=1,N2
      34 F(I,J)=0.
      DO 39 I=1,N
      DO 39 J=1,N2
      39 F(I,J)=C(I,J)
      DO 36 I=N4,N2
      DO 36 J=1,N2
      II=I-N
      36 F(I,J)=G(II,J)
      DO 93 J=1,N8
      DO 93 L=1,4
      93 V2(J,L)=0.
      DO 90 J=1,N3
      DO 90 L=1,4
      90 V2(J,L)=- (0.37/1.4767932E-06)*SIN(S(J,L))
      DO 37 J=1,N8
      DO 37 L=1,4
      37 V5(J,L)=0.
      DO 91 J=1,N3
      DO 91 L=1,4
      91 V5(J,L)=0.37*COS(S(J,L))
      DO 1400 J=1,N8
      1400 PRINT 700,(V2(J,L),L=1,4)
      DO 1500 J=1,N8
      1500 PRINT 700,(V5(J,L),L=1,4)
      DO 89 J=1,N8
      C3(J)=0.
      C4(J)=0.
      C5(J)=0.
      C6(J)=0.
      C7(J)=0.
      DO 89 K=1,N8

```


40.

```
C3(J)=C3(J)+P3(J,K)*V5(K,1)
C4(J)=C4(J)+P4(J,K)*V5(K,2)
C5(J)=C5(J)+P5(J,K)*(V5(K,3)+V5(K,4))
C6(J)=C6(J)+P6(J,K)*V2(K,1)
89 C7(J)=C7(J)+P7(J,K)*(2.*V2(K,2)+V2(K,3))
DO 92 K=N4,N2
J=K-N
92 D(K)=-C2(J,N8)*V0-C3(J)-C4(J)-C5(J)-C6(J)-C7(J)
DO 1300 J=1,N2
1300 PRINT 709,(F(J,L),L=1,N2)
PRINT 700,(D(K),K=1,N2)
CALL MATINV(F,N2,D,1,DET)
PRINT 709,DET
PRINT 709,(D(K),K=1,N2)
DO 48 K=1,N
48 D1(K,1)=D(K)
DO 49 K=N4,N2
J=K-N+1
V(1,1)=0.
49 V(J,1)=D(K)
DO 1302 J=1,N3
DO 1302 L=1,4
1302 S(J,L)=0.
DO 40 J=1,N3
V1(J,1)=(V(J,1)-V(J+1,1))*1000.
V4(J,1)=V1(J,1)*1.47679320E-06+V5(J,1)
D2(1,1)=0.
V6(1,1)=0.
J6=J+1
K=J+N-N3
D2(J6,1)=D1(K,1)*1.25663708E-03
V6(J6,1)=V2(J,1)+D2(J6,1)/1.47679320E-06
V4(N8,1)=(V(N8,1)-V0)*1.25663708E-03
S1(J,1)=ATAN2(V6(J6,1),V1(J,1))
40 S(J,1)=ATAN2(D2(J6,1),V4(J,1))
DO 42 L=2,4
DO 42 J=1,N3
J6=J+1
V(1,L)=0.
V(J6,L)=V(J6,L-1)-V6(J6,L-1)/1000.
V1(J,L)=(V(J,L)-V(J+1,L))*1000.
V4(J,L)=V1(J,L)*1.47679320E-06+V5(J,L)
V4(N8,L)=(V(N8,L)-V0)*1.25663708E-03
V6(1,L)=0.
D2(1,L)=0.
D2(J6,L)=D2(J6,L-1)+V4(J,L-1)-V4(J6,L-1)
V6(J6,L)=V2(J,L)+D2(J6,L)/1.47679320E-06
S1(J,L)=ATAN2(V6(J6,L),V1(J,L))
42 S(J,L)=ATAN2(D2(J6,L),V4(J,L))
PRINT 1200
DO 899 J=1,N3
899 PRINT 700,(S1(J,L),L=1,4)
PRINT 400
DO 2001 J=1,N3
```

```

2001 PRINT 700,(S(J,L),L=1,4)
      PRINT 500
      DO 405 J=1,N8
405  PRINT 700,(D2(J,L),L=1,4)
      PRINT 1000
      DO 406 K=1,N8
406  PRINT 700,(V4(K,M),M=1,4)
      DO 1600 J=1,N3
1600 PRINT 700,(V1(J,L),L=1,4)
      DO 1700 J=1,N8
1700 PRINT 700,(V6(J,L),L=1,4)
      DO 930 J=1,N9
      DO 930 L=1,N9
930  Z(J,L)=0.
      DO 931 J=N10,N9
      K=J-N+N3
931  Z(J,1)=V(K,1)
      Z(N+2,1)=50.
      DO 932 J=2,N11
      JJ=J-1
932  Z(J,2)=D1(JJ,1)
      DO 933 J=N10,N4
      JJ=J-1
933  Z(J,2)=D1(JJ,1)+Z(J,1)
      Z(N+2,2)=50.
      PRINT 1100
      DO 934 J=1,N9
934  PRINT 700,(Z(J,L),L=1,2)
      DO 935 L=3,N9
      DO 936 J=2,N4
936  Z(J,L)=4.*Z(J,L-1)-Z(J,L-2)-Z(J-1,L-1)-Z(J+1,L-1)
      Z(N+2,L)=50.
      PRINT 1100
      PRINT 700,(Z(J,L),J=1,N9)
935  CONTINUE
70  CONTINUE
400  FORMAT (- INCLINAZIONE VETTORE INDUZIONE-,/)
500  FORMAT (- COMPONENTE NORMALE-,/)
1000 FORMAT (- COMPONENTE TANGENZIALE-,/)
2000 FORMAT (- .INCLINAZIONE RISULTANTE-,/)
104  FORMAT (7E16.8)
700  FORMAT (4E16.7)
709  FORMAT (8E16.8)
1100 FORMAT (- POTENZIALI NEL VUOTO-,/)
1200 FORMAT (- INCLINAZIONE VETTORE CAMPO-,/)
      END
-FOR, IN POLLY
      SUBROUTINE POLLY(FL,A,B,N,PIN1,PIN2,PIN3,PIN4)
      DIMENSION F(6,5),Y(5),FL(5),C(6,6),POL1(6,5),POL2(6,5)
      DIMENSION POL3(5),POL4(5),PIN1(5,5),PIN2(5,5),PIN3(5,5)
      DIMENSION PIN4(5,5)
      PG=3.14159265
      KN=N+1

```

42.

```
DO 10 J=1,KN
DO 10 L=1,N
10 F(J,L)=0.
DO 11 L=1,N
Y(L)=A+2.*B*COS(L*PG/KN)
F(1,L)=1.
DO 13 J=2,KN
F(J,L)=F(J-1,L)*(-1./(4.*Y(L)))
13 CONTINUE
FL(L)=F(2,L)
11 CONTINUE
C CALCOLO COEFFICIENTI EQUAZIONE SECOLARE RETTANGOLO ARMONICO
DO 1 J=1,KN
DO 1 L=1,KN
1 C(J,L)=0.
DO 2 J=1,KN
2 C(J,1)=1.
DO 3 J=3,KN
DO 3 L=3,KN
3 C(J,L)=C(J-1,L)-C(J-2,L-2)
DO 4 J=1,KN
DO 4 L=1,N
POL1(J,L)=0.
DO 4 K=1,KN
4 *POL1(J,L)=POL1(J,L)+C(J,K)*F(K,L)
DO 5 J=1,KN
DO 5 L=1,N
POL2(J,L)=0.
5 POL2(J,L)=POL1(J,L)*F(N+2-J,L)
DO 6 L=1,N
POL3(L)=0.
K=1
DO 6 J=1,N
IF(K)50,50,60
60 POL3(L)=POL3(L)-POL2(N-J+1,L)
GO TO 70
50 POL3(L)=POL3(L)+POL2(N-J+1,L)
70 K=-1*K
6 CONTINUE
DO 7 L=1,N
7 POL4(L)=POL2(N+1,L)+POL2(N,L)
DO 8 J=1,N
DO 8 L=1,N
PIN1(J,L)=0.
PIN2(J,L)=0.
PIN3(J,L)=0.
8 PIN4(J,L)=0.
DO 9 I=1,N
PIN1(I,I)=POL2(N+1,I)
PIN2(I,I)=POL4(I)
PIN3(I,I)=((-1)**(N))*POL2(1,I)
9 PIN4(I,I)=POL3(I)
DO 4001 J=1,KN
```

```

4001 PRINT 700,(F(J,L),L=1,N)
      DO 4002 J=1,KN
      PRINT 709 ,(C(J,L),L=1,KN)
      PRINT 700,(POL1(J,L),L=1,N)
4002 PRINT 709,(POL2(J,L),L=1,N)
      PRINT 700,(POL3(J),J=1,N)
      PRINT 709,(POL4(J),J=1,N)
      DO 4003 J=1,N
      PRINT 700,(PIN1(J,L),L=1,N)
      PRINT 709,(PIN2(J,L),L=1,N)
      PRINT 700,(PIN3(J,L),L=1,N)
4003 PRINT 709,(PIN4(J,L),L=1,N)
      700 FORMAT (4E16.7)
      709 FORMAT (8E16.8)
      RETURN
      END
-FOR,IN SUBU
      SUBROUTINE SUBU(N,A)
      DIMENSION A(5,5),B(5)
C          COSTRUZIONE DELLA MATRICE A
      DO 1 I=1,5
      DO 2 J=1,5
      A(I,J)=0.
      IF(I.EQ.J) GO TO 3
      IF((I+1).EQ.J) GO TO 4
      IF(I.NE.(J+1)) GO TO 2
      4 A(I,J)=-0.25
      GO TO 2
      3 A(I,J)=1
      2 CONTINUE
      1 CONTINUE
      DO 8000 I=1,5
8000 PRINT 700,(A(I,J),J=1,5)
C
C          INVERSIONE DI A , IL RISULTATO E- IN A
C
      CALL MATINV(A,5,B,0,DET)
C
      DO 50 I=1,5
      DO 50 K=1,5
      50 A(I,K)=A(I,K)/(-4.)
      DO 5000 J=1,5
5000 PRINT 700,(A(J,L),L=1,5)
      700 FORMAT (4E16.7)
      END
-FOR,IN DENISE
      SUBROUTINE DENISE(N3,N8,C1,C2,P3,P4,P5,P6,P7)
      DIMENSION E(5,5),A(5,5),R(5,5),AM(5,5),AM22(5,5),AM2(5,5),C1(
      DIMENSION C2(5,5),P3(5,5),P4(5,5),P5(5,5),P6(5,5),P7(5,5)
      T1=1.4767932E-06
      T2=1.25663708E-06
      DO 1 I=1,N8
      DO 1 J=1,N8

```

44.

```
E(I,J)=0.
A(I,J)=0.
1 R(I,J)=0.
DO 2 I=1,N8
2 E(I,I)=T1
DO 3 I=1,N3
A(I,I)=1.
R(I,I)=-T1
J=I+1
3 A(I,J)=-1.
DO 4 I=2,N3
J=I-1
4 R(I,J)=T1
R(N8,N3)=T2
R(N8,N8)=-T2
DO 5 J=1,N8
DO 5 L=1,N8
AM(J,L)=0.
DO 5 K=1,N8
5 AM(J,L)=AM(J,L)+A(J,K)*R(K,L)
DO 6 J=1,N8
DO 6 L=1,N8
AM22(J,L)=0.
DO 6 K=1,N8
6 AM22(J,L)=AM22(J,L)+AM(J,K)*AM(K,L)
DO 7 J=1,N8
DO 7 L=1,N8
AM2(J,L)=0.
DO 7 K=1,N8
7 AM2(J,L)=AM2(J,L)+AM(J,K)*A(K,L)
DO 8 I=1,N8
DO 8 J=1,N8
C1(I,J)=E(I,J)-6.*AM(I,J)+AM22(I,J)/T1
C1(I,J)=C1(I,J)/1.1751946E-03
C2(I,J)=4000.*(AM(I,J)-AM22(I,J)/T1)
P3(I,J)=A(I,J)-3.*AM2(I,J)/T1
P4(I,J)=A(I,J)-AM2(I,J)/T1
P5(I,J)=A(I,J)
P6(I,J)=-3.*AM(I,J)+AM22(I,J)/T1
8 P7(I,J)=-AM(I,J)
DO 13 I=1,N8
13 PRINT 700,(A(I,J),J=1,N8)
DO 14 I=1,N8
14 PRINT 709,(R(I,J),J=1,N8)
DO 10 I=1,N8
10 PRINT 700,(AM(I,J),J=1,N8)
DO 11 I=1,N8
11 PRINT 709,(AM2(I,J),J=1,N8)
DO 12 I=1,N8
12 PRINT 700,(AM22(I,J),J=1,N8)
DO 15 I=1,N8
15 PRINT 709,(E(I,J),J=1,N8)
700 FORMAT (4E16.7)
709 FORMAT (8E16.8)
END
```

-XQT

APPENDICE 2. -

Programma Fortran per un reticolo piano di $25 \times 25 \text{ mm}^2$, altezza del magnete permanente $h_{MP} = 15 \text{ mm}$ e altezza del traferro $h = 1 \text{ mm}$ (caso 2 del par. 7).

Per variare l'altezza del magnete permanente e la tensione magnetica V_0 è sufficiente cambiare i DIMENSION e i due dati del problema: V_0 ed N_3 .

Sono stati eseguiti i calcoli per $h_{MP} = 10, 15, 20 \text{ mm}$ e $V_0 = 50, 100, 150, 200 \text{ Asp}$. Nei calcoli, oltre alla mappa del campo si sono ricavate, nelle ipotesi indicate nel testo, la larghezza t (in m) del dente e la forza (in Nw/m) per metro lineare della struttura.

Nella Fig. 10 è riportata la mappa per $N = 24, N_3 = 20, V_0 = 50 \text{ Asp}$ e traferro di 1 mm . Nella Fig. 11 è riportata la mappa per $N = 24, N_3 = 10, V_0 = 200 \text{ Asp}$ e traferro di 1 mm .

Nella Fig. 14 è riportato il grafico della forza F_1 (Nw/m) in funzione della larghezza t (mm) del traferro per $h_{MP} = 10, 15, 20 \text{ mm}$.

Nella Fig. 15 è riportato il grafico di F_1 (Nw/m) in funzione della tensione magnetica V_0 (Asp) per $h_{MP} = 10, 15, 20 \text{ mm}$.

Nella Fig. 16 è riportato il grafico della larghezza t (mm) del traferro in funzione di V_0 (Asp) per $h_{MP} = 10, 15, 20 \text{ mm}$.

