

LNF - 70/17  
11 Maggio 1970

R. Florean, F. Tazzioli e G. Verri: STUDIO DI ALCUNI PRO-  
BLEMI DEI RISUONATORI A CAVITA' MEDIANTE DIFFEREN-  
ZE FINITE. -

Nota interna : n. 473  
11 Maggio 1970

R. Florean<sup>(x)</sup>, F. Tazzioli e G. Verri: STUDIO DI ALCUNI PROBLEMI  
DEI RISUONATORI A CAVITA' MEDIANTE DIFFERENZE FINITE. -

## 1. - INTRODUZIONE

Con questo lavoro gli autori si propongono di studiare l'andamento del campo elettromagnetico e di determinare alcuni fattori caratteristici del tipo più generale di risuonatore impiegato nelle macchine acceleratrici di particelle. L'esigenza di questo lavoro nasce dal fatto che generalmente la forma geometrica dei suddetti risuonatori non si presta ad una trattazione analitica più o meno immediata, mentre spesso è importante scostarsi da forme geometriche semplici per rendere ottima l'interazione del campo elettrico con le particelle.

In particolare in questi ultimi anni è assurto a notevole importanza lo studio dei modi di risonanza superiori a quello fondamentale. E' stato infatti dimostrato che, sia negli acceleratori orbitali che in quelli lineari, e particolarmente negli anelli d'accumulazione, i fenomeni d'instabilità sono collegati anche all'interazione del fascio con tali modi superiori, oltre che con quello fondamentale. Il progetto completo di un risuonatore per accelerare particelle richiede quindi anche lo studio di quei modi di risonanza che cadono entro lo spettro di frequenze dell'insieme di pacchetti di particelle. In particolare

---

(x) - Laureando presso i Laboratori Nazionali di Frascati.

interessa scostare le frequenze dei modi superiori al fondamentale, che possono interagire con le particelle, dalle frequenze multiple di quelle di rivoluzione.

I risuonatori impiegati negli acceleratori di particelle in genere hanno simmetria cilindrica. I modi che interessano per le instabilità longitudinali o di fase sono quelli simmetrici, aventi cioè variazione azimutale nulla (fig. 1). Infatti i modi asimmetrici presentano campo elettrico accelerante nullo lungo l'asse della cavità, che è la traiettoria delle particelle. Un'ulteriore limitazione sul tipo di modo è che l'integrale del campo elettrico lungo l'asse sia non nullo.

Il problema della determinazione dell'andamento del campo elettromagnetico nel risuonatore consiste nella risoluzione dell'equazione di Helmholtz, alle derivate parziali, con determinate condizioni al contorno.

La soluzione può essere affrontata in due modi. Uno consiste nell'esprimere i campi con un certo numero di termini di una serie di funzioni di Bessel e nel determinare quindi i coefficienti di tali termini imponendo le condizioni al contorno.

Un secondo metodo consiste nell'esprimere l'equazione mediante differenze finite. La soluzione del problema allora si riconduce direttamente a quella di un sistema di equazioni algebriche.

Il primo metodo presenta il pregio di dare un'espressione analitica dei campi, definita quindi su di un insieme continuo di punti.

Il secondo è meno laborioso nell'impostazione e, purché il reticolo di coordinate sia sufficientemente fitto, può dare risultati con precisione soddisfacente, come verrà illustrato in seguito.

Gli autori hanno impiegato quest'ultimo metodo per determinare la frequenza di risonanza, il fattore di merito e l'impedenza shunt di alcuni risuonatori. Il confronto con i valori teorici relativi a forme note ha permesso di determinare un ordine di grandezza degli errori. Il metodo numerico suddetto, applicato da altri autori [1, 2] al modo fondamentale, è stato esteso ai modi superiori con accorgimenti riguardanti il criterio di convergenza.

E' necessario fare alcune considerazioni sull'utilità pratica del metodo di studio esposto. In pratica non viene richiesta al metodo stesso una grande precisione sul valore assoluto delle frequenze di risonanza. Ciò perché la cavità viene sempre costruita con certe tolleranze ed inoltre intervengono elementi d'accordo e spire d'eccitazione delle quali è impossibile tener conto con precisione. E' utile invece sapere come intervenire con piccole variazioni sulla forma di un determinato modello per variare un certo parametro, p. es. la frequenza di risonanza di un modo rispetto a quella di un altro. La conoscenza, anche approssimata, della configurazione dei campi, permette di ottenere ciò mediante l'applicazione di metodi perturbativi, come verrà detto in seguito.

## 2. - EQUAZIONI DEI CAMPI NELLA CAVITA'

In fig. 1 è riportata una sezione schematica di una cavità a simmetria cilindrica con il sistema di coordinate cilindriche adottato  $(r, z, \varphi)$ . In seguito verranno fatte le approssimazioni usuali. Si assumeranno le pareti conduttrici perfette per determinare i campi, i quali vengono poi usati per ricavare le perdite.

