

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE  
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 70/3  
Febbraio 1970

(Lezioni)

P. Di Vecchia, S. Ferrara e A. F. Grillo:  
FATTORI DI FORMA ELETTROMAGNETICI. -

P. Di Vecchia, S. Ferrara e A. F. Grillo  
Laboratori Nazionali del CNEN, Frascati

FATTORI DI FORMA ELETTROMAGNETICI

- Parte I - FATTORI DI FORMA ELETTROMAGNETICI DEL PIONE  
E DEL NUCLEONE  
(A cura di P. Di Vecchia - pag. 3)
- Parte II - ANALISI ARMONICA SUL GRUPPO DI LORENTZ E FAT  
TORI DI FORMA NELLA REGIONE SPACE-LIKE  
(A cura di S. Ferrara - pag. 27)
- Parte III - UNITARIETA' E FATTORE DI FORMA DEL PIONE NEL  
LA ZONA TIME-LIKE  
(A cura di A. F. Grillo - pag. 59)

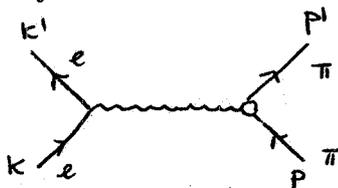
Lezioni tenute nei  
Laboratori Nazionali del CNEN  
Frascati, Ottobre 1969 - Febbraio 1970

## I. - FATTORI DI FORMA ELETTROMAGNETICI DEL PIONE E DEL NUCLEONE. -

(A cura di P. Di Vecchia)

## I.1. - Fattore di forma elettromagnetico del pione. -

Lo scattering elettrone pione all'ordine più basso elettromagnetico è descritto dal seguente grafico di Feynman:



L'ampiezza di transizione corrispondente è:

$$(I.1) \quad A = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \langle p' | \int j_\mu(x) e^{-iqx} d^4 x | p \rangle \frac{1}{q^2} \langle k' | \int j_\mu^{(e)}(x) e^{iqx} d^4 x | k \rangle$$

dove  $p', p(k', k)$  sono i quadrimomenti finale e iniziale del pione (elettrone),  $q = p' - p$  è il quadrimomento del fotone virtuale e  $j_\mu(x) [j_\mu^{(e)}(x)]$  è l'operatore corrente elettromagnetica del protone [elettrone]. La validità dell'elettrodinamica quantistica per processi involventi solo elettroni e fotoni ci permette di scrivere  $j_\mu^{(e)}(x)$  nella forma usuale:

$$(I.2) \quad j_\mu^{(e)}(x) = e \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x)$$

che inserita in (I.1) dà luogo a:

$$(I.3) \quad A = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \langle p' | \int j_\mu(x) e^{-iqx} d^4 x | p \rangle \frac{e}{q^2} \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{4k_0 k'_0}} \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \delta(k' - k + q) =$$

$$= \int \frac{d^4 q}{q^2} e \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{4k_0 k'_0}} \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \delta(k' - k + q) \delta(p' - p + q) \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle$$

avendo sfruttato la proprietà di trasformazione sotto una traslazione degli stati e della corrente:

$$(I.4) \quad e^{iPx} |p\rangle = e^{ipx} |p\rangle; \quad j_\mu(0) = e^{iPx} j_\mu(x) e^{-iPx}$$

essendo  $P$  l'operatore che rappresenta il quadrimpulso totale del sistema. Integrando in  $d^4 q$  (I.3) diventa:

$$(I.5) \quad A = \frac{e(2\pi)^4}{q^2} \delta(p' + k' - p - k) \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{1}{\sqrt{16k_0 k'_0}} \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle$$

L'elemento di matrice  $\langle p' | j_\mu(0) | p \rangle$  è funzione soltanto dei quadrivettori  $p$  e  $p'$  che sono soggetti alle restrizioni  $p^2 = p'^2 = M^2$  oppure delle loro combinazioni lineari  $q_\mu = p'_\mu - p_\mu$  e

4.

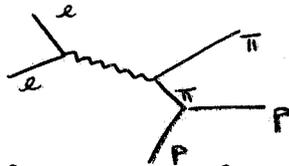
$P_\mu = p'_\mu + p_\mu$ . Pertanto in maniera del tutto generale possiamo scrivere:

$$(I.6) \quad \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle = \frac{e}{\sqrt{4 p_0 p'_0}} \left\{ G(q^2) q_\mu + F(q^2) P_\mu \right\}$$

Il fattore fuori la parentesi graffa è presente per ragioni di normalizzazione.  $F$  e  $G$  risultano funzioni soltanto di  $q^2$  che è l'unico scalare indipendente che si può costruire a partire da  $q_\mu$  e  $P_\mu$ . La conservazione della corrente impone che  $G(q^2) = 0$  per cui l'elemento di matrice  $A$  diventa:

$$(I.7) \quad A = \frac{e^2 (2\pi)^4}{2q} \delta(p'+k'-p-k) \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{1}{\sqrt{16 p_0 p'_0 k_0 k'_0}} F(q^2) P_\mu$$

Da tale elemento di matrice è possibile calcolare la sezione d'urto differenziale  $e\pi \rightarrow e\pi$  e collegare direttamente tale fattore di forma  $F(q^2)$  con quantità osservabili. Tale fattore di forma non viene però misurato in esperimenti di scattering  $e\pi$  che sono assai difficili da fare sperimentalmente, ma in esperimenti di elettroproduzione mettendosi in condizioni favorevoli cinematicamente per esaltare il contributo del grafico



Tuttavia per valori di  $q^2$  space-like  $F(q^2)$  è molto poco noto. La determinazione di  $F(q^2)$  ci dà informazioni sull'elemento di matrice della corrente elettromagnetica:

$$(I.8) \quad \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle = \frac{e}{\sqrt{4 p_0 p'_0}} F(q^2) (p'_\mu + p_\mu)$$

Notiamo che l'hermiticità della corrente impone che  $F(q^2)$  sia reale per valori di  $q^2$  space-like. Infatti

$$(I.9) \quad \sqrt{4 p_0 p'_0} \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle^* = \sqrt{4 p_0 p'_0} \langle p | j_\mu(0) | p' \rangle$$

comporta che

$$(I.10) \quad F(q^2) = F^*(q^2)$$

La normalizzazione di  $F(q^2)$  a  $q^2 = 0$  si trova osservando che l'operatore di carica è dato da:

$$(I.11) \quad \int j_0(x) d^3x = Q$$

Valutando questo operatore tra due stati di pioni carichi con momenti  $p$  e  $p'$  rispettivamente si ha:

$$(I.12) \quad \int d^3x e^{i(p'-p)x} \langle p' | j_0(0) | p \rangle = e \langle p' | p \rangle = e(2\pi)^3 \delta(p-p')$$

da cui per  $q \rightarrow 0$  si ha:

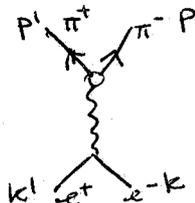
$$(I.13) \quad \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle = e$$

Calcolando la (I.8) per  $q_\mu \rightarrow 0$  si ha la condizione di normalizzazione:

$$(I.14) \quad F(0) = 1$$

Notiamo che mentre per il vertice in cui compaiono 2 elettroni non abbiamo alcun fattore di forma perchè l'elettrone è una particella puntiforme senza alcuna struttura al di fuori di quella elettromagnetica e la sua interazione con il campo elettromagnetico è ben descritta da una lagrangiana di interazione  $\mathcal{L} = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu$ ; nell'altro vertice compaiono due pioni i quali oltre ad una struttura elettromagnetica hanno anche una struttura dovuta alle interazioni forti. Pertanto non è possibile spiegare le interazioni elettromagnetiche dei pioni usando una lagrangiana di interazione del tipo  $\mathcal{L} = ie A_\mu [\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi]$  come potremmo essere tentati di fare perchè alla corrente elettromagnetica dei pioni contribuirebbero attraverso le interazioni forti anche i campi degli altri adroni. Pertanto nel fattore di forma  $F(q^2)$  c'è tutta la nostra ignoranza delle interazioni forti.

Nel caso dell'annichilazione di  $e^+e^-$  in  $\pi^+\pi^-$  si può procedere in maniera del tutto analoga partendo dal grafico:



e giungendo all'espressione seguente per l'ampiezza di scattering

$$(I.15) \quad A = e \frac{(2\pi)^4}{q^2} \int (p'+p-k'-k) \bar{v}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{1}{\sqrt{16k_0 k'_0}} \langle p', p | j_\mu(0) | 0 \rangle$$

Possiamo in maniera completamente analoga decomporre l'elemento di matrice della corrente elettromagnetica:

$$(I.16) \quad \langle p', p | j_\mu(0) | 0 \rangle = \frac{e}{\sqrt{4p_0 p'_0}} \left\{ G(q^2) P_\mu + F(q^2) q_\mu \right\}$$

e la conservazione della corrente impone  $G(q^2) = 0$  da cui si ha:

$$(I.17) \quad \langle p', p | j_\mu(0) | 0 \rangle = \frac{e}{\sqrt{4p_0 p'_0}} F(q^2) (p'_\mu - p_\mu)$$

Abbiamo chiamato nella stessa maniera  $F(q^2)$  i fattori di forma che compaiono nello scattering  $e\pi \rightarrow e\pi$  e nella annichilazione  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  anche se a prima vista essi hanno poco a che fare tra loro. Mostriamo però nel seguito che in realtà esiste una funzione analitica  $F(z)$  che si riduce ai rispettivi fattori di forma nelle zone fisiche dei rispettivi canali.

La sezione d'urto differenziale per il processo  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  è data in termini di  $|F(q^2)|^2$ :

$$(I.18) \quad \frac{d}{d\Omega} = \frac{\pi}{16} \alpha^2 \frac{\beta^3}{E^2} \sin^2 \theta |F(q^2)|^2$$

6.

dove  $E$  è l'energia di un fascio di elettroni,  $p$  il modulo del suo impulso e  $\beta = p/E$ .

Definiamo ora il raggio quadratico medio del pione. Sviluppando il fattore di forma in potenza di  $q^2$  fino al primo ordine:

$$(I.19) \quad F(q^2) = 1 + \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} q^2$$

il raggio quadratico medio è definito nella maniera seguente:

$$(I.20) \quad \langle r^2 \rangle = +6 \left. \frac{dF_{\pi}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}$$

Tale quantità è chiamato raggio quadratico medio della distribuzione di carica perchè si può mostrare la validità della seguente uguaglianza in approssimazione non relativistica:

$$(I.21) \quad +6 \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} = \int d^3r r^2 \rho(r)$$

essendo  $\rho(r)$  la distribuzione di carica. Infatti in approssimazione non relativistica si ha:

$$(I.22) \quad F(q^2) = \int d^3r \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

nell'ipotesi che  $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$  (I.22) diventa:

$$(I.23) \quad F(q^2) = -4\pi \int_0^{\infty} r^2 \rho(r) dr \frac{\text{sen } qr}{qr}$$

da cui

$$(I.24) \quad \left. \frac{d}{dq^2} F(q^2) \right|_{q^2=0} = +\frac{4\pi}{6} \int_0^{\infty} r^2 \rho(r) dr r^2 = +\frac{1}{6} \int d^3r \rho(r) r^2$$

I.2. - Proprietà di analiticità del fattore di forma <sup>(1)</sup>.

In questo paragrafo per evitare complicazioni inessenziali dovute allo spin e alla carica tratteremo esplicitamente il caso del fattore di forma scalare. Per studiare le sue proprietà di analiticità consideriamo le 3 funzioni:

$$(I.25) \quad \begin{aligned} \sqrt{4p_0 p'_0} \langle p' | j(0) | p \rangle &= I(t) & t &= (p'-p)^2 \\ \sqrt{4p_0 p'_0} \langle p', p; \text{out} | j(0) | 0 \rangle &= J(s) & s &= (p+p')^2 \\ \sqrt{4p_0 p'_0} \langle p', p; \text{in} | j(0) | 0 \rangle &= K(s) & s &= (p+p')^2 \end{aligned}$$

Notiamo che l'analogo vettoriale di  $J(s)$  entra nell'ampiezza per il processo  $e^+e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ; mentre l'analogo vettoriale di  $K$  entra nel processo  $\pi^+ \pi^- \rightarrow e^+e^-$ . I valori di  $t$  e  $s$  realizzabili fisicamente sono  $t \leq 0$  e  $s \geq 4M^2$ . Assumiamo ora che  $j(0)$  sia invariante sotto parità  $P$  e inversione del tempo  $T$ . Il prodotto  $PT$  agendo sugli stati di singola particella  $|p\rangle$  li lascia inalterati; mentre agendo sullo stato di  $z$  particella  $|p, p'\rangle$  lo trasforma da stato in stato out e viceversa. Inoltre agendo su  $j(0)$  lo trasforma nell'operatore  $j^c(0)$ :

$$(I. 26) \quad j^c(o) = (TP) j(o) (TP)^{-1}$$

dove  $j^c(o)$  denota l'operatore complesso coniugato; cioè l'operatore i cui elementi di matrice sono i complessi coniugati dei corrispondenti elementi di matrice di  $j(o)$ . Ciò posto è facile mostrare che:

$$(I. 27) \quad \begin{aligned} J(s) &= \sqrt{4 p_o p'_o} \langle p, p'; \text{out} | (TP)^{-1} TP j(o) (TP)^{-1} (TP) | o \rangle = \\ &= \sqrt{4 p_o p'_o} \langle p, p'; \text{in} | j^c(o) | o \rangle = \sqrt{4 p_o p'_o} \langle p, p'; \text{in} | j(o) | o \rangle^* \end{aligned}$$

ovvero

$$(I. 28) \quad J(s) = K^*(s)$$

Ovviamente noi abbiamo mostrato questo solo per i valori fisici di  $s$  ossia per  $s \geq 4\mu^2$ . Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato che la funzione  $I(t)$  è reale per  $t \leq 0$ :

$$(I. 29) \quad I(t) = I^*(t)$$

La stessa cosa si potrebbe mostrare facendo uso dell'invarianza sotto TP.

Usando il formalismo delle formule di riduzione è possibile scrivere  $I(t)$  e  $K(s)$  nella forma seguente:

$$(I. 30) \quad I(t) = i \sqrt{2 p'_o} \int d^4 x e^{-ipx} K_x \langle p' | \theta(-x) [j(o), \phi(x)] | o \rangle$$

$$(I. 31) \quad K(s) = i \sqrt{2 p'_o} \int d^4 x e^{ipx} K_x \langle p' | \theta(-x) [j(o), \phi(x)] | o \rangle$$

dove  $\phi(x)$  è il campo della particella di momento  $p$ ,  $K_x = \square^2 + \mu^2$  è l'operatore di Klein-Gordon che verifica l'equazione  $(\square + m^2)\phi(x) = \eta(x)$  essendo  $\eta(x)$  la sorgente del campo.  $\theta(x)$  è la funzione gradino così definita

$$(I. 32) \quad \theta(x) = 1 \quad \text{se } x_o > 0; \quad \theta(x) = 0 \quad \text{se } x_o < 0$$

Se per il momento scriviamo  $K$  e  $I$  come funzione dei due quadrivettori  $p$  e  $p'$ :  $K(s) = K(p; p')$  e  $I(t) = I(p, p')$  essendo  $s = (p+p')^2$  e  $t = (p-p')^2$  il confronto tra le due espressioni (I. 30) e (I. 31) ci dice che

$$(I. 33) \quad I(p, p') = K(-p, p')$$

Questa è la relazione di crossing. Ci dice che quando l'argomento scalare  $t$  di  $I$  è uguale numericamente all'argomento scalare  $s$  di  $K$ ; allora  $I$  e  $K$  sono uguali. In altre parole ci dice che:

$$(I. 34) \quad I(s) = K(s)$$

Poichè  $K(s)$  è misurabile solo per  $s \geq 4\mu^2$  e  $I(s)$  solo per  $s \leq 0$  la relazione (I. 34) ha senso solo nel senso di continuazione analitica. Ossia ci dice che se  $I(s)$  e  $K(s)$  sono nelle rispettive zone fisiche i valori limiti di altrettante funzioni analitiche, allora queste due funzioni sono identiche. La possibilità della continuazione analitica verrà fuori dalla rappresentazione dispersiva che mostreremo nel seguito.

Prima di far questo applichiamo l'operatore  $K_x$  al secondo membro dell'espressione (I.31)

$$(I.35) \quad K(s) = i\sqrt{2p_0} \int d^4x e^{ipx} \langle p' | \left\{ \theta(-x) [j(0), \eta(x)] - 2\delta(x_0) [j(0), \phi(x)] - \delta(x_0) [j(0), \phi(x)] \right\} | 0 \rangle$$

Dividiamo ora  $K(s)$  in una parte degenera e in una non degenera:

$$(I.36) \quad K_{\text{nondeg}} = i\sqrt{2p_0} \int d^4x \langle p' | \theta(-x) [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle$$

$$(I.37) \quad K_{\text{deg}} = i\sqrt{2p_0} \int d^4x e^{ipx} \langle p' | \left\{ -p_0 \delta(x_0) [j(0), \phi(x)] + i \delta(x_0) [j(0), \phi(x)] \right\} | 0 \rangle$$

Si può mostrare in maniera assolutamente generale che  $K_{\text{nondeg}}$  è un polinomio nella variabile  $S$  di un certo ordine finito  $n$  ed è a causa di questa semplice dipendenza che chiamiamo degenera questa parte di  $K(s)$ .

Prendiamo ora in considerazione  $K_{\text{nondeg}}$  che chiamiamo semplicemente  $K(s)$  ricordando che l'espressione che troviamo alla fine è determinata a meno di un polinomio. Consideriamo la (I.36) nel sistema di quiete di  $p'$ :

$$(I.38) \quad \vec{p}' = 0; \quad p'_0 = \mu; \quad s = 2\mu^2 + 2\mu\omega; \quad \omega = \frac{s - 2\mu^2}{2\mu}; \quad p = \vec{n}(\omega^2 - \mu^2)^{1/2}; \quad p_0 = \omega$$

essendo  $\vec{n}$  il versore nella direzione di  $\vec{p}$ . In siffatto sistema di riferimento si ha:

$$(I.39) \quad K(\omega) = i[2\mu]^{1/2} \int d^4x e^{i\omega x_0 - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \theta(-x_0) \langle \mu | [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle$$

Poichè  $x_0 < 0$  l'esponenziale  $e^{i\omega x_0}$  è una funzione decrescente nella metà inferiore del piano complesso  $\omega$ . Perciò uno è portato a pensare che l'espressione (I.39) definisca una funzione analitica nel semipiano inferiore del piano complesso  $\omega$  cioè per  $\text{Im} \omega < 0$ . Tale affermazione però a questo livello è soltanto una congettura in quanto bisognerebbe mostrare che il resto della funzione integranda non dia luogo a divergenze nell'integrale. Ciò però non accade e la (I.40) definisce realmente una funzione analitica nel semipiano inferiore  $K(z)^{(2,3)}$ . In base al teorema di Cauchy possiamo scrivere

$$(I.40) \quad K(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} dz' \frac{k(z')}{z' - z}$$

essendo  $C_1$  il cammino in Fig. 1

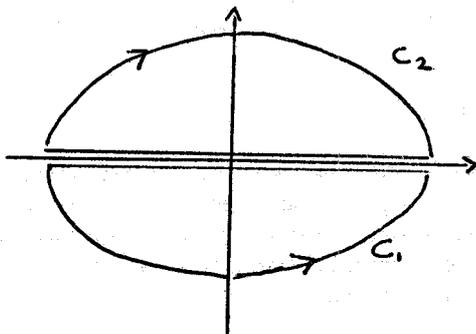


FIG. 1

Assumendo che si annulli il contributo dal semicerchio all'infinito (I. 40) diventa:

$$(I. 41) \quad K(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{K(\omega')}{\omega' - z}$$

La funzione di interesse fisico,  $K(\omega)$ , è ottenuta da  $K(z)$  per valori di  $z$  reali dal di sotto. Definiamo ora una funzione  $J(\omega)$  ottenuta da  $K(\omega)$  rimpiazzando  $\theta(-x)$  con  $\theta(x)$  e cambiando il segno:

$$(I. 42) \quad J(\omega) = -i(2\mu)^{1/2} \int d^4x e^{i\omega x_0 - i\vec{p} \cdot \vec{x}} \theta(x) \langle \mu | [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle$$

Chiamiamo  $J$  tale funzione perchè si può vedere facilmente che essa si identifica con la parte non degenera di  $J(s)$  nel riferimento in cui  $p' = 0$ . In maniera analoga a quanto fatto in precedenza si può vedere che la (I. 42) definisce una funzione analitica nel semipiano positivo per cui possiamo scrivere:

$$(I. 43) \quad J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} dz' \frac{J(z')}{z' - z}$$

Assumendo che il contributo all'infinito sia nullo si ha:

$$(I. 44) \quad J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega' - z}$$

La funzione di interesse fisico,  $J(\omega)$ , è ottenuta calcolando  $J(z)$  per valori reali dal di sopra. Osserviamo che la (I. 40) definisce una funzione identicamente nulla nel semipiano superiore mentre (I. 43) ne definisce una identicamente nulla sul semipiano inferiore. Definiamo ora una funzione  $H(z)$  con le seguenti proprietà:

- $H(z) = K(z)$  per  $\text{Im} z < 0$
- $H(z) = J(z)$  per  $\text{Im} z > 0$
- $H(z)$  è analitica nel piano complesso  $z$  eccetto possibili poli e tagli lungo l'asse reale.

Queste proprietà sono soddisfatte dalla seguente funzione:

$$(I. 45) \quad H(z) = K(z) + J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{J(\omega') - K(\omega')}{\omega' - z}$$

Naturalmente nella (I. 45) i semipiani inferiore e superiore del piano complesso  $z$  sono separati da un taglio lungo l'asse reale, cosicchè a priori non c'è alcuna possibilità di ottenere informazioni per  $H(z)$  nel semipiano superiore conoscendo ad esempio  $H(z)$  in quello inferiore. Vogliamo ora mostrare che questo in realtà non accade perchè per ragioni fisiche il taglio va in effetti da  $\mu$  ad  $\infty$ . Usando le definizioni di  $K(\omega)$  e  $J(\omega)$  otteniamo:

$$(I. 46) \quad \begin{aligned} J(\omega) - K(\omega) &= -i [2\mu]^{1/2} \int d^4x e^{i\omega x_0 - i\vec{p} \cdot \vec{x}} [\theta(x) + \theta(-x)] \langle \mu | [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle = \\ &= -i [2\mu]^{1/2} \int d^4x e^{ipx} \langle \mu | [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

10.

ove  $p$  stà per il vettore  $(\omega, \vec{n}[\omega^2 - \mu^2]^{1/2})$ . Inserendo nella (I. 46) un set completo di stati intermedi  $|n\rangle$ :

$$\begin{aligned}
 J(\omega) - K(\omega) &= -i[2\mu]^{1/2} \sum_n \int d^4x e^{ipx} \left\{ \langle \mu | j(o) | n \rangle \langle n | \eta(x) | o \rangle - \langle \mu | \eta(x) | n \rangle \langle n | j(o) | o \rangle \right\} = \\
 \text{(I. 47)} \quad &= -i[2\mu]^{1/2} \sum_n \int d^4x e^{ipx} \left\{ \langle \mu | j(o) | n \rangle e^{ip_n x} \langle n | \eta(o) | o \rangle - \langle \mu | \eta(o) | n \rangle \langle n | j(o) | o \rangle e^{i(p' - p_n)x} \right\}
 \end{aligned}$$

ove  $p'$  stà per il vettore  $(\mu, o)$ . Integrando su  $x$  si ha:

$$\begin{aligned}
 J(\omega) - K(\omega) &= -i[2\mu]^{1/2} \sum_n \left\{ \langle \mu | j(o) | n \rangle \langle n | \eta(o) | o \rangle \delta(p + p_n) - \right. \\
 \text{(I. 48)} \quad &\left. - \langle \mu | \eta(o) | n \rangle \langle n | j(o) | o \rangle \delta(p + p' - p_n) \right\}
 \end{aligned}$$

nella prima somma la funzione  $\delta$  permette il contributo solo agli stati intermedi per cui  $p_n^2 = p^2 = \mu^2$ , così che solo lo stato di 1 particella può contribuire. Tuttavia tale contributo è nullo perchè  $\langle K | \eta(o) | o \rangle = 0$  il che si può dedurre calcolando l'elemento di matrice tra lo stato  $|K\rangle$  è il vuoto dell'equazione:

$$\text{(I. 49)} \quad (\square^2 + \mu^2) \phi(x) = \eta(x)$$

ottenendo

$$\text{(I. 50)} \quad \langle K | \eta(x) | o \rangle = (\square^2 + \mu^2) e^{ikx} \langle K | \phi(o) | o \rangle = 0$$

perchè  $K^2 = \mu^2$ . Per quanto riguarda la seconda somma in (I. 48) il vuoto non può contribuire come stato intermedio perchè  $\langle \mu | \eta(o) | o \rangle = 0$ . Anche lo stato di 1 particella, che dà luogo all'elemento di matrice  $\langle K | j(o) | o \rangle$ , in ogni caso realistico dà contributo nullo. Infatti per particelle pseudoscalari e per  $j(x)$  scalare tale elemento di matrice sarebbe nullo per invarianza sotto riflessione spaziale. Pertanto il contributo più basso viene dallo stato di 2 particelle avente  $(p_o^n)_{\text{minimo}} = 2\mu$ . Tenendo conto della  $\mathcal{L}$  di conservazione dell'energia bisogna che  $\omega + \mu = 2p_n^o$  per cui  $\omega_{\text{min}} = \mu$ . Abbiamo mostrato che  $J(\omega) - K(\omega) = 0$  se  $\omega < \mu$  per cui il taglio in realtà va da  $\mu$  ad  $\infty$ :

$$\text{(I. 51)} \quad H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu}^{\infty} d\omega \frac{J(\omega) - K(\omega)}{\omega - z}$$

La (I. 51) definisce una funzione analitica in tutto il piano complesso  $z$  tagliato da  $\mu$  a  $+\infty$ . In definitiva abbiamo mostrato che le funzioni  $J(z)$  e  $K(z)$  definite originariamente nei due semipiani opposti in realtà coincidono tra di loro e con  $H(z)$  e sono una la continuazione analitica dell'altra.