```
--RUN,B CAMOS2,FRMAES,,1,20
--FOR,IN MAIN
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  DIMENSION A1(23,23),B(23),A(24,24),AUT(24),U(24,24),PIN4(24,24),C1
1(16,16),G(15,39),F(39,39),D(39),D2(16,4),C2(16,16),P3(16,16),POUT3
2(24,24),POUT4(24,24),PIN2(24,24),PIN3(24,24),P4(16,16),PIN1(24,24)
3,POUT1(24,24),POT1(24),POUT2(24,24),P5(16,16),P6(16,16),V5(16,4),V
4(16,4),V1(15,4),V2(16,4),V4(16,4),S(15,4),P7(16,16),ALFA(15,4),BET
5A(15),V6(16,4),Z(24,24),S1(15,4),C3(16),C4(16),C5(16),C6(16),C7(16
6),D1(24),D10(24),D11(24),Z1(24),Z2(24),Y2(24),Y1(24),A3(24),Y3(24)
7,X2(24),X1(24),A2(24),X3(24),POT(29),ST1(29),D12(24)

C
C  DATI DEL PROBLEMA
C
  V0=50.
  PRINT 8300
  IVO=V0
  PRINT 729,IVO
  C11=1.
  D0=-0.25
  N=24
  N3=15
```

46.

```
N1=N-1
N2=N+N3
N4=N+1
N5=N/2
N8=N3+1
N10=N-N3+2
N11=N-N3+1
N12=N-N3
```

C
C
C

```
CONDIZIONI INIZIALI

DO 60 J=1,N3
DO 60 L=1,4
60 ALFA(J,L)=0.
DO 61 J=1,N3
PG=3.14159265
BETA(J)=- (PG/(6*N3))*J
DO 61 L=1,4
61 ALFA(J,L)=BETA(J)- (BETA(J)/4.)*(L-1)
DO 63 J=1,N3
DO 63 L=1,4
63 S(J,L)=0.
DO 64 J=1,N3
DO 64 L=1,4
64 S(J,L)=S(J,L)+ALFA(J,L)
```

C
C
C

```
CALCOLO DEI COEFFICIENTI NEL VUOTO

DO 169 JB=1,N
169 U(JB,1)=1.
CALL POLLY(AUT,C11,DO,N,PIN1,PIN2,PIN3,PIN4,A)
DO 1 K=1,N
DO 35 J=1,N1
DO 35 K1=1,N1
35 A1(J,K1)=A(J+1,K1+1)
DO 50 KK=1,N1
50 A1(KK,KK)=A1(KK,KK)-AUT(K)
DO 2 I=1,N1
2 B(I)=-A(I+1,1)
CALL DATINV (A1,N1,B,1,DET)
DO 69 LL=2,N
69 U(K,LL)=B(LL-1)
1 CONTINUE
DO 600 I=1,N
DO 600 J=1,N
POUT1(I,J)=0.
DO 600 K=1,N
600 POUT1(I,J)=POUT1(I,J)+PIN1(I,K)*U(K,J)
DO 601 I=1,N
DO 601 J=1,N
POUT2(I,J)=0.
DO 601 K=1,N
601 POUT2(I,J)=POUT2(I,J)+PIN2(I,K)*U(K,J)
DO 602 I=1,N
```

```

DO 602 J=1,N
POUT3(I,J)=0.
DO 602 K=1,N
602 POUT3(I,J)=POUT3(I,J)+PIN3(I,K)*U(K,J)
DO 603 I=1,N
DO 603 J=1,N
POUT4(I,J)=0.
DO 603 K=1,N
603 POUT4(I,J)=POUT4(I,J)+PIN4(I,K)*U(K,J)
C
C   CALCOLO DEI COEFFICIENTI NELLA MATERIA
C
CALL DENISE(N3,N8,C1,C2,P3,P4,P5,P6,P7)
DO 30 I=1,N3
DO 30 J=1,N2
30 G(I,J)=0.
DO 31 I=1,N3
DO 31 J=N11,N
K=J-N12
31 G(I,J)=C1(I,K)
DO 32 I=1,N3
DO 32 J=N4,N2
K=J-N
32 G(I,J)=C2(I,K)
DO 70 J7=1,10
C
C   COSTRUZIONE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI
C
DO 4 I=1,N2
DO 4 J=1,N2
4 F(I,J)=0.
DO 5 I=1,N
DO 5 J=1,N
5 F(I,J)=POUT1(I,J)
DO 6 I=1,N
DO 6 J=N4,N2
JJ=J-N3
6 F(I,J)=POUT2(I,JJ)
DO 36 I=N4,N2
DO 36 J=1,N2
II=I-N
36 F(I,J)=G(II,J)
C
C   DETERMINAZIONE DEI TERMINI NOTI
C
DO 71 K=1,N
D(K)=0.
71 D(K)=(POUT3(K,N)+POUT4(K,N))*V0
DO 93 J=1,N8
DO 93 L=1,4
93 V2(J,L)=0.
DO 90 J=1,N3
DO 90 L=1,4
90 V2(J,L)=- (0.37/1.4767932D-06)*DSIN(S(J,L))

```


48.

```
DO 37 J=1,N8
DO 37 L=1,4
37 V5(J,L)=0.
DO 91 J=1,N3
DO 91 L=1,4
91 V5(J,L)=0.37*DCOS(S(J,L))
DO 89 J=1,N8
C3(J)=0.
C4(J)=0.
C5(J)=0.
C6(J)=0.
C7(J)=0.
DO 89 K=1,N8
C3(J)=C3(J)+P3(J,K)*V5(K,1)
C4(J)=C4(J)+P4(J,K)*V5(K,2)
C5(J)=C5(J)+P5(J,K)*(V5(K,3)+V5(K,4))
C6(J)=C6(J)+P6(J,K)*V2(K,1)
89 C7(J)=C7(J)+P7(J,K)*(2.*V2(K,2)+V2(K,3))
DO 92 K=N4,N2
J=K-N
92 D(K)=-C2(J,N8)*V0-C3(J)-C4(J)-C5(J)-C6(J)-C7(J)
DO 930 I=1,N
DO 930 J=1,N
930 Z(I,J)=F(I,J)
DO 935 I=1,N
935 Z1(I)=F(I,N2)*V0
CALL DATINV(F,N2,D,1,DET)
```

C
C
C

```
GRADIENTI E POTENZIALI SUL MAGNETE

DO 49 K=N4,N2
J=K-N+1
V(1,1)=0.
49 V(J,1)=D(K)
DO 931 I=1,N12
931 D1(I)=0.
DO 932 I=N11,N
K=I+N3
932 D1(I)=D(K)
PRINT 1100
PRINT 719,(D1(I),I=1,N)
DO 936 I=1,N
936 Z2(I)=D(I)+D1(I)
PRINT 3300
PRINT 719,(Z2(I),I=1,N)
DO 933 I=1,N
D10(I)=0.
DO 933 K=1,N
933 D10(I)=D10(I)+POUT3(I,K)*D1(K)
DO 934 I=1,N
934 D11(I)=D10(I)+(POUT4(I,N))*V0-Z1(I)
CALL DATINV(Z,N,D11,1,DET)
```

```

C
C   GRADIENTI SUL RITORNO IN FERRO
C
      D11(N)=D11(N)+V0
      PRINT 2300
      PRINT 719,(D11(K),K=1,N)
C
C   DETERMINAZIONE DEI POTENZIALI NEL VUOTO
C
      DO 990 I=1,N
990  D12(I)=D11(I)
      DO 942 I=1,N1
942  X2(I)=0.
      X2(N)=V0
      POT1(1)=D11(1)
      POT(N)=D11(N)
      DO 944 M=1,N5
      DO 940 I=1,N
      X1(I)=0.
      A2(I)=0.
      DO 940 K=1,N
940  A2(I)=A2(I)+4.*A(I,K)*D11(K)
      X1(N)=V0
      DO 941 I=1,N
      X3(I)=A2(I)-X1(I)-X2(I)
      POT1(M+1)=X3(1)
      POT(M+1)=X3(N)
      X2(I)=D11(I)
941  D11(I)=X3(I)
      PRINT 4300
      PRINT 709,(X3(I),I=1,N)
944  CONTINUE
      DO 952 I=1,N
952  Y2(I)=D1(I)
      POT1(N)=Z2(1)
      POT(N)=Z2(N)
      DO 954 M=1,N5
      DO 950 I=1,N
      Y1(I)=0.
      A3(I)=0.
      DO 950 K=1,N
950  A3(I)=A3(I)+A(I,K)*4.*Z2(K)
      Y1(N)=V0
      DO 951 I=1,N
      Y3(I)=A3(I)-Y1(I)-Y2(I)
      POT1(N-M)=Y3(1)
      POT(N-M)=Y3(N)
      Y2(I)=Z2(I)
951  Z2(I)=Y3(I)
      PRINT 4300
      PRINT 709,(Y3(I),I=1,N)
954  CONTINUE
C
C   RIDETERMINAZIONE DELLE CONDIZIONI INIZIALI MEDIANTE UN

```

PROCEDIMENTO DI TIPO ITERATIVO

```

DO 1302 J=1,N3
DO 1302 L=1,4
1302 S(J,L)=0.
DO 40 J=1,N3
V1(J,1)=(V(J,1)-V(J+1,1))*1000.
V4(J,1)=V1(J,1)*1.47679320D-06+V5(J,1)
D2(1,1)=0.
V6(1,1)=0.
J6=J+1
K=J+N-N3
D2(J6,1)=D(K)*1.25663708D-03
V6(J6,1)=V2(J,1)+D2(J6,1)/1.47679320D-06
V4(N8,1)=(V(N8,1)-V0)*1.25663708D-03
S1(J,1)=DATAN2(V6(J6,1),V1(J,1))
40 S(J,1)=DATAN2(D2(J6,1),V4(J,1))
DO 42 L=2,4
DO 42 J=1,N3
J6=J+1
V(1,L)=0.
V(J6,L)=V(J6,L-1)-V6(J6,L-1)/1000.
V1(J,L)=(V(J,L)-V(J+1,L))*1000.
V4(J,L)=V1(J,L)*1.47679320D-06+V5(J,L)
V4(N8,L)=(V(N8,L)-V0)*1.25663708D-03
V6(1,L)=0.
D2(1,L)=0.
D2(J6,L)=D2(J6,L-1)+V4(J,L-1)-V4(J6,L-1)
V6(J6,L)=V2(J,L)+D2(J6,L)/1.47679320D-06
S1(J,L)=DATAN2(V6(J6,L),V1(J,L))
42 S(J,L)=DATAN2(D2(J6,L),V4(J,L))
PRINT 1200
DO 899 J=1,N3
899 PRINT 700,(S1(J,L),L=1,4)
PRINT 400
DO 2001 J=1,N3
2001 PRINT 700,(S(J,L),L=1,4)
PRINT 500
DO 405 J=1,N8
405 PRINT 700,(D2(J,L),L=1,4)
PRINT 1000
DO 406 K=1,N8
406 PRINT 700,(V4(K,M),M=1,4)

```

CALCOLO DELLA FORZA AGENTE SULL'ANCORA SOTTOSTANTE IL MAGNETE

```

N7=N+5
DO 44 I=1,4
44 POT(N+I)=V(N8,I)
POT(N+5)=V(N8,4)-V6(N8,4)/1000.
DO 45 I=1,N7
IF(POT(I)-V0)210,220,220
210 STJ(I)=((POT(I)-V0)**2)*1.25663708D-03
GO TO 45

```