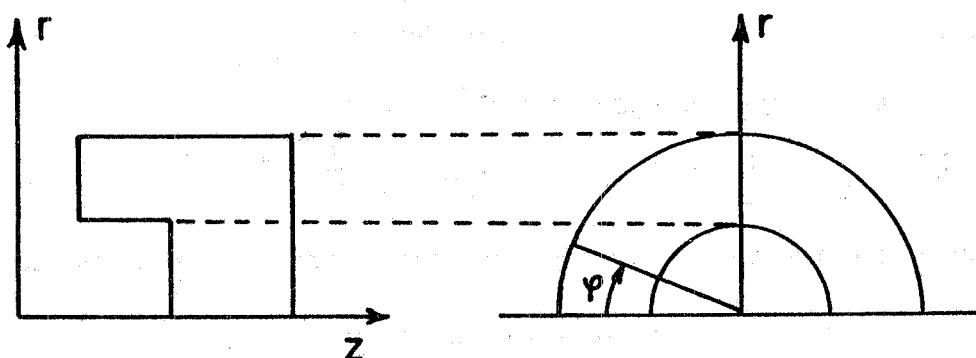


FIG. 1

L'equazione per il campo magnetico nel risuonatore è:

$$(1) \quad \nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = 0$$

Se si sceglie come funzione incognita il prodotto  $rH=F$  del raggio per il campo magnetico trasverso  $H$  e si fa l'ipotesi che  $\partial F / \partial \varphi = 0$  l'equazione differenziale da risolvere risulta:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -k^2 F$$

con  $k = \frac{\omega}{c}$  essendo  $\omega$  = pulsazione di risonanza  
 $c$  = velocità della luce.

La condizione sulla parte di contorno delimitata dal conduttore è:

$$(3) \quad \bar{n} \times \bar{E} = 0$$

valida per i conduttori perfetti.  $\bar{E}$  è il campo elettrico ed  $\bar{n}$  il versore normale alla superficie.

Ricordando che:

$$(4) \quad \bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{a}_r \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial (rH)}{\partial z} \right] + \bar{a}_z \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (rH)}{\partial r} \right] = J \omega \epsilon \bar{E}$$

4.

dove  $\bar{a}_r$  ed  $\bar{a}_z$  sono i versori degli assi relativi, si ha:

$$(5) \quad \nabla \cdot \bar{E} = 0$$

quindi la condizione al contorno 2) si traduce nella seguente:

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad (\text{sulle pareti conduttrici}).$$

Inoltre sull'asse della cavità, per ragioni di simmetria si ha:

$$(7) \quad F = 0 \quad (\text{sull'asse}).$$

L'energia immagazzinata è data da

$$(8) \quad U = \frac{1}{2} \mu \int_V \left(\frac{F}{r}\right)^2 dV = \pi \mu \int_S \frac{F^2}{r^2} dz dr$$

dove V è il volume ed S la sezione contenente l'asse della cavità (fig. 1a).

La potenza perduta sulle pareti è:

$$(9) \quad W = \frac{R_s}{2} \int_A \left(\frac{F}{r}\right)^2 dA = \pi R_s \oint_l \frac{F^2}{r^2} dl$$

dove A è la superficie conduttrice, dl è l'elemento di contorno di A nella sezione assiale.  $R_s$  è la resistenza superficiale del materiale conduttore:

$$R_s = \sqrt{\pi f \mu / \sigma}$$

Il fattore di qualità è:

$$(10) \quad Q = \frac{\omega U}{W} = \frac{\omega \mu}{R_s} \frac{\int_S \frac{F^2}{r^2} dz dr}{\oint_l \frac{F^2}{r^2} dl}$$

L'impedenza shunt è:

$$(11) \quad Z_{sh} = \frac{\left(\int_{asse} E_z dz\right)^2}{W} = \frac{1}{\pi \omega^2 \epsilon^2 R_s} \frac{\left[\int_{asse} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}\right) dz\right]^2}{\oint_l \frac{F^2}{r^2} dl}$$

Un'espressione per la lunghezza d'onda di risonanza si può ricavare moltiplicando scalarmente per  $\bar{H}$  i termini dell'equazione (1) ed integrandoli sul volume della cavità.

$$(12) \quad k^2 = \left(\frac{z \pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{-\int_V (\bar{H} \cdot \nabla^2 \bar{H}) dV}{\int_V H^2 dV}$$

Dopo alcune manipolazioni si giunge alla seguente espressione:

$$(13) K^2 = \frac{- \int_S \frac{F}{r} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right] dr dz}{\int_S \frac{F^2}{r} dr dz}$$

E' utile riportare anche una relazione valida per piccole perturbazioni che dà la variazione di frequenza, di un certo modo di risonanza, causata dall'esclusione di una parte di volume della cavità sufficientemente piccola da non alterare sostanzialmente la distribuzione dei campi

$$(14) \delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\int_{\Delta V} (\mu H^2 - \epsilon E^2) dV}{4U}$$

dove  $\Delta V$  è il volume escluso.