Possiamo ora passare dalla variabile  $\omega$  ad  $s = (p+p')^2$ :

$$\text{(I. 52)} \quad J(z) = \int_{4\mu^2}^{\infty} ds \frac{\sigma(s)}{s - z}$$

dove:

$$(I. 53) \quad \sigma(s) = (2\pi)^3 [2p'_0]^{1/2} \sum_n \langle p' | \eta(o) | n \rangle \langle n | j(o) | o \rangle \delta(p+p'-p_n)$$

e il più basso stato intermedio che contribuisce è quello di 2 particelle. Abbiamo pertanto mostrato che esiste un'unica funzione analitica  $J(z)$  che calcolata per  $z < 0$  dà il fattore di forma  $I(s)$  che si osserva nello scattering  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ ; calcolata per  $z = s+i\epsilon$  dà il fattore di forma  $J(s)$  che compare nello scattering  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  e infine calcolata per  $z = s-i\epsilon$  dà il fattore di forma  $K(s)$  che si osserva nel processo  $\pi^+\pi^- \rightarrow e^+e^-$ . Più precisamente i valori ai limiti sono le parti non degeneri di queste funzioni. Poiché  $I(s)$  è reale per  $s < 0$  bisogna che  $\sigma(s)$  sia reale lungo l'intervallo di integrazione:

$$(I. 54) \quad \sigma(s) = \sigma^*(s) \quad s \geq 4\mu^2$$

Pertanto si ha:

$$(I. 55) \quad I_m J(s+i\epsilon) \Big|_{s > 4\mu^2} = \pi \sigma(s) = \frac{1}{2i} [J(s+i\epsilon) - J(s-i\epsilon)]$$

e

$$(I. 56) \quad J^*(z) = J(z^*)$$

per cui  $J(z)$  è una funzione analitica reale.

Notiamo che tutti i nostri discorsi si basano sul fatto che  $J(z)$  e  $K(z)$  si annullano con sufficiente rapidità all'infinito; nel caso che questo non accada tutti i risultati continuano a valere, ma sarà necessario fare delle sottrazioni. In definitiva la funzione  $J(z)$  ha le seguenti proprietà:

- 1)  $J(z)$  è analitica nel piano complesso  $z$  tagliato da  $4\mu^2$  ad  $\infty$ .
- 2)  $J(z)$  è una funzione analitica reale.
- 3)  $J(z)$  ha le funzioni fisiche  $I, J$  e  $K$  come valori limiti mostrati nella Fig. 2.

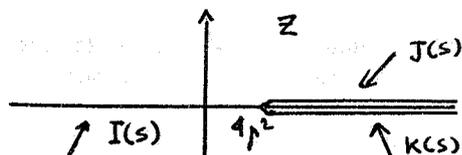


FIG. 2

Le espressioni (I. 55) e (I. 53) permettono di scrivere l'equazione di unitarietà per il fattore di forma:

$$(I. 57) \quad I_m J(s) = \frac{(2\pi)^4}{2} [2p'_0]^{1/2} \sum_n \langle p' | \eta(o) | n \rangle \langle n | j(o) | o \rangle \delta(p+p'-p_n)$$

Usando la formula di riduzione per il primo elemento di matrice  $\langle p' | \eta(o) | n \rangle$  si ha:

$$(I. 58) \quad I_m J(s) = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \frac{M(n \rightarrow pp')}{\prod_n} \langle n | j(o) | o \rangle \delta(p+p'-p_n)$$

la quale diagrammaticamente può essere scritta nella forma:

$$(I. 59) \quad I_m J(s) = \sum_n \text{diagramma}$$

Nel caso dell'elemento di matrice della corrente elettromagnetica  $\langle p' | j_\mu(0) | p \rangle$  possiamo ridurci ad una corrente scalare moltiplicando entrambi i membri della (I.17) per  $\frac{p'_\mu - p_\mu}{P^2}$ :

$$(I.60) \quad \langle p' | \frac{P_\mu j_\mu(0)}{e P^2} | p \rangle \sqrt{4 p_0 p'_0} = F(s)$$

Pertanto tutti i risultati precedenti si estendono alla corrente elettromagnetica con la posizione:

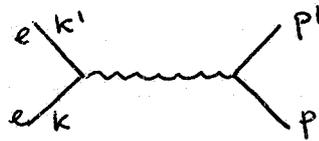
$$(I.61) \quad j(0) = \frac{P_\mu j_\mu(0)}{e P^2}$$

Valgono pertanto tutti i risultati ottenuti in precedenza, solo che questa volta la relazione di unitarietà diventa:

$$(I.62) \quad I_m F(s) = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n M(n \rightarrow pp') \langle n | \frac{P_\mu j_\mu(0)}{e P^2} | 0 \rangle \delta(p+p'-p_n)$$

### I.3. - Fattore di forma elettromagnetica del nucleone. -

Lo scattering elettrone-protone all'ordine più basso elettromagnetico è descritto dal seguente grafico di Feynman:



Procedendo in maniera completamente analoga a quanto fatto per lo scattering elettrone-pione si arriva alla seguente espressione per l'ampiezza di scattering:

$$(I.63) \quad A = \frac{e(2\pi)^4}{2} \delta(p'+k'-p-k) \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{1}{\sqrt{16 k_0 k'_0}} \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle$$

dove ora  $j_\mu(0)$  è la corrente elettromagnetica del protone. Data la diversa struttura di spin esistente tra il pione e il protone la forma più generale per l'elemento di matrice della corrente elettromagnetica del protone sarà:

$$(I.64) \quad \langle p' | j_\mu(0) | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{4 p_0 p'_0}} \bar{u}(p') O_\mu u(p)$$

dove  $O$  è un quadrivettore rispetto all'indice  $\mu$  e una matrice  $4 \times 4$  nello spazio degli spinori. Il fattore  $\sqrt{4 p_0 p'_0}$  è presente solo per ragioni di normalizzazione. L'elemento di matrice (I.64) è funzione del solo scalare indipendente  $q^2 = (p'-p)^2$ . L'operatore  $O_\mu$  sarà pertanto costruito a partire dallo scalare  $q^2$ , dai vettori  $q$  e  $P$  e dalle matrici  $\gamma$  di Dirac. Poichè  $O$  è una matrice  $4 \times 4$  essa può essere scritta come combinazione lineare delle 16 matrici

$$(I.65) \quad 1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5$$

Poichè inoltre  $j_\mu(o)$  non è uno pseudovettore i due termini con  $\gamma_5$  non possono essere presenti per ragioni di parità. I coefficienti dei termini rimanenti sono funzioni di tutti gli scalari indipendenti che è possibile costruire:  $q^2, \not{p}, \not{p}'$ . Tuttavia usando le regole di commutazione delle matrici di Dirac  $\not{p}$  e  $\not{p}'$  possono essere portati ad agire su  $\bar{u}(p')$  su  $u(p)$  dando luogo tramite l'equazione di Dirac a  $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')M$  e  $\not{p}u(p) = Mu(p)$ . Pertanto l'unico scalare che rimane in  $O_\mu$  è  $q^2$  e la sua forma più generale risulta:

$$(I. 66) \quad O_\mu = a(q^2) q_\mu + b(q^2) P_\mu + c(q^2) \not{\gamma}_\mu + d(q^2) \not{\sigma}_{\mu\nu} q_\nu + e(q^2) \not{\sigma}_{\mu\nu} P_\nu$$

Poichè  $\bar{u}(p')$  e  $u(p)$  verificano l'equazione di Dirac:

$$(I. 67) \quad (\not{p} - M) u_p = 0 \quad \bar{u}(p') [\not{p}' - M] = 0$$

è facile verificare le seguenti identità:

$$(I. 68) \quad \begin{aligned} \bar{u}(p') i \not{\sigma}_{\mu\nu} P_\nu u(p) &= (-q_\mu \bar{u}(p') u(p)) \\ \bar{u}(p') i \not{\sigma}_{\mu\nu} q_\nu u(p) &= \bar{u}(p') [2M \not{\gamma}_\mu - P_\mu] u(p) \end{aligned}$$

per cui la forma (I. 66) si riduce a:

$$(I. 69) \quad O_\mu = a'(q^2) q_\mu + c'(q^2) \not{\gamma}_\mu + d'(q^2) \not{\sigma}_{\mu\nu} q_\nu$$

dove  $a', c'$  e  $d'$  sono certe combinazioni di  $a, b, c, d$  ed  $e$ . Finora non è stato imposto altro che la invarianza di Lorentz e il fatto che gli spinori dei protoni iniziale e finale soddisfano l'equazione di Dirac. L'imposizione della conservazione della corrente dà luogo a:

$$(I. 70) \quad \begin{aligned} 0 &= \langle p' | \partial_\mu j_\mu | x=0 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{4p_0 p'_0}} \bar{u}(p') q_\mu O_\mu u(p) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4p_0 p'_0}} \bar{u}(p') [a'(q^2) q^2 + c'(q^2) \not{q} + d'(q^2) \not{\sigma}_{\mu\nu} q_\mu q_\nu] u(p) \end{aligned}$$

L'ultimo termine è nullo per antisimmetria di  $\not{\sigma}_{\mu\nu}$ . Il penultimo anche si annulla perchè:

$$(I. 71) \quad \bar{u}(p') \not{q} u(p) = \bar{u}(p) [\not{p}' - \not{p}] u(p) = 0$$

per l'equazione di Dirac. Pertanto la conservazione della corrente impone:

$$(I. 72) \quad q^2 a'(q^2) = 0$$

Giacchè in generale  $q^2 \neq 0$  si ha  $a'(q^2) = 0$ .

Pertanto la forma più generale per l'elemento di matrice della corrente elettromagnetica del protone risulta:

$$(I. 73) \quad \langle p' | j_\mu(o) | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{4p_0 p'_0}} \bar{u}(p') [e F_1(q^2) \not{\gamma}_\mu + i K_p F_2(q^2) \not{\sigma}_{\mu\nu} q_\nu] u(p)$$

dove  $e$  è la carica del protone e  $K_p$  il suo momento magnetico anomalo. Notiamo che la hermiticità della corrente assicura che  $F_1$  e  $F_2$  siano reali per valori di  $q^2$  space o like. Nel caso della corrente elettromagnetica del protone ci sono due tipi di differenze rispetto alla corrente elettromagnetica dell'elettrone (I. 2): la prima è dovuta al fatto che il momento magnetico del protone non è uguale al momento magnetico di Dirac cioè a quello dell'elettrone per cui vi sarà un termine di interazione  $\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  in addizione al termine usuale  $\gamma_\mu A_\mu$ ; la seconda è dovuta al fatto che il protone come il pione ha una struttura forte per cui ci sono dei fattori di forma invece che delle costanti come accade nel caso dell'elettrone. La normalizzazione a  $q^2 = 0$  di  $F_1(q^2)$  si ottiene prendendo l'elemento di matrice dell'operatore di carica tra due stati di protone:

$$(I. 74) \quad \langle p' | \int d^3x j_0(x) | p \rangle = e \langle p' | p \rangle = \int d^3x e^{i(p'-p)x} \langle p' | j_0(0) | p \rangle$$

A  $p = p'$  si ha:

$$(I. 75) \quad e = \langle p' | j_0(0) | p \rangle = \frac{e}{2p_0} F_1(0) u^+(p) u(p) = e F_1(0)$$

da cui

$$(I. 76) \quad F_1(0) = 1$$

Partendo dall'operatore momento magnetico

$$(I. 77) \quad M = \frac{1}{2} \int \vec{r} \wedge \vec{j} d^3x$$

si dimostra in maniera analoga che:

$$(I. 78) \quad F_2(0) = 1$$

La sezione d'urto differenziale risultante da (I. 63) e (I. 73) è data dalla formula di Rosenbluth:

$$(I. 79) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2 m^2}{4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left\{ \frac{\cotg^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \tau} [F_1 + k \tau F_2]^2 + \left[ 2 + \frac{\cotg^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \tau} \right] \tau [F_1 + k F_2]^2 \right\}$$

dove  $r_0$  è il raggio Compton dell'elettrone,  $M$   $m$  è la massa del protone (elettrone),  $E$  e  $\theta$  sono l'energia dell'elettrone e l'angolo di scattering nel sistema del laboratorio,  $\tau = q^2/4M^2$ .

Se svolgiamo i quadrati che compaiono nella (I. 79) notiamo il comparire di termini misti  $F_1 F_2$ ; per eliminare i quali conviene introdurre  $G_E$  e  $G_M$  che sono costruiti in modo da "diagonalizzare" la formula di Rosenbluth. Essi sono definiti a partire da  $F_1$  e  $F_2$  nell'ovvia maniera seguente:

$$(I. 80) \quad G_E = F_1 + k \tau F_2; \quad G_M = F_1 + k F_2$$

normalizzati nella maniera seguente:

$$(I.81) \quad G_E^p(0) = 1 \quad G_M^p(0) = \mu_p = 1 + k_p$$

dove  $\mu_p$  è il momento magnetico totale del protone:

In termini di  $G_E$  e  $G_M$  i fattori di forma di Dirac risultano:

$$(I.82) \quad kF_2 = \frac{G_M(q^2) - G_E(q^2)}{1 - \tau}; \quad F_1 = \frac{G_E(q^2) - \tau G_M(q^2)}{1 - \tau}$$

Poichè gli  $F$  e i  $G$  sono costruiti in modo da non avere singolarità cinematiche si ha la equazione di constraint alla soglia  $NN$ :

$$(I.83) \quad G_E(4M^2) = G_M(4M^2)$$

Le funzioni  $F_1, F_2, G_E$  e  $G_M$ , come definite nelle equazioni (I.73) e (I.80) sono definite solo per valori space-like di  $q^2$ . Le definizioni di  $F_1$  e  $F_2$  possono essere estese per includere valori time-like di  $q^2$  scrivendo:

$$(I.84) \quad \langle p, p' | j_\mu(0) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4p_0 p'_0}} \bar{u}(p') \left[ e F_1(q^2) \gamma_\mu + i F_2(q^2) k \sigma_{\mu\nu} q_\nu \right] v(p)$$

ove  $\langle p, p' | j_\mu(0) | 0 \rangle$  è l'ampiezza che entra nel processo  $e^+ e^- \rightarrow p \bar{p}$ . La (I.84) dà  $F_1$  e  $F_2$  per  $q^2 > 4M^2$ . Seguendo poi un procedimento analogo a quello descritto nel paragrafo (I.2) è possibile mostrare che esistono due funzioni analitiche  $F_1(z)$  e  $F_2(z)$  reali i cui valori limiti sono gli  $F_1(q^2)$  e gli  $F_2(q^2)$  che si osservano nelle rispettive zone fisiche dei processi  $e^+ e^- \rightarrow p \bar{p}$ ,  $p \bar{p} \rightarrow e^+ e^-$ ,  $ep \rightarrow ep$ . Tale discorso vale ovviamente anche per le funzioni  $G_E$  e  $G_M$ . Si può mostrare che la condizione di soglia (I.83) equivale a richiedere che  $p \bar{p}$  in soglia vengono creati in onda S. Le stesse considerazioni fatte sopra per il protone possono essere fatte per il neutrone. Infatti possiamo allo stesso modo definire per il neutrone:

$$(I.85) \quad \langle n', n | j_\mu(0) | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{4n_0 n'_0}} \bar{u}(n') \left[ F_1^n(q^2) \gamma_\mu + i k_n \sigma_{\mu\nu} q_\nu F_2^n(q^2) \right] u(n)$$

dove  $q = n' - n$  e  $n', n$  è il momento del neutrone finale iniziale.

In maniera equivalente per valori time-like di  $q^2$  si ha:

$$(I.86) \quad \langle n', n | j_\mu(0) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4n_0 n'_0}} \bar{u}(n') \left[ F_1^n(q^2) \gamma_\mu + i F_2^n(q^2) k_n \sigma_{\mu\nu} q_\nu \right] v(n)$$

dove  $q = n' + n$ . Le condizioni di normalizzazione a  $q^2 = 0$  sono:

$$(I.87) \quad F_1^n(0) = 0 \quad F_2^n(0) = 1$$

Vogliamo infine introdurre i fattori di forma scalare e vettoriale frequentemente usati nelle applicazioni. L'operatore di carica di un sistema è dato dalla formula di Gell-Mann e Nishijima:

$$(I.88) \quad Q = T_3 + \frac{1}{2} Y$$

per cui possiamo essere indotti a pensare la corrente elettromagnetica costituita da 2 pezzi:

$$(I.89) \quad j_\mu(x) = j_\mu^{(3)}(x) + j_\mu^{(Y)}(x)$$

il primo dei quali si trasforma come la 3<sup>a</sup> componente di un vettore nello spazio dello spin isotopico e il secondo come uno scalare. In generale l'elemento di matrice  $\langle N' | j_\mu(0) | N \rangle$  rispetto alle variabili di spin isotopico sarà della forma:

$$(I.90) \quad \langle N' | j_\mu(0) | N \rangle = \chi^\dagger O_\mu \chi$$

dove  $O_\mu$  sarà una combinazione lineare delle matrici di Pauli  $\tau_i$  e della matrice identità  $\mathbb{1}$ .  $\chi$  è lo spinore di Pauli di spin 1/2. Notiamo che:

$$(I.91) \quad \chi^p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poichè  $j_\mu(0)$  è costituita da una parte che si trasforma come  $T_3$  e da un'altra che si trasforma come uno scalare dobbiamo prendere in considerazione solo le matrici  $\mathbb{1}$  e  $\tau_3$ . Pertanto esplicitando sia le variabili di spin che quelle di spin isotopico (I.90) risulta:

$$(I.92) \quad \langle N' | j_\mu(q) | N \rangle = \frac{1}{\sqrt{4N_0 N'_0}} \chi^\dagger u(N') \left\{ [F_1^S(q^2) + \tau_3 F_1^V(q^2)] \gamma_\mu \frac{e}{2} + i [\tau_s F_2^S(q^2) + \tau_3 \mu_\nu F_2^V(q^2)] \sigma_{\mu\nu} q_\nu \right\} u(N) \chi$$

I fattori  $F_i^S$  e  $F_i^{S'}$  possono ovviamente essere espressi in funzione di  $F_i^p$  e  $F_i^n$ :

$$(I.93) \quad F_i^p(q^2) = F_i^S(q^2) + F_i^V(q^2); \quad F_i^n(q^2) = F_i^S(q^2) - F_i^V(q^2)$$

Normalizzando  $F_i^S$  e  $F_i^V$  a 1 a  $p^2 = 0$  si ha:

$$(I.94) \quad \mu^S = \frac{\Lambda_p + \Lambda_n}{2}; \quad \mu^V = \frac{\Lambda_p - \Lambda_n}{2}$$

Ovviamente una decomposizione del tutto simile vale per i fattori di forma  $G_E(q^2)$  e  $G_M(q^2)$ .

Infine in maniera analoga a quanto fatto per il pione possiamo definire i raggi quadratici medi per il nucleone:

$$(I.95) \quad \langle r_i^2 \rangle = +6 \left. \frac{dF_i(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}$$

## I.4. - Situazione sperimentale. -

Il fattore di forma del pione nella zona space-like è molto poco noto in quanto  $F(s)$  in tale zona è ottenuto da esperimenti di elettroproduzione nella maniera spiegata nel parag. (I.1). Da tali dati si estrae:

$$(I.96) \quad \begin{aligned} \sqrt{\langle r_{\pi}^2 \rangle} &= 0.80 \pm 0.10 \text{ F.} && \text{C. W. Akerlof et al. (4)} \\ \sqrt{\langle r_{\pi}^2 \rangle} &= 0.86 \pm 0.14 \text{ F.} && \text{C. Mistretta et al. (5)} \end{aligned}$$

Tali dati sono riportati in Fig. 3. I dati sperimentali nella zona time-like sono noti degli esperimenti con anelli di accumulo essenzialmente intorno alla  $\rho$ . (Vedi Fig. 4)<sup>(6,7)</sup>.

Per quanto riguarda il fattore di forma del nucleone valgono approssimativamente le seguenti relazioni:

$$(I.97) \quad G_E^p(t) = \frac{G_M^p(t)}{\mu_p} = \frac{G_M^n(t)}{\mu_n} = G(t); \quad G_E^n(t) \sim 0$$

eccetto possibilmente una piccola regione intorno a  $t=0$ , che è ancora controversa. La relazione  $G_E^p(t) = G_M^p / \mu_p$  sembra soddisfatta entro gli errori fino a  $|t| \lesssim 4 (\text{GeV}/c)^2$ ; mentre  $G_M^n / \mu_n = G(t)$ <sup>(8)</sup> è stata provata sperimentalmente per  $t \lesssim 1.2 (\text{GeV}/c)^2$ . I dati sul fattore di forma elettrico del neutrone rimangono tuttora in uno stato insoddisfacente, ma sono compatibili con il dare  $G_E^n \sim 0$  anche per  $t \neq 0$ <sup>(9)</sup>.