```

220 ST1(I)=((POT(1)-V0)**2)*1.25663708D-03/2.
    PRINT 7300
    PRINT 729,I
45 CONTINUE
    ST=0.
    DO 46 I=1,N7
46 ST=ST+ST1(I)
    CALL FLUX(N,V0,D12,D,POT,FI,POT1)
    ST=ST+FI*V0*1000./2.
    PENG=FI*1000./(V0*1.25663708)
    PRINT 5300
    PRINT 709,(ST1(I),I=1,N7)
    PRINT 6300
    PRINT 709,ST
    PRINT 9300
    PRINT 719,PENG
70 CONTINUE
400 FORMAT (- INCLINAZIONE VETTORE INDUZIONE--,/)
500 FORMAT (- COMPONENTE NORMALE--,/)
1000 FORMAT (- COMPONENTE TANGENZIALE--,/)
709 FORMAT (8D16.8)
104 FORMAT (7D16.8)
700 FORMAT (4D16.7)
719 FORMAT (1D16.8)
729 FORMAT (I6)
1100 FORMAT (- POTENZIALI SUL CONTORNO DEL MAGNETE PERMANENTE--,/)
1200 FORMAT (- INCLINAZIONE VETTORE CAMPO--,/)
2300 FORMAT (- POTENZIALI SUL RITORNO IN FERRO DOLCE--,/)
3300 FORMAT (- POTENZIALI NEL VUOTO ADIACENTI AL MAGNETE--,/)
4300 FORMAT (- POTENZIALI NEL VUOTO--,/)
5300 FORMAT (- GRADIENTE IN DIREZIONE NORMALE AL FERRO--,/)
6300 FORMAT (- FORZA DI SOSTENTAMENTO--,/)
7300 FORMAT (- CAMPO ENTRANTE NEL FERRO AL PASSO SOTTOINDICATO--,/)
8300 FORMAT (- POTENZIALE DEL FONDELLO--,/)
9300 FORMAT (- LARGHEZZA DENTE ESTERNO--,/)
    END
--FOR,IN POLLY
    SUBROUTINE POLLY(Y,A1,B,N,PIN1,PIN2,PIN3,PIN4,A)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    DIMENSION F(25,24),Y(24),C(25,25),POL1(25,24),POL2(25,24),POL3(2
1,POL4(24),PIN1(24,24),PIN2(24,24),PIN3(24,24),PIN4(24,24),A(24,2
C
C   CALCOLO DEGLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE TRIANGONALE SIMMETRICA
C
    PG=3.14159265
    KN=N+1
    DO 10 J=1,KN
    DO 10 L=1,N
10 F(J,L)=0.
    DO 11 L=1,N
    Y(L)=A1+2.*B*DCOS(L*PG/KN)
    F(1,L)=1.
    DO 13 J=2,KN
    F(J,L)=F(J-1,L)*(-1./(4.*Y(L)))

```

52.

13 CONTINUE
11 CONTINUE

C
C
C

CALCOLO COEFFICIENTI EQUAZIONE SECOLARE RETTANGOLO ARMONICO

```
DO 1 J=1,KN
DO 1 L=1,KN
1 C(J,L)=0.
DO 2 J=1,KN
2 C(J,1)=1.
DO 3 J=3,KN
DO 3 L=3,KN
3 C(J,L)=C(J-1,L)-C(J-2,L-2)
DO 4 J=1,KN
DO 4 L=1,N
POL1(J,L)=0.
DO 4 K=1,KN
4 POL1(J,L)=POL1(J,L)+C(J,K)*F(K,L)
DO 5 J=1,KN
DO 5 L=1,N
POL2(J,L)=0.
5 POL2(J,L)=POL1(J,L)*F(N+2-J,L)
DO 6 L=1,N
POL3(L)=0.
K=1
DO 6 J=1,N
IF(K)50,50,60
60 POL3(L)=POL3(L)-POL2(N-J+1,L)
GO TO 70
50 POL3(L)=POL3(L)+POL2(N-J+1,L)
70 K=-1*K
6 CONTINUE
DO 7 L=1,N
7 POL4(L)=POL2(N+1,L)+POL2(N,L)
DO 8 J=1,N
DO 8 L=1,N
PIN1(J,L)=0.
PIN2(J,L)=0.
PIN3(J,L)=0.
8 PIN4(J,L)=0.
DO 9 I=1,N
PIN1(I,1)=POL2(N+1,I)
PIN2(I,1)=POL4(I)
PIN3(I,1)=((-1)**(N))*POL2(1,I)
9 PIN4(I,1)=POL3(I)
```

C
C
C

COSTRUZIONE DELLA MATRICE A

```
DO 12 I=1,N
DO 22 J=1,N
A(I,J)=0.
IF(I.EQ.J) GO TO 33
IF((I+1).EQ.J) GO TO 44
IF(I.NE.(J+1)) GO TO 22
```

```

44 A(I,J)=-0.25
   GO TO 22
33 A(I,J)=1
22 CONTINUE
12 CONTINUE
   RETURN
   END
--FOR, IN DENISE
  SUBROUTINE DENISE(N3,N8,C1,C2,P3,P4,P5,P6,P7)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    DIMENSION E(16,16),A(16,16),R(16,16),AM(16,16),AM22(16,16),AM2(16,
116),C1(16,16),C2(16,16),P3(16,16),P4(16,16),P5(16,16),P6(16,16),P7
2(16,16)
    T1=1.4767932D-06
    T2=1.25665708D-06
    DO 1 I=1,N8
    DO 1 J=1,N8
      E(I,J)=0.
      A(I,J)=0.
1  R(I,J)=0.
    DO 2 I=1,N8
2  E(I,1)=T1
    DO 3 I=1,N3
      A(I,1)=1.
      R(I,1)=-T1
      J=I+1
3  A(I,J)=-1.
    DO 4 I=2,N3
      J=I-1
4  R(I,J)=T1
      R(N8,N3)=T2
      R(N8,N8)=-T2
    DO 5 J=1,N8
    DO 5 L=1,N8
      AM(J,L)=0.
    DO 5 K=1,N8
5  AM(J,L)=AM(J,L)+A(J,K)*R(K,L)
    DO 6 J=1,N8
    DO 6 L=1,N8
      AM22(J,L)=0.
    DO 6 K=1,N8
6  AM22(J,L)=AM22(J,L)+AM(J,K)*AM(K,L)
    DO 7 J=1,N8
    DO 7 L=1,N8
      AM2(J,L)=0.
    DO 7 K=1,N8
7  AM2(J,L)=AM2(J,L)+AM(J,K)*A(K,L)
    DO 8 I=1,N8
    DO 8 J=1,N8
      C1(I,J)=E(I,J)-6.*AM(I,J)+AM22(I,J)/T1
      C1(I,J)=C1(I,J)/1.1751946D-03
      C2(I,J)=4000.*(AM(I,J)-AM22(I,J)/T1)
      P3(I,J)=A(I,J)-3.*AM2(I,J)/T1

```

54.

```
      P4(I,J)=A(I,J)-AM2(I,J)/T1
      P5(I,J)=A(I,J)
      P6(I,J)=-3.*AM(I,J)+AM22(I,J)/T1
8     P7(I,J)=-AM(I,J)
      RETURN
      END
=FOR,IN DATINV
      SUBROUTINE DATINV(A,N,B,M,DETERM)
C     MATRIX INVERSION WITH ACCOMPANYING SOLUTION OF LINEAR EQUATIONS
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION IPIVOT(160),A(N,N),B(N,M),INDEX(160,2),PIVOT(160)
C
      EQUIVALENCE (IROW,JROW), (ICOLUMN,JCOLUMN), (AMAX,T,SWAP)
C
      C     INITIALIZATION
C
      10 DETERM=1.0
      15 DO 20 J=1,N
      20 IPIVOT(J)=0
      30 DO 550 J=1,N
C
      C     SEARCH FOR PIVOT ELEMENT
C
      40 AMAX=0.0
      45 DO 105 J=1,N
      50 IF (IPIVOT(J)-1) 60, 105, 60
      60 DO 100 K=1,N
      70 IF (IPIVOT(K)-1) 80, 100, 740
      80 IF (ABS(AMAX)-ABS(A(J,K))) 85, 100, 100
      85 IROW=J
      90 ICOLUMN=K
      95 AMAX=A(J,K)
      100 CONTINUE
      105 CONTINUE
      110 IPIVOT(ICOLUMN)=IPIVOT(ICOLUMN)+1
C
      C     INTERCHANGE ROWS TO PUT PIVOT ELEMENT ON DIAGONAL
C
      130 IF (IROW-ICOLUMN) 140, 260, 140
      140 DETERM=-DETERM
      150 DO 200 L=1,N
      160 SWAP=A(IROW,L)
      170 A(IROW,L)=A(ICOLUMN,L)
      200 A(ICOLUMN,L)=SWAP
      205 IF(M) 260, 260, 210
      210 DO 250 L=1, M
      220 SWAP=B(IROW,L)
      230 B(IROW,L)=B(ICOLUMN,L)
      250 B(ICOLUMN,L)=SWAP
      260 INDEX(I,1)=IROW
      270 INDEX(I,2)=ICOLUMN
      310 PIVOT(I)=A(ICOLUMN,ICOLUMN)
```

```

320 DETERM=DETERM*PIVOT(I)
C
C   DIVIDE PIVOT ROW BY PIVOT ELEMENT
C
330 A(ICOLUM,ICOLUM)=1.0
340 DO 350 L=1,N
350 A(ICOLUM,L)=A(ICOLUM,L)/PIVOT(I)
355 IF(M) 380, 380, 360
360 DO 370 L=1,M
370 B(ICOLUM,L)=B(ICOLUM,L)/PIVOT(I)
C
C   REDUCE NON-PIVOT ROWS
C
380 DO 550 L1=1,N
390 IF(L1-ICOLUM) 400, 550, 400
400 T=A(L1,ICOLUM)
420 A(L1,ICOLUM)=0.0
430 DO 450 L=1,N
450 A(L1,L)=A(L1,L)-A(ICOLUM,L)*T
455 IF(M) 550, 550, 460
460 DO 500 L=1,M
500 B(L1,L)=B(L1,L)-B(ICOLUM,L)*T
550 CONTINUE
C
C   INTERCHANGE COLUMNS
C
600 DO 710 I=1,N
610 L=N+1-I
620 IF (INDEX(L,1)-INDEX(L,2)) 630, 710, 630
630 JROW=INDEX(L,1)
640 JCOLUM=INDEX(L,2)
650 DO 705 K=1,N
660 SWAP=A(K,JROW)
670 A(K,JROW)=A(K,JCOLUM)
700 A(K,JCOLUM)=SWAP
705 CONTINUE
710 CONTINUE
740 RETURN
    END
~FOR, IN FLUX
    SUBROUTINE FLUX(N,V0,D11,D,POT,FI,POT1)
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
    DIMENSION D11(24),POT1(24),D(39),POT(29)
C
C   CALCOLO DEL FLUSSO PASSANTE ATTRAVERSO IL DENTE ESTERNO
C
    T2=1.25663708D-06
    N1=N-1
    F1=0.
    DO 1 K=1,N1
1  F1=F1-D11(K)*2.*T2
    F2=0.
    DO 2 I=1,N

```


56.