Dalla conoscenza della configurazione dei campi è quindi possibile studiare come intervenire con piccole variazioni sulla forma di un dato risuonatore per spostare la frequenza di un determinato modo.

### 3. - METODO DI CALCOLO

L'andamento del campo magnetico nella cavità è descritto dall'equazione (2) che qui riscriviamo per comodità:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + K^2 F = 0$$

Vogliamo ora trasformare questa equazione differenziale in modo da poterla risolvere con metodi numerici basati sulle differenze finite. A tale fine definiamo un reticolo che corrisponda alla zona in cui si cerca la soluzione. Il tipo di reticolo che assicurerebbe la migliore convergenza del calcolo è uno la cui dimensione radiale varia proporzionalmente al raggio. Tale reticolo tuttavia comporta l'inconveniente di presentare un errore notevole come conseguenza del progressivo aumento del passo. A parità di nodi il reticolo che presenta il minimo errore, alla convergenza, è quello quadrato; è stato quindi scelto un reticolo di questo tipo (fig. 2).

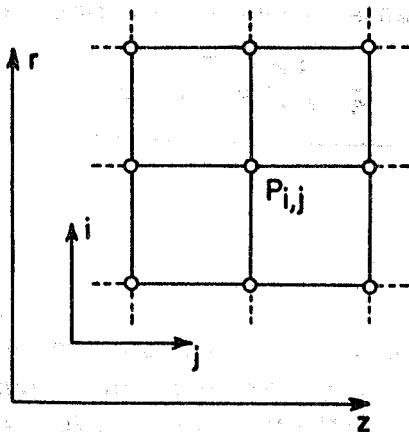


FIG. 2

Per poter passare alle differenze finite occorre dare una definizione delle derivate prime e seconde in un nodo del reticolo che dipenda dai valori della funzione nei nodi adiacenti.

Consideriamo quindi una zona del reticolo intorno al punto generico  $P_{i,j}$ . Sviluppando in serie di Taylor la funzione nell'intervallo dei punti  $P_{i-1,j}$ ,  $P_{i+1,j}$ ,  $P_{i,j-1}$ ,  $P_{i,j+1}$  e troncando lo sviluppo al 2° termine si ottiene

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{i,j} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2h} + O(h)$$

( $h$  è il passo del reticolo,  $O(h)$  un residuo che viene trascurato).

Analogamente si ha:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{i,j} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2h} + O(h)$$

Per le derivate seconde si opera alla stessa maniera

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_{i,j} = \frac{F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}}{h^2} + O(h)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_{i,j} = \frac{F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1}}{h^2} + O(h)$$

Sostituendo le espressioni alle differenze finite nella equazione (3) si ottiene

$$(15) \quad (4 - \kappa^2 h^2) F_{i,j} - \left(i - \frac{h}{z^2}\right) F_{i+1,j} - \left(1 + \frac{h}{z^2}\right) F_{i-1,j} - F_{i,j-1} - F_{i,j+1} = 0$$

Questa espressione viene indicata come "operatore a cinque punti". Essendo  $r = h \cdot i$ , si può eliminare  $r$  nella (15)

$$(16) \quad (4 - \kappa^2) F_{i,j} - \left(1 - \frac{1}{z^2 i}\right) F_{i+1,j} - \left(1 + \frac{1}{z^2 i}\right) F_{i-1,j} - F_{i,j-1} - F_{i,j+1} = 0$$

dove si è posto  $\kappa^2 h^2 = \kappa_1^2$

Con questa formula insieme alla (13) e con opportune condizioni iniziali si può ottenere, dopo un sufficiente numero di iterazioni, la soluzione cercata, cioè il valore della funzione  $F$  nei punti del reticolo, con l'approssimazione voluta.

Nel corso del calcolo si devono rispettare alcune condizioni che sono di natura fisica. Infatti dalla teoria della propagazione delle onde e. m. è noto che in prossimità di una superficie perfettamente conduttrice la componente tangenziale del campo elettrico è nulla, per cui è nulla anche la derivata di  $F$  nella direzione normale alla parete.

Nel nostro caso questo comporta

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{nei tratti di parete orizzontali}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{nei tratti di parete verticali.}$$

Questo si realizza imponendo a priori l'uguaglianza dei valori della funzione nelle linee immediatamente interne ed esterne ad ogni parete. Tale condizione viene ristabilita dopo ogni iterazione.

Un'altra condizione fisica da tenere fissa per tutto il calcolo è l'annullarsi della funzione sui punti dell'asse.

Vediamo ora quali possono essere i valori della funzione all'interno della cavità per iniziare il ciclo di iterazioni. Se si può prevedere a priori, con una certa approssimazione, l'andamento del campo all'interno della cavità, è opportuno cercare di porre delle condizioni iniziali che approssimino tale andamento. In tale modo si ha una convergenza più rapida. Ad esempio, per una cavità cilindrica a tamburo, nel modo fondamentale, si possono porre valori uguali su una stessa riga, ma linearmente crescenti con il raggio.