Pertanto tenendo conto delle "scaling laws" (I.97) esiste effettivamente solo un fattore di forma che chiamiamo  $G(t)$  che almeno per valori non troppo alti di  $|t|$  è ben rappresentato da:

$$(I.98) \quad G(t) = \frac{1}{\left[ 1 + \frac{|t|}{18.7 \text{ F}^{-2}} \right]^2}$$

che dà un raggio quadratico medio pari a:

$$(I.99) \quad \langle r_p^2 \rangle = 0.64 \text{ F}^2$$

Il valore di  $\langle r_p^2 \rangle$  è estremamente ben noto sperimentalmente:

$$(I.100) \quad \langle r_p^2 \rangle = (0.64 \pm 0.01) \text{ F}^2$$

Per quanto riguarda  $G_E^n$  sebbene i dati di scattering  $eN$  suggeriscono che  $G_E^n$  è probabilmente zero e certamente molto piccolo, purtroppo esperimenti di neutroni lenti su elettroni atomici danno un valore del raggio quadratico per il neutrone:

$$(I.101) \quad \langle r_E^2 \rangle^n = 0.126 \text{ F}^2$$

che è comparabile con quello del protone. La grande variazione di  $G_E^N$  vicino alla soglia è tuttora un problema non risolto. I dati del fattore di forma del protone  $G(t)$  sono ripor

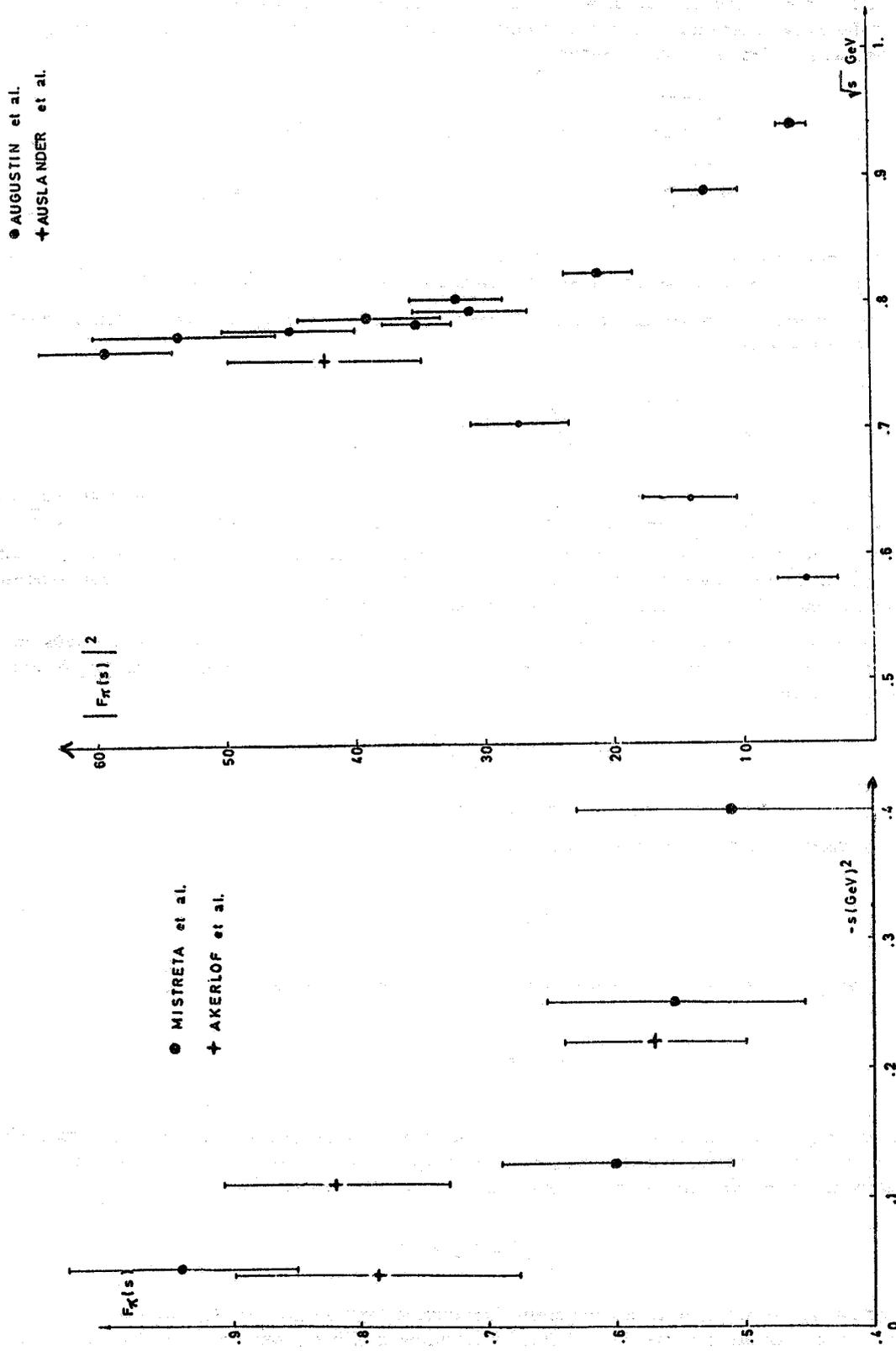


FIG. 4

FIG. 3

tati in Fig. 5, 6, 7<sup>(10+16)</sup>, Nella regione time-like si hanno due esperimenti<sup>(17)</sup> di anni  
 chilazione  $p\bar{p} \rightarrow e^+e^-$ ;  $p\bar{p} \rightarrow \mu^+\mu^-$  che pongono i limiti

$$(I.102) \quad |G_E| \lesssim 0.2 \quad |G_M| \lesssim 0.2 \quad t=5.1 \text{ e } 6.8 (\text{GeV}/c)^2$$

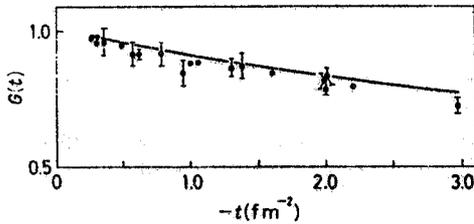


FIG. 5 - Dati con bassi valori di  $t$  tratti da (10).

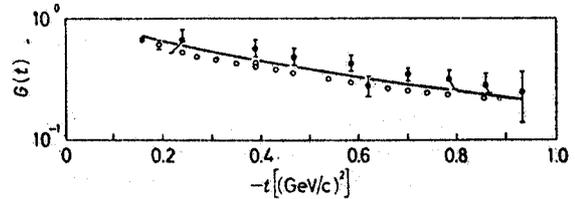


FIG. 6 - Dati con  $-t < 1 (\text{GeV}/c)^2$  Hand et al. (10), o Jausseus et al. (11).

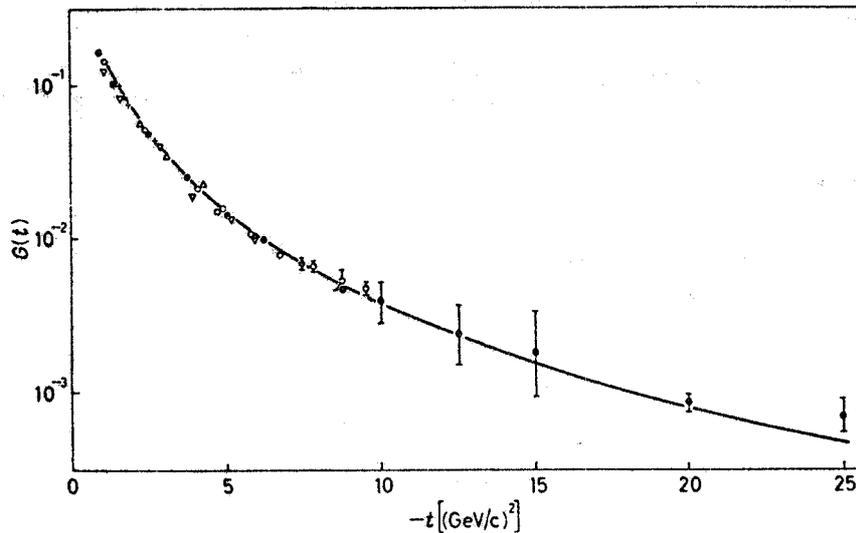
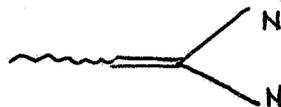


FIG. 7 - Dati con  $-t > 1 (\text{GeV}/c)^2$

I.5.- Modelli per i fattori di forma  $F(s)$  e  $G(t)$ .

Tutti i modelli più sensati per i fattori di forma elettromagnetica si basano sulla ipotesi della vector dominance per cui tali fattori di forma sono ben descritti da grafici del tipo



in cui il fotone interagisce con gli adroni tramite un mesone vettoriale ( $\rho, \omega, \phi$ ). Il contributo di tali grafici a  $F_T(t)$  si calcola subito tenendo conto della formula (I.62). Basta infatti considerare il contributo del mesone  $\rho$  come stato intermedio nella (I.62):

20.

$$(I.103) \quad I_m F_\pi(s) = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_{\rho} \frac{M(\rho \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\sqrt{2E_\rho}} \langle \rho | \frac{P_\mu j_\mu(0)}{e p^2} | 0 \rangle \delta(p+p'-p_\rho)$$

Ovviamente stiamo considerando il  $\rho$  come una particella stabile.  $\sum_{\rho}$  sta ad indicare la somma sugli stati di momento e di polarizzazione del  $\rho$ . L'elemento di matrice invariante  $M(\rho \rightarrow \pi^+ \pi^-)$  ha la forma:

$$(I.104) \quad M(\rho \rightarrow 2\pi) = f_{\rho\pi\pi} \epsilon_\lambda(\rho) P_\lambda$$

Infatti in esso deve comparire il vettore di polarizzazione del  $\rho$  che può essere saturato con  $P^\lambda_0$  con  $q^\lambda$ . Tuttavia il termine con  $q^\lambda$  non contribuisce perchè il vettore di polarizzazione del  $\rho$  obbedisce alla condizione di Lorentz  $q^\lambda \epsilon_\lambda(p) = 0$ .

Inoltre l'elemento di matrice  $\langle \rho | j_\mu(0) | 0 \rangle$  può essere scritto nella forma:

$$(I.105) \quad \langle \rho | j_\mu(0) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_\rho}} m_\rho^2 f_{\rho\gamma} \epsilon_\mu(\rho)$$

Essendo  $E_\rho$  l'energia del  $\rho$ . Inserendo (I.104) e (I.105) nella (I.103) si ha:

$$(I.106) \quad I_m F_\pi(s) = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_{\rho} \frac{f_{\rho\pi\pi} \epsilon_\lambda(\rho) P^\lambda}{\sqrt{2E_\rho}} \frac{P_\mu \epsilon^\mu(\rho)}{e p^2 \sqrt{2E_\rho}} m_\rho^2 f_{\rho\gamma} \delta^{(p+p'-p_\rho)}$$

Ricordando che

$$(I.107) \quad \sum_i \epsilon_\lambda^i(\rho) P^\lambda \epsilon_\lambda^i(\rho) P^\lambda = (g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}) P^\mu P^\nu = P^2$$

e che

$$(I.108) \quad \sum_{\text{momenti}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

si ha:

$$(I.109) \quad I_m F_\pi(s) = \pi \frac{f_{\rho\pi\pi} m_\rho^2 f_e}{2eE_\rho} \delta(p_0 + p'_0 - E_\rho)$$

L'espressione (I.109) nel sistema di quiete del  $\rho$  in funzione della variabile diventa:

$$(I.110) \quad I_m F_\pi(s) = \pi \frac{f_{\rho\pi\pi} f_{\rho\gamma} m_\rho^2}{e} \delta(m_\rho^2 - s)$$

da cui

$$(I.111) \quad F_\pi(s) = \frac{f_{\rho\gamma} f_{\rho\pi\pi} m_\rho^2}{e m_\rho^2 - s}$$

La normalizzazione a  $s=0$  impone  $f_{\rho} f_{\pi\pi} = e$  e la quale sembra abbastanza ben verificata sperimentalmente: Un'espressione del tipo (I.111) con una larghezza finita rappresenta abbastanza bene i dati di  $F_{\pi}(s)$  nella zona time-like. Notiamo che se l'espressione (I.111) continuasse a rappresentare bene il fattore di forma del pione vorrebbe dire che tutti gli altri stati intermedi della formula (I.62) sono trascurabili e che l'andamento allo infinito sarebbe  $\sim 1/s$ . Anche nel caso del fattore di forma del nucleone si può fare l'approssimazione di considerare solo stati intermedi vettoriali come  $\rho, \omega, \phi$ : tali approssimazioni danno tuttavia fattori di forma che non decrescono con sufficiente rapidità allo infinito a meno di non considerare residui decrescenti con  $t$ .

Per ovviare a questa deficienza J.G. Cordes e P.J. O'Donnell hanno fatto un fit del fattore di forma elettromagnetico isovettoriale del nucleone mettendo come stati intermedi  $\rho$  e il  $\rho'$  e scrivendo:

$$(I.112) \quad F_1^V(t) = \frac{\gamma_{\rho NN} F_{\rho}}{m_{\rho}^2 - t - \Gamma_{\rho} (4m_{\pi}^2 - t)^{1/2}} + \frac{NN^F}{m_{\rho'}^2 - t - \Gamma_{\rho'\pi\pi} [4m_{\pi}^2 - t]^{1/2}}$$

richiedendo poi che la somma dei residui dei poli si annulli e che  $\Gamma_{\rho} = \Gamma_{\rho'\pi\pi}$ . L'anno scorso G. Veneziano<sup>(19)</sup> ha proposto un modello per lo scattering di particelle a forte interazione avente in sé molte proprietà che ci si aspetta abbia l'ampiezza di scattering e che prevede tra l'altro l'esistenza di un'infinità di particelle  $1^-$ .

In analogia con il modello di Veneziano è stata proposta<sup>(29)</sup> la seguente espressione per  $G(t)$ :

$$(I.113) \quad G(t) = \gamma \frac{\Gamma(1 - \alpha(t))}{\Gamma(1 - \alpha(t) + \beta)}$$

dove  $e$  e  $\beta$  sono due numeri che successivamente determineremo e  $\alpha(s) = as + b$  è la traiettoria del  $\rho$ .

L'espressione (I.113) ha le seguenti proprietà:

a) Contiene un numero infinito di poli ugualmente spaziate che corrispondono a risonanze  $1^-$  di larghezza o giacenti sulle traiettorie figlie del  $\rho$ .

b) Soddisfa la relazione di dispersione

$$G(t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\text{Im} G(t')}{t' - t} dt'$$

c) Si comporta come  $|t|^{-\beta}$  per  $|t| \rightarrow \infty$ ,  $\arg t \neq 0$ .

Notiamo che se  $\beta = n$ ,  $G(t)$  ha solo  $n$  poli. In particolare per  $n=1$  si ha il risultato della  $\rho$  dominance. La traiettoria usata è:

$$(I.114) \quad \alpha(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{2m_{\rho}^2}$$

ed è determinata dal fatto di passare a 1 per  $t = m_{\rho}^2$  e di verificare le richieste della PCAC:  $\alpha(0) = 1/2$  per pioni di quadrimomento nullo. Il parametro  $\gamma$  è determinato dalla normalizzazione a  $t=0$ :

$$(I.115) \quad G(t) = \frac{\Gamma(1 - \alpha(t))}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + \beta)}{\Gamma(1 - \alpha(t) + \beta)}$$

Il parametro  $\beta$  è determinato dalla relazione di constraint (I.83) e dalla "scaling law" (I.96) che è ritenuta esattamente soddisfatta anche per valori di  $q^2$  time-like. Queste due relazioni impongono infatti:

$$(I.116) \quad \beta = \alpha(4M^2) - 1 - n = \frac{5}{2} - n$$

mettendo dentro i valori fisici della massa del  $\rho$  e del nucleone  $n$  è un numero intero. Dal comportamento asintotico di  $G(t)$  segue che il suo valore accettabile è  $\beta = 5/2$  per cui la (I.115) diventa:

$$(I.117) \quad G(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1 - \alpha(t))}{\Gamma(\frac{7}{2} - \alpha(t))}$$

$G(t)$  non ha più parametri liberi e può essere paragonato con i dati sperimentali (vedi Fig. 5, 6, 7).

L'andamento asintotico per  $|t| \rightarrow \infty$  nella regione space-like risulta:

$$(I.118) \quad G(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi} m_\rho^2} |t|^{-5/2}$$

Nella zona time-like la (I.117) ha lo stesso difetto dell'ampiezza di Veneziano; ha un numero infinito di poli di larghezza nulla. Il residuo al polo ci può dare però un'idea dello accoppiamento delle varie risonanze al fotone e alla coppia  $NN$ .

Diamo i residui per i primi quattro poli dell'ampiezza (I.117)

$$(I.119) \quad G(t) \sim \frac{m_\rho^2}{m_x^2 - t} \left\{ \frac{16}{3\pi}; -\frac{8}{3\pi}; \frac{2}{\pi}; \frac{1}{3\pi} \right\}$$

che si possono dedurre dall'espressione generale per il fattore di forma vicino al polo  $n$ -esimo:

$$(I.120) \quad G(t) \underset{t \sim m_x^2}{\sim} \frac{4}{\pi^{3/2}} \frac{\Gamma(n-5/2)}{\Gamma(n)} \frac{m_\rho^2}{m_x^2 - t}$$

Il raggio quadratico medio del protone previsto dalla formula (I.117) risulta:

$$(I.121) \quad \langle r^2 \rangle^p = \frac{3}{m_\rho^2} [3/2 + 2 \log 2] = 0.57 F^2$$

Si è notato nei paragrafi precedenti che i fattori di forma sono determinati dalla struttura delle interazioni forti che a sua volta è fissata dalla conoscenza delle ampiezze di scattering dei processi che coinvolgono adroni. Pertanto ci si aspetta che i fattori di forma possono essere determinati una volta che si conoscono le ampiezze di scattering per i processi forti. Un esempio di questo fatto è dovuto a Y. Oyanagi<sup>(21)</sup> che ha dedotto una espressione per fattore di forma del pione a partire dalla conoscenza delle interazioni forti. Più precisamente gli ingredienti di questa deduzione sono:

1) Ampiezze di scattering del tipo dell'ampiezza di Veneziano per i processi  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$

e  $\pi A_1 \rightarrow \pi \pi$ .

2) La "field current identity" per la corrente assiale non strana:

$$A_{\mu}^{(-)}(x) = A_{\mu}^1 - i A_{\mu}^2 = \sqrt{2} f_{\pi} A_{1\mu}^{+}(x) + \sqrt{2} f_{\pi} \partial_{\mu} \phi_{\pi^{+}}(x)$$

3) Validità della PCAC nella forma:

$$\partial_{\mu} A_{\mu}^{+}(x) = m_{\pi}^2 f_{\pi} \phi_{\pi}$$

4) Validità della relazione di commutazione a tempi uguali

$$[A_{\mu}^{(+)}(x), A_{\nu}^{(-)}(y)] \delta(y_0 - x_0) = V_{\mu\nu}^{(3)}(y) \delta^4(y)$$

Sotto queste ipotesi Oyanagi ha dedotto la seguente espressione per il fattore di forma del pione:

$$(I.122) \quad F_{\pi}(t) = \frac{f_{\pi}^2 f_{\rho\pi\pi}^2}{m_{\rho}^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1-\alpha(t))}{\Gamma(5/2-\alpha(t))}$$

dove  $f_{\pi}$  è la costante di decadimento del  $\pi$ . La normalizzazione a  $t=0$  dà:

$$(I.123) \quad \frac{2 f_{\pi}^2 f_{\rho\pi\pi}^2}{m_{\rho}^2} = \frac{2}{\pi}$$

che dà una larghezza  $\Gamma_{\rho} = 88$  MeV avendo usato il valore  $f_{\pi} = 0.093$  GeV. In definitiva la (I.122) diventa:

$$(I.124) \quad F_{\pi}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1-\alpha(t))}{\Gamma(5/2-\alpha(t))}$$

Il raggio quadratico del pione si calcola subito dall'espressione (I.124) e risulta:

$$(I.125) \quad \langle r_{\pi}^2 \rangle = \frac{3}{m_{\rho}^2} [1 + 2 \log 2] = 0.49 F^2$$

in buon accordo con i valori sperimentali (I.96)

L'andamento asintotico per  $|t| \rightarrow \infty$  risulta:

$$(I.126) \quad F_{\pi}(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} |t|^{-3/2}$$

Il contributo del polo n-esimo della (I.124) risulta:

$$(I.127) \quad F_{\pi}(t) \underset{t \sim M_n^2}{\sim} \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n-3/2)}{\Gamma(n)} \frac{m_{\rho}^2}{M_n^2 - t}$$

I residui dei primi poli sono:

$$(I.128) \quad F(t) = \frac{m_\rho^2}{m_\pi^2 - t} \left\{ \frac{4}{\pi}; -\frac{2}{\pi}; -\frac{1}{2\pi} \right\}$$

Si noti che a differenza del fattore di forma (I.117) in cui tutti i residui sono positivi a meno di quello del polo a  $\alpha(t) = 2$ ; qui tutti i residui sono negativi meno quello del polo del  $\rho$ . Suura<sup>(22)</sup> ha osservato che usando l'algebra delle correnti e l'"field current identity" alla maniera di Oyanagi si ha un'asimmetria che, mentre la sorgente pseudoscalare  $\partial_\mu A_\mu(x)$  si accoppia solo al mesone  $\pi$ , al contrario la sua partner chirale si accoppia a tutte le figlie  $O^+$  delle traiettorie del  $\rho$ . Eliminando queste asimmetrie Suura trova la seguente espressione per  $F_\pi(t)$ :

$$(I.129) \quad F_\pi(t) = \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{2}\pi} \frac{\Gamma(1/2 - 1/2 \alpha(t))}{\Gamma(5/4 - 1/2 \alpha(t))}$$

la quale presenta le seguenti caratteristiche:

a)  $F_\pi(t)$  ha poli solo per valori dispari di  $\alpha(t)$  per cui non si prevede l'accoppiamento del fotone al  $\rho'(1)$  (figlia del mesone  $f^0$ ).

b) Asintoticamente  $F_\pi(t)$  si comporta

$$F_\pi(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} |t|^{-3/4}$$

c) Il raggio quadratico del pione risulta:

$$\langle r_\pi^2 \rangle = \frac{3}{2m_\rho^2} \left[ \psi(1) - \psi\left(\frac{1}{4}\right) \right] \approx (0.6 F)^2$$

d) Il comportamento del fattore di forma vicino al polo n-esimo risulta:

$$F_\pi(t) \underset{\alpha(t) \sim 2n+1}{\sim} + \frac{\Gamma(3/4)}{\pi} \frac{m_\rho^2}{M_n^2 - t} \frac{\Gamma(n+1/4)}{\Gamma(n+1)}$$

Per i primi poli si ha:

$$F_\pi(t) \sim \frac{m_\rho^2}{M_n^2 - t} \left\{ + \frac{\sqrt{2}}{2}; + \frac{\sqrt{2}}{8} \right\}$$

## BIBLIOGRAFIA. -

- (1) - Tale paragrafo è tratto da: G. Barton, Dispersion Techniques in field theory, (Benjamin, 1965), Cap. VII.
- (2) - M. L. Goldberger, Dispersion theory and Elementary Particles, (Wiley, 1964).
- (3) - M. L. Goldberger and K. M. Watson, Collision Theory, (Wiley, 1964).
- (4) - C. W. Akerlof et al., Phys. Rev. 163, 1482 (1967).
- (5) - C. Mistretta et al., Phys. Rev. Letters 20, 1523 (1968).
- (6) - Augustin
- (7) - Auslander
- (8) - Vedi ad esempio: G. Weber, Proc. Int. Symp. on Electron and Photon Interactions at High Energies (Stanford, 1967).
- (9) - Vedi ad esempio: W.K.H. Panofsky, Rapporteur's report at the XIV Conf. on High-Energy Physics (Vienna, 1968).
- (10) - L.N. Hand, D.G. Miller and R. Wilson, Rev. Mod. Phys. 35, 335 (1963).
- (11) - T. Jaussens, R. Hofstadter, E.B. Hughes and M.R. Yearian, Phys. Rev. 142, 922 (1966).
- (12) - H. J. Behrends, F. W. Bresse, J. Engler, H. Hulthschig, S. Galster, G. Hartwig and H. Schapper, Nuovo Cimento 48 A, 140 (1969).
- (13) - W. Bartel, B. Dudelzak, H. Krehbiel, J.M. Mc Elroy, U. Meyer-Berkhout, R. J. Morrison, H. Nguyen-Ngoc, W. Schmidt and G. Weber, Phys. Rev. Letters 17, 608 (1966).
- (14) - W. Albrecht, H. J. Behrend, F.N. Brasse, W. Flauger, H. Hulthschig and K.G. Steffen, Phys. Rev. Letters 17, 1192 (1966).
- (15) - D. H. Coward
- (16) - M. Golten
- (17) - M. Conversi, T. Massam, Th. Muller e A. Zichichi, Nuovo Cimento 40 A, 690 (1965).
- (18) - R. Gomez, D. Hartell, A. Mashke, G. Pine, A. Tollestrup and T. Ziff, AGS experiment (unpublished) citato in Lectures at the 1966 Scottish University School in Phys. nella sezione fatta da R. Wilson, editore L. L. J. Vick e T. W. Priest (Londra 1967).
- (19) - J. G. Cordes and P. J. O'Donnell
- (20) - G. Veneziano, Nuovo Cimento 57 A, 190 (1968).
- (21) - P. Di Vecchia and F. Drago, Lett. Nuovo Cimento 1, 917 (1969). (Espressioni analoghe alla (I.113) sono state proposte anche da: Jengo e E. Remiddi.
- (22) - Y. Oyanagi
- (23) - H. Suura, Phys. Rev. Letters 23, 551 (1969).