```
2 F2=F2-POT1(I)*T2
  F3=0.
  DO 3 I=1,N
3 F3=F3-D(1)*T2
  F4=0.
  DO 4 I=1,5
4 F4=F4+(POT(N+I)-V0)*T2
  F1=F1+F2+F3+F4
  RETURN
  END
```

-XQT

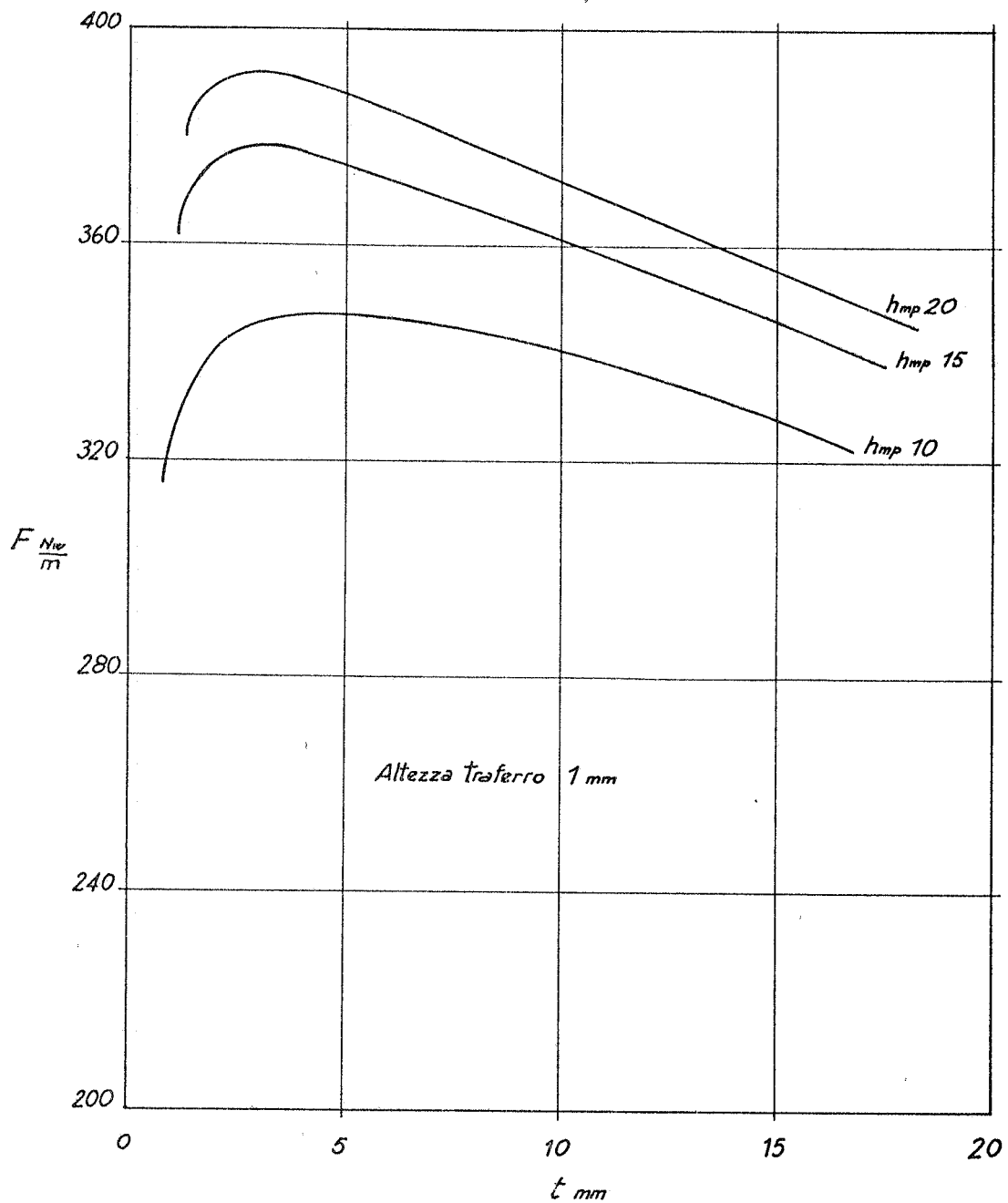


FIG. 14 - Andamento della forza $F_1(t)$ per metro lineare della struttura, al variare della larghezza t del dente del ritorno in ferro per varie altezze h_{MP} del magnete permanente e per altezza h del traferro pari a 1 mm. Le dimensioni dei due vani in aria tra l'"ancora" sospesa e il magnete di sostegno, è di $25 \times 25 \text{ mm}^2$ (per i simboli vedi Fig. 9).

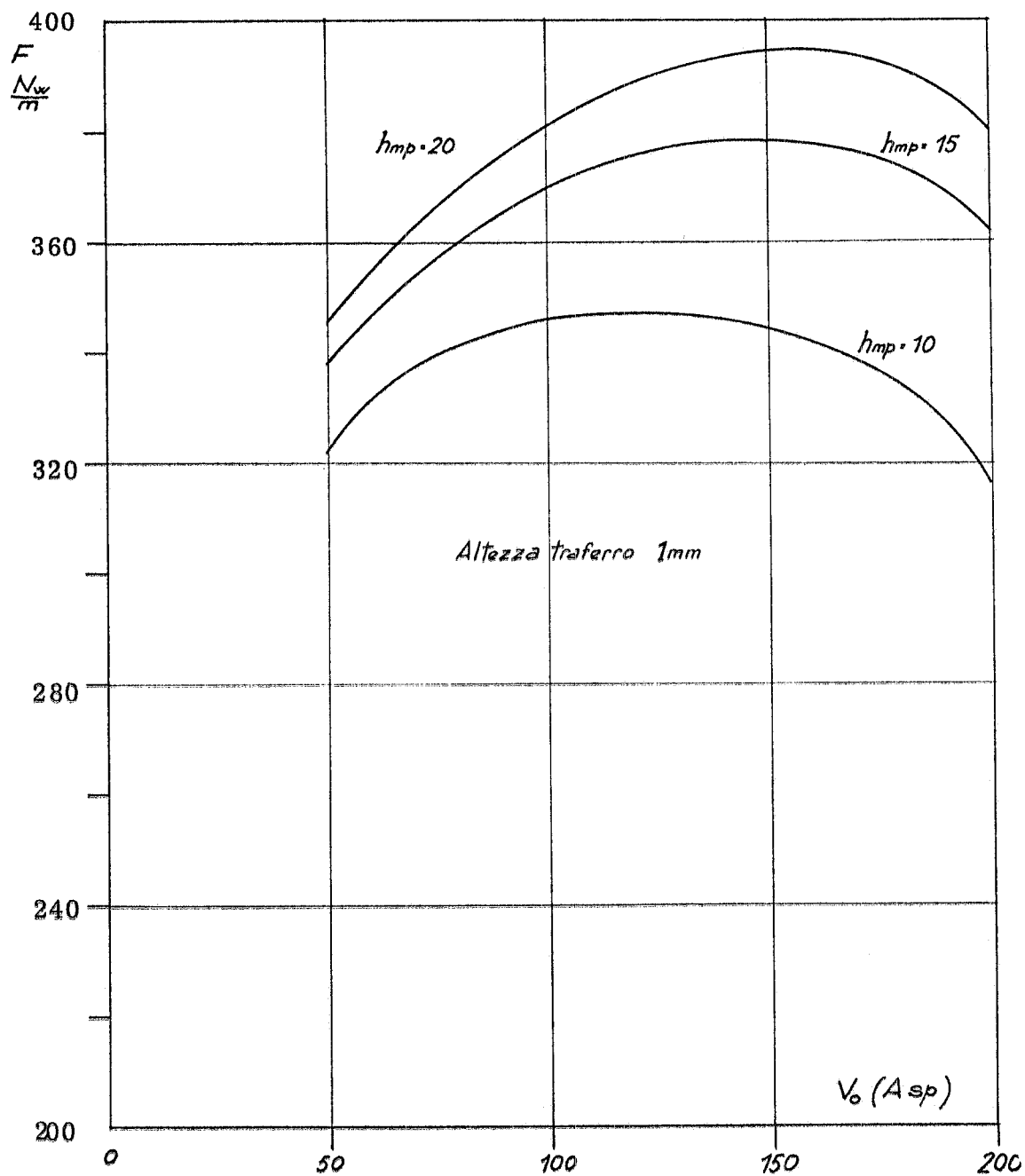


FIG. 15 - Curva della variazione della forza $F_1(V_0)$, per metro lineare della struttura, al variare del potenziale V_0 dell'ancora per varie altezze h_{MP} del magnete permanente e per altezza h del traferro pari a 1 mm.

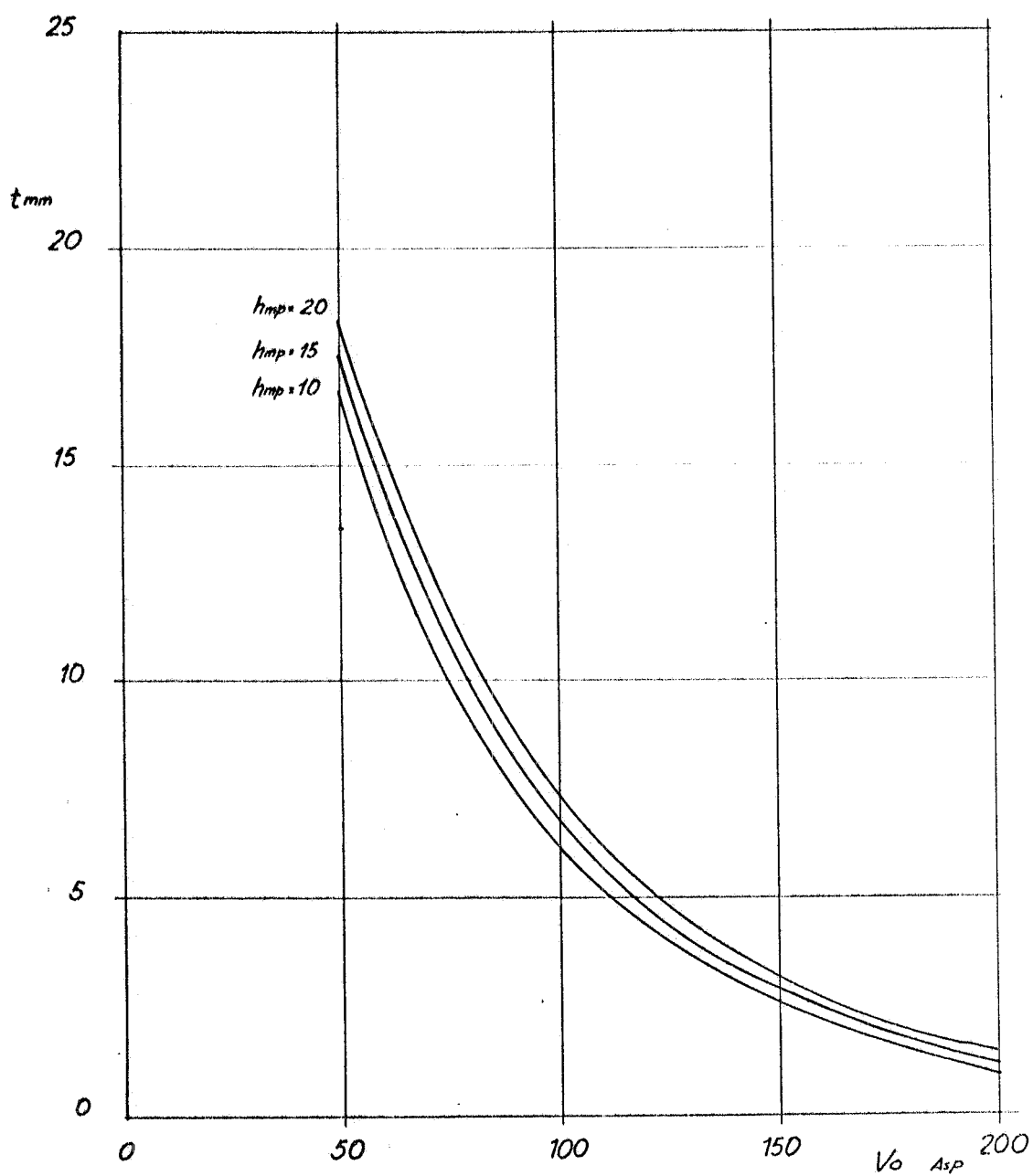


FIG. 16 - Curva della variazione della larghezza t_1 del traferro del dente di ritorno in ferro, al variare del potenziale V_0 della ancora per varie altezze h_{MP} del magnete permanente e per altezza h del traferro pari a 1 mm.

APPENDICE 3. -

Programma Fortran per un reticolo piano di $25 \times 25 \text{ mm}^2$, altezza del magnete permanente $h_{MP} = 15 \text{ mm}$ e altezza del traferro $h = 2 \text{ mm}$ (caso 2 del par. 7).

Per variare l'altezza del magnete permanente e la tensione magnetica V_0 è sufficiente cambiare i DIMENSION e i due dati del problema: V_0 ed N_3 .

Sono stati eseguiti i calcoli per $h_{MP} = 10, 15, 20 \text{ mm}$ e $V_0 = 50, 100, 150, 200 \text{ Asp}$. Nei calcoli, oltre alla mappa del campo si sono ricavate, nelle ipotesi indicate nel testo, la larghezza t (in m) del dente e la forza (in Nw/m) per metro lineare della struttura.

Nella Fig. 17 è riportato il grafico della forza F_2 (Nw/m) in funzione della larghezza t (mm) del traferro per $h_{MP} = 10, 15, 20 \text{ mm}$.

Nella Fig. 18 è riportato il grafico di F_2 (Nw/m) in funzione della tensione magnetica V_0 (Asp) per $h_{MP} = 10, 15, 20 \text{ mm}$.

Nella Fig. 19 è riportato il grafico della larghezza t (mm) del traferro in funzione di V_0 (Asp) per $h_{MP} = 10, 15, 20 \text{ mm}$.

```
--RUN,B CAMOS2,FRMAES,,1,20
--FOR,IN MAIN
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  DIMENSION A1(24,24),B(24),A(25,25),AUT(25),U(25,25),PIN4(25,25),C
1(17,17),G(16,41),F(41,41),D(41),D2(16,4),C2(17,17),P3(17,17),POUT
2(25,25),POUT4(25,25),PIN2(25,25),PIN3(25,25),P4(17,17),PIN1(25,25
3),POUT1(25,25),POT1(24),POUT2(25,25),P5(17,17),P6(17,17),V5(17,4),
4(17,4),V1(15,4),V2(17,4),V4(16,4),S(15,4),P7(17,17),ALFA(15,4),BE
5A(15),V6(17,4),Z(25,25),S1(15,4),C3(17),C4(17),C5(17),C6(17),C7(1
6),D1(25),D10(25),D11(25),Z1(25),Z2(25),Y2(25),Y1(25),A3(25),Y3(25
7),X2(25),X1(25),A2(25),X3(25),POT(29),ST1(29),D12(25)

C
C  DATI DEL PROBLEMA
C
  V0=200.
  PRINT 8300
  IVO=V0
  PRINT 729,IVO
  C11=1.
  D0=-0.25
  N=24
  N3=15
  N1=N-1
  N2=N+N3
  N4=N+1
  N5=N/2
  N8=N3+1
```

62.