Ancora per il modo fondamentale nel caso che non si sappia prevedere la distribuzione finale, si può partire da valori iniziali tutti uguali a 1.

Nel caso che si sappia che la soluzione finale deve annullarsi lungo una certa linea (come nella cavità cilindrica nel primo modo superiore verso  $z$ ), si può porre uguale a zero una linea (dove ci si aspetta che la funzione si annulli), e i valori  $+1$  e  $-1$  lateralmente.

Il metodo iterativo consiste nell'applicare, partendo dalle condizioni iniziali stabilite, l'espressione (5) e calcolare così, riga per riga dall'asse fino alla parete esterna, una nuova distribuzione della funzione.

La grandezza  $k_1$  che figura nella (16) viene calcolata con la seguente formula, derivante dalla (13):



8.

$$K_4 = \frac{\sum_i \sum_j \frac{F_{i,j}}{i} \left[ F_{i+1,j} \left(1 - \frac{1}{2i}\right) + F_{i-1,j} \left(1 + \frac{1}{2i}\right) + F_{i,j+1} + F_{i,j-1} - 4F_{i,j} \right]}{\sum_i \sum_j \frac{(F_{i,j})^2}{i}}$$

sia per il valore iniziale che per i valori delle successive iterazioni.

L'iterazione viene ripetuta sino alla convergenza, cioè sino a quando la nuova distribuzione differisce dalla precedente meno di una quantità prefissata a piacere. La grandezza con la quale si può stabilire la convergenza può essere, ad esempio, la somma del quadrato degli scarti dei valori della funzione nei singoli punti. Per accelerare la convergenza del metodo è stata usata la tecnica del "sovrarilassamento" che può essere così riassunta.

Supponiamo che in un punto  $P_{ij}$  del reticolo, in corrispondenza della iterazione  $r$ -esima, il valore della funzione sia  $F_r$ . Con la nuova iterazione  $(r+1)$ -esima, tale valore diviene  $F_{r+1}$ . Si può sostituire al valore  $F_{r+1}$  un valore "esaltato"  $\bar{F}_{r+1}$  nella maniera seguente

$$\bar{F}_{r+1} = F_r + W (F_{r+1} - F_r)$$

essendo  $W$  una grandezza adimensionale, detta "fattore di accelerazione", il cui valore deve essere compreso tra 1 e 2 [4]. Naturalmente questo accorgimento va applicato sin dalla prima iterazione a tutti i punti.

Nel nostro caso si è trovato che il valore  $W=1,8$  è quello che permette la più rapida convergenza (fig. 3) nel caso della cavità ci-

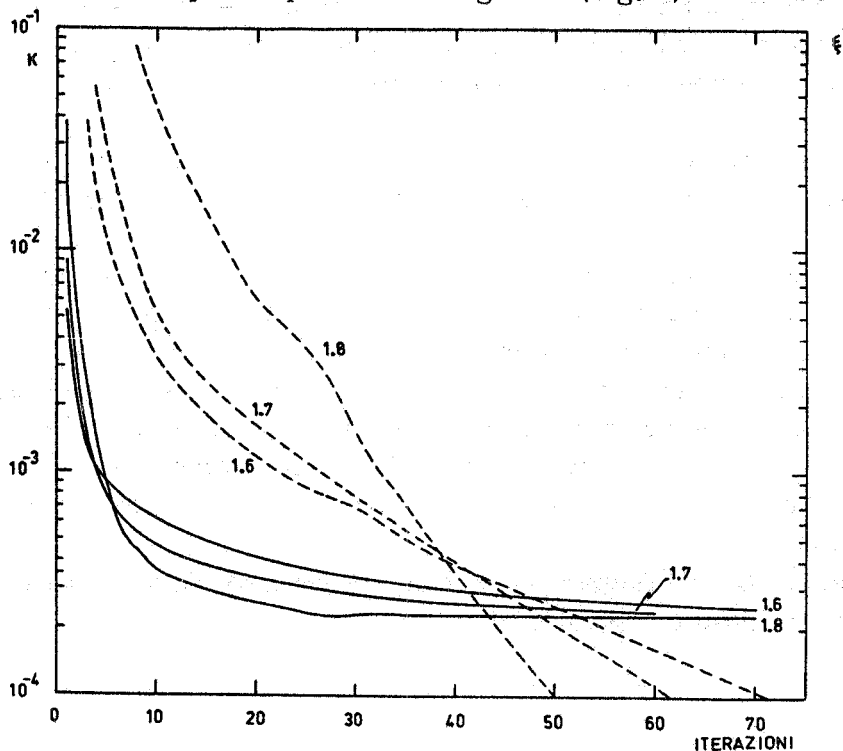


FIG. 3

lindrica, mentre nel caso della cavità rientrante per i modi superiori il valore  $W$  viene autodeterminato in base all'autovalore, in ogni iterazione, con la seguente formula [4]

$$W \simeq \frac{2}{1 + \sqrt{2 \cdot K_1}}$$

#### 4. - APPLICAZIONE A CAVITÀ CILINDRICHE

Il metodo numerico suesposto è stato applicato ad una cavità cilindrica elementare per verificarne la rapidità e l'accuratezza. Per il modo fondamentale la lunghezza d'onda  $\lambda_0$  di risonanza è stata ottenuta con un errore minore dell'1% con un reticolo di circa 5000 punti. Nella figura 3 è riportata (linea continua) la rapidità di convergenza dell'autovalore  $K_1$  in funzione del numero d'iterazioni per alcuni valori del fattore d'accelerazione  $W$ .