## II. - ANALISI ARMONICA SUL GRUPPO DI LORENTZ E FATTORI DI FORMA NELLA REGIONE SPACE-LIKE. -

(A cura di S. Ferrara)

### II.1. - Introduzione. -

In queste lezioni viene studiato un modello per i fattori di forma nella regione di altri momenti trasferiti, sviluppato da J. Kupsh e W. Ruhl al CERN, e che fa uso delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz omogeneo.

Formulando in maniera opportuna la cinematica è infatti possibile definire l'elemento di matrice dell'operatore di corrente tra due stati di singola particella (funzione vertice), come una funzione definita sul gruppo di Lorentz, ed espanderlo sulla base costituita dagli elementi di matrice delle rappresentazioni di tale gruppo (analisi in onde parziali generalizzata). Questa tecnica di sviluppo non è altro che una generalizzazione della usuale analisi in onde parziali, tipo di espansione ben nota nella teoria della diffusione. Si può mostrare che le rappresentazioni irriducibili (infinito-dimensionali) del gruppo di Lorentz sono caratterizzate da due numeri  $M, \lambda$  dove  $M$  può solamente assumere valori interi o seminteri e  $\lambda$  può essere un numero complesso arbitrario. Per  $\lambda = M + k$  ( $k$  intero positivo) si ottengono le familiari rappresentazioni spinoriali (finito-dimensionali)  $(J_1, J_2) = (M + (k-1/2), k-1/2)$ . Se si assume, come ipotesi dinamica, la meromorfia in  $\lambda$  dei coefficienti dello sviluppo della funzione vertice (onde parziali generalizzate), si può vedere che è possibile ottenere per essa un andamento di potenza in  $q^2$  nella regione di alto momento trasferito; un polo nei coefficienti dello sviluppo corrispondendo ad un ben determinato andamento asintotico. Una conseguenza abbastanza interessante di questa ipotesi è che, nel caso particolare dei fattori di forma elettromagnetici del nucleone, la "scaling law" può essere automaticamente soddisfatta.

L'immagine fisica che può essere attribuita a queste singolarità è la seguente: i poli delle onde parziali dei fattori di forma sono connessi con una struttura a "torre" delle particelle esterne.

Questa ultima ipotesi consiste nell'assumere che un polo domini simultaneamente i fattori di forma di un multipletto infinito di particelle adroniche (barioni o mesoni). Se, per esempio, vengono considerati i fattori di forma elettromagnetici e si effettua l'ipotesi della torre per il nucleone e per le risonanze nucleoniche di spin isotopico  $1/2$ , allora il polo nelle onde parziali della funzione vertice del nucleone, che determina l'andamento asintotico dei fattori di forma del nucleone, deve riapparire nella stessa posizione nelle onde parziali della funzione vertice degli altri membri della torre. Una conseguenza di queste argomentazioni, sperimentalmente verificabile, è il valore costante nel limite di alto momento trasferito, del rapporto della sezione d'urto di elettroproduzione di risonanze sulla sezione d'urto di Rosenbluth per lo scattering elastico elettrone-nucleone.

L'ipotesi di una struttura a torre delle particelle adroniche è intimamente connessa con una teoria di campi ad infinite componenti; invero il numero di risonanze che differiscono per lo spin e la parità (avendo gli stessi numeri quantici interni come la carica, ipercarica e spin isotopico) è così grande che sembra giustificato considerarle come membri di un multipletto infinito piuttosto che associare a ciascuna di esse un campo indipendente.

L'utilità dello schema delle equazioni ed infinite componenti sta nel sostituire il complicato (ed ignoto per quel che concerne le interazioni forti) meccanismo di interazione di un numero enorme di particelle, con una unica equazione di campo in cui il campo si trasforma secondo una rappresentazione infinito-dimensionale del gruppo di Lorentz. L'equazione che deve soddisfare il campo va scelta opportunamente in modo da riprodurre lo spettro di massa realmente osservato. In termini di invarianza relativistica lo spettro di massa dice quali rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincarè (gruppo di Lorentz non omogeneo) e con quali molteplicità sono contenute nel campo ad infinite compo-

menti. E' opportuno notare che in una teoria di campo convenzionale lo spettro di massa può determinarsi (in modo approssimato) sommando una serie infinita di grafici di Feynman. L'unico modo che si conosce per far questo è quello di considerare grafici iterati (tipo ladder) che possono sommarsi usando equazioni integrali del tipo di Bethe-Salpeter (multiperiferismo).

Tornando all'analisi dei fattori di forma, la relazione tra il modello investigato e la teoria dei campi ad infinite componenti assume un più profondo significato se si indagano le condizioni imposte dalla conservazione della corrente sulla funzione vertice. Infatti si può mostrare con un esempio che queste condizioni possono essere verificate richiedendo che le masse  $M(s)$  della torre di particelle barioniche soddisfino una particolare condizione spettrale. Da questo spettro si può derivare immediatamente un'equazione di campo ad infinite componenti del tipo di Gel'fand-Yaglom.

Vogliamo infine soffermarci sulle condizioni imposte dall'analiticità ai fattori di forma da noi considerati. Come primo fatto notiamo che un modello per il fattore di forma nella zona space-like necessariamente influenza la sua estrapolazione (continuazione analitica) nella zona time-like: infatti è ben noto che le relazioni di dispersione danno una relazione integrale tra il fattore di forma space-like e la parte immaginaria del fattore di forma nella zona time-like. Appare comunque chiaro che l'ipotesi a torre (dominanza di un solo polo nei coefficienti dello sviluppo) non può più essere valida se si vuole descrivere il fattore di forma globalmente; infatti tale descrizione implicherebbe una struttura analitica non corretta. Da ciò segue che nemmeno un numero finito di poli è sufficiente per cui ogni particella deve apparire in un numero infinito di poli, ognuno dei quali corrisponde ad una rappresentazione irriducibile del gruppo di Lorentz. In ogni caso sembra comunque naturale assumere che esiste una intera classe di risonanze che partecipa al polo leading che domina il fattore di forma ad alti momenti trasferiti. Noi allora possiamo chiamare tale classe una torre di risonanze. I modelli per i fattori di forma descritti nelle precedenti lezioni, di tipo Veneziano, possono prendersi ad esempio per confermare questi concetti. Un modello per il fattore di forma di tipo Veneziano (a parte le correzioni dovute all'unitarietà) ha infatti l'importante proprietà di avere le giuste proprietà di analiticità, di offrire cioè esplicitamente la interpolazione nella zona space-like con quella time-like. Confermiamo che un fattore di forma di questo tipo è infatti descritto da una famiglia infinita di torri con i poli sfasati di un intero  $\lambda_n = \lambda - n$ . In questo contesto una investigazione molto attrattiva può essere quella di cercare un gruppo dinamico (che contiene il gruppo di Lorentz come sottogruppo) che fornisca come ansatz un fattore di forma di tipo Veneziano. Questo significa che una "supertorre" di particelle, descritte da una rappresentazione irriducibile di tale gruppo dovrebbe possedere lo spettro di massa e la molteplicità dei livelli di quella descritta da un termine alla Veneziano.

Per poter procedere in questa analisi viene premessa la classificazione e la costruzione di tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz. Si introduce quindi di l'analisi in onde parziali generalizzata che servirà per poter espandere le funzioni vertice.

L'analisi prosegue con l'applicazione del formalismo ai fattori di forma elettromagnetici del nucleone e delle risonanze nucleoniche di spin più elevato.

## II.2. - Il gruppo di Lorentz omogeneo. -

Il gruppo di Lorentz è il gruppo delle trasformazioni lineari ed omogenee dello spazio-tempo ( $M_4$ ) in sé che preservano (lasciano invariante) il prodotto scalare:

$$(II.1) \quad x \cdot y = x^0 y^0 - \underline{x} \cdot \underline{y} = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu y_\mu$$

dove  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  è la matrice metrica. Esso è quindi il gruppo delle ma-

trici  $\Lambda_{\mu}^k$   $4 \times 4$  tali che:

$$(II.2) \quad \Lambda_{\mu}^k g_{kk'} \Lambda_{\nu}^{k'} = g_{\mu\nu} \quad (\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda = G)$$

Il gruppo di Lorentz  $L$  è un gruppo topologico di Lie 6-dimensionale, localmente compatto, non compatto, localmente connesso, non connesso, non semplicemente connesso. La sua varietà topologica si divide in quattro regioni connesse caratterizzate da:

$$(II.3) \quad \begin{aligned} L_{+}^{\nearrow} &: \det \Lambda = 1 \quad \text{sgn} \Lambda_{00}^{\circ} + \quad (\text{contiene l'unità } I) \\ L_{-}^{\nearrow} &: \det \Lambda = -1 \quad \text{sgn} \Lambda_{00}^{\circ} + \quad (\text{contiene l'inversione spaziale } I_s) \\ L_{+}^{\nwarrow} &: \det \Lambda = 1 \quad \text{sgn} \Lambda_{00}^{\circ} - \quad (\text{contiene l'inversione spazio-temporale } I_{st}) \\ L_{-}^{\nwarrow} &: \det \Lambda = -1 \quad \text{sgn} \Lambda_{00}^{\circ} - \quad (\text{contiene l'inversione temporale } I_t) \end{aligned}$$

per cui  $L = L_{+}^{\nearrow} U L_{-}^{\nwarrow} U L_{+}^{\nwarrow} U L_{-}^{\nearrow}$ . Solo  $L_{+}^{\nearrow}$  è un gruppo (connesso): il gruppo di Lorentz ristretto. Ovviamente, con ovvio significato dei simboli:

$$(II.4) \quad L_{-}^{\nearrow} = I_s L_{+}^{\nearrow}, L_{+}^{\nwarrow} = I_{st} L_{+}^{\nearrow}, L_{-}^{\nwarrow} = I_t L_{+}^{\nearrow} \quad \text{secondo lo schema grafico della Fig. 8.}$$

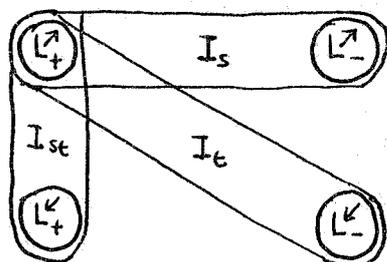


FIG. 8

Tre importanti sottogruppi di  $L$  sono:

$$(II.5) \quad \begin{aligned} L_{+}^{\nearrow} U L_{-}^{\nearrow} &= L_{+}^{\nearrow} U L_{-}^{\nearrow} \quad (\text{sgn} \Lambda_{00}^{\circ} = +) && (\text{gruppo di Lorentz ortocoro}) \\ L_{+}^{\nearrow} U L_{+}^{\nwarrow} &= L_{+}^{\nearrow} U L_{+}^{\nwarrow} \quad (\det \Lambda = 1) && (\text{gruppo di Lorentz proprio}) \\ L_{+}^{\nearrow} U L_{-}^{\nwarrow} &= L_{+}^{\nearrow} U L_{-}^{\nwarrow} \quad (\det \Lambda \text{sgn} \Lambda_{00}^{\circ} = 1) && (\text{gruppo di Lorentz ortocoro}) \end{aligned}$$

Per gli sviluppi che seguono considereremo il gruppo di Lorentz ristretto  $L_{+}^{\nearrow}$ . Questo gruppo è connesso ma non semplicemente connesso e infatti non coincide con il suo gruppo di ricoprimento universale  $SL(2, C)$  (gruppo di Lorentz spinoriale), il gruppo delle matrici complesse  $2 \times 2$  a  $\det = 1$ . Mostriamo ora che i due gruppi sono omomorfi e che il nucleo dell'omomorfismo è costituito da due elementi.

Ciò significa che  $L_{+}^{\nearrow}$  ammette al più rappresentazioni a due valori.

Ad ogni vettore  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  di  $M_4$  associamo la matrice hermitiana

$$(II. 6) \quad a = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & x^2 - ix^1 \\ x^2 + ix^1 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}$$

(associazione biunivoca e lineare) e consideriamo un elemento  $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  ( $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ) di  $SL(2, C)$ . Consideriamo la trasformazione:

$$(II. 7) \quad a' = g^x a g \quad (g^x \text{ h. c. di } g)$$

Questa trasformazione induce una trasformazione  $\Lambda_g$  su  $M_4$  ed inoltre  $\Lambda_{g_1 g_2} = \Lambda_{g_1} \Lambda_{g_2}$ . Poichè  $\det g = 1$  la trasformazione lascia invariante la forma data:  $x^0^2 - x^1^2 - x^2^2 - x^3^2$ ; il cono di luce futuro  $\mathbb{V}^+$ :  $x^2 = 0, x^0 > 0$  è trasformato in sè stesso da  $\Lambda_g$  (infatti la trasformazione (II. 7) trasforma matrici hermitiane positive in sè e la condizione  $x^2 > 0, x^0 > 0$  è la condizione di positività definita). Dunque l'insieme  $\{\Lambda_g\}$  coincide con  $L_+^{\uparrow}$ . Gli elementi di  $SL(2, C)$  che corrispondono all'unità in  $L_+^{\uparrow}$  sono dati dall'equazione

$$(II. 8) \quad a = g^x a g \quad \forall a$$

segue che per  $a = e$   $g^x = g^{-1}$  e dunque  $[a, g] = 0 \Rightarrow g = \lambda I$  ma  $\det g = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$  e quindi il nucleo dell'omomorfismo  $N$  tra  $SL(2, C)$  e  $L_+^{\uparrow}$  è  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . In definitiva  $L_+^{\uparrow}$  è isomorfo a  $SL(2, C)/N$ . Costruiamo ora l'elemento  $\Lambda_g$  che corrisponde a  $g$ .

Ricordando la (II. 7) e la (II. 6) si ha:

$$(II. 9) \quad a' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$(II. 10) \quad \begin{aligned} a'_{11} &= (|\alpha|^2 + |\gamma|^2)x^0 + i(\alpha\bar{\gamma} - \bar{\gamma}\alpha)x^1 + (\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma)x^2 + (|\gamma|^2 - |\alpha|^2)x^3 \\ a'_{12} = \bar{a}'_{21} &= (\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta)x^0 + i(\bar{\gamma}\beta - \bar{\alpha}\delta)x^1 + (\bar{\gamma}\beta + \bar{\alpha}\delta)x^2 + (\bar{\gamma}\delta - \bar{\alpha}\beta)x^3 \\ a'_{22} &= (|\beta|^2 + |\delta|^2)x^0 + i(\beta\bar{\delta} - \bar{\delta}\beta)x^1 + (\beta\bar{\delta} + \bar{\beta}\delta)x^2 + (|\delta|^2 - |\beta|^2)x^3 \end{aligned}$$

a questa matrice corrisponde il punto  $x'$  di  $M_4$  di coordinate:

$$(II. 11) \quad x^{0'} = \frac{a'_{11} + a'_{22}}{2}; \quad x^{1'} = \text{Im } a'_{21}; \quad x^{2'} = \text{Re } a'_{21}; \quad x^{3'} = \frac{a'_{22} - a'_{11}}{2}$$

e infine si ottiene inserendo le (II. 10) nelle (II. 11):

$$(II. 12) \quad x' = \Lambda_g x$$

dove

$$(II.13) \Lambda_g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2) \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta) \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta) - \frac{1}{2}(|\delta|^2 + |\delta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2) \\ \operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta} + \delta \bar{\delta}) \operatorname{Re}(\alpha \bar{\delta} - \bar{\gamma}\beta) - \operatorname{Im}(\bar{\gamma}\beta + \bar{\alpha}\delta) \operatorname{Im}(\alpha \bar{\beta} - \gamma \bar{\delta}) \\ \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta + \bar{\delta}\delta) \operatorname{Im}(\bar{\gamma}\beta - \alpha \bar{\delta}) \operatorname{Re}(\bar{\gamma}\beta - \bar{\alpha}\delta) \operatorname{Re}(\bar{\gamma}\delta - \bar{\alpha}\beta) \\ \frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\delta|^2 - |\alpha|^2 - |\gamma|^2) \operatorname{Im}(\bar{\beta}\delta - \bar{\alpha}\gamma) \operatorname{Re}(\bar{\beta}\delta - \bar{\alpha}\gamma) - \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\delta|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2) \end{pmatrix}$$

E' opportuno infine accennare ad una possibile parametrizzazione del gruppo di Lorentz. E' bene ricordare che ogni trasformazione di Lorentz  $\Lambda$  può decomporre nel modo seguente:

$$(II.14) \quad \Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$$

dove  $\Lambda_1, \Lambda_3$  sono rotazioni spaziali e  $\Lambda_2$  è una trasformazione di Lorentz pura (boost) lungo l'asse  $x^3$ . Dunque ciò equivale a scrivere un elemento di  $SL(2, C)$  nella forma:

$$(II.15) \quad g = u_1 b u_2$$

dove  $u_1, u_2 \in SU(2)$  e  $b$  è un boost. Si ottiene:

$$(II.16) \quad g(\mu, \theta, \nu, \xi, \theta_2, \nu_2) = u(\mu, \theta, \nu) b(\xi) u(0, \theta_2, \nu_2)$$

dove:

$$(II.17) \quad u(\mu, \theta, \nu) = \begin{pmatrix} \exp(i-\mu) & 0 \\ 0 & \exp(i\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta - \sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-i\nu) & 0 \\ 0 & \exp(i\nu) \end{pmatrix}$$

$$b(\xi) = \begin{pmatrix} \exp\xi & 0 \\ 0 & \exp(-\xi) \end{pmatrix} \quad 0 \leq \mu < 2\pi, 0 \leq \theta, \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \nu \leq \pi, 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \nu_2 \leq \pi$$

Vediamo ora come si ottengono degli importanti sottogruppi del gruppo di Lorentz ristretto. Se nella matrice che definisce  $g$  poniamo  $\alpha = \delta^x, \beta = -\gamma^x$  otteniamo un sottogruppo compatto di  $SL(2, C)$ , il gruppo unitario  $SU(2)$ . La (II.13) diventa allora una rotazione spaziale.

Se invece poniamo  $\alpha = \delta^x, \beta = \gamma^x$  otteniamo il sottogruppo non compatto  $SU(1, 1)$  e la (II.13) è una trasformazione di Lorentz tridimensionale. E' immediato constatare che  $SU(1, 1)$  è isomorfo a  $SL(2, R)$ . Se infine poniamo  $\alpha = \alpha^x, \beta = \beta^x = \gamma = \gamma^x (\delta = \delta^x)$  otteniamo un sottogruppo di  $SL(2, R)$ , ovvero il gruppo (non compatto) dei boosts lungo l'asse  $z$ . In tal caso la (II.13) dà il sottogruppo delle trasformazioni di Lorentz pure lungo l'asse  $z$  con velocità  $\beta = \tanh \xi$

### II.3. - Classificazione delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz omogeneo. -

Per poter classificare tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz ristretto  $L_4^\uparrow$  si può usare un metodo del tutto analogo a quello usato per determinare gli autovalori del momento angolare e della sua componente lungo un'asse. A tal uopo si possono determinare dapprima i generatori infinitesimali del gruppo e le loro regole di commutazione (Algebra di Lie del gruppo). Inoltre verranno costruiti gli operatori di Casimir del gruppo, ovvero gli operatori che commutano con tutti i generatori infinitesimali. Il numero dei Casimir (indipendenti) determinerà il numero dei parametri (tramite i loro autovalori) che individuano univocamente una rappresentazione irriducibile di  $L_4^\uparrow$ .

Il problema di classificare le rappresentazioni irriducibili si riduce quindi a quello di trovare la forma generale di operatori che soddisfino le regole di commutazione dei generatori infinitesimali di  $L_+$ .

Consideriamo una arbitraria trasformazione di  $L_+$   $\Lambda_{ij}(\zeta', \zeta)$  relativa a due sistemi  $\zeta'$  e  $\zeta$ . Abbiamo visto come essa debba essere individuata da sei parametri che possono essere individuati, in modo più fisico, al modo seguente:  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  sono le componenti del vettore di rotazione  $\vec{\omega}$  del sistema  $\zeta'$  rispetto al sistema  $\zeta$ ;  $v_x, v_y, v_z$  sono le componenti della velocità  $v$  dell'origine del sistema  $\zeta'$  rispetto al sistema  $\zeta$ . Poniamo con  $\beta_x = v_x/c, \beta_y = v_y/c, \beta_z = v_z/c$ . I generatori infinitesimali corrispondenti ai sei parametri verranno chiamati con  $I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3$ . Si ottiene differenziando la matrice che corrisponde ad una trasformazione di Lorentz pura.

$$(II.18) \quad \Lambda_{iJ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e ponendo  $\beta = 0$

$$(II.19) \quad \left. \frac{d\Lambda_{iJ}}{d\beta} \right|_{\beta=0} = J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{01} - \epsilon_{10}$$

dove  $\epsilon_{ik}$  ( $i, k=0, 1, 2, 3$ ) è la matrice in cui l'elemento all'intersezione dell'ima riga e k-ma colonna è 1 e i rimanenti sono 0. Permutando ciclicamente si ottiene

$$(II.20) \quad J_2 = -\epsilon_{02} - \epsilon_{20}, \quad J_3 = -\epsilon_{03} - \epsilon_{30}$$

Per ottenere  $I_1$  ricordiamo la relazione che esiste tra le coordinate di un evento nei sistemi  $\zeta'$  e  $\zeta$  dove  $\zeta'$  è ruotato rispetto a  $\zeta$  di un angolo  $\alpha$  attorno all'asse delle  $x$ . Si ha:

$$(II.21) \quad x' = x, \quad y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad z' = -y \sin \alpha + z \cos \alpha, \quad t' = t$$

per cui la corrispondente trasformazione di Lorentz risulta

$$(II.22) \quad \Lambda_{iJ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

differenziando rispetto ad  $\alpha$  e ponendo  $\alpha = 0$  si ottiene:

$$(II.23) \quad I_1 = \epsilon_{23} - \epsilon_{32}$$

e permutando ciclicamente

$$(II.24) \quad I_2 = \epsilon_{31} - \epsilon_{13}, \quad I_3 = \epsilon_{21} - \epsilon_{12}$$

Otteniamo dunque, per calcolo esplicito, le seguenti regole di commutazione:

$$(II.25) \quad \begin{aligned} [I_1, J_1] &= [I_2, J_2] = [I_3, J_3] = 0 \\ [I_1, J_2] &= -J_3, [I_2, J_3] = -J_1, [I_3, J_1] = -J_2 \\ [I_1, I_3] &= J_2, [I_2, J_1] = J_3, [I_3, J_2] = J_1 \\ [I_1, I_2] &= -I_3, [I_2, I_3] = -I_1, [I_3, I_1] = -I_2 \\ [J_1, J_2] &= I_3, [J_2, J_3] = I_1, [J_3, J_1] = I_2 \end{aligned}$$

Per poter avere delle regole di commutazione in forma più compatta si possono definire gli operatori

$$(II.26) \quad A_k = -\frac{1}{2} (I_k + iJ_k), \quad B_k = -\frac{1}{2} (I_k - iJ_k), \quad (k=1, 2, 3)$$

per cui si ottiene:

$$(II.27) \quad [A_J, A_k] = \epsilon_{Jkl} A_l, [B_J, B_k] = \epsilon_{Jkl} B_l, [A_J, B_k] = 0 \quad (J, k, l=1, 2, 3)$$

la realizzazione (II.27) è quella essenzialmente dell'algebra di  $SU(2) \otimes SU(2)$ .

Per costruire il Casimir di  $L_+^{\uparrow}$  basta calcolare i Casimir delle due algebre di  $SU(2)$  e quindi si ha:

$$(II.28) \quad \underline{A}^2 = \frac{1}{4} (\underline{J} + i\underline{I})^2, \quad \underline{B}^2 = \frac{1}{4} (\underline{J} - i\underline{I})^2$$

I Casimir del gruppo di Lorentz sono usualmente definiti come

$$(II.29) \quad \underline{I}^2 - \underline{J}^2 \quad \text{e} \quad i\underline{I} \cdot \underline{J}$$

che sono opportune combinazioni lineari delle (II.28).