```
N10=N-N3+2
N11=N-N3+1
N12=N-N3
N6=25
N16=N6-1
N26=N6+N3+1
N46=N6+1
```

C
C
C

CONDIZIONI INIZIALI

```
DO 60 J=1,N3
DO 60 L=1,4
60 ALFA(J,L)=0.
DO 61 J=1,N3
PG=3.14159265
BETA(J)=- (PG/(6*N3))*J
DO 61 L=1,4
61 ALFA(J,L)=BETA(J)- (BETA(J)/4.)*(L-1)
DO 63 J=1,N3
DO 63 L=1,4
63 S(J,L)=0.
DO 64 J=1,N3
DO 64 L=1,4
64 S(J,L)=S(J,L)+ALFA(J,L)
```

C
C
C

CALCOLO DEI COEFFICIENTI NEL VUOTO

```
DO 169 JB=1,N6
169 U(JB,1)=1.
CALL POLLY(AUT,C11,DO,N,PIN1,PIN2,PIN3,PIN4,A,N6)
DO 1 K=1,N6
DO 35 J=1,N16
DO 35 K1=J,N16
35 A1(J,K1)=A(J+1,K1+1)
DO 50 KK=1,N16
50 A1(KK,KK)=A1(KK,KK)-AUT(K)
DO 2 I=1,N16
2 B(I)=-A(I+1,1)
CALL DATINV (A1,N16,B,1,DET)
DO 69 LL=2,N6
69 U(K,LL)=B(LL-1)
1 CONTINUE
DO 600 I=1,N6
DO 600 J=1,N6
POUT1(I,J)=0.
DO 600 K=1,N6
600 POUT1(I,J)=POUT1(I,J)+PIN1(I,K)*U(K,J)
DO 601 I=1,N6
DO 601 J=1,N6
POUT2(I,J)=0.
DO 601 K=1,N6
601 POUT2(I,J)=POUT2(I,J)+PIN2(I,K)*U(K,J)
DO 602 I=1,N6
```

```

DO 602 J=1,N6
POUT3(I,J)=0.
DO 602 K=1,N6
602 POUT3(I,J)=POUT3(I,J)+PIN3(I,K)*U(K,J)
DO 603 I=1,N6
DO 603 J=1,N6
POUT4(I,J)=0.
DO 603 K=1,N6
603 POUT4(I,J)=POUT4(I,J)+PIN4(I,K)*U(K,J)

```

C
C
C

CALCOLO DEI COEFFICIENTI NELLA MATERIA

```

CALL DENISE(N3,N8,C1,C2,P3,P4,P5,P6,P7)
DO 30 I=1,N8
DO 30 J=1,N26
30 G(I,J)=0.
DO 31 I=1,N8
DO 31 J=N11,N6
K=J-N12
31 G(I,J)=C1(I,K)
DO 32 I=1,N8
DO 32 J=N46,N26
K=J-N6
32 G(I,J)=C2(I,K)
DO 70 J7=1,10

```

C
C
C

COSTRUZIONE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI

```

DO 4 I=1,N26
DO 4 J=1,N26
4 F(I,J)=0.
DO 5 I=1,N6
DO 5 J=1,N6
5 F(I,J)=POUT1(I,J)
DO 6 I=1,N6
DO 6 J=N46,N26
JJ=J-N3-1
6 F(I,J)=POUT2(I,JJ)
DO 36 I=N46,N26
DO 36 J=1,N26
II=I-N6
36 F(I,J)=G(II,J)

```

C
C
C

DETERMINAZIONE DEI TERMINI NOTI

```

DO 71 K=1,N6
D(K)=0.
71 D(K)=(POUT3(K,N))*V0/2.+(POUT3(K,N6)+POUT4(K,N6))*V0
N81=N8+1
DO 93 J=1,N81
DO 93 L=1,4
93 V2(J,L)=0.
DO 90 J=1,N3
DO 90 L=1,4

```

64.

```
90 V2(J,L)=-(.037/1.4767932D-06)*DSIN(S(J,L))
DO 37 J=1,N81
DO 37 L=1,4
37 V5(J,L)=0.
DO 91 J=1,N3
DO 91 L=1,4
91 V5(J,L)=0.37*DCOS(S(J,L))
DO 89 J=1,N81
C3(J)=0.
C4(J)=0.
C5(J)=0.
C6(J)=0.
C7(J)=0.
DO 89 K=1,N81
C3(J)=C3(J)+P3(J,K)*V5(K,1)
C4(J)=C4(J)+P4(J,K)*V5(K,2)
C5(J)=C5(J)+P5(J,K)*(V5(K,3)+V5(K,4))
C6(J)=C6(J)+P6(J,K)*V2(K,1)
89 C7(J)=C7(J)+P7(J,K)*(2.*V2(K,2)+V2(K,3))
DO 92 K=N46,N26
J=K-N6
92 D(K)=-C2(J,N81)*V0-C3(J)-C4(J)-C5(J)-C6(J)-C7(J)
DO 930 I=1,N6
DO 930 J=1,N6
930 Z(I,J)=F(I,J)
DO 935 I=1,N6
935 Z1(I)=F(I,N26)*V0+F(I,N26-1)*V0/2.
CALL DATINV(F,N26,D,1,DET)
```

C
C
C

GRADIENTI E POTENZIALI SUL MAGNETE

```
DO 49 K=N46,N26
J=K-N6+1
V(1,1)=0.
49 V(J,1)=D(K)
DO 931 I=1,N12
931 D1(I)=0.
DO 932 I=N11,N6
K=I+N3+1
932 D1(I)=D(K)
PRINT 1100
PRINT 719,(D1(I),I=1,N6)
DO 936 I=1,N6
936 Z2(I)=D(I)+D1(I)
PRINT 3300
PRINT 719,(Z2(I),I=1,N6)
DO 933 I=1,N6
D10(I)=0.
DO 933 K=1,N6
933 D10(I)=D10(I)+POUT3(I,K)*D1(K)
DO 934 I=1,N6
934 D11(I)=D10(I)+(POUT4(I,N6))*V0-Z1(I)
CALL DATINV(Z,N6,D11,1,DET)
```



```

C
C   GRADIENTI SUL RITORNO IN FERRO
C
D11(N6-1)=D11(N6-1)+V0/2.
D11(N6)=D11(N6)+V0
PRINT 2300
PRINT 719,(D11(K),K=1,N6)

C
C   DETERMINAZIONE DEI POTENZIALI NEL VUOTO
C
DO 990 I=1,N6
990 D12(I)=D11(I)
DO 942 I=1,N1
942 X2(I)=0.
X2(N)=V0/2.
X2(N6)=V0
POT1(1)=D11(1)
POT(1)=D11(N6)
DO 944 M=1,N5
DO 940 I=1,N6
X1(I)=0.
A2(I)=0.
DO 940 K=1,N6
940 A2(I)=A2(I)+4.*A(I,K)*D11(K)
X1(N6)=V0
DO 941 I=1,N6
X3(I)=A2(I)-X1(I)-X2(I)
POT1(M+1)=X3(1)
POT(M+1)=X3(N6)
X2(I)=D11(I)
941 D11(I)=X3(1)
PRINT 4300
PRINT 709,(X3(I),I=1,N6)
944 CONTINUE
DO 952 I=1,N6
952 Y2(I)=D1(I)
POT1(N)=Z2(1)
POT(N)=Z2(N6)
DO 954 M=1,N5
DO 950 I=1,N6
Y1(I)=0.
A3(I)=0.
DO 950 K=1,N6
950 A3(I)=A3(I)+A(I,K)*4.*Z2(K)
Y1(N6)=V0
DO 951 I=1,N6
Y3(I)=A3(I)-Y1(I)-Y2(I)
POT1(N-M)=Y3(1)
POT(N-M)=Y3(N6)
Y2(I)=Z2(I)
951 Z2(I)=Y3(I)
PRINT 4300
PRINT 709,(Y3(I),I=1,N6)
954 CONTINUE

```

66.

```
C
C   RIDETERMINAZIONE DELLE CONDIZIONI INIZIALI MEDIANTE UN
C   PROCEDIMENTO DI TIPO ITERATIVO
C
      DO 1302 J=1,N3
      DO 1302 L=1,4
1302  S(J,L)=0.
      DO 40 J=1,N3
      V1(J,1)=(V(J,1)-V(J+1,1))*1000.
      V4(J,1)=V1(J,1)*1.47679320D-06+V5(J,1)
      D2(1,1)=0.
      V6(1,1)=0.
      J6=J+1
      K=J+N-N3
      D2(J6,1)=D(K)*1.25663708D-03
      V6(J6,1)=V2(J,1)+D2(J6,1)/1.47679320D-06
      V6(N8+1,1)=D(N6)*1000.
      V4(N8,1)=(V(N8,1)-V(N8+1,1))*1.25663708D-03
      S1(J,1)=DATAN2(V6(J6,1),V1(J,1))
40    S(J,1)=DATAN2(D2(J6,1),V4(J,1))
      DO 42 L=2,4
      DO 42 J=1,N3
      J6=J+1
      V(1,L)=0.
      V(J6,L)=V(J6,L-1)-V6(J6,L-1)/1000.
      V(N8+1,L)=V(N8+1,L-1)-V6(N8+1,L-1)/1000.
      V1(J,L)=(V(J,L)-V(J+1,L))*1000.
      V4(J,L)=V1(J,L)*1.47679320D-06+V5(J,L)
      V4(N8,L)=(V(N8,L)-V(N8+1,L))*1.25663708D-03
      V6(1,L)=0.
      D2(1,L)=0.
      D2(J6,L)=D2(J6,L-1)+V4(J,L-1)-V4(J6,L-1)
      V6(J6,L)=V2(J,L)+D2(J6,L)/1.47679320D-06
      V6(N8+1,L)=(V(N8+1,L-1)-V(N8+1,L))*1000.
      S1(J,L)=DATAN2(V6(J6,L),V1(J,L))
42    S(J,L)=DATAN2(D2(J6,L),V4(J,L))
      PRINT 1200
      DO 899 J=1,N3
899   PRINT 700,(S1(J,L),L=1,4)
      PRINT 400
      DO 2001 J=1,N3
2001  PRINT 700,(S(J,L),L=1,4)
      PRINT 500
      DO 405 J=1,N8
405   PRINT 700,(D2(J,L),L=1,4)
      PRINT 1000
      DO 406 K=1,N8
406   PRINT 700,(V4(K,M),M=1,4)
C
C   CALCOLO DELLA FORZA AGENTE SULL- ANCORA SOTTOSTANTE IL MAGNETE
C
      N7=N+5
      DO 44 I=1,4
44    POT(N+I)=V(N8+1,I)
```

```

POT(N+5)=V(N8+1,4)-V6(N8+1,4)/1000.
PRINT 7300
PRINT 709,(POT(N+1),I=1,5)
DO 45 I=1,N7
IF(POT(I)-V0)210,220,220
210 ST1(I)=((POT(I)-V0)**2)*1.25663708D-03
GO TO 45
220 ST1(I)=((POT(I)-V0)**2)*1.25663708D-03/2.
45 CONTINUE
ST=0.
DO 46 I=1,N7
46 ST=ST+ST1(I)
F5=V(N8,4)-V6(N8,4)/1000.-POT(N+5)
CALL FLUX(N,V0,D12,D,POT,FI,POT1,V,F5)
ST=ST+FI*V0*1000./4.
PENG=FI*2000./(V0*1.25663708)
PRINT 6300
PRINT 709,ST
PRINT 9300
PRINT 719,PENG
70 CONTINUE
400 FORMAT (-- INCLINAZIONE VETTORE INDUZIONE--,/)
500 FORMAT (-- COMPONENTE NORMALE--,/)
1000 FORMAT (-- COMPONENTE TANGENZIALE--,/)
709 FORMAT (8D16.8)
104 FORMAT (7D16.8)
700 FORMAT (4D16.7)
719 FORMAT (1D16.8)
729 FORMAT (I6)
1100 FORMAT (-- POTENZIALI SUL CONTORNO DEL MAGNETE PERMANENTE--,/)
1200 FORMAT (-- INCLINAZIONE VETTORE CAMPO--,/)
2300 FORMAT (-- POTENZIALI SUL RITORNO IN FERRO DOLCE--,/)
3300 FORMAT (-- POTENZIALI NEL VUOTO ADIACENTI AL MAGNETE--,/)
4300 FORMAT (-- POTENZIALI NEL VUOTO--,/)
6300 FORMAT (-- FORZA DI SOSTENTAMENTO--,/)
7300 FORMAT (-- POTENZIALI NEL TRAFERRO--,/)
8300 FORMAT (-- POTENZIALE DEL FONDELLO--,/)
9300 FORMAT (-- LARGHEZZA DENTÉ ESTERNO--,/)
END
~FOR, IN POLLY
SUBROUTINE POLLY(Y,A1,B,N,PIN1,PIN2,PIN3,PIN4,A,N6)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION F(25,25),Y(25),C(25,25),POL1(25,25),POL2(25,25),POL3(2
1,POL4(25),PIN1(25,25),PIN2(25,25),PIN3(25,25),PIN4(25,25),A(25,2
C
C CALCOLO DEGLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE TRRGONALE SIMMETRICA
C
PG=3.14159265
KN=N+1
KN1=N6+1
DO 10 J=1,KN
DO 10 L=1,N6
10 F(J,L)=0.

```

68.