Nello stesso grafico è riportato (linea tratteggiata) l'andamento della somma degli scarti quadratici di un'iterazione rispetto alla precedente estesa a tutti i punti del reticolo.

Dall'andamento degli scarti è possibile giudicare circa la convergenza del calcolo. Nel caso del modo fondamentale il calcolo converge in modo assoluto verso un valore di regime. Per i modi superiori il valore più approssimato della funzione in esame si ha in corrispondenza di un minimo della curva degli scarti, come verrà illustrato più avanti.

Nella fig. 4 viene confrontata la distribuzione radiale calcolata della funzione  $F$  con quella teorica nota per il modo fondamentale nella cavità cilindrica elementare. Per tale cavità sono stati anche studiati alcuni modi superiori. Nelle fig. 5 e 6 sono riportati, per il modo  $TM_{011}$ , l'andamento delle linee di forza del campo elettrico, e l'andamento radiale della funzione  $F$  calcolato confrontato con quello teorico, in corrispondenza di una parete.

Nelle fig. 7a) e 7b) sono riportati gli analoghi andamenti per i modi  $TM_{020}$  e  $TM_{030}$ . Per ottenere la convergenza del calcolo su codesti modi è necessario imporre una distribuzione iniziale del campo che approssimi quella prevedibile.

Come è stato già accennato, un criterio è quello di assegnare il valore +1 alla funzione in quelle zone dove si prevede che essa abbia valore positivo e -1 nelle altre. Nei modi superiori il calcolo converge