Il problema è ora quello di trovare la forma più generale degli operatori  $\underline{A}_k, \underline{B}_k$  che soddisfino le (II.25) e tali che gli operatori (II.29) si riducano a multipli dell'unità. Le rappresentazioni riducibili saranno in tal caso completamente classificate. Per fare questo notiamo che una rappresentazione  $\mathcal{D}_g$  di  $L_+^{\uparrow}$  per  $g \in R_3$  è anche una rappresentazione del gruppo delle rotazioni  $R_3$  (generalmente riducibile) e quindi lo spazio  $S^{\mathcal{D}}$  su cui agisce  $\mathcal{D}_g$  potrà decomporre in una somma (diretta) di sottospazi  $S_J^{\mathcal{D}}$  invarianti rispetto a  $R_3$  sui quali agiscono le rappresentazioni irriducibili di spin  $J$  di  $R_3$ . Si può dimostrare che la molteplicità di tali sottorappresentazioni può essere 0, 1. Se chiamiamo allora  $f_m^J$  una base su  $S_J^{\mathcal{D}}$  ( $-J \leq m \leq J$ ) allora i vettori  $f_m^J$ , al variare di  $J$ , formano una base su  $S^{\mathcal{D}}$ .

E' possibile pervenire al seguente teorema:

(II. 30) Ogni rappresentazione irriducibile di  $L_+^{\lambda}$  è determinata da una coppia di numeri  $M, \lambda$  dove  $M$  è intero e semintero e  $\lambda$  è un complesso.

La rappresentazione irriducibile che corrisponde ad una data coppia  $(M, \lambda)$  è individuata dalle seguenti formule

$$\begin{aligned}
 H_+ f_m^J &= \sqrt{(J+m+1)(J-m)} f_{m+1}^J; & H_- f_m^J &= \sqrt{(J+m)(J-m+1)} f_{m-1}^J \\
 H_3 f_m^J &= m f_m^J; & F_+ f_m^J &= \sqrt{(J-m)(J-m-1)} \frac{i}{J} \sqrt{\frac{(J^2-M^2)(J^2-\lambda^2)}{4J^2-1}} f_{m+1}^{J-1} + \\
 &+ \sqrt{(J+m)(J+m+1)} \frac{iM\lambda}{J(J+1)} f_{m+1}^J + \\
 &+ \sqrt{(J+m+1)(J+m+2)} \frac{i}{J+1} \sqrt{\frac{(J^2+1+2J-M^2)(J^2+1+2J-\lambda^2)}{4J^2+4+8J-1}} f_{m+1}^{J+1} \\
 F_- f_m^J &= \sqrt{(J+m)(J+m-1)} \frac{i}{J} \sqrt{\frac{(J^2-\lambda^2)(J^2-M^2)}{4J^2-1}} f_{m-1}^{J-1} - \\
 &- \sqrt{(m+J)(J-m+1)} \frac{iM}{J(J+1)} f_{m-1}^J - \sqrt{(J-m+1)(J-m+2)} \frac{i}{J+1} \times \\
 &\times \sqrt{\frac{(J^2+1+2J-M^2)(J^2+1+2J-\lambda^2)}{(4J^2+4+8J-1)}} f_{m-1}^{J+1} \\
 F_3 f_m^J &= \sqrt{(J-m)(J+m)} \frac{i}{J} \sqrt{\frac{(J^2-M^2)(J^2-\lambda^2)}{(4J^2-1)}} f_{m-1}^J - m \frac{iM\lambda}{J(J+1)} f_m^J - \\
 &- \sqrt{(J+m-1)(J-m+1)} \frac{i}{J+1} \sqrt{\frac{(J^2+1+2J-M^2)(J^2+1+2J-\lambda^2)}{(4J^2+4+8J-1)}} f_m^{J+1}
 \end{aligned}$$

(II. 31)

dove sono stati definiti i seguenti operatori:

$$H_3 = iI_3; \quad F_3 = iJ_3; \quad H_{\pm} = iJ_1 \mp I_2; \quad F_{\pm} = iJ_1 \mp J_2$$

ed i Casimir sono dati da:

$$(II. 32) \quad \underline{I}^2 - \underline{J}^2 = M^2 + \lambda^2 - 1; \quad i \underline{I} \cdot \underline{J} = M \cdot \lambda$$

Se  $\lambda = M + k$  dove  $k$  è un qualunque intero positivo, la rappresentazione  $e^{\lambda}$   $(k^2+2 \mid M \mid k)$  dimensionale e si ha:

$$(II. 33) \quad -J \leq m \leq J; \quad J = |M|, |M|+1, \dots; \quad |M|+k-1 = \lambda - 1$$

Per ogni altro valore di  $\lambda$  le rappresentazioni sono infinito-dimensionali e si ha:

$$(II. 34) \quad -J \leq m \leq J; \quad J = |M|, |M|+1, \dots$$

Le rappresentazioni sono unitarie solo nei seguenti casi:

$$(II. 35) \quad \begin{array}{ll} M \text{ qualunque, } \operatorname{Re} \lambda = 0 & \text{serie principale} \\ M = 0 \quad -1 < \lambda < 1 & \text{serie supplementare.} \end{array}$$

L'unica rappresentazione irriducibile unitaria finito-dimensionale di  $L_+$  è la rappresentazione identità  $(M, \lambda) = (0, 1)$ .

E' bene notare che si è lasciato del tutto aperto il problema di quando ad ogni coppia di numeri  $(M, \lambda)$  corrisponda realmente una rappresentazione irriducibile di  $L_+$ , cioè quando le formule (II. 31) definiscano effettivamente dei generatori infinitesimali di qualche rappresentazione di  $L_+$ . Il problema si risolve con la costruzione esplicita delle rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz spinoriale  $SL(2, C)$ . Il fondamentale teorema a cui si perviene è il seguente:

$$(II. 36) \quad \text{Tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di } SL(2, C) \text{ sono definite da una coppia di numeri } M, \lambda \text{ dove } M \text{ è intero o semintero e } \lambda \text{ è complesso arbitrario. Le coppie } M, \lambda \text{ e } -M, -\lambda \text{ definiscono la stessa rappresentazione.}$$

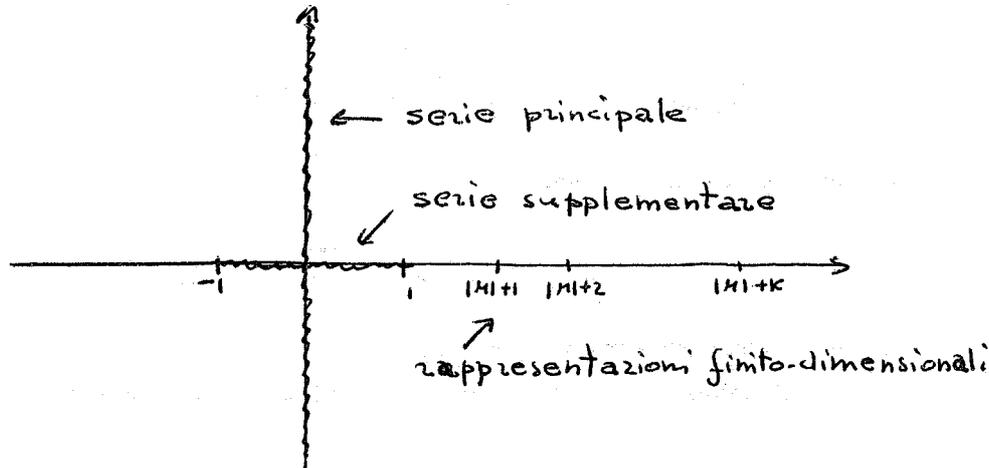


FIG. 9

#### II. 4. - Elementi di matrice delle rappresentazioni irriducibili di $SL(2, C)$ . -

Le rappresentazioni infinito-dimensionali di  $SL(2, C)$  sono state trovate dai due matematici russi J. M. Gel'fand e M. A. Naimark. Si può vedere che tali rappresentazioni possono essere realizzate in spazi di funzioni omogenee di due variabili complesse (e delle loro complesse coniugate) che sono infinitamente differenziabili.

Per costruire esplicitamente gli elementi di matrice delle rappresentazioni di  $SL(2, C)$  è opportuno limitarsi inizialmente alla serie principale. Gli elementi di matrice di tutte le altre rappresentazioni irriducibili si possono ottenere, a partire da questi, per continuazione analitica (in  $\lambda$ ).

Gli operatori della serie principale agiscono sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}^M$  delle funzioni a quadrato sommabile definite sul gruppo unitario  $SU(2)$  e che soddisfano la condizione:

$$(II. 37) \quad \phi(\gamma u) = \exp(-2iM\omega) \phi(u)$$

dove

$$(II. 38) \quad \gamma = \begin{pmatrix} \exp(-i\omega) & 0 \\ 0 & \exp(i\omega) \end{pmatrix}$$

Se noi consideriamo le rappresentazioni di  $SU(2)$  date dalle matrici:

$$(II. 39) \quad R_{mm'}^J(u) = \exp(-2im\mu) r_{mm'}^J(\theta) \exp(-2im'\nu)$$

dove

$$(II. 40) \quad r_{mm'}^J(\theta) = \frac{(-1)^{J-m} i^{m'-k}}{2^J (J-m)!} \sqrt{\frac{(J-m)!(J+m')}{(J+m)!(J-m')}} (1-\cos\theta)^{-\frac{m'-m}{2}} (1+\cos\theta)^{-\frac{m+m}{2}} \times \\ \times \frac{d}{d\cos\theta} \frac{J-m'}{J-m} (1-\cos\theta)^{J-m} (1+\cos\theta)^{J+m}$$

$$(R_{0, -m'}^J(\theta, \mu) = i^{-m} \sqrt{\frac{(J-m)!}{(J+m)!}} Y_{Jm}(\theta, 2\mu)$$

noi abbiamo che le funzioni:

$$(II. 41) \quad \phi_{Jm}^M(u) = \sqrt{2J+1} R_{Mm}^J(u)$$

formano una base ortonormale in  $\mathcal{H}^M$ .

Consideriamo il sottogruppo  $K$  di  $SL(2, C)$  i cui elementi sono le matrici del tipo

$$(II. 42) \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & (k_{11})^{-1} \end{pmatrix}$$

Gli elementi di  $SL(2, C)$  possono dividersi in classi laterali destre modulo  $K(Ka)$ .

In ogni classe vi sono elementi di  $SU(2)$ . Si può vedere che  $u, u' \in SU(2)$  appartengono alla stessa classe laterale se e solo se  $u' = \gamma u$ .

Indichiamo con  $K\bar{a}$  un arbitrario elemento unitario che appartiene alla stessa classe laterale di  $Ka$ . Definiamo gli operatori  $D^{M\lambda}(a)$  della rappresentazione della serie principale  $M, \lambda$ . Essi operano sulle funzioni  $\phi(u) \in \mathcal{H}^M$  al modo seguente:

$$(II.43) \quad \mathcal{D}^{M\lambda}(a)\phi(u) = \frac{\alpha^{M\lambda}(Ka)}{\alpha^{M\lambda}(K\bar{a})} \phi(Ka)$$

dove

$$(II.44) \quad \alpha^{M\lambda}(a) = |\delta|^{2(M+\lambda-1)} \delta^{-2M}$$

Si può mostrare che l'arbitrarietà nella definizione di  $K\bar{a}$  lascia inalterata la (II.43). Se in particolare  $a = u \in SU(2)$  si ha:

$$(II.45) \quad \mathcal{D}^{M\lambda}(u')\phi(u) = \phi(uu')$$

Usando la base (II.41) si ottiene dalle proprietà delle  $R_{mm'}^J(u)$ :

$$(II.46) \quad \mathcal{D}^{M\lambda}(u')\phi(u) = \phi(uu')$$

dalla (II.46) si ottiene:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}^{M\lambda}(u, b(\xi)u_2)\phi_{J'm'}^M, \phi_{Jm}^M) = \sum_{J''m''} \mathcal{D}^{M\lambda}(u_1)\phi_{J''m''}^M \phi_{Jm}^M \times \\ & (\mathcal{D}^{M\lambda}(b(\xi))\phi_{J''m''}^M, \phi_{J'm'}^M) \cdot (\mathcal{D}^{M\lambda}(u_2)\phi_{J'm'}^u, \phi_{J''m''}^M) = \sum_{m''} R_{mm''}^J(u_1) \times \\ & \times d_{m''J'}^M(\xi) R_{m''m'}^{J'}(u_2) = \mathcal{D}_{JmJ'm'}^{M\lambda}(u_1 b u_2) \quad (-J' \leq m' \leq J', -J \leq m \leq J, J, J' = |M|, |M|+1, \dots) \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che:

$$(II.47) \quad (\mathcal{D}^{M\lambda}(b(\xi))\phi_{J'm'}^M, \phi_{Jm}^M) = \int_{mm'} d_{mJ'}^M(\xi)$$

e la funzione  $d_{mJ'}^M(\xi)$  è data dalla seguente rappresentazione integrale:

$$(II.48) \quad d_{mJ'}^M(\xi) = \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\exp(-\xi)\cos\theta}{\cos\theta'} \right]^{2(\lambda-1)} r_{Mm}^{J'}(\theta) \times \bar{r}_{Mm}^J(\theta)$$

$$\times \sin 2\theta \, d\theta \quad (\text{tg}\theta' = \exp 2\xi \text{tg}\theta)$$

Gli elementi di matrice  $\mathcal{D}_{J'm'Jm}^{M\lambda}$  che sono stati ottenuti a partire dalla serie principale di  $SL(2, C)$  (asse immaginario del piano  $\lambda$ ) possono essere continuati analiticamente su tutto il piano  $\lambda$  tramite le funzioni (II.48) ed essi definiscono ancora elementi di matrice di rappresentazione irriducibili di  $SL(2, C)$  secondo lo schema della Fig. 9. Per i futuri sviluppi è utile ricordare la seguente decomposizione

$$(II.49) \quad d_{mJ'}^M(\xi) = a_{mJ'}^{M\lambda}(\xi) + (-1)^{J-J'} a_{mJ'J}^{-M-\lambda}(\xi) = a_{mJ'}^{M\lambda}(\xi) + \zeta_J^{M\lambda} a_{mJ'}^{M\lambda}(\xi) \zeta_J^{-M-\lambda}$$

$$\left( \zeta_J^{M\lambda} = \prod_{s=M}^J \frac{s-\lambda}{s+\lambda} \right)$$

dove le funzioni  $d_{mJJ'}^{M\lambda}(\xi)$ ,  $a_{mJJ'}^{M\lambda}(\xi)$  sono chiamate funzioni generalizzate di I<sup>a</sup> e II<sup>a</sup> specie (analoghe alle  $P_1$  e  $Q_1$ ).

Si può vedere che le funzioni  $a_{mJJ'}^M(\xi)$  hanno il seguente andamento asintotico:

$$(II.50) \quad a_{mJJ'}^M(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} C_{mJJ'}^M \exp[\xi(-\lambda-1-|M-m|)]$$

Per  $M=m=J=J'=0$  le funzioni  $d_{000}^0\lambda(\xi)$ ,  $a_{000}^0\lambda(\xi)$  si riducono alle funzioni speciali di Gegenbauer di I<sup>a</sup> e II<sup>a</sup> specie.

### II.5. - Analisi in onde parziali generalizzate. -

Per l'analisi dei fattori di forma che segue si deve introdurre il concetto di trasformata di Fourier su di un gruppo. Il tipo di espansione che segue è del tutto generale, valendo risultati analoghi per un qualunque gruppo localmente compatto, unimodulare, di tipo I. Nel caso particolare del gruppo delle traslazioni in una dimensione e del gruppo delle rotazioni si ottengono le ben note analisi in onde parziali ed analisi di Fourier.

Una funzione  $f(g)$  sul gruppo  $SL(2, C)$  è una corrispondenza tra una matrice di  $SL(2, C)$  ed i numeri complessi. Essendo  $SL(2, C)$  un gruppo di Lie 6-dimensionale essa non è altro che una funzione a 6 variabili.

Una funzione  $f(g)$  su  $SL(2, C)$  è detta a decrescenza rapida se per  $\forall$  intero  $n > 0$   $f(g) < C|g|^{-n}$  dove  $|g| = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2$ .

E' possibile introdurre su  $SL(2, C)$  un elemento di volume (misura) invariante, cioè tale che  $dg = d(gg_0) = d(g_0g) \forall g_0 \in SL(2, C)$ . Esso è dato da:

$$(II.51) \quad dg = \left(\frac{i}{2}\right)^3 d\alpha d\bar{\alpha} d\beta d\bar{\beta} d\gamma d\bar{\gamma} |\beta|^{-2}$$

ed in termini della parametrizzazione (II.16):

$$(II.52) \quad dg = 4 \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 (\sin 2\xi)^2 d\xi d\theta_1 d\theta_2 d\mu_1 d\nu_1 d\nu_2$$

Una funzione è sommabile su  $SL(2, C)$  se:

$$(II.53) \quad \int_{SL(2, C)} |f(g)| dg < \infty$$

Dicesi trasformata di Fourier di  $f(g)$  la funzione operariale definita dalla seguente formula

$$(II.54) \quad F^{M\lambda} = \int f(g) \mathcal{D}^{M\lambda}(g) dg$$

dove l'operatore  $F^{M\lambda}$  è definito al modo seguente

$$(II.55) \quad F^{M\lambda} \phi(u) = \int f(g) (\mathcal{D}^{M\lambda}(g) \phi(u)) dg$$

Stabiliamo ora per quali funzioni  $f(g)$  la corrispondenza (II.58) ha senso.

In analogia alla trasformata di Fourier classica valgono i seguenti risultati:

(II. 56) Se  $f(g)$  è decrescenza rapida, la sua trasformata di Fourier  $F^{M\lambda}$  è analitica su tutto il piano  $\lambda$  (funzione intera analitica).

(II. 57) Se  $f(g)$  è sommabile la sua trasformata di Fourier definisce una funzione analitica nella triscia  $-1 < \text{Re } \lambda < 1$ .

(II. 58) Se  $f(g)$  è a quadrato sommabile la sua trasformata di Fourier è de finita solo sull'asse immaginario del piano  $\lambda$  (serie principale di  $SL(2, C)$ ).

(II. 59) Teorema di Plancherel: Se  $f(g)$  è a quadrato sommabile vale la seguente formula di completezza:

$$(II. 60) \quad \int |f(g)|^2 dg = \sum_{M=-\infty}^{+\infty} (8\pi^4)^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} (M^2 - \lambda^2) \text{Tr} (F^{M\lambda} F^{+M\lambda}) d\lambda$$

(II. 61) Formule di inversione: Se  $f(g)$  è a quadrato sommabile e sommabile allora  $f(g)$  si esprime tramite la sua trasformata di Fourier  $F^{M\lambda}$  al modo seguente:

$$(II. 62) \quad f(g) = \sum_{M=-\infty}^{+\infty} (8\pi^4)^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} (M^2 - \lambda^2) \text{Tr} [F^{M\lambda} \mathcal{D}^{M\lambda}(g^{-1})] d\lambda$$

Semplici proprietà della trasformata di Fourier: la trasformata di Fourier di  $f(g_0^{-1}fg)$  è data da:

$$\int f(g_0^{-1}g) \mathcal{D}^{M\lambda}(g) dg = \mathcal{D}^{M\lambda}(g_0) F^{M\lambda}$$

(II. 63) la trasformata di Fourier di una convoluzione di due funzioni

$$(f_1 * f_2)(g) = \int f_1(g) f_2(g_1^{-1}g) dg \quad \text{è data da:}$$

$$\int (f_1 * f_2)(g) \mathcal{D}^{M\lambda}(g) dg = F_1^{M\lambda} F_2^{M\lambda}$$

(II. 64) Trasformata di Laplace su  $SL(2, C)$ : vogliamo ora vedere come può interpretarsi l'integrale (II. 62) in corrispondenza a funzioni  $f(g)$  che siano meno buone all'infinito di funzioni a quadrato-sommabile. Per far questo usiamo gli elementi di matrice (II. 46) delle rappresentazioni di  $SL(2, C)$ . La (II. 62) si scriverà dunque:

$$(II. 65) \quad f(u, b(\xi)u_2) = \frac{1}{4i\pi^4} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda (M^2 - \lambda^2) \sum_{JmJ'm'} \Psi_{J'm'Jm}^{M\lambda} \cdot \sum_{m''} \bar{R}_{mm''}^J(u_1) \times$$

$$\times \bar{d}_{m''JJ'}^{M\lambda}(\xi) \cdot \bar{R}_{m''m'}^{J'}(u_2) = \sum_{JmJ'm'm''} \bar{R}_{mm''}^J(u) f_{J'm'Jm}^{m''}(\xi) \bar{R}_{m''m'}^{J'}(u_2)$$

dove

$$(II. 66) \quad f_{J'm'Jm}^{m''}(\xi) = \frac{1}{4i\pi^4} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda (M^2 - \lambda^2) \Psi_{J'm'Jm}^{M\lambda} \bar{d}_{m''JJ'}^{M\lambda}(\xi)$$

e tenendo conto della (II. 49) otteniamo

$$(II. 67) \quad f_{J'm'Jm}^{m''}(\xi) = \frac{1}{2i\pi^4} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda (M^2 - \lambda^2) \Psi_{J'm'Jm}^{M\lambda} a_{m''JJ'}^{M-\lambda}(\xi)$$

se  $f(g) \notin L^2(SL(2, C))$ , si può allora assumere che la sua trasformata di Fourier

$$(II. 68) \quad \Psi_{J'm'Jm}^{M\lambda} = \int_{SL(2, C)} dg f(g) \mathcal{D}_{J'm'Jm}^{M\lambda}(g)$$

sia una funzione meromorfa in  $\lambda$  cosicchè la (II. 67) può essere definita modificando opportunamente il cammino di integrazione quando i poli della funzione  $\Psi_{J'm'Jm}^{M\lambda}$  intersecano l'asse immaginario

$$(II. 69) \quad f_{J'm'Jm}^{m''}(\xi) = \frac{1}{2i\pi^4} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \int_C d\lambda (M^2 - \lambda^2) \Psi_{J'm'Jm}^{M\lambda} a_{m''JJ'}^{M-\lambda}(\xi)$$

Se si sposta il cammino verso sinistra si possono estrarre i contributi dei poli (teorema di Cauchy); si può dimostrare che il background va a zero spostando il cammino verso  $-\infty$  sull'asse reale per cui si ottiene:

$$(II. 70) \quad f_{J'm'Jm}^{m''}(\xi) = \frac{1}{\pi^3} \sum_i (M_i^2 - \lambda_i^2) g_{J'm'Jm}^{iM_i\lambda_i} a_{m''JJ'}^{M_i-\lambda_i}(\xi)$$

e nel limite di alti  $\xi$  si ottiene, ricordando la (II. 50):

$$(II. 71) \quad f_{J'm'Jm}^{m''}(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\pi^3} (M^2 - \lambda^2) g_{J'm'Jm}^{M\lambda} c_{m''JJ'}^{M\lambda}(\cosh \xi) \lambda^{-1-|M-m|}$$

dove  $M, \lambda$  sono i numeri quantici del polo con la parte reale più grande.

Dalla (II. 64) si ha infine:

$$(II. 72) \quad f(u, b(\xi)u_2) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} E^{M\lambda}(u, u_2) (\cosh \xi)^{\lambda-1}$$

dove si è posto

$$(II.73) \quad E^{M\lambda}(u_1, u_2) = \sum_{JmJ'm'} \frac{1}{\sqrt{3}} (M^2 - \lambda^2) g_{JmJ'm'}^{M\lambda} C_{MJJ'}^{M\lambda} \bar{R}_{mM}^J(u_1) \bar{R}_{Mm'}^{J'}(u_2)$$

## II.6. - Stati di singola particella e funzioni d'onde relativistiche. -

Ricordiamo che la totalità dei quadrivettori che possono descrivere l'impulso di una particella fisica di massa  $M$  sono una varietà di quadrivettori definita da

$$(II.74) \quad p_\mu p^\mu = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = M^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad p_0 > 0$$

Tale varietà è detta un'orbita e viene denotata con  $O(M_+)$ .  $O(M_+)$  ha la proprietà di essere trasformata in sé da qualunque trasformazione  $\Lambda$  di  $L_+^{\uparrow}$  e quindi anche dalle corrispondenti matrici  $u(\Lambda)$  di  $SL(2, C)$ .