```
DO 11 L=1,N6
Y(L)=A1+2.*B*DCOS(L*PG/KN1)
F(1,L)=1.
DO 13 J=2,KN
F(J,L)=F(J-1,L)*(-1./(4.*Y(L)))
13 CONTINUE
11 CONTINUE
```

C
C
C

CALCOLO COEFFICIENTI EQUAZIONE SECOLARE RETTANGOLO ARMONICO

```
DO 1 J=1,KN
DO 1 L=1,KN
1 C(J,L)=0.
DO 2 J=1,KN
2 C(J,1)=1.
DO 3 J=3,KN
DO 3 L=3,KN
3 C(J,L)=C(J-1,L)-C(J-2,L-2)
DO 4 J=1,KN
DO 4 L=1,N6
POL1(J,L)=0.
DO 4 K=1,KN
4 POL1(J,L)=POL1(J,L)+C(J,K)*F(K,L)
DO 5 J=1,KN
DO 5 L=1,N6
POL2(J,L)=0.
5 POL2(J,L)=POL1(J,L)*F(N+2-J,L)
DO 6 L=1,N6
POL3(L)=0.
K=1
DO 6 J=1,N
IF(K)50,50,60
60 POL3(L)=POL3(L)-POL2(N-J+1,L)
GO TO 70
50 POL3(L)=POL3(L)+POL2(N-J+1,L)
70 K=-1*K
6 CONTINUE
DO 7 L=1,N6
7 POL4(L)=POL2(N+1,L)+POL2(N,L)
DO 8 J=1,N6
DO 8 L=1,N6
PIN1(J,L)=0.
PIN2(J,L)=0.
PIN3(J,L)=0.
8 PIN4(J,L)=0.
DO 9 I=1,N6
PIN1(I,I)=POL2(N+1,I)
PIN2(I,I)=POL4(I)
PIN3(I,I)=((-1)**(N))*POL2(1,I)
9 PIN4(I,I)=POL3(I)
```

C
C
C

COSTRUZIONE DELLA MATRICE A

```

DO 12 I=1,N6
DO 22 J=1,N6
A(I,J)=0.
IF(I.EQ.J) GO TO 33
IF((I+1).EQ.J) GO TO 44
IF(I.NE.(J+1)) GO TO 22
44 A(I,J)=-0.25
GO TO 22
33 A(I,J)=1
22 CONTINUE
12 CONTINUE
RETURN
END

```

-FOR, IN DENISE

```

SUBROUTINE DENISE(N4,N9,C1,C2,P3,P4,P5,P6,P7)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION E(17,17),A(17,17),R(17,17),AM(17,17),AM22(17,17),AM2(17,17),
117),C1(17,17),C2(17,17),P3(17,17),P4(17,17),P5(17,17),P6(17,17),I
2(17,17)

```

C
C
C

IMPOSIZIONE DELLE CONDIZIONI AL LIMITE

```

N3=N4+1
N8=N9+1
T1=1.4767932D-06
T2=1.25663708D-06
DO 1 I=1,N8
DO 1 J=1,N8
E(I,J)=0.
A(I,J)=0.
1 R(I,J)=0.
DO 3 I=1,N3
A(I,I)=1.
J=I+1
3 A(I,J)=-1.
DO 2 I=1,N4
R(I,I)=-T1
2 E(I,I)=T1
DO 40 I=N3,N8
R(I,I)=-T2
40 E(I,I)=T2
DO 4 I=2,N4
J=I-1
4 R(I,J)=T1
R(N3,N4)=T2
R(N8,N3)=T2
DO 5 J=1,N8
DO 5 L=1,N8
AM(J,L)=0.
DO 5 K=1,N8

```

70.

```
5 AM(J,L)=AM(J,L)+A(J,K)*R(K,L)
DO 6 J=1,N8
DO 6 L=1,N8
AM22(J,L)=0.
DO 6 K=1,N8
6 AM22(J,L)=AM22(J,L)+AM(J,K)*AM(K,L)
DO 7 J=1,N8
DO 7 L=1,N8
AM2(J,L)=0.
DO 7 K=1,N8
7 AM2(J,L)=AM2(J,L)+AM(J,K)*A(K,L)
DO 8 I=1,N8
DO 8 J=1,N8
C1(I,J)=E(I,J)-6.*AM(I,J)+AM22(I,J)/T1
C1(I,J)=C1(I,J)/1.1751946D-03
C1(I,N3)=C1(I,N3)*1.1751946
C2(I,J)=4000.*(AM(I,J)-AM22(I,J)/T1)
P3(I,J)=A(I,J)-3.*AM2(I,J)/T1
P4(I,J)=A(I,J)-AM2(I,J)/T1
P5(I,J)=A(I,J)
P6(I,J)=-3.*AM(I,J)+AM22(I,J)/T1
8 P7(I,J)=-AM(I,J)
RETURN
END
```

-FOR, IN FLUX

```
SUBROUTINE FLUX(N+VO,D11,D,POT,F1,POT1,V,F5)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION D11(25),POT1(24),D(41),POT(29),V(17,4)
```

C
C
C

CALCOLO DEL FLUSSO PASSANTE ATTRAVERSO IL DENTE ESTERNO

```
N3=15
N8=N3+1
T2=1.25663708D-06
N1=N-1
F1=0.
DO 1 K=1,N1
1 F1=F1-D11(K)*2.*T2
F2=0.
DO 2 I=1,N
2 F2=F2-POT1(I)*T2
F3=0.
DO 3 I=1,N
3 F3=F3-D(I)*T2
F4=0.
DO 4 I=1,4
4 F4=F4+(V(N8,I)-POT(N+I))*T2
F5=F5*T2
F1=F1+F2+F3+F4+F5
RETURN
END
```

-XQT

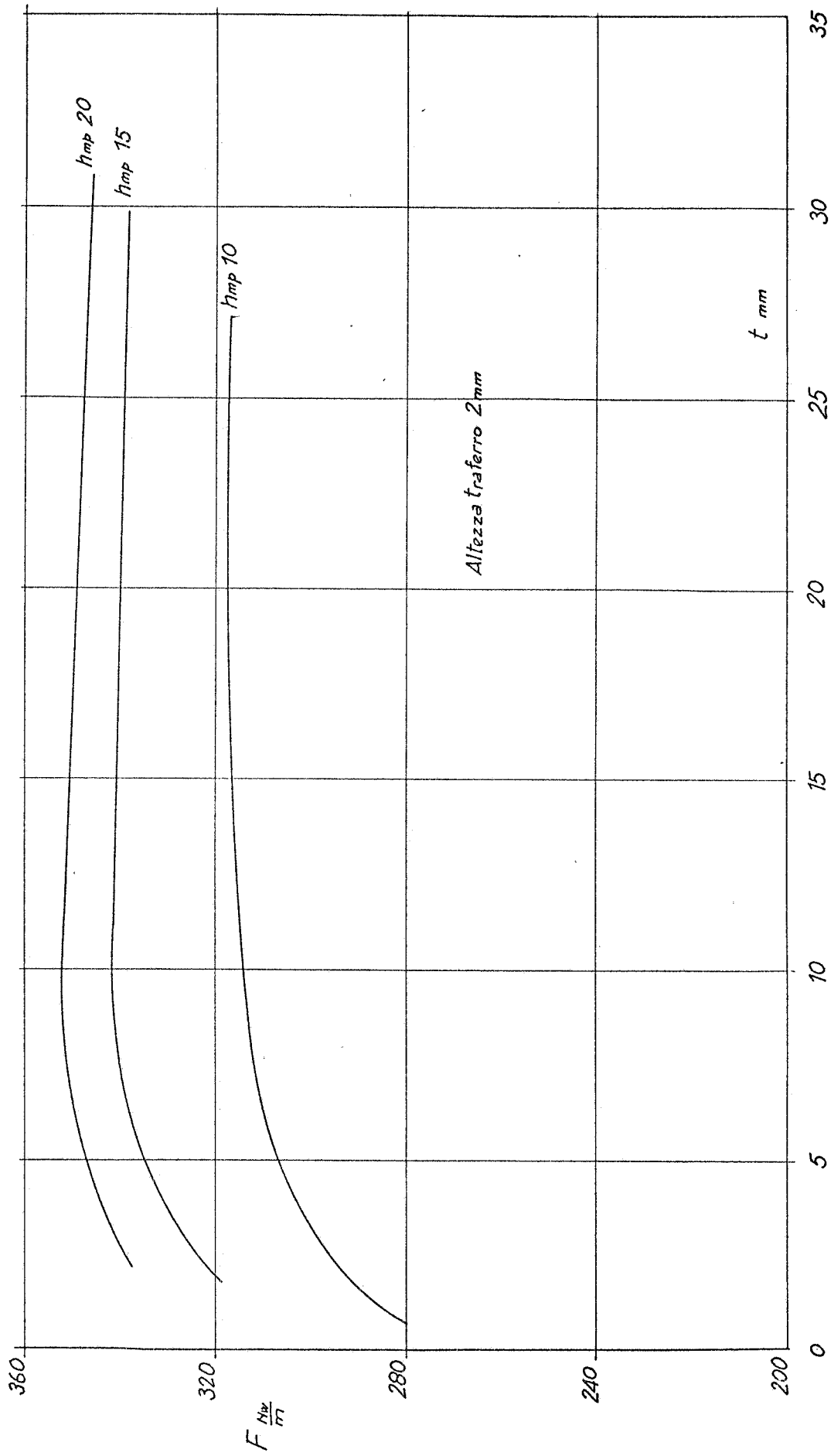


FIG. 17 - Andamento della forza $F_2(t)$ per metro lineare della struttura, al variare della larghezza t del dente del ritorno in ferro per varie altezze h_{MP} e per altezze h del traferro pari a 2 mm . Le dimensioni dei due vani in aria tra l'"ancora" sospesa e il magnete di sostegno, è di $25 \times 25\text{ mm}^2$ (per i simboli vedi Fig. 9).

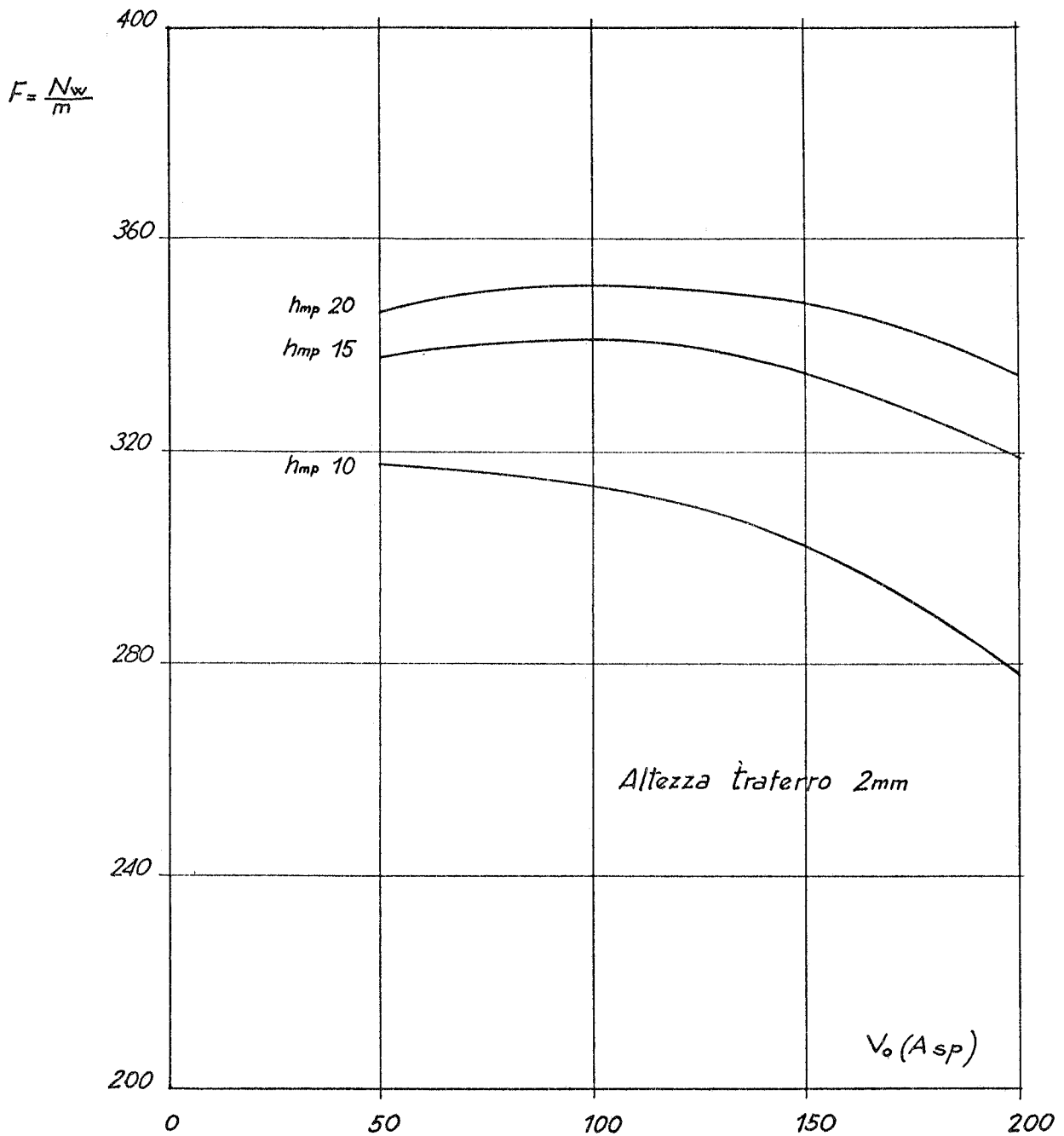


FIG. 18 - Curva della variazione della forza $F_2(V_0)$, per metro lineare della struttura, al variare del potenziale V_0 dell'ancora per varie altezze h_{MP} del magnete permanente e per altezza h del traferro pari a 2 mm.

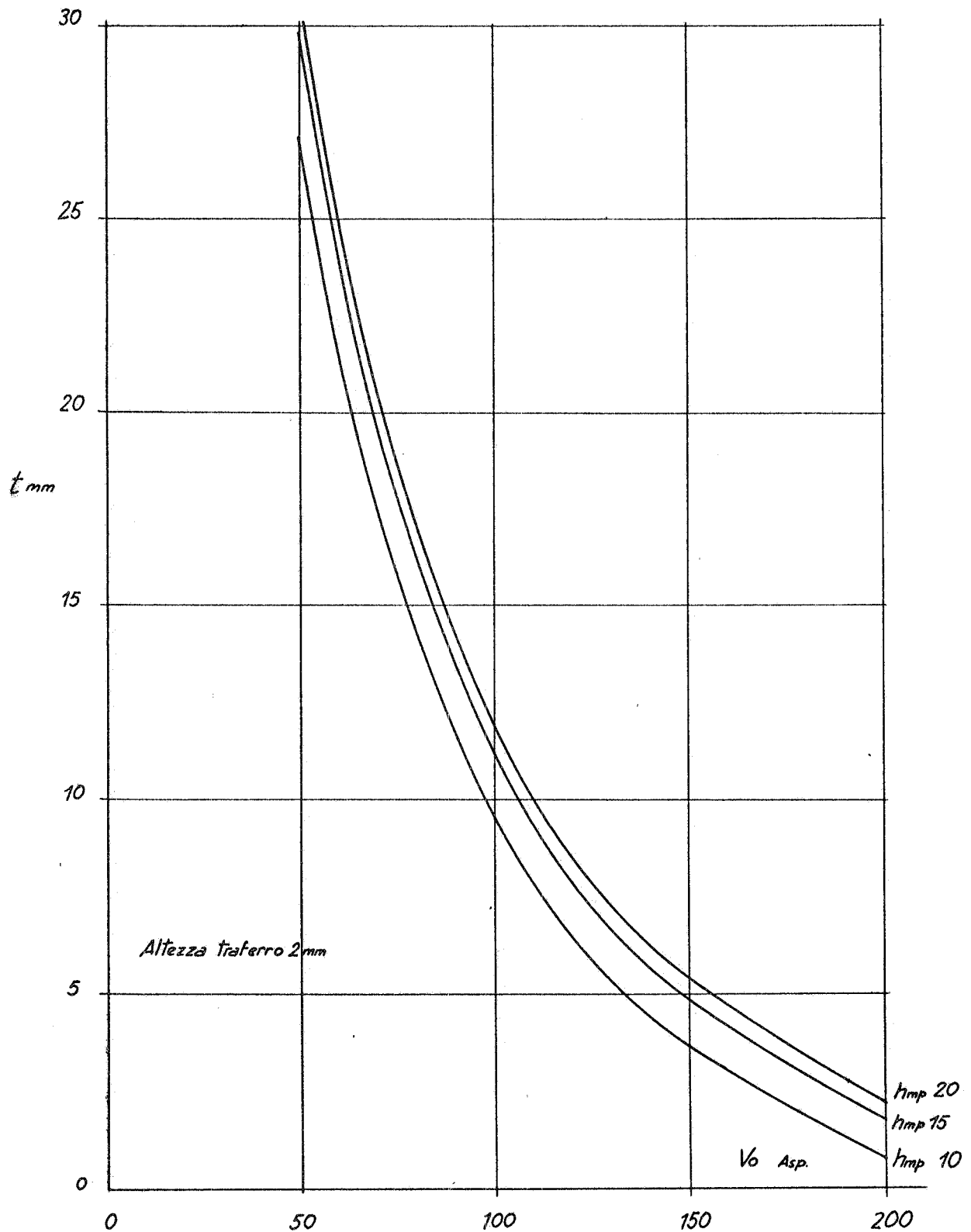


FIG. 19 - Curva della variazione della larghezza t_2 del traferro del dente di ritorno in ferro, al variare del potenziale V_0 della ancora per varie altezze h_{MP} del magnete permanente e per altezza h del traferro pari a 2 mm.

APPENDICE 4. -

Programma Fortran per un reticolo di $23 \times 23 \text{ mm}^2$, altezza del magnete permanente $h_{MP} = 20 \text{ mm}$ e altezza del traferro di 1 mm per il caso cilindrico (caso 3 del par. 7; Fig. 12).

Per variare l'altezza del magnete permanente e la tensione magnetica V_0 è sufficiente cambiare i DIMENSION e i due dati del problema: V_0 ed N_3 .

Sono stati eseguiti i calcoli per $h_{MP} = 10, 15, 20 \text{ mm}$ e $V_0 = 15, 30, 45, 60 \text{ Asp.}$

Nella Fig. 12 è riportata la mappa per $N = 22$, $N_3 = 15$, $V_0 = 30$ e traferro di 1 mm . Nella Fig. 13 è riportata la mappa per $N = 22$, $N_3 = 20$, $V_0 = 60$ e traferro di 1 mm .