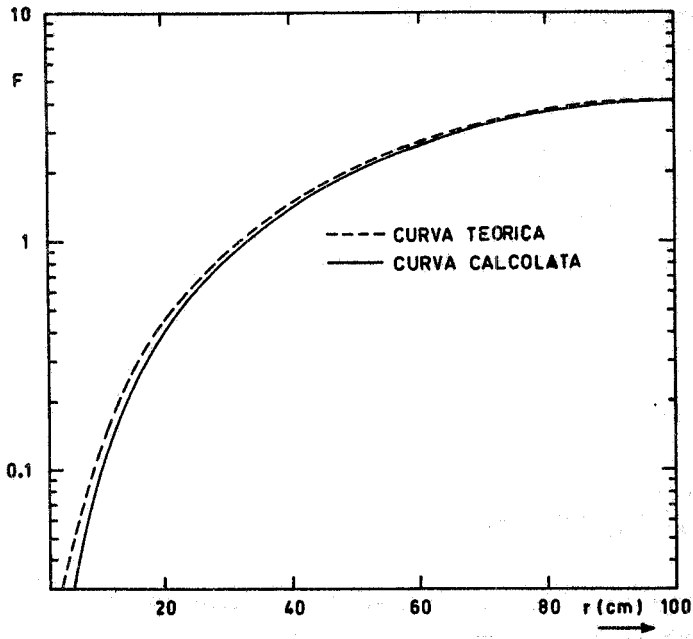


FIG. 4

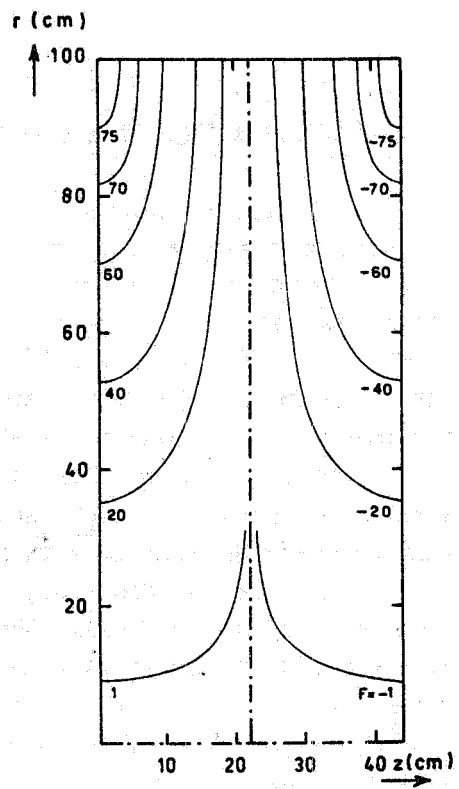


FIG. 5

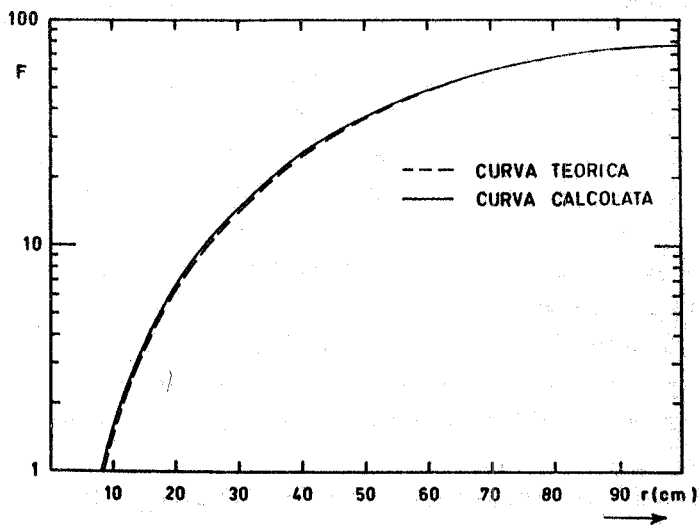


FIG. 6

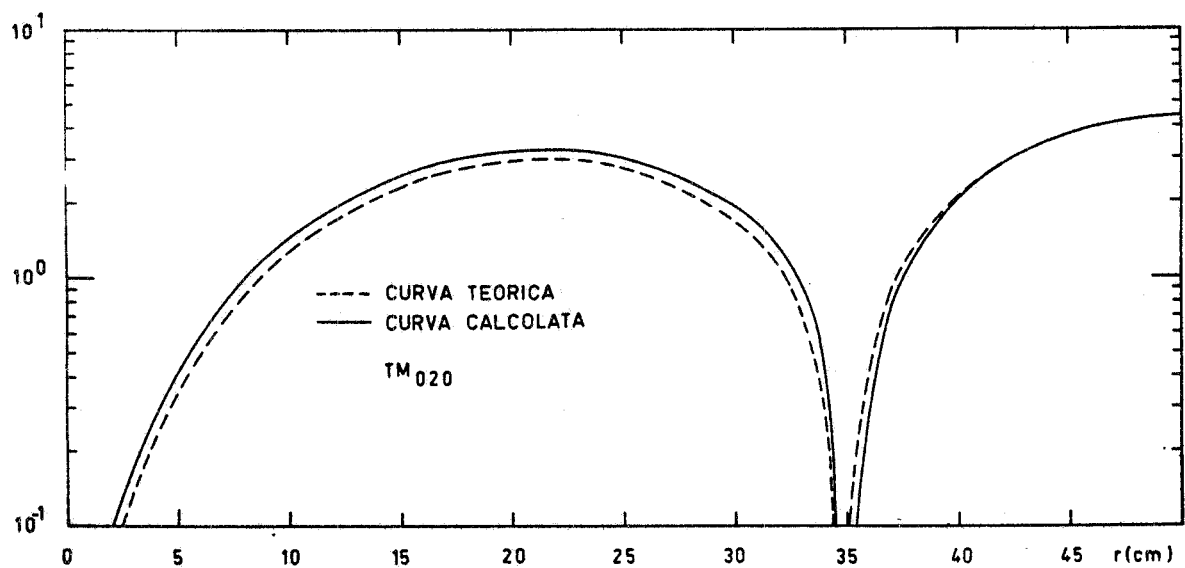


FIG. 7a

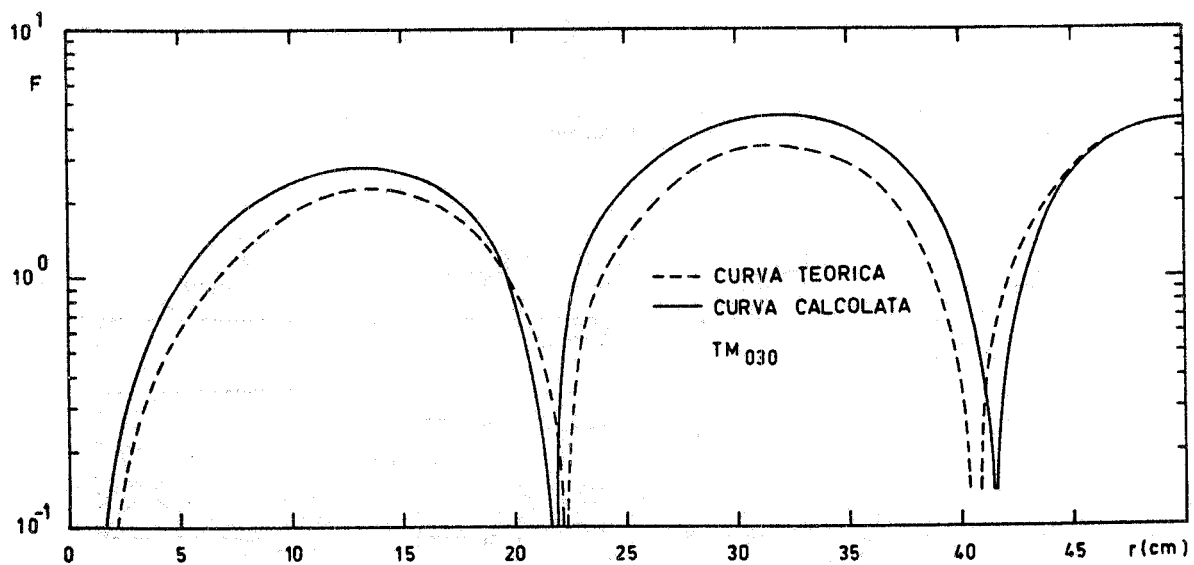