Un particolare vettore di  $O(M_+)$  è quello che descrive una particella a riposo:

$$(II.75) \quad p^R = (M, 0, 0, 0)$$

E' chiaro che un qualsiasi altro vettore di  $O(M_+)$  può ottenersi applicando una opportuna trasformazione di Lorentz  $\Lambda$  a  $p^R$ , cioè:

$$(II.76) \quad p = \Lambda p^R \quad \Lambda = \Lambda(p)$$

La trasformazione  $\Lambda(p)$  non è determinata univocamente, infatti:

$$(II.77) \quad (\Lambda R) p^R = \Lambda (R p^R) = \Lambda p^R = p$$

dove  $R$  è una arbitraria rotazione spaziale.

Se definiamo uno stato a riposo di una particella di spin  $s$  e massa  $M$  con:

$$(II.78) \quad |p^R m\rangle = \varphi_m \quad -s \leq m \leq s$$

uno stato in moto con momento  $p$  è definito da

$$(II.79) \quad |pm\rangle = \varphi_m(p) = U_{ap} \varphi_m \quad a_p \in SL(2, C) \quad \text{e corrisponde a } \Lambda(p)$$

Lo spin di una particella a riposo si trasforma al modo seguente:

$$(II.80) \quad U_R \varphi_m = \sum_{m'} R_{m'm}^s(R) \varphi_{m'}$$

Ne segue che per una particella in moto si ottiene:

$$(II.81) \quad U_{ap} a_p^{-1} \varphi_m(p) = \sum_{m'} R_{m'm}^s(R) \varphi_{m'}(p)$$

La (II.78) e la (II.79) definiscono una rappresentazione di  $L_+$  :

$$(II.82) \quad U_a \varphi_m(p) = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}(a) \varphi_{m'}(\Lambda(a)p)$$

Gli stati (II.79) sono normalizzati in modo invariante al seguente modo

$$(II.83) \quad (\varphi_{m'}(p'), \varphi_m(p)) = \delta_{mm'} \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') 2p_0, \quad p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$$

Un pacchetto d'onde può essere costruito come segue:

$$(II.84) \quad f = \int d\mu(p) \sum_m f_m(p) \varphi_m(p)$$

dove  $f_m(p) = (\varphi_m(p), f)$  è la funzione d'onda dello stato (normalizzabile)  $f$  e  $d\mu(p) = \int (p^2 - M^2) \theta(p_0) d^4p$  è lo "spazio delle fasi" della particella. L'interpretazione fisica di  $f$  richiede che  $f_m(p)$  sia a quadrato sommabile su  $O(M_+)$  cioè:

$$(II.85) \quad \|f\|^2 = \sum_{m=-s}^{+s} \int d\mu(p) |f_m(p)|^2 < \infty$$

Dunque la totalità delle funzioni d'onda di una particella realizza uno spazio di Hilbert  $L^2(M, s)$ . E' immediato riconoscere come agisce la rappresentazione  $U_a$  su tali funzioni d'onda:

$$(II.86) \quad U_a f_m(p) = (U_{a^{-1}} \varphi_m(p), f) = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}(a^{-1}) f_{m'}(\Lambda^{-1}(a)p)$$

Ad una funzione d'onda definita su  $O(M_+)$  può associarsi una funzione su  $SL(2, C)$  (funzione d'onda di Moussa-Stora) al modo seguente:

$$(II.87) \quad f_m(ap) = (U_{ap} \varphi_m, f)$$

essa verifica la relazione di covarianza:

$$(II.88) \quad f_m(a_p R^{-1}) = \sum_{m'=-s}^s R_{mm'}^s(R) f_{m'}(ap)$$

La rappresentazione  $U_a$  di  $SL(2, C)$  agisce sulle funzioni d'onda di Moussa-Stora al modo seguente:

$$(II.89) \quad U_{a'} f_m(a) = (U_a \varphi_{m'}, U_{a'} f) = (U_{a'^{-1} a^{-1} a} \varphi_{m'}, f) = f_m(a'^{-1} a)$$

Si può mostrare che la (II.89) è in effetti la restrizione ad una rappresentazione irriducibile del gruppo di Poincarè  $P_+^{\mathcal{A}}$ :

$$(II.90) \quad U_{(a', x)} f_m(a) = \exp(x, \Lambda(a') p^R) f_m(a'^{-1} a)$$

Ovviamente la restrizione (II.89) della (II.90) su  $SL(2, C)$  non è irriducibile.

Effettuando la trasformata di Fourier della (II.87) e usando il teorema di Plancherel si ottiene (vedi (II.83) e (II.85)):

$$(II.91) \quad f_m(a) = \frac{1}{2} \sum_{M=-s}^s \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda (M^2 - \lambda^2) \sum_{Jm'} f_{Jm'}^M \bar{D}_{smJm'}^{M\lambda}(a)$$

$$(II.92) \quad \|f\|^2 = (2s+1) 8\pi^2 M^2 \sum_{M=-s}^s \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda (M^2 - \lambda^2) \sum_{Jm} |f_{Jm}^{M\lambda}|^2$$

essendo

$$(II.93) \quad f_{Jm}^M = \int_{SL(2, C)} da f_{m'}(a) \bar{D}_{sm'Jm}^{M\lambda}(a)$$

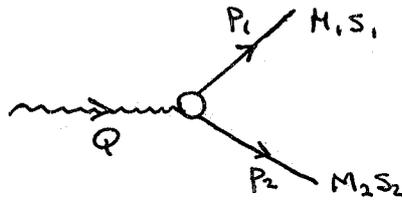
## II.7. - Funzioni vertice. -

Le funzioni vertice possono essere introdotte come elementi di matrice di un operatore densità di corrente nell'origine  $J_\mu(0)$  tra due stati di singole particelle di massa e spin arbitrari:

$$(II.94) \quad \tilde{V}_\mu(p_2, p_1)_{m_2 m_1} = N_1 N_2 \langle p_2 m_2 | J_\mu(0) | p_1 m_1 \rangle$$

essendo  $N_1 = \frac{(2\pi)^{3/2}}{2M_1}$  delle costanti di normalizzazione.

La funzione (II.94) descrive il vertice



La corrente ha la seguente legge di trasformazione:

$$(II.95) \quad U_a^{-1} J_\mu(0) U_a = \Lambda_\mu^\nu(a) J_\nu(0) \quad a \in SL(2, C) \quad \Lambda(a) \in L_+^\uparrow$$

Osserviamo che i quadrimpulsi appartengono a  $O(M_{1+})$ ,  $O(M_{2+})$  inoltre la conservazione del quadripulso al vertice richiede

$$(II.96) \quad p_2 - p_1 = Q$$

Se chiamiamo  $p_2^R, p_1^R$  gli impulsi nei sistemi di riposo delle due particelle allora  $\exists$  due trasformazioni di Lorentz  $\Lambda_2, \Lambda_1$  tali che  $p_2 = \Lambda_2^R p_2^R, p_1 = \Lambda_1^R p_1^R$  per cui dalla VI si ottiene:

$$(II.97) \quad \tilde{V}_\mu(p_2, p_1)_{m_2 m_1} = \tilde{V}_\mu(\Lambda_2, \Lambda_1)_{m_2 m_1}$$

dalle (II.95) e (II.92) si ottiene:

$$(II.98) \quad V(\Lambda_2, \Lambda_1)_{m_2 m_1} = \sum_{m'_2 m'_1} \mathcal{D}_{m'_2 m'_2}^{-1}(\Lambda) \mathcal{D}_{m'_1 m'_1}^{-1}(\Lambda) \tilde{V}_\nu(\Lambda_2, \Lambda_1)_{m'_2 m'_1}$$

Per introdurre una legge di trasformazione più semplice è opportuno definire le seguenti funzioni vertice ridotte:

$$(II.99) \quad V_\mu(\Lambda_2, \Lambda_1)_{m_2 m_1} = \sum_{m'_2 m'_1} \mathcal{D}_{m'_2 m'_2}^{-1}(\Lambda_2) \mathcal{D}_{m'_1 m'_1}(\Lambda_1) \tilde{V}_\mu(\Lambda_2, \Lambda_1)_{m'_2 m'_1}$$

che verificano la seguente legge di trasformazione:

$$(II.100) \quad V_\mu(\Lambda_2, \Lambda_1)_{m_2 m_1} = \Lambda_\mu^\nu V_\nu(\Lambda_2, \Lambda_1)_{m_2 m_1}$$

Per semplificare la cinematica ed estrarre le proprietà di covarianza notiamo che deve essere  $Q^2 = t < 0$  per cui si può porre  $\bar{Q} = (0, 0, 0, \sqrt{-t})$ . E' facile vedere che in questo riferimento si possono scegliere due boosts  $b_2^t, b_1^t$  tali che:

$$(II.101) \quad b_2^t R_2 - b_1^t R_1 = \bar{Q}$$

Da ciò segue che le matrici  $\Lambda_2, \Lambda_1$  si possono decomporre al modo seguente:

$$(II.102) \quad \Lambda_2 = \Lambda_{b_2^t R_2}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_{b_1^t R_1}, \quad \text{dove } \Lambda \in L_+^\uparrow \text{ e } R_2, R_1 \in R_3$$

Tenendo conto della (II.100) possiamo scrivere:

$$(II.103) \quad V_\mu(b_2^t R_2, b_1^t R_1)_{m_2 m_1} = \Lambda^{-1 \nu} V_\nu(\Lambda_2, \Lambda_1)_{m_2 m_1}$$

ed inoltre dalla (II.100):

$$(II.104) \quad V_\mu(b_2^t R_2, b_1^t R_1)_{m_2 m_1} = \sum_{m'_2 m'_1} R_{m'_2 m_2}^{-S_2} (R_2^{-1})_{m'_1 m_1}^{S_1} (R_1) V_\mu(b_2^t, b_1^t)_{m'_2 m'_1}$$

ed infine posto  $b^t = b_1^{-1t} b_2^t$  risulta:

$$(II.105) \quad V_\mu(b^t)_{m_2 m_1} = \Lambda_\mu^\nu (b_1^{-1t}) V_\nu(b_2^t, b_1^t)_{m_2 m_1}$$

L'elemento di matrice della corrente (II.94) è dato in termini della (II.105) da:

$$\tilde{V}_{\mu}^{(p_2, p_1)}_{m_2 m_1} = \sum_{\lambda} \sum_{m'_2 m'_1} \sum_{m''_2 m''_1} \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{\lambda}(\Lambda_2) \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{-1}(\Lambda_1) R_{m'_2 m''_2}^{-1 s_2}(R_2) \times$$

(II.106)

$$\times R_{m'_1 m''_1}^{s_1}(R_1) \Lambda_{m_2 m'_2}^{-1 t} \Lambda_{m_1 m'_1}^{\nu} (b_1^t) V_{\nu}^{(b^t)}_{m''_2 m''_1}$$

Si può mostrare che  $b^t = e^{-1/2 \xi t \sigma_3}$  e  $t = M_1^2 + M_2^2 - 2M_1 M_2 \cosh \xi t$  per cui:

$$\xi_t = \text{sech} \cosh \left( \frac{M_1^2 + M_2^2 - t}{2 M_1 M_2} \right)$$

(II.107)

Per quel che segue è opportuno introdurre le "componenti canoniche" dell'operatore vettoriale, cioè le componenti nella base  $f_m^J$   $J=0, 1$   $m=0, \pm 1$ .

Esse sono legate alle componenti cartesiane al modo seguente:

$$V_{00} = \sqrt{\pi} V_0; \quad V_{10} = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} V_3; \quad V_{1\pm 1} = \mp \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/2} (V_1 \pm i V_2)$$

(II.108)

E' interessante osservare che le considerazioni precedenti si possono applicare ad un vertice che si trasforma secondo un'arbitraria rappresentazione  $M, \lambda$  di  $SL(2, C)$ ,  $V_{Jm}^{M\lambda}(M_2, M_1)_{m_2 m_1}$ .

Per fare ciò basta sostituire la (II.100) con;

$$V_{Jm}^{M\lambda}(M_2, M_1) = \sum_{J'm'} \mathcal{D}_{Jm J'm'}^{M\lambda}(a(\Lambda)) V_{J'm'}^{M\lambda}(\Lambda_2, \Lambda_1)$$

(II.109)

la (II.100) si ottiene come caso particolare per  $(M, \lambda) = (0, 2)$

## II.8. - Analisi in onde parziali generalizzata dalle funzioni vertice. -

Ci proponiamo ora usando le tecniche sviluppate, di usare una formula di decomposizione per il seguente elemento di matrice:

$$\langle f_2 | J_{Jm}^M | f_1 \rangle = \sum_{m_2 m_1} \int d\mu(p_2) d\mu(p_1) \bar{f}_{m_2}^{-2}(p_2) V_{Jm}^{M\lambda}(p_2 p_1)_{m_2 m_1} f_{m_1}^1(p_1) =$$

(II.110)

$$= (8\pi^2)^2 M_1^2 M_2^2 (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) \int da_2 \int da_1 \bar{f}_{m_2}^{-2}(a_2) V_{Jm}^{M\lambda}(a_2 a_1)_{m_2 m_1} f_{m_1}^1(a_1)$$

$$a_1 = a_1(\Lambda_1);$$

$$a_2 = a_2(\Lambda_2)$$

avendo posto  $da = d\mu(p)$  e dove  $d\mu(p)$ ,  $da$  sono i rispettivi elementi di volume invarianti dell'iperboloide di massa e del gruppo  $SU(2)$ .

Usando la formula di inversione (II.91) per i pacchetti d'onde otteniamo:

$$(II.111) \quad \langle f_2 | J_{Jm}^{M\lambda} | f_1 \rangle = \left[ \sum_{M_2=-s_2}^{s_2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_2 (M_2^2 - \lambda_2^2) \sum_{J''m''} f_{J''m''}^{-M_2\lambda_2} \sum_{M_1=s_1}^{s_1} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_1 x \right. \\ \left. x (M_1^2 - \lambda_1^2) \sum_{J'm'} f_{J'm'}^{M_1\lambda_1} \right] \int da_1 da_2 \mathcal{D}_{s_2 m_2}^{M_2 \lambda_2} (a_2) \mathcal{D}_{s_1 m_1}^{M_1 \lambda_1} (a) V_{Jm}^{M\lambda} (a_2, a_1)_{m_2 m_1}$$

Se si effettua il seguente cambiamento di variabili:

$$(II.112) \quad a_2, a_1 \rightarrow a_2^{-1} a_1, a$$

si ottiene:

$$(II.113) \quad da_1 da_2 = d(a_2^{-1} a_1) da = \frac{1}{4\pi} du_1 du_2 \sinh^2 \xi d\xi da$$

essendo

$$a_2 = b(\xi_2) u_2, \quad a_1 = b(\xi_1) u_1 \quad e \quad \xi = \xi_2 - \xi_1$$

Inserendo la (II.113) nella (II.111) si ottiene (a meno di costanti moltiplicative):

$$(II.114) \quad \langle f_2 | J_{Jm}^{M\lambda} | f_1 \rangle = \left[ \sum_{M_2=-s_2}^{s_2} \int_{-i\infty}^{i\infty} (d\lambda_2 (M_2^2 - \lambda_2^2) \sum_{J''m''} f_{J''m''}^{-M_2\lambda_2} \sum_{M_1=s_1}^{s_1} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_1 x \right. \\ \left. x (M_1^2 - \lambda_1^2) \sum_{J'm'} f_{J'm'}^{M_1\lambda_1} \right] \int_0^\infty \sinh^2 \xi d\xi \sum_{I_2 m_2} d_{s_2 I_2 \bar{m}_2}^{M_2 \lambda_2} (\xi_2) \sum_{I_1 m_1} d_{s_1 I_1 \bar{m}_1}^{M_1 \lambda_1} x \\ x (\xi_1) \sum_{\bar{I} \bar{m}} V_{\bar{I} \bar{m}}^{M\lambda} (b(\xi_2), b(\xi_1))_{\bar{m}_2 \bar{m}_1} \int da \mathcal{D}_{I_2 \bar{m}_2}^{M_2 \lambda_2} (a) \mathcal{D}_{I_1 \bar{m}_1}^{M_1 \lambda_1} (a) \mathcal{D}_{Jm \bar{I} \bar{m}}^{M\lambda} (a^{-1})$$

L'ultimo integrale definisce il coefficiente di Clebsh Gordon per  $SL(2, C)$ :

$$(II.115) \quad \frac{1}{2} \int da \mathcal{D}_{I_2 \bar{m}_2}^{M_2 \lambda_2} (a) \mathcal{D}_{I_1 \bar{m}_1}^{M_1 \lambda_1} (a) \mathcal{D}_{Jm \bar{I} \bar{m}}^{M\lambda} (a^{-1}) = \\ = (M_1 \lambda_1, J'm' | M\lambda, Jm; M_2 \lambda_2, J''m'') (M\lambda, \bar{I} \bar{m}; M_2 \lambda_2, I_2 \bar{m}_2 | M_1 \lambda_1, I_1 \bar{m}_1)$$

per cui la (II.114) si può riscrivere:

$$(II.116) \quad \langle f_2 | J_{Jm}^{M\lambda} | f_1 \rangle = \sum_{M_2=-s_2}^{s_2} \sum_{M_1=s_1}^{s_1} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_2 (M_2^2 - \lambda_2^2) \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_1 (M_1^2 - \lambda_1^2) x$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{J''m''J'm'} f_{J''m''}^{M_2 \lambda_2} f_{J'm'}^{M_1 \lambda_1} (M_1 \lambda_1, J'm' | M \lambda, Jm; M_2 \lambda_2, J''m'') \times \\
 (II.118) \quad & \times \sum_{I, I_2 \bar{m}_1 \bar{m}_2 m} (M \lambda, I \bar{m}; M_2 \lambda_2, I_2 \bar{m}_2 | M_1 \lambda_1, I_1 \bar{m}_1) \int \sinh^2 \xi d\xi d_{s_2 I_2 \bar{m}_2}^{M_2 \lambda_2} \times \\
 & \times (\xi) d_{s_1 I_1 \bar{m}_1}^{M_1 \lambda_1} (\xi) V_{I \bar{m}}^M (b(\xi_2), b(\xi_1))_{\bar{m}_2 \bar{m}_1}
 \end{aligned}$$

La formula di espansione (II. 116) vale per un vertice tensoriale di  $SL(2, C)$ ; se si fa il limite ora per  $(M, \lambda) \rightarrow (0, 2)$  ovvero sulla rappresentazione vettoriale il coefficiente di Clebsh Gordon (II. 119) diventa una distribuzione e contiene delle funzioni  $\delta$  del tipo  $\delta_{M_1, M_2 - (\mu - \nu)} \delta(\lambda_1 - \lambda_2 + \nu + \mu - 1) \nu, \mu = 0, 1$  per cui un integrale in  $d\lambda$  si effettua immediatamente e si ottiene (a meno di costanti moltiplicative).

$$\begin{aligned}
 \langle f_2 | J_{Jm} | f_1 \rangle &= \sum_{\nu \mu} \sum_M \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda (M^2 - \lambda^2)^M \nu_{\mu} (s_2 s_1 | M \lambda)_{J'J''m'm''} \bar{f}_{J'm''}^{M \lambda} \times \\
 (II.117) \quad & \times f_{J'm'}^{M \lambda} \nu_{\mu} ((M \lambda)_{\mu \nu, J'm' | 0, 2, Jm; M \lambda, J''m''})
 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
 \nu_{\mu} (s_2 s_1 | M \lambda) &= \sum_{I_1 I_2 \bar{m}_1 \bar{m}_2 \bar{m}} (-1)^{J(2J_1+1)} 3^{1/2} (2I_2+1) \times \\
 (II.118) \quad & \times ((M-\lambda)_{1-\mu, 1-\nu} I_1 \bar{m}_1 | 0, 2, I \bar{m}; M-\lambda, I_2 \bar{m}_2) \int \sinh^2 \xi d\xi d_{s_2 I_2 \bar{m}_2}^{M \lambda} (\xi_2) \times \\
 & \times d_{s_1 I_1 \bar{m}_1}^{(M-\lambda) \nu} (-\xi_1) V_{Jm} (b(\xi_2), b(\xi_1))_{\bar{m}_2 \bar{m}_1}
 \end{aligned}$$

In definitiva si ottiene la seguente formula di decomposizione per la funzione vertice:

$$\begin{aligned}
 V_{Jm} (a_2, a_1)_{m_2 m_1} &= \sum_{\nu \mu} \sum_M \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda (M^2 - \lambda^2)^M \nu_{\mu} (s_2 s_1 | M \lambda) \sum_{J''m''J'm'} \times \\
 (II.119) \quad & \times ((M \lambda)_{\mu \nu, J'm' | 0, 2, Jm; M \lambda, J''m''}) \cdot \bar{D}_{s_2 m_2 J''m''}^{M \lambda} (a_2) D_{s_1 m_1 J'm'}^{(M \lambda) \nu \mu} (a_1)
 \end{aligned}$$

ed infine, tenendo conto del cammino di integrazione simmetrico in  $\lambda \rightarrow -\lambda$ :

$$(II. 132) \quad u(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_3}{E+M} & \frac{p_1 - ip_2}{E+M} \\ 0 & 1 & \frac{p_1 + ip_2}{E+M} & \frac{-p_3}{E+M} \\ \frac{p_3}{E+M} & \frac{p_1 - ip_2}{E+M} & 1 & 0 \\ \frac{p_1 + ip_2}{E+M} & \frac{-p_3}{E+M} & 0 & 1 \end{pmatrix} u(0)$$

Nel caso particolare considerato si ha:

$$(II. 133) \quad u_0^+(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} \quad u_2^+(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} \frac{p_3}{E+M}$$

e quindi sostituendo nella (II. 135):

$$(II. 134) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} V_{00}(\xi)_{1/2, 1/2} = \cosh \frac{\xi}{2} (F_1(q^2) + \sinh^2 \frac{\xi}{2} F_2(q^2)) = \\ = \cosh \frac{\xi}{2} (F_1(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} F_2(q^2)) = \cosh \frac{\xi}{2} G_E(q^2)$$

ricordando la (II. 125) si ottiene:

$$(II. 135) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} V_{00}(\xi)_{1/2, 1/2} = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} (F_1(q^2) - \frac{q_3}{2M} \frac{p_3}{E+M} F_2(q^2))$$

Procedendo analogamente con la  $V_{11}(\xi)_{-1/2, 1/2}$  si può ricavare:

$$(II. 136) \quad V_{11}(\xi)_{-1/2, 1/2} = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2} \sinh \frac{\xi}{2} G_M(q^2)$$

Per cui in definitiva si ha il seguente schema:

$$(II. 137) \quad V_{00}(\xi)_{+1/2, +1/2} = \sqrt{\pi} \cosh \frac{\xi}{2} G_E(q^2) \\ V_{10}(\xi)_{+1/2, +1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \sinh \frac{\xi}{2} G_E(q^2) \\ V_{1+1}(\xi)_{+1/2, +1/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sinh \frac{\xi}{2} G_M(q^2)$$

e dunque il fattore di forma elettrico e magnetico sono responsabili rispettivamente di transizioni non spin-flip e spin-flip.