```

-RUN,E CAMOS3,FRMAES,,10,100
-FOR,IS MAIN
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  DIMENSION A1(21,21),B(21),A(22,22),AUT(22),U(22,22),PIN4(22,22),C1
1(21,21),G(20,42),F(42,42),D(42),D2(21,4),C2(21,21),P3(21,21),POUT3
2(22,22),POUT4(22,22),PIN2(22,22),PIN3(22,22),P4(21,21),PIN1(22,22)
3,POUT1(22,22),POT1(22),POUT2(22,22),P5(21,21),P6(21,21),V5(21,4),V
4(21,4),V1(20,4),V2(21,4),V4(21,4),S(20,4),P7(21,21),ALFA(20,4),BET
5A(20),V6(21,4),S1(20,4),C3(21),C4(21),C5(21),C6(21),C7(21
6),D1(22),R3(11),R4(11),V9(22), Z2(22),Y2(22),Y1(22),A3(22),Y3(22)
7,X2(22),X1(22),A2(22),X3(22),POT(27),ST1(27),D12(22),R1(11),R2(11)

C
C  DATI DEL PROBLEMA
C
  V0=30.
  PRINT 8300
  IV0=V0
  PRINT 729,IV0
  C11=1.
  D0=-0.25
  N=22
  N3=20
  N1=N-1
  N2=N+N3
  N4=N+1
  N5=N/2
  N7=N+5
  N8=N3+1
  N10=N-N3+2
  N11=N-N3+1
  N12=N-N3

```

76.

C
C
C

CONDIZIONI INIZIALI

```
DO 60 J=1,N3
DO 60 L=1,4
60 ALFA(J,L)=0.
DO 61 J=1,N3
PG=2.14159265
BETA(J)=- (PG/(6*N3))*J
DO 61 L=1,4
61 ALFA(J,L)=BETA(J)-(BETA(J)/4.)*(L-1)
DO 63 J=1,N3
DO 63 L=1,4
63 S(J,L)=0.
DO 64 J=1,N3
DO 64 L=1,4
64 S(J,L)=S(J,L)+ALFA(J,L)
```

C
C
C

CALCOLO DEI COEFFICIENTI NEL VUOTO

```
DO 169 JB=1,N
169 U(JB,J)=1.
CALL KIKKA(AUT,N,PIN1,PIN2,PIN3,PIN4,A)
DO 1 K=1,N
DO 35 J=1,N1
DO 35 K1=1,N1
35 A1(J,K1)=A(J+1,K1+1)
DO 50 KK=1,N1
50 A1(KK,KK)=A1(KK,KK)-AUT(K)
DO 2 I=1,N1
2 B(I)=-A(I+1,1)
CALL DATINV (A1,N1,B,1,DET)
DO 69 LL=2,N
69 U(K,LL)=B(LL-1)
1. CONTINUE
DO 600 I=1,N
DO 600 J=1,N
POUT1(I,J)=0.
DO 600 K=1,N
600 POUT1(I,J)=POUT1(I,J)+PIN1(I,K)*U(K,J)
DO 601 I=1,N
DO 601 J=1,N
POUT2(I,J)=0.
DO 601 K=1,N
601 POUT2(I,J)=POUT2(I,J)+PIN2(I,K)*U(K,J)
DO 602 I=1,N
DO 602 J=1,N
POUT3(I,J)=0.
DO 602 K=1,N
602 POUT3(I,J)=POUT3(I,J)+PIN3(I,K)*U(K,J)
DO 603 I=1,N
DO 603 J=1,N
POUT4(I,J)=0.
DO 603 K=1,N
603 POUT4(I,J)=POUT4(I,J)+PIN4(I,K)*U(K,J)
```

78.

```
C5(J)=0.
C6(J)=0.
C7(J)=0.
DO 89 K=1,N8
C3(J)=C3(J)+P3(J,K)*V5(K,1)
C4(J)=C4(J)+P4(J,K)*V5(K,2)
C5(J)=C5(J)+P5(J,K)*(V5(K,3)+V5(K,4))
C6(J)=C6(J)+P6(J,K)*V2(K,1)
89 C7(J)=C7(J)+P7(J,K)*(2.*V2(K,2)+V2(K,3))
DO 92 K=N4,N2
J=K-N
92 D(K)=-C2(J,N8)*V0-C3(J)-C4(J)-C5(J)-C6(J)-C7(J)
CALL DATINV(F,N2,D,1,DET)
```

GRADIENTI E POTENZIALI SUL MAGNETE

```
DO 49 K=N4,N2
J=K-N+1
V(1,1)=0.
49 V(J,1)=D(K)
DO 931 I=1,N12
931 D1(I)=0.
DO 932 I=N11,N
K=I+N3
932 D1(I)=D(K)
DO 933 I=1,N
933 V9(I)=D1(I)
PRINT 1100
PRINT 719,(D1(I),I=1,N)
DO 936 I=1,N
936 Z2(I)=D(I)+D1(I)
PRINT 3300
PRINT 719,(Z2(I),I=1,N)
DO 952 I=1,N
952 Y2(I)=D1(I)
POT1(N)=Z2(1)
POT(N)=Z2(N)
DO 954 M=1,N5
DO 950 I=1,N
Y1(I)=0.
A3(1)=0.
R3(M)=1./(1.+1./(2*(M+4)))
R4(M)=1.-1./(2*(M+4))
DO 950 K=1,N
950 A3(I)=A3(I)+A(I,K)*4.*Z2(K)*R3(M)
Y1(N)=V0
DO 951 I=1,N
Y3(I)=A3(I)-Y1(I)*R3(M)-Y2(I)*R3(M)*R4(M)
POT1(N-M)=Y3(1)
POT(N-M)=Y3(N)
Y2(I)=Z2(I)
951 Z2(I)=Y3(I)
PRINT 4300
PRINT 709,(Y3(I),I=1,N)
954 CONTINUE
```

78.

```
C5(J)=0.
C6(J)=0.
C7(J)=0.
DO 89 K=1,N8
C3(J)=C3(J)+P3(J,K)*V5(K,1)
C4(J)=C4(J)+P4(J,K)*V5(K,2)
C5(J)=C5(J)+P5(J,K)*(V5(K,3)+V5(K,4))
C6(J)=C6(J)+P6(J,K)*V2(K,1)
89 C7(J)=C7(J)+P7(J,K)*(2.*V2(K,2)+V2(K,3))
DO 92 K=N4,N2
J=K-N
92 D(K)=-C2(J,N8)*V0-C3(J)-C4(J)-C5(J)-C6(J)-C7(J)
CALL DATINV(F,N2,D,1,DET)
```

11111

GRADIENTI E POTENZIALI SUL MAGNETE

```
DO 49 K=N4,N2
J=K-N+1
V(1,1)=0.
49 V(J,1)=D(K)
DO 931 I=1,N12
931 D1(I)=0.
DO 932 I=N11,N
K=I+N3
932 D1(I)=D(K)
DO 933 I=1,N
933 V9(I)=D1(I)
PRINT 1100
PRINT 719,(D1(I),I=1,N)
DO 936 I=1,N
936 Z2(I)=D(I)+D1(I)
PRINT 3300
PRINT 719,(Z2(I),I=1,N)
DO 952 I=1,N
952 Y2(I)=D1(I)
POT1(N)=Z2(1)
POT(N)=Z2(N)
DO 954 M=1,N5
DO 950 I=1,N
Y1(I)=0.
A3(I)=0.
R3(M)=1./(1.+1./(2*(M+4)))
R4(M)=1.-1./(2*(M+4))
DO 950 K=1,N
950 A3(J)=A3(I)+A(I,K)*4.*Z2(K)*R3(M)
Y1(N)=V0
DO 951 I=1,N
Y3(I)=A3(I)-Y1(I)*R3(M)-Y2(I)*R3(M)*R4(M)
POT1(N-M)=Y3(1)
POT(N-M)=Y3(N)
Y2(I)=Z2(I)
951 Z2(I)=Y3(I)
PRINT 4300
PRINT 709,(Y3(I),I=1,N)
954 CONTINUE
```

```

C
C   RIDETERMINAZIONE DELLE CONDIZIONI INIZIALI MEDIANTE UN
C   PROCEDIMENTO DI TIPO ITERATIVO
C
DO 1302 J=1,N3
DO 1302 L=1,4
1302 S(J,L)=0.
DO 40 J=1,N3
V1(J,1)=(V(J,1)-V(J+1,1))*1000.
V4(J,1)=V1(J,1)*1.47679320D-06+V5(J,1)
D2(1,1)=0.
V6(1,1)=0.
J6=J+1
K=J+N-N3
D2(J6,1)=D(K)*1.25663708D-03
V6(J6,1)=V2(J,1)+D2(J6,1)/1.47679320D-06
V4(N8,1)=(V(N8,1)-V0)*1.25663708D-03
S1(J,1)=DATAN2(V6(J6,1),V1(J,1))
40 S(J,1)=DATAN2(D2(J6,1),V4(J,1))
DO 42 L=2,4
DO 42 J=1,N3
J6=J+1
V(1,L)=0.
V(J6,L)=V(J6,L-1)-V6(J6,L-1)/1000.
V1(J,L)=(V(J,L)-V(J+1,L))*1000.
V4(J,L)=V1(J,L)*1.47679320D-06+V5(J,L)
V4(N8,L)=(V(N8,L)-V0)*1.25663708D-03
V6(1,L)=0.
D2(1,L)=0.
D2(J6,L)=V4(J,L-1)-V4(J6,L-1)+(D2(J6,L-1))*((1.-1./(2.*(6-L)))/(
11./(2.*(5-L))))
V6(J6,L)=V2(J,L)+D2(J6,L)/1.47679320D-06
S1(J,L)=DATAN2(V6(J6,L),V1(J,L))
42 S(J,L)=DATAN2(D2(J6,L),V4(J,L))
PRINT 1200
DO 899 J=1,N3
899 PRINT 700,(S1(J,L),L=1,4)
PRINT 400
DO 2001 J=1,N3
2001 PRINT 700,(S(J,L),L=1,4)
PRINT 500
DO 405 J=1,N8
405 PRINT 700,(D2(J,L),L=1,4)
PRINT 1000
DO 406 K=1,N8
406 PRINT 700,(V4(K,M),M=1,4)
70 CONTINUE