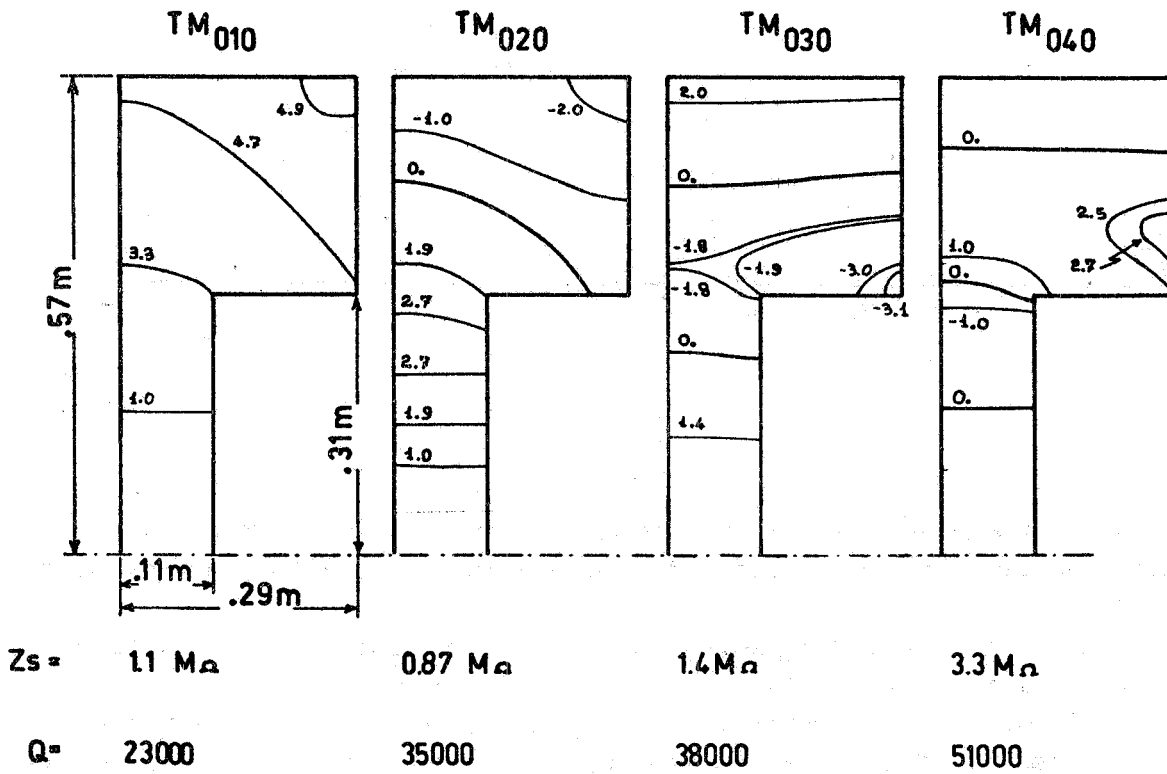
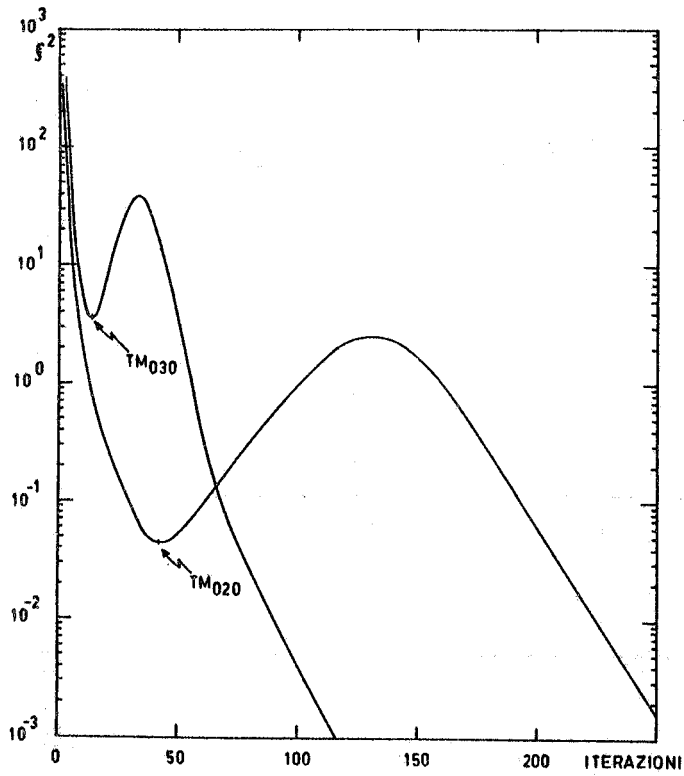


FIG. 7 b

alla soluzione desiderata in modo non assoluto, cioè la curva degli scarti presenta, in corrispondenza della soluzione, un minimo relativo (fig. 8).