Se si applica l'espansione (II.110) alla funzione vertice del nucleone si ottiene:

$$(II.138) \quad V_{Jm}(\xi)_{m_2 m_1} = \sum_{\nu} \sum_{M=\pm 1/2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{1}{4}\lambda^2\right) d\lambda M_{\mu\nu}(M, \lambda)_{J''=1/2, 3/2} \times \\ \times ((M\lambda)_{\mu\nu} \quad 1/2 \quad m_1 \mid 02, Jm; M\lambda_{J''m_2}) a_{1/2 J'' m_2}^{M-\lambda}(\xi)$$

è possibile verificare che le funzioni  $M_{\mu\nu}$  hanno le seguenti proprietà di simmetria:

$$(II.139) \quad \begin{aligned} M_{10}(1/2, \lambda) &= M(1/2, -\lambda); & M_{11}(1/2, \lambda) &= M_{11}(-1/2, \lambda); \\ M_{01}(-1/2, \lambda) &= -M_{10}(1/2, \lambda); & M_{00}(1/2, \lambda) &= M_{00}(-1/2, \lambda); \\ M_{11}(1/2, \lambda) &= M_{11}(1/2, -\lambda-1); & M_{00}(1/2, \lambda) &= (\lambda+1/2)(\lambda-3/2)M_{11}(1/2, -\lambda); \\ M_{00}(1/2, \lambda) &= M_{00}(1/2, -\lambda+1) \end{aligned}$$

Tenendo conto dell'hermiticità e delle (II.139) nell'ipotesi di poledominance si ottiene:

$$(II.140) \quad \begin{aligned} M_{10}(1/2, \lambda) &= \frac{\beta_1}{\lambda-\lambda_1} - \frac{\beta_1}{\lambda+\lambda_1} + \frac{\bar{\beta}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_1} - \frac{\bar{\beta}_1}{\lambda+\bar{\lambda}_1}; \\ M_{01}(-1/2, \lambda) &= \frac{-\beta_1}{\lambda-\lambda_1} + \frac{\beta_1}{\lambda+\lambda_1} - \frac{\bar{\beta}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_1} + \frac{\bar{\beta}_1}{\lambda+\bar{\lambda}_1} \end{aligned}$$

Inserendo il contributo della (II.140) nella (II.138) si ottiene per i fattori di forma di Sachs:

$$(II.141) \quad \begin{aligned} G_E^I(q^2) &\sim -\text{Re} \beta_1 \frac{2 \sin^2 h \xi_2}{\sinh^3 \xi} \left( \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_1-1/2}}{\lambda_1-1/2} + \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_1+1/2}}{\lambda_1+1/2} \right) \\ G_M^I(q^2) &\sim \text{Re} \beta_1 \frac{2 \cosh \xi/2}{\sinh^2 \xi} (\cosh \xi)^{\lambda_1} - \frac{\cosh \xi}{\sinh^3 \xi} \left( \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_1-1/2}}{\lambda_1-1/2} + \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_1+1/2}}{\lambda_1+1/2} \right) \end{aligned}$$

Si vede che per  $\lambda$  complesso si ottengono dei termini oscillanti nei fattori di forma che vanno come  $\cos [I_m \lambda_1 \lg(-q^2/M^2) + \text{cost}]$ . Poichè tale andamento non è osservato sperimentalmente si deve assumere  $\lambda_1$  reale. I poli del tipo visto sono chiamati di classe I<sup>a</sup>. I poli di classe II<sup>a</sup> sono quelli che provengono dalle funzioni  $M_{11}, M_{00}$  per i quali per le proprietà di simmetria (II.140) si ha:

$$M_{11}^{II(+1/2, \lambda)} \sim \frac{\beta_2}{\lambda - \lambda_2} - \frac{\beta_2}{\lambda + \bar{\lambda}_2 + 1} + \frac{\bar{\beta}_2}{\lambda - \bar{\lambda}_2} - \frac{\bar{\beta}_2}{\lambda + \bar{\lambda}_2 + 1}$$

$$(II.142) \quad M_{00}^{II(+1/2, \lambda)} \sim 1/2(\lambda_2 - 1/2)(\lambda_2 + 3/2) \left[ -\frac{2}{\lambda + \lambda_2} + \frac{2}{\lambda - \lambda_2 - 1} \right] + 1/2(\bar{\lambda}_2 - 1/2) \times \\ \times (\bar{\lambda}_2 + 3/2) \left[ \frac{-\bar{\beta}_2}{\lambda + \lambda_2} + \frac{\bar{\beta}_2}{\lambda - \bar{\lambda}_2 - 1} \right]$$

e inserendo nella (II.138) si ottiene:

$$(II.143) \quad G_E^{II}(q^2) \sim -\text{Re} \left\{ \beta_2 (\lambda_2 - 1/2)(\lambda_2 + 3/2) \frac{2 \sinh^2 \xi / 2}{\sinh^3 \xi} \left[ \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_2 - 1/2}}{\lambda_2^{-1/2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_2 + 1/2}}{\lambda_2^{+1/2}} + \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_2 + 3/2}}{\lambda_2^{+3/2}} \right] \right\}$$

$$G_M^{II}(q^2) \sim -\text{Re} \left\{ \beta_2 (\lambda_2 - 1/2)(\lambda_2 + 3/2) \frac{1}{\sinh^3 \xi} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_2 - 1/2}}{\lambda_2^{-1/2}} - 2 \cosh \xi \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_2 + 1/2}}{\lambda_2^{+1/2}} + \frac{(\cosh \xi)^{\lambda_2 + 3/2}}{\lambda_2^{+3/2}} \right] \right\}$$

Analogamente al caso precedente  $\lambda_2$  deve essere reale per evitare termini oscillanti. Per  $q^2 \rightarrow -\infty$  si ottiene quindi per i fattori di forma dominati da poli di classe I<sup>a</sup>:

$$(II.144) \quad G_E^I(q^2) \sim \left(-\frac{q^2}{M^2}\right)^{\lambda_1 - 3/2}; \quad G_M^I(q^2) \sim \left(-\frac{q^2}{M^2}\right)^{\lambda_1 - 3/2}$$

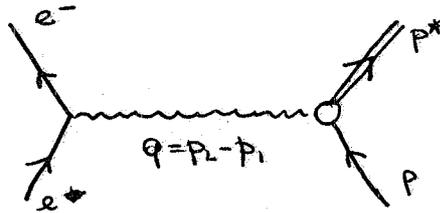
e per poli di classe seconda

$$(II.145) \quad G_E^{II}(q^2) \sim \left(-\frac{q^2}{M^2}\right)^{\lambda_2 - 1/2}; \quad G_M^{II}(q^2) \sim \left(-\frac{q^2}{M^2}\right)^{\lambda_2 - 3/2}$$

Per cui, se si vuole mantenere la "scaling low" con un modello semplice basta assumere che il polo dominante sia di classe I<sup>a</sup>. Per avere un buon accordo con l'esperienza si deve inoltre assumere  $\lambda_1 < -1/2$  o  $-1$  per cui il polo dominante corrisponde ad una rappresentazione irriducibile non unitaria di  $SL(2, C)$ .

## II.10. - Elettroproduzione di risonanze ed equazioni di campo ed infinite componenti: (4,7). -

Consideriamo i processi di elettroproduzione del tipo:  $e^- + p \rightarrow e^- + p^x$  descritti dal seguente diagramma:



i quadrimpulsi dei barioni verificano la relazione  $p_1^2 = M_1^2$ ,  $p_2^2 = M_2^2$  e la massa elettronica può essere trascurata. L'impulso del fotone virtuale  $q = p_2 - p_1$  copre il range  $-\infty < q^2 < x(M_1 - M_2)^2$ . Se chiamiamo  $\theta, E$  l'angolo di scattering e l'energia dell'elettrone incidente nel sistema del laboratorio, allora la sezione d'urto differenziale di elettroproduzione si scrive:

$$(II.146) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} (1 + \frac{2E}{M_1} \sin^2 \frac{\theta}{2})} \left[ \frac{q^4}{q_x^4} |f_c|^2 + \left( -\frac{1}{2} \frac{q^2}{q_x^2} + \frac{M_2^2}{M_1^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) (|f_+|^2 + |f_-|^2) \right]$$

essendo  $q_x$  il momento spaziale del fotone nel sistema di riposo della risonanza:

$$(II.147) \quad q_x^2 = \frac{1}{4M_2^2} \left[ (M_1^2 + M_2^2 - q^2) - 4M_1^2 M_2^2 \right] = \frac{(M_1 + M_2)^2 - q^2}{2M_2} \frac{(M_1 - M_2)^2 - q^2}{2M_2}$$

La covarianza sotto riflessione di parità risulta in questo caso:

$$(II.148) \quad V_{Jm}(\xi)_{m_2 m_1} = \sigma P(-1)^{s+1/2} V_{J-m}(\xi)_{-m_2 -m_1}$$

per cui, tenendo conto della conservazione della corrente e del constraint  $m = m_1 - m_2$  si hanno in tutto tre funzioni vertice indipendenti. I tre fattori di forma  $f_c, f_+, f_-$  sono connessi al seguente modo alle funzioni vertice:

$$(II.149) \quad f_c = \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} V_{00}(\xi)_{1/2, 1/2}; \quad f_{\pm} = \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{1/2} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/2} V_{1\pm 1}(\xi)_{1/2 \pm 1, 1/2}$$

dove:

$$V_{Jm}(\xi)_{m_2 m_1} = V_{Jm}(p_2, p_1^R)_{m_2 m_1}; \quad p_2 = (M_2 \cosh \xi, 0, 0, -M_2 \sinh \xi) \quad p_1^R = (M_1, 0, 0, 0)$$

Nel caso elettromagnetico  $\bar{v} = \gamma_1$ .

Per trattare le risonanze bisogna estendere al gruppo  $SL(2, C)$  l'operazione di parità  $s$ . Essa è definita al modo seguente:

$$(II.150) \quad s \cdot s = e^{i\pi \gamma_3} \in SL(2, C), \quad s a s^{-1} = a', \quad a, a' \in SL(2, C) \quad \text{dove}$$

$$a = u, e^{1/2 \xi \gamma_3} u_2, \quad a' = u, e^{-1/2 \xi \gamma_3} u_2, \quad u_1, u_2 \in SU(2).$$

Chiamiamo  $\widetilde{SL}(2, C)$  il gruppo esteso. La corrispondenza  $a \rightarrow a'$  induce la trasformazione  $(M, \lambda) \rightarrow (M', \lambda')$  di una rappresentazione di  $SL(2, C)$  nella sua coniugata di parità  $(M', \lambda') = (-M, \lambda) \approx (M, -\lambda)$

$$(II.151) \quad \mathcal{D}_{J_1 m_1 J_m}^{M \lambda}(a) \rightarrow \mathcal{D}_{J_1 m_1 J_m}^{M \lambda}(a') = (-1)^{J_1 - J_2} \mathcal{D}_{J_1 m_1 J_m}^{(-M, \lambda)}(a)$$

Se ne deduce immediatamente che  $(M, \lambda) \approx (M', \lambda')$  se e solo se  $M=0 \forall \lambda$ .  $\forall M \lambda=0$ . Il secondo caso è poco interessante nella nostra analisi. (Infatti cioè corrisponderebbe ad un cattivo andamento asintotico per i fattori di forma). Dunque si può dire che una rappresentazione irriducibile di  $SL(2, C)$  è autoconiugata, cioè irriducibile per  $\widetilde{SL}(2, C)$ , se e solo se il Casimir  $i\mathbb{I} \cdot \mathbb{J} = M \lambda$  è zero. Una rappresentazione autoconiugata di  $SL(2, C)$  è quindi caratterizzata da un ulteriore numero quantico tale che:

$$(II.152) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{J_1 m_1 J_m}^{\lambda \sigma}(a) &= \mathcal{D}_{J_1 m_1 J_m}^{0 \lambda}(a) & a \in SL(2, C) \\ \mathcal{D}_{J_1 m_1 J_m}^{\lambda \sigma}(s) &= \sigma (-1)^{J_1} \delta_{J' J} \delta_{m_1 m} & \sigma = \pm 1 \end{aligned}$$

Per  $M \lambda \neq 0$ , come nel caso delle rappresentazioni barioniche, una rappresentazione irriducibile di  $\widetilde{SL}(2, C)$  sarà data da  $(M, \lambda) \oplus (M', \lambda')$  cioè da una coppia di rappresentazioni coniugate per parità:

$$(II.153) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{J_1 m_1 J_m}^{M \lambda}(a) &= \delta_{\tau, \tau'} \mathcal{D}_{J_1 m_1 J_m}^{\tau M \lambda}(a) & \text{se } a \in SL(2, C) \\ \mathcal{D}_{J_1 m_1 J_m}^{M \lambda}(s) &= (-1)^{J_1 + M} \tau_1^M \delta_{\tau_1 - \tau} \delta_{J' J} \delta_{m_1 m} & \tau_1, \tau = \pm 1 \end{aligned}$$

Per tali rappresentazioni si possono introdurre autostati di parità:

$$(II.154) \quad |M_1 \lambda; J_m \pi\rangle = -\frac{1}{2} \left\{ |M \lambda; J_m \tau = 1\rangle + (-1)^{J+M} \pi |M \lambda; J_m \tau = -1\rangle \right\}$$

tali che:

$$(II.155) \quad \mathcal{D}^{M \lambda}(s) |M \lambda; J_m \pi\rangle = \pi |M \lambda; J_m \pi\rangle$$

con  $\pi^2 = (-1)^{2J}$ : se  $J$  è semintero  $\pi = i P$ ,  $P = \pm 1$

Nello sviluppo (II.120) dal vertice andranno quindi considerati gli opportuni coefficienti di Clebsh-Gordan ottenuti con gli stati IX-9.

Se ora si assume che, nell'analisi in onde parziali generalizzata, dei fattori di forma che compaiono nella (II.148) la dominanza dello stesso polo che domina i fattori di forma elettromagnetici del nucleone che compaiono nella sezione d'urto elastica di Rosenbluth ( $d\sigma/d\Omega_{el.}$ ), si può mostrare dopo una serie di calcoli algebrici tediosi, che:

$$(II.156) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} / \frac{d\sigma}{d\Omega_{el.}} = C(s) |\rho(s, \lambda)|^2 R(q^2, \theta)$$

dove  $C(s)$  è una funzione regolare delle spin della risonanza,  $f(s, \lambda) = \Gamma(\lambda+3/2)/\Gamma(s+1+\lambda) \times x(s+1/2)^{1/2}$  e  $R(q_1^2, \theta)$  è la seguente funzione:

$$(II. 167) \quad R(q_1^2, \theta) = e^{-\lambda-1} (\xi_s - \xi_{1/2}) \left\{ \frac{M_1}{M_2} \frac{q^4}{q^4} + \frac{M_1}{M_2} \left( -\frac{q^2}{q} + \frac{2M_2^2}{M_1^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \times$$

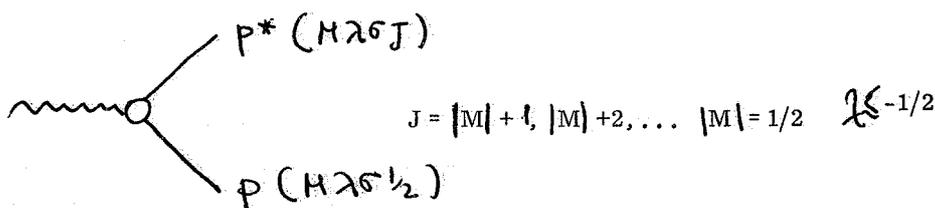
$$\times \left[ (\lambda+1/2) \frac{2(M_1 - (s+1/2)M_2)^2}{M_2^2(s+3/2)(s-1/2)} + (\lambda-1/2) \right] \left\{ \left( 1 - \frac{q^2}{4M_1^2} \right) + \left[ \left( 1 - \frac{q^2}{4M_1^2} \right)^{-1} + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right] \right\} \times$$

$$\times (\lambda-1/2)^2 \left\{ -1 \right.$$

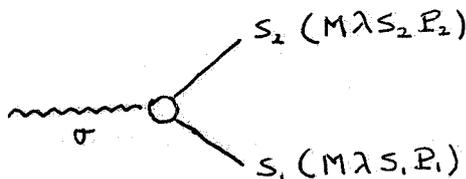
dove:

$$e \xi_s \approx \frac{M_1^2 + M_2^2 - q^2}{M_1 M_2} \quad e \xi_{1/2} \approx \frac{2M_1^2 - q^2}{M_1^2}$$

è immediato vedere allora che per  $q^2 \rightarrow -\infty$   $R(q^2, \theta)$  tende ad una costante in  $q^2$ . Come abbiamo visto il limite costante del rapporto delle sezioni d'urto differenziale di elettroproduzione di risonanze sulla sezione d'urto elastica di Rosenbluth implica che il protone e le sue risonanze più alte (come gli stessi numeri quantici) costituiscono i membri di una rappresentazione irriducibile (non unitaria) di  $SL(2, C)$ ,



L'ipotesi a torre potrebbe per esempio implicare che le seguenti risonanze  $N'(1470)(1/2^+)$ ,  $N(1518)(3/2^-)$ ,  $N(1550)(1/2^-)$ ,  $N(1680)(5/2^-)$ ,  $N(1688)(5/2^+)$ ,  $N'(1710)(1/2^-)$ ,  $N''(1750)(1/2^+)$ ,  $N(2190)(7/2^-)$  si spin isotopico 1/2 fittino, con il protone, nella stessa rappresentazione irriducibile di  $SL(2, C)$ . Queste ultime considerazioni sono in qualche modo collegate ad una teoria di campo in cui i campi hanno infinite componenti, cioè essi si trasformano secondo una rappresentazione infinito dimensionale di  $SL(2, C)$ . Questo ultimo fatto è ancora più trasparente se si considera l'equazione che impone la conservazione della corrente per un vertice del tipo:



in cui la funzione vertice è dominata da un polo, cioè in cui le particelle esterne sono membri di una stessa torre. L'equazione si scrive:

$$(II. 158) \quad \operatorname{div} V(p_2, p_1 | \sigma)_{m_2 m_1} = \frac{1}{2} g \left[ M_2 P_2(-1)^{s_2+1/2} (s_2+1/2) - \sigma M_1 P_1(-1)^{s_1+1/2} \right] \times$$

$$\times (s_1+1/2) \left[ \mathcal{D}_{s_2 m_2 s_1 m_1}^{(1/2, \lambda)}(a_2 a_1^{-1}) + P_1 P_2(-1)^{s_2-s_1} \mathcal{D}_{s_2 m_2 s_1 m_1}^{(-1/2, \lambda)}(a_2 a_1^{-1}) \right] = 0$$

L'equazione può essere soddisfatta identicamente se:

$$(II.159) \quad \sigma P_1 P_2 = (-1)^{s_2 - s_1}; \quad M_2(s_2 + 1/2) = M_1(s_1 + 1/2)$$

Se si pensa di tener fisso  $M_1 \lambda$  e di far variare  $s_1 s_2$  nel vertice questo implica parità alternate  $P_n = (-1)^{n+1}$  e spettro di massa del tipo:

$$(II.160) \quad M(s) = \frac{k}{s^2 + 1/2}$$

E' forse opportuno soffermarci un attimo sulla struttura di questo tipo di spettro. Si può mostrare che esso è tipico di una classe di equazioni invarianti sotto il gruppo di Lorentz, frequentemente incontrate nella letteratura. Queste equazioni sono quelle del tipo di Gel'fand Yaglom e hanno la seguente struttura:

$$(II.161) \quad (L^{\mu}_{\rho} - k) \Psi(\rho) = 0 \quad \text{o} \quad (-i L^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - k) \Psi(x) = 0$$

dove  $\Psi(x)$  è un insieme di operatori che si trasforma in modo covariante sotto una rappresentazione unitaria  $U(x', a)$  di  $P_+$

$$(II.162) \quad U(x', a) \Psi^{\alpha}(x) U^{\dagger}(x', a) = \sum_{\beta} D_{\beta}^{\alpha}(a^{-1}) \Psi^{\beta}(\Lambda(a)x + x')$$

$D_{\beta}^{\alpha}(a)$  è una rappresentazione (generalmente irriducibile) di  $SL(2, C)$ .  
La covarianza dell'equazione richiede che  $D_{\beta}^{\alpha}(a^{-1}) L^{\mu}_{\rho}$ ,  $D_{\gamma}^{\beta}(a) = \Lambda^{\nu}_{\mu}(a) L^{\mu}_{\nu}$ ,  
cioè che l'operatore  $L_{\mu}$  sia un operatore vettoriale. La rappresentazione  $D_{\beta}^{\alpha}(a)$  di  $SL(2, C)$  deve avere la proprietà di permettere di scrivere una forma hermitiana invariante non degenera  $(\Psi^{\dagger}, \Psi)$  in termini dei campi. Ciò implica che  $\exists$  un operatore tale che:

$$(II.163) \quad D_{\beta}^{\alpha}(a^{-1}) = \beta D_{\beta}^{\alpha}(a) \beta^{-1}$$

cioè che la rappresentazione sia equivalente alla sua aggiunta.

Un'altra richiesta è la richiesta dell'invarianza sotto parità  $s$  il che implica:

$$(II.164) \quad D_{\beta}^{\alpha}(a^{+1}) = s D_{\beta}^{\alpha}(a) s^{-1}$$

cioè che la rappresentazione sia equivalente alla sua coniugata per parità.

Inoltre si richiede che  $D_{\beta}^{\alpha}(a)$  sia autoaccoppiata, cioè sia tale si possa scrivere la forma hermitiana non degenera, invariante  $(\Psi^{\dagger}, L^{\mu}_{\rho} \Psi)$ .

La rappresentazione  $D_{\beta}^{\alpha}(a)$  di  $SL(2, C)$  è autoaccoppiata solo se è contenuta nel prodotto diretto di se stessa per la rappresentazione vettoriale. Notiamo che quest'ultima condizione è necessaria per poter scrivere una lagrangiana scalare bilineare nei campi  $\mathcal{L}(x) = \Psi^{\dagger}(x) (i \partial_{\mu} L^{\mu} - k) \Psi(x)$ .

E' possibile costruire coppie di rappresentazioni irriducibili  $(M', \lambda')$ ,  $(M, \lambda)$  che verificano queste condizioni. Queste ultime implicano rispettivamente:

$$(II.165) \quad (M', \lambda') = \pm (M, -\bar{\lambda}); \quad (M', \lambda') = \pm (M, -\lambda); \quad (M', \lambda') = (M, \lambda+1) \circ (M+1, \lambda)$$

Le coppie che verificano tutte e tre le condizioni sono quindi di due tipi:

$$(II.166) \quad (1/2, \lambda) \oplus (-1/2, \lambda) \quad \lambda \text{ reale}; \quad (M, 1/2) \oplus (M, -1/2) \quad \forall M$$

Da ciò segue che esistono solamente due rappresentazioni irriducibili di  $SL(2, C)$  che verificano simultaneamente le (II.165). Esse sono la  $(1/2, 0)$  e la  $(0, 1/2)$  entrambe unitarie e rispettivamente della serie principale e supplementare. (Facenti rispettivamente parte della I e II classe descritte dalla (II.166)). Notiamo che la rappresentazione di Dirac fa parte della I classe e corrisponde a  $\lambda = 3/2$ .

E' interessante notare che la proprietà di covarianza dell'operatore vettoriale  $L^\mu$  si può scrivere al seguente modo (forma infinitesimale):

$$(II.167) \quad [M^{\sigma\tau}, L^\nu] = i(g^{\mu\nu} L^\sigma - g^{\sigma\nu} L^\mu)$$

e si può ottenere la seguente regola di commutazione:

$$(II.168) \quad \frac{i}{4} [L^\mu, L^\nu] = M^{\mu\nu}$$

dove  $M^{\mu\nu}$  sono i 6 generatori di  $SL(2, C)$ ; Le regole di commutazione (II.167) e (II.168) vengono a definire un'algebra di Lie 10-dimensionale che è quella del gruppo di De Sitter  $O(3, 2)$ , lo spazio pseudoeuclideo a 5-dimensioni. Si può in effetti vedere che la più bassa rappresentazione di  $O(3, 2)$  (o meglio del suo covering group  $Sp(4, R)$ ) è quadridimensionale ed è realizzata dalle matrici  $\gamma^\mu$  di Dirac e dei loro commutatori  $i/2 [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \sigma^{\mu\nu}$ . Le rappresentazioni definite dalla (II.165) sono quindi rappresentazioni irriducibili di  $O(3, 2)$  che ridotte a  $O(3, 1)$  diventano riducibili. Le rappresentazioni di Majorana  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$  sono dunque quelle rappresentazioni irriducibili di  $O(3, 2)$  che sono anche irriducibili rispetto a  $O(3, 1)$ . Dall'analisi sui fattori di forma svolta precedentemente possiamo così constatare che le rappresentazioni irriducibili di  $SL(2, C)$  considerate, appartengono alla prima classe delle (II.165).

Una possibilità è che ciò comporti che questi fattori di forma, nell'approssimazione dell'ipotesi a torre, possano essere ricavati partendo da una teoria di campi ad infinite componenti descritti da equazioni del tipo IX-10.

Come ultimo fatto, che si riallaccia direttamente con l'eguaglianza IX-25, ricaviamo lo spettro di massa che un'equazione del tipo di Gel'fand Yaglom IX-10 implica. Il modo più semplice per ricavarlo è di moltiplicare l'equazione per  $(L^\mu p_\mu + k)$  ed usare il fatto che, per le regole di commutazione (II.167), (II.168) si ha:

$$(II.169) \quad (L^\mu p_\mu)^2 = p^2 - 4W^2$$

dove  $W_p = 1/2 \epsilon_{\sigma\tau\nu\rho} p^\sigma M^{\tau\nu}$  è il quadrivettore di Pauli-Lubansky-Bargman. Si ottiene dunque:

$$(II.170) \quad (p^2 - 4W^2 - k^2) \Psi(p) = 0$$

Nel sistema di riposo del vettore  $p_\mu$  si ottiene  $W^2 = m^2 s(s+1)$  per cui si ha infine:

(II.171)

$$M^2(s) = \frac{k^2}{(s+\frac{1}{2})^2}$$

che coincide con la (II.164).

## BIBLIOGRAFIA. -

- (1) - M. A. Naimark, Linear representations of the Lorentz group, (Mac Millan, 1964).
- (2) - I. M. Gel'fand, M. I. Graev and Ya Vilenkin, Generalized functions, Vol. 5: Integral Geometry and Representation Theory (Academic Press, 1966).
- (3) - E. P. Wigner, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, Ann. Math. 40, 149 (1939).
- (4) - J. D. Bjorken and J. D. Valecka, Ann. Phys. 38, 35 (1966).
- (5) - W. Ruhl, The  $O(3,1)$  Analysis of Current Matrix Elements and the Asymptotic Expansions of Form Factors, Nuovo Cimento 63A, 1163 (1969).
- (6) - W. Ruhl, Electromagnetic Nucleon Form Factors in the Space-like Asymptotic Region Nuclear Phys. B11, 505 (1969).
- (7) - J. Kupsch and W. Ruhl, Electroproduction of Nucleon Resonances in the Region of High Momentum Transfer, CERN Preprint Th. 1061 (1969).
- (8) - G. Ya Lyubarkii, The Application of Group Theory in Physics, (Pergamon Press, 1960).
- (9) - P. Di Vecchia, F. Drago and S. Ferrara, Phys. Letters 29 B, 114 (1969).
- (10) - D. Tz. Stoyanov and I. T. Todorov, Self-Coupled Representations of the Lorentz Group and Infinite-Component Fermi Fields", IC/67/58 (1967).
- (11) - Y. Nambu, Relativistic Groups and Infinite Component Fields, Talk presented at the Nobel Symposium of Elementary Particle Theory, Göteborg, (1968).

### III. - UNITARIETA' E FATTORE DI FORMA DEL PIONE NELLA ZONA TIME-LIKE. -

(A cura di A. F. Grillo)

#### III.1. - Introduzione. -

Nelle precedenti lezioni sono stati esaminati alcuni modelli per i fattori di forma elettromagnetici degli adroni e si è visto che alcuni di questi modelli potevano dare una buona rappresentazione dei dati sperimentali nella regione di momenti trasferiti space-like.

D'altra parte, nella regione di momenti time-like, questi modelli non danno una rappresentazione realistica dei fattori di forma, in quanto, in generale, non sono unitari, intendendo dire con questo che la loro discontinuità per  $t \geq 4\mu^2$  (dove  $t = q^2$  è il momento trasferito e  $\mu$  è la massa del pione, non soddisfa all'equazione di unitarietà, che è già stata ricavata nella prima parte delle lezioni.

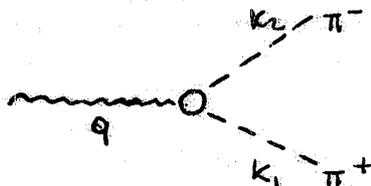
Per fare un esempio, prendiamo il modello "alla Veneziano": in questo caso la violazione dell'unitarietà è evidente dal fatto che non abbiamo, per  $t \geq 4\mu^2$ , un taglio bensì una serie infinita di poli sull'asse reale e la discontinuità è data da una serie di funzioni delta di Dirac.

In queste lezioni ci limiteremo a considerare il fattore di forma isovettoriale del pione e vedremo in quale modo si scriva per esso l'equazione di unitarietà; in seguito esamineremo alcuni modelli che, almeno in forma approssimata, sono unitari.

#### III.2. - L'equazione di unitarietà. -

In questa sezione deriveremo l'equazione di unitarietà in forma differente da quella vista precedentemente, senza cioè far uso del formalismo di riduzione<sup>(1)</sup>.

Consideriamo l'elemento di matrice per la produzione di  $\pi^+ \pi^-$  da parte della corrente elettromagnetica  $J_\mu(x)$ , rappresentato dal seguente grafico



e ricordiamo la definizione data precedentemente:

$$(III.1) \quad \langle \pi^+ \pi^- \text{ "out"} | J_\mu(0) | 0 \rangle = [4\omega_1 \omega_2]^{-1/2} F_\pi(t)(k_1 - k_2)_\mu = \prod_f^{-1} F_\pi(t)(k_1 - k_2)_\mu$$

dove  $t = (k_1 + k_2)^2$ ,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono le energie di  $\pi^+$  e  $\pi^-$  e abbiamo definito  $\prod_f = (4\omega_1 \omega_2)^{1/2}$ .

Per il fattore di forma  $F_\pi(t)$  abbiamo allora

$$F_\pi(t) = \prod_f \frac{(k_1 - k_2)_\mu}{(k_1 - k_2)^2} \langle \pi^+ \pi^- \text{ "out"} | J_\mu(0) | 0 \rangle = Q_\mu \langle \pi^+ \pi^- \text{ "out"} | J_\mu(0) | 0 \rangle \quad 0$$

avendo definito  $Q_{\mu} = \frac{\pi f}{(k_1 - k_2)^2} (k_1 - k_2)_{\mu}$

Ricaviamo ora la parte immaginaria di  $F_{\pi}(t)$ ; abbiamo:

$$(III. 2) \quad \text{Im } F_{\pi}(t) = \frac{Q_{\mu}}{2i} \left[ \langle \pi^+ \pi^- \text{"out"} | J_{\mu}(0) | 0 \rangle - \langle \pi^+ \pi^- \text{"out"} | J_{\mu}(0) | 0 \rangle^* \right] = \\ = \frac{Q_{\mu}}{2i} \left[ \langle \pi^+ \pi^- \text{"out"} | J_{\mu}(0) | 0 \rangle - \langle 0 | J_{\mu}(0) | \pi^+ \pi^- \text{"out"} \rangle \right]$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto alla hermitianità della corrente elettromagnetica.

Consideriamo ora solamente il II termine dell'ultima riga e inseriamo un insieme completo di stati "in" tra il vuoto e  $J_{\mu}(0)$

$$(III. 3) \quad \langle 0 | J_{\mu}(0) | \pi^+ \pi^- \text{"out"} \rangle = \sum_n \langle 0 | J_{\mu}(0) | n \text{"in"} \rangle \langle n \text{"in"} | \pi^+ \pi^- \text{"out"} \rangle$$

Ricorriamo ora alla definizione della matrice di scattering (S)<sup>(2)</sup> e della ampiezza di scattering (T)

$$\langle \alpha \text{"out"} | \beta \text{"in"} \rangle = \langle \alpha \text{"in"} | S | \beta \text{"in"} \rangle = \langle \alpha \text{"in"} | 1 + iT | \beta \text{"in"} \rangle$$

per cui scriveremo la (3) come:

$$\langle 0 | J_{\mu}(0) | \pi^+ \pi^- \text{"out"} \rangle = \sum_n \langle 0 | J_{\mu}(0) | n \text{"in"} \rangle \langle n \text{"in"} | 1 - iT | \pi^+ \pi^- \text{"in"} \rangle$$

A questo punto si può tenere conto delle proprietà fisiche della corrente elettromagnetica, in particolare ricordiamo che l'interazione elettromagnetica è invariante rispetto alle trasformazioni di parità (P), coniugazione di carica (C), time-reversal (T). In particolare è invariante rispetto alla trasformazione combinata TP; abbiamo allora<sup>(2)(x)</sup>:

$$(III. 4) \quad \langle 0 | J_{\mu}(0) | n \text{"in"} \rangle = \langle 0 | J_{\mu}(0) | n \text{"out"} \rangle^* = \langle n \text{"out"} | J_{\mu}(0) | 0 \rangle$$

A questo punto riscriviamo l'eq. (III. 2) tenendo conto delle Eq. (III. 3) e (III. 4):

$$(III. 5) \quad \text{Im } F_{\pi}(t) = \frac{Q_{\mu}}{2i} \left[ \langle \pi^+ \pi^- \text{"out"} | J_{\mu}(0) | 0 \rangle - \sum_n \langle n \text{"out"} | J_{\mu}(0) | 0 \rangle \times \right. \\ \left. \times (\langle n \text{"in"} | \pi^+ \pi^- \text{"in"} \rangle - i \langle \pi^+ \pi^- \text{"in"} | T | n \text{"in"} \rangle^*) \right]$$

Notiamo che l'elemento di matrice  $\langle n \text{"in"} | \pi^+ \pi^- \text{"in"} \rangle$  è diverso da zero solo se lo stato  $|n\rangle$  è identico allo stato  $|\pi^+ \pi^-\rangle$ .

(x) - Ci limitiamo per semplicità al caso in cui le particelle nello stato  $|n\rangle$  siano senza spin, dato che lo spin introduce delle complicazioni inessenziali.

Se ora definiamo un elemento di matrice invariante per l'ampiezza di scattering  $\pi^+\pi^- \rightarrow n$  come

$$(III. 6) \quad \langle \pi^+\pi^- | T | n \rangle = \frac{(2\pi)^4}{\prod_f \prod_n} \delta^4(k_1+k_2-P_n) M_n$$

(dove si sono definiti  $\prod_n = [2\omega_1 \dots 2\omega_n]^{1/2}$  e  $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$  è l'impulso totale dello stato  $n$ )

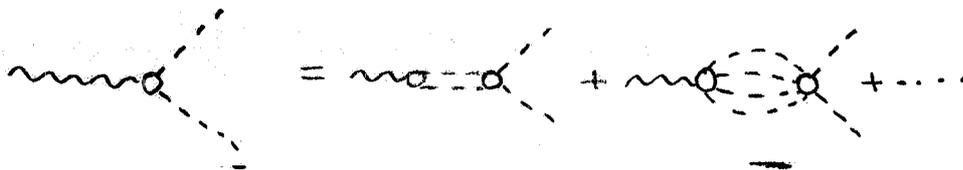
otteniamo:

$$(III. 7) \quad \begin{aligned} \text{Im} F_{\pi}(t) &= (2\pi)^4 \frac{Q_{\mu}}{2} \sum_n \frac{M_n^x}{\prod_f \prod_n} \delta^4(k_1+k_2-P_n) \langle n | \text{out} | J_{\mu}(0) | 0 \rangle = \\ &= \frac{(2\pi)^4}{2} \frac{(k_1-k_2)^{\mu}}{(k_1-k_2)^2} \sum_n \langle n | \text{out} | J_{\mu}(0) | 0 \rangle \frac{M_n^x}{\prod_n} \delta^4(k_1+k_2-P_n) \end{aligned}$$

Possiamo ora fare alcune osservazioni di carattere generale sulla formula (III. 7) ora scritta. Notiamo intanto che gli stati  $|n\rangle$  introdotti nella somma di completezza sono stati fisici, cioè verificano le condizioni del mass-shell mentre, dato che comunicano con il vuoto attraverso la corrente  $J_{\mu}(x)$  (che è neutra rispetto a tutte le "cariche") devono avere carica elettrica, numero leptonico e numero barionico nulli.

Inoltre, dato che nella somma (III. 7) l'elemento di matrice  $\langle n | \text{out} | J_{\mu}(0) | 0 \rangle$  è moltiplicato per l'ampiezza forte  $M_n$ , lo stato  $|n\rangle$  deve avere gli stessi numeri quantici del sistema  $(\pi^+\pi^- \rightarrow \text{finale})$ , cioè  $I=1, S=0, G=+$ <sup>(3)</sup>.

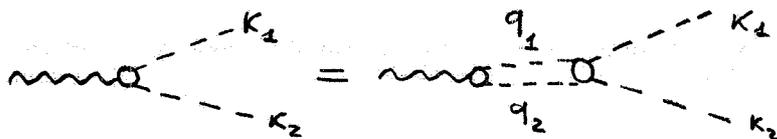
Un modo semplice e immediato di visualizzare l'eq. (III. 7) è quello, preso a prestito dalla teoria della matrice S, dei diagrammi di unitarietà: in forma diagrammatica l'equazione (III. 7) si presenta così:



(si noti che questi diagrammi non vanno intesi come diagrammi di Feynman, in quanto le particelle intermedie sono sul "mass-shell").

Fino a questo punto l'equazione (III. 7) coinvolge gli elementi di matrice della corrente elettromagnetica; per rendere la relazione di unitarietà più significativa bisogna scegliere un determinato riferimento ed una specifica zona cinematica, in modo da isolare, a secondo membro della (III. 7), il contributo del fattore di forma elettromagnetico del pione.

Poniamoci nella zona elastica:  $4\mu^2 \leq t \leq 16\mu^2$  (infatti il primo stato con i numeri quantici giusti, dopo lo stato di due pioni, è quello di quattro pioni); nella somma avremo allora il contributo del solo I termine:



Avremo allora:

$$(III. 8) \quad \text{Im } F_{\pi}(t) = \frac{(2\pi)^4}{2} \frac{(k_1 - k_2)^{\mu}}{(k_1 - k_2)^2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \langle \pi^+ \pi^-(q_1, q_2) | J_{\mu}(0) | 0 \rangle \frac{M^{\pi}(t_1, \cos\theta)}{(4\omega_{q_1} \omega_{q_2})^{1/2}} \times \\ \times \delta^4(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \\ t_1 = (\omega_{q_1} + \omega_{q_2})^2, \quad t = (\omega_1 + \omega_2)^2$$

Nella (III. 8) resta ora da valutare la somma sui momenti dello stato intermedio a due pioni: per fare ciò, convertiamo la somma in integrale, usando l'identità

$$\sum_{\vec{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p$$

e poniamoci nel riferimento del centro di massa del sistema dei pioni dello stato finale. Abbiamo allora le seguenti relazioni:

$$(III. 9) \quad \vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k} \quad \text{e} \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Ricordando la definizione del fattore di forma in termini dell'elemento di matrice della corrente abbiamo:

$$(III. 10) \quad \text{Im } F_{\pi}(t) = \frac{(2\pi)^4 (2\pi)^{-6}}{4k^2} \int d^3 q_1 d^3 q_2 \vec{k}(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) F_{\pi}(t_1) \frac{M^{\pi}(t_1, \cos\theta)}{4\omega_{q_1} \omega_{q_2}} \times \\ \times \delta(\omega_{q_1} + \omega_{q_2} - \sqrt{t}) \delta^3(\vec{p} + \vec{q}) = \frac{(2\pi)^{-2}}{2t^2} \int d^3 q k q \cos\theta F_{\pi}(t_1) \times \\ \times \frac{M^{\pi}(t_1, \cos\theta)}{4\bar{\omega}^2} \delta(2\bar{\omega} - \sqrt{t})$$

dove  $k = |\vec{k}|$  e  $q = |\vec{q}| = |\vec{q}_1| = |\vec{q}_2|$  e  $\cos\theta$  è definito dalla  $(\vec{k} \cdot \vec{q}) = kq \cos\theta$ . Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che le masse delle particelle nello stato intermedio sono uguali e che quindi è

$$\omega_{q_1} = \omega_{q_2} = \bar{\omega}$$

Ricordando che

$$\int d^3 q = \int q^2 dq \int d\Omega$$

dove  $d\Omega$  è l'elemento di angolo solido attorno alla direzione  $\theta$  e effettuando l'integrazione in  $dq$  otteniamo infine

$$\begin{aligned}
 \text{Im } F_{\pi^+ \pi^-}(t) &= \frac{(2\pi)^{-2}}{2k^2} \int q^2 dq k q F_{\pi^+ \pi^-}(t_1) \frac{(2\bar{\omega} - \sqrt{s})}{4\bar{\omega}^2} \int d\Omega \cos\theta M^*(t_1, \cos\theta) = \\
 \text{(III.11)} \quad &= \frac{k}{\sqrt{t}} \frac{F_{\pi^+ \pi^-}(t)}{4 \cdot 8\pi^2} \int d\Omega \cos\theta M^*(t, \cos\theta)
 \end{aligned}$$

(In tutte le formule precedenti abbiamo indicato con  $M(t_1, \cos\theta)$  l'ampiezza a quattro corpi  $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$  mettendo in rilievo la dipendenza dall'energia e dall'angolo di scattering).

Usiamo ora la decomposizione dell'ampiezza in onde parziali, scrivendola esplicitamente in funzione dei phase-shifts (nel fare questo si tiene conto della relazione di unitarietà per l'ampiezza forte)

$$\text{(III.12)} \quad M^*(t, \cos\theta) = 8\pi \frac{\sqrt{t}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{-i\delta_l(t)} \sin \delta_l(t)$$

$\delta_l(t)$  è lo sfasamento dello scattering elastico  $\pi^+ \pi^-$  in onda  $l$  e  $P_l(\cos\theta)$  è l' $l$ -esimo polinomio di Legendre.

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
 \text{Im } F_{\pi^+ \pi^-}(t) &= \frac{F_{\pi^+ \pi^-}(t)}{4\pi} \sum_l (2l+1) e^{-i\delta_l(t)} \sin \delta_l(t) \int d\Omega \cos\theta P_l(\cos\theta) = \\
 \text{(III.13)} \quad &= F_{\pi^+ \pi^-}(t) e^{-i\delta_1(t)} \sin \delta_1(t) \quad (t \geq 4\mu^2)
 \end{aligned}$$

dove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che  $\cos\theta = P_1(\cos\theta)$  e dalla relazione di ortogonalità dei polinomi di Legendre

$$\int d\Omega P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = \frac{4}{2l+1} \delta_{ll'}$$

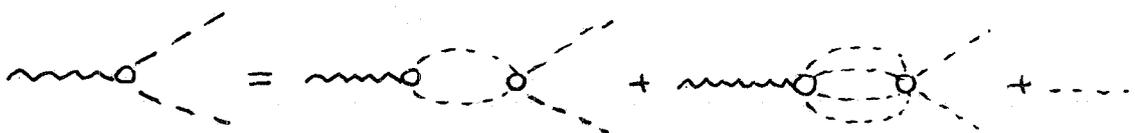
Notiamo intanto che, come ci si aspettava dalle considerazioni sulla conservazione del momento angolare, il phase-shift che interviene nella (III.13) è quello in onda  $P$ .

In secondo luogo, come abbiamo già detto, la (III.13) è strettamente valida solo fino a  $t = 16\mu^2$ .

In generale potremo scrivere una relazione di unitarietà completa ("anelastica") al seguente modo

$$\text{(III.14)} \quad \text{Im } F_{\pi^+ \pi^-}(t) = F_{\pi^+ \pi^-}(t) e^{-i\delta_1(t)} \sin \delta_1(t) + I(t) \quad (t \geq 4\mu^2)$$

dove  $I(t)$  è una funzione che tiene conto dei canali anelastici che si aprono quando  $t$  supera le varie soglie. Diagrammaticamente questo potrà essere visualizzato nella forma:



Tuttavia generalmente si postula la validità della (III.13) fino a  $t_1 \approx m_\pi^2$  e ciò è supportato da basi soprattutto sperimentali, in quanto si sa, per esempio che il  $\delta$  decade quasi al 100% in due pioni il che conforta l'ipotesi che, almeno a bassi momenti trasferiti, il contributo dei canali anelastici sia poco importante.

D'altra parte questa approssimazione ha senso solo se, di volta in volta, il confronto con i dati sperimentali la può giustificare.

Infine, notiamo che l'equazione di unitarietà (III.13) mostra che il fattore di forma  $F_\pi(t)$  ha la stessa fase della corrispondente ampiezza forte; ma d'altra parte l'equazione di unitarietà è un'equazione lineare (e omogenea) in  $\text{Im} F_\pi(t)$  e  $\text{Re} F_\pi(t)$ , per cui la grandezza del fattore di forma non è fissata.

Questa è una sostanziale differenza tra l'unitarietà per i fattori di forma e per le ampiezze di scattering, la seconda, infatti, essendo una relazione quadratica, in qualche modo fissa la "scala" delle interazioni forti mentre nella prima questa è arbitraria.

In questa forma l'eq. (III.13) non è quindi ancora molto utile.

Teniamo ora conto del fatto che, come visto nella prima parte di queste lezioni, i fattori di forma elettromagnetici degli adroni soddisfano a delle relazioni di dispersione, possibilmente sottratte. Trascurando per semplicità la possibilità di sottrazioni abbiamo<sup>(\*)</sup>

$$F_\pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F_\pi(x)}{x-t-i\epsilon} dx$$

da cui, inserendo la (III.13)

$$(III.15) \quad F_\pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{F_\pi(x) e^{-i\delta_1(t)} \sin \delta_1(t)}{x-t-i\epsilon} dx$$

(è sottinteso il limite per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ).

Se fossimo partiti dalla (III.14) avremmo avuto invece

$$(III.15b) \quad F_\pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dx \frac{e^{-i\delta_1(x)} \sin \delta_1(x) F_\pi(x)}{x-t-i\epsilon} + H(t)$$

dove:

$$H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dx \frac{I(x)}{x-s-i\epsilon}$$

(\*) - Questa relazione si ottiene dalla forma usuale

$$\text{Re} F_\pi(t) = \frac{P}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im} F_\pi(x)}{x-t} dx$$

tenendo conto della relazione (in senso integrato)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-i\epsilon} = \frac{P}{x} + i\pi \delta(x)$

Le due equazioni (III.15) sono dunque delle equazioni integrali per il fattore di forma elettromagnetico del pione: la (III.15) è omogenea, mentre la (III.15b) è non omogenea. Equazioni di questo tipo sono comunemente chiamate equazioni di Omnès e, come si vede immediatamente, sono del tipo a nucleo singolare.

### 3. - Soluzione dell'equazione di Omnès. -

E' interessante ricavare la soluzione dell'equazione (III.15), sia perchè il procedimento è molto elegante dal punto di vista matematico sia perchè in questo modo si può capire fino a che punto la soluzione è arbitraria e come questa arbitarietà possa venire superata con considerazioni di carattere fisico<sup>(4)</sup>.

Definiamo la funzione ausiliaria

$$(III.16) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dy h^x(y) F_{\pi}(y)}{y-z} \quad h(y) = e^{i\delta_1(y)} \sin \delta_2(y)$$

vale quindi la relazione

$$(III.17) \quad F_{\pi}(z) = 2i F(z)$$

che si può anche scrivere:

$$(III.18) \quad \frac{F(z)}{F(o)} = \frac{F_{\pi}(z)}{F_{\pi}(o)}$$

Calcoliamo la discontinuità della funzione  $F(z)$ , definita come il valore della funzione sopra il taglio meno il valore sotto il taglio:

$$(III.19) \quad F(s+i\epsilon) - F(s-i\epsilon) = h^x(s) F_{\pi}(s) \theta(s-4\mu^2)$$

Questa formula si deriva al seguente modo

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [F(s+i\epsilon) - F(s-i\epsilon)] &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{4\mu^2}^{\infty} dy h^x(y) F_{\pi}(y) \left[ \frac{1}{y-s-i\epsilon} - \frac{1}{y-s+i\epsilon} \right] = \\ &= \int_{4\mu^2}^{\infty} dy h^x(y) F_{\pi}(y) \delta(y-s) = \theta(s-4\mu^2) h^x(s) F_{\pi}(s) \end{aligned}$$

Dalle eq. (III.19) e (III.17) vediamo che l'equazione di Omnès si può trasformare nella seguente equazione:

$$(III.20) \quad F(x+i\epsilon) \left[ 1 - e^{-i\delta_1} \sin \delta_2 \right] - F(x-i\epsilon) = e^{-2i\delta_1} (F(x+i\epsilon) - F(x-i\epsilon)) = 0$$

Questa equazione si può risolvere facilmente prendendo il logaritmo (stiamo supponendo che la  $F(z)$  non abbia