C
C   POTENZIALI ADIACENTI AL FERRO
C
CALL PIPPO(N,V9,U,V0,AUT)
PRINT 2300
PRINT 719,(V9(K),K=1,N)

```

80.

C
C
C

DETERMINAZIONE DEI POTENZIALI NEL VUOTO

```
DO 990 I=1,N
990 D12(I)=V9(I)
DO 942 I=1,N1
942 X2(I)=0.
X2(N)=V0
POT1(1)=V9(1)
POT(1)=V9(N)
DO 944 M=1,N5
DO 940 I=1,N
X1(I)=0.
A2(I)=0.
R1(M)=1./(1.-1./(2*(N7-M)))
R2(M)=1.+1./(2*(N7-M))
DO 940 K=1,N
940 A2(I)=A2(I)+4.*A(I,K)*V9(K)*R1(M)
X1(N)=V0
DO 941 I=1,N
X3(I)=A2(I)-X1(I)*R1(M)-X2(I)*R1(M)*R2(M)
POT1(M+1)=X3(1)
POT(M+1)=X3(N)
X2(I)=V9(I)
941 V9(I)=X3(I)
PRINT 4300
PRINT 709,(X3(I),I=1,N)
944 CONTINUE
```

C
C
C

CALCOLO DELLA FORZA AGENTE SULL- ANCORA SOTTOSTANTE IL MAGNETE

```
DO 44 I=1,4
44 POT(N+1)=V(N8,I)
POT(N+5)=V(N8,4)-V6(N8,4)/1000.
DO 45 I=1,N7
45 ST1(I)=((POT(I)-V0)**2)*(1.25663708D-06)*PG*(N7-I)
ST=0.
DO 46 I=1,N7
46 ST=ST+ST1(I)
CALL FLUX(N,V0,D12,D,POT,FI,POT1)
ST=ST+FI*V0*1000./2.
PENG2=FI/((1.25663708D-03)*V0*PG)+((N7)**2)*1.D-06
PENG=DSQRT(PENG2)
PRINT 9300
PRINT 709,PENG
PRINT 6300
PRINT 709,ST
400 FORMAT (- INCLINAZIONE VETTORE INDUZIONE-,/)
500 FORMAT (- COMPONENTE NORMALE-,/)
1000 FORMAT (- COMPONENTE TANGENZIALE-,/)
709 FORMAT (8D16.8)
104 FORMAT (7D16.8)
700 FORMAT (4D16.7)
719 FORMAT (1D16.8)
```

```

729 FORMAT (16)
1100 FORMAT (- POTENZIALI SUL CONTORNO DEL MAGNETE PERMANENTE-,/)
1200 FORMAT (- INCLINAZIONE VETTORE CAMPO-,/)
2300 FORMAT (- POTENZIALI ADIACENTI AL RITORNO IN FERRO DOLCE-,/)
3300 FORMAT (- POTENZIALI NEL VUOTO ADIACENTI AL MAGNETE-,/)
4300 FORMAT (- POTENZIALI NEL VUOTO-,/)
6300 FORMAT (- FORZA DI SOSTENTAMENTO-,/)
8300 FORMAT (- POTENZIALE DEL FONDELLO-,/)
9300 FORMAT (- LARGHEZZA DENTE ESTERNO-,/)
      END
=FOR,IS KIKKA
      SUBROUTINE KIKKA(Y,N,PIN1,PIN2,PIN3,PIN4,A)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(22),AS(22),G(22,22),G1(22,22),C1(21,21),B(22),Y(22),PC
1L2(23,22),POL3(22),POL4(22),PIN1(22,22),PIN2(22,22),PIN3(22,22),PI
2N4(22,22),A(22,22),B1(21)
      N1=N-1
      NP=N+1

      CALCOLO DEGLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE TRRGONALE SIMMETRICA

      PG=3.14159265
      DO 7 K=1,N
      Y(K)=1.-(1./2.)*DCOS(K*PG/NP)
      DO 66 I=1,N
      FI=N+5-I
      Z(I)=- (1.+1./(2.*FI))
66 AS(I)=- (1.-1./(2.*FI))
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      1 G(I,J)=0.
      DO 2 I=1,N
      2 G(I,I)=1.
      DO 3 I=1,N1
      J=I+1
      3 G(I,J)=AS(I)/(4.*Y(K))
      DO 4 I=2,N
      J=I-1
      4 G(I,J)=Z(I)/(4.*Y(K))
      DO 99 I=1,N
      DO 99 J=1,N
99 G1(I,J)=G(I,J)

      CALCOLO DEI MINORI DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI

      CALL DATINV(G,N,B,0,DET)
      POL2(NP,K)=DET
      DO 21 L=1,N
      DO 222 J=1,N1
      IF(L-J)31,31,30
30 M=J
      GO TO 32
      31 M=J+1
      32 DO 222 K1=1,N1

```


82.

```
222 C1(J,K1)=G1(M,K1)
    CALL DATINV(C1,N1,B1,0,DET)
    POL2(L,K)=-DET/(4.*Y(K))
21 CONTINUE
7 CONTINUE
DO 6 L=1,N
POL3(L)=0.
K=1
DO 6 J=1,N
IF(K)50,50,60
60 POL3(L)=POL3(L)-POL2(N-J+1,L)
GO TO 70
50 POL3(L)=POL3(L)+POL2(N-J+1,L)
70 K=-1*K
6 CONTINUE
DO 77 L=1,N
77 POL4(L)=POL2(N+1,L)+POL2(N,L)*0.9
DO 8 J=1,N
DO 8 L=1,N
PIN1(J,L)=0.
PIN2(J,L)=0.
PIN3(J,L)=0.
8 PIN4(J,L)=0.
DO 9 I=1,N
PIN1(I,I)=POL2(N+1,I)
PIN2(I,I)=POL4(I)
PIN3(I,I)=((-1)**(N))*POL2(1,I)
9 PIN4(I,I)=POL3(I)
```

```
C
C          COSTRUZIONE DELLA MATRICE A
C
```

```
DO 12 I=1,N
DO 22 J=1,N
A(I,J)=0.
IF(I.EQ.J) GO TO 33
IF((I+1).EQ.J) GO TO 44
IF(I.NE.(J+1)) GO TO 22
44 A(I,J)=-0.25
GO TO 22
33 A(I,J)=1
22 CONTINUE
12 CONTINUE
RETURN
END
--FOR, IS PIPPO
SUBROUTINE PIPPO (N,V,U,V0,Y)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION Z(22),AS(22),G(22,22),G1(22,22),POL2(23,22),V(22),U(22,2
12),Y(22),C1(21,21),POL3(22),POL1(22),A1(22,22),A2(22,22),C(22,22),
2C2(22,22),A3(22,22),A4(22,22),A5(22),V1(22),B(22),B1(21),V2(22)
```

C
C
C

CALCOLO DEI POTENZIALI ADIACENTI AL FERRO

```

NP=N+1
N1=N-1
DO 10 K=1,N
DO 1 I=1,N
FI =N+5-I
Z(I)=-((1.+1./(2.*FI)))/(Y(K)*4.)
1 AS(I)=-((1.-1./(2.*FI)))/(Y(K)*4.)
DO 2 I=1,N
DO 2 J=1,N
G(I,J)=0.
2 G(I,I)=1.
DO 3 I=1,N1
J=I+1
3 G(I,J)=AS(I)
DO 4 I=2,N
J=I-1
4 G(I,J)=Z(I)
DO 6 I=1,N
DO 6 J=1,N
6 G1(I,J)=G(I,J)
CALL DATINV(G,N,B,0,DET)
POL2(NP,K)=DET
DO 7 L=1,N
DO 8 J=1,N1
IF(L-J)31,31,30
30 M=J
GO TO 32
31 M=J+1
32 DO 8 K1=1,N1
8 C1(J,K1)=G1(M,K1+1)
CALL DATINV(C1,N1,B1,0,DET)
POL2(L,K)=DET/(4.*Y(K))
7 CONTINUE
POL2(1,K)=POL2(1,K)*(2.+1./(2.*(N+4)))
POL1(K)=(-1)**(NP)*(POL2(N,K))*0.9
10 CONTINUE
DO 22 I=1,N
M=1
POL3(I)=0.
DO 22 J=1,N
IF(M)20,20,21
21 POL3(I)=POL3(I)+POL2(J,I)
GO TO 25
20 POL3(I)=POL3(I)-POL2(J,I)
25 M=-1*M
22 CONTINUE
DO 50 I=1,N
DO 50 J=1,N
A1(I,J)=0.
C(I,J)=0.
50 A2(I,J)=0.

```

84.

```
DO 51 I=1,N
C(I,I)=POL2(NP,I)
A1(I,I)=POL3(I)
51 A2(I,I)=POL1(I)
DO 60 I=1,N
DO 60 J=1,N
C2(I,J)=0.
A3(I,J)=0.
A4(I,J)=0.
DO 60 K=1,N
C2(I,J)=C2(I,J)+C(I,K)*U(K,J)
A3(I,J)=A3(I,J)+A1(I,K)*U(K,J)
60 A4(I,J)=A4(I,J)+A2(I,K)*U(K,J)
DO 61 I=1,N
A5(I)=0.
DO 61 J=1,N
61 A5(I)=A5(I)+A4(I,J)*V(J)
DO 62 I=1,N
62 V1(I)=A5(I)+A3(I,N)*V0
CALL DATINV(C2,N,B,0,DET)
DO 63 I=1,N
V2(I)=0.
DO 63 J=1,N
63 V2(I)=V2(I)+C2(I,J)*V1(J)
DO 64 I=1,N
64 V(I)=V2(I)
RETURN
END
-FOR, IN DENISE
SUBROUTINE DENISE(N3,N8,C1,C2,P3,P4,P5,P6,P7)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION E(21,21),A(21,21),R(21,21),AM(21,21),AM22(21,21),AM2(21,
121),C1(21,21),C2(21,21),P3(21,21),P4(21,21),P5(21,21),P6(21,21),P7
2(21,21)
C
C IMPOSIZIONE DELLE CONDIZIONI AL LIMITE
C
T1=1.4767932D-06
T2=1.25663708D-06
DO 1 I=1,N8
DO 1 J=1,N8
E(I,J)=0.
A(I,J)=0.
1 R(I,J)=0.
DO 2 I=1,N8
2 E(I,I)=T1
DO 3 I=1,N3
A(I,I)=1.
R(I,I)=-T1
J=I+1
3 A(I,J)=-1.
DO 4 I=2,N3
J=I-1
4 R(I,J)=T1
```

```

R(N8,N3)=T2
R(N8,N8)=-T2
DO 5 J=1,N8
DO 5 L=1,N8
AM(J,L)=0.
DO 5 K=1,N8
5 AM(J,L)=AM(J,L)+A(J,K)*R(K,L)
DO 6 J=1,N8
DO 6 L=1,N8
AM22(J,L)=0.
DO 6 K=1,N8
6 AM22(J,L)=AM22(J,L)+AM(J,K)*AM(K,L)
DO 7 J=1,N8
DO 7 L=1,N8
AM2(J,L)=0.
DO 7 K=1,N8
7 AM2(J,L)=AM2(J,L)+AM(J,K)*A(K,L)
DO 8 I=1,N8
DO 8 J=1,N8
C1(I,J)=(E(I,J)-6.*AM(I,J)+AM22(I,J)/T1)/(0.875)
C1(I,J)=C1(I,J)/1.1751946D-03
C2(I,J)=4000.*(AM(I,J)-AM22(I,J)/T1)
P3(I,J)=A(I,J)-3.*AM2(I,J)/T1
P4(I,J)=A(I,J)-AM2(I,J)/T1
P5(I,J)=A(I,J)
P6(I,J)=-3.*AM(I,J)+AM22(I,J)/T1
8 P7(I,J)=-AM(I,J)
RETURN
END
-FOR,IS FLUX
SUBROUTINE FLUX(N,V0,D12,D,POT,F1,POT1)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION D12(22),POT1(22),D(42),POT(27)
C
C CALCOLO DEL FLUSSO PASSANTE ATTRAVERSO IL DENTE ESTERNO
C
PG=3.14159265
T2=1.25663708D-09
N7=N+5
N1=N-1
F1=0.
DO 1 I=1,N1
1 F1=F1-D12(I)*T2*2.*PG*N7
F2=0.
DO 2 I=1,N
2 F2=F2-POT1(I)*T2*2.*PG*(N7-I)
F3=0.
DO 3 I=1,N
3 F3=F3-D(I)*T2*8.*PG
F4=0.
DO 4 I=1,5
4 F4=F4+(POT(N+I)-V0)*2.*PG*(5-I)*T2
FI=F1+F2+F3+F4+(POT(N7)-V0)*0.25*T2*PG
RETURN
END
-XQT

```