L'errore sulle lunghezze d'onda dei modi superiori è risultato, col suddetto reticolo, dell'ordine di alcuni percento.

E' stata quindi presa in considerazione una forma di sezione che ha interesse per l'anello di accumulazione Adone. Nella fig. 9 è riportata tale sezione con le linee di forza del campo elettrico del modo fondamentale e dei primi tre modi superiori lungo  $r$ , e i corrispondenti valo-



ri di  $Q$  e  $Z_{sh}$ . Nelle figure 10 e 11 viene mostrato l'andamento dei numeri d'onda, normalizzati a quello fondamentale, dei primi tre modi superiori aventi integrale non nullo del campo elettrico assiale lungo il gap. In tali grafici è riportato in ascisse rispettivamente il rapporto del raggio interno al raggio esterno e tra lunghezza assiale e gap.

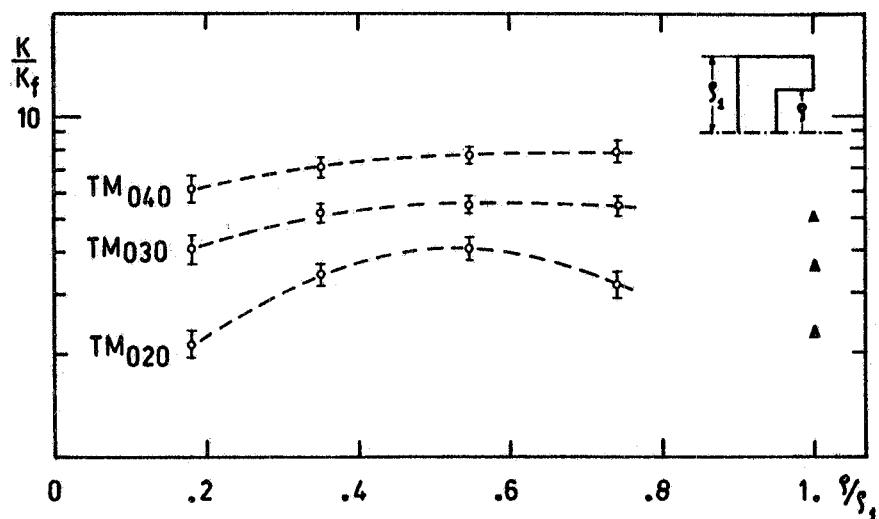


FIG. 10

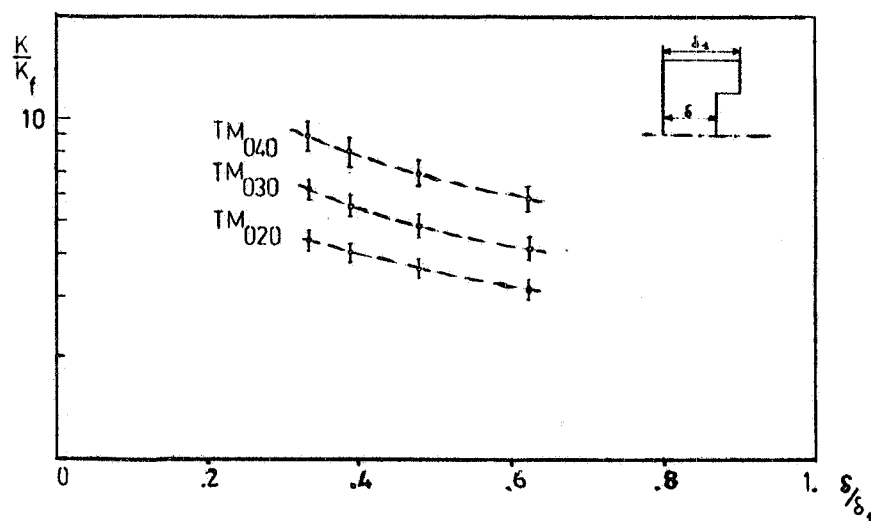


FIG. 11

## BIBLIOGRAFIA. -

- (1) - H. Hoyt, IEEE Trans. NS 12, 153 (1965).
- (2) - B. Austin et al., MURA Report n. 713 (1965).
- (3) - S. Ramo and R. W. Whinnery, Fields and waves in communication electronics (Wiley, New York, 1965).
- (4) - G. E. Forsythe and W. R. Wasow, Finite difference methods for partial differential equations (Wiley, New York, 1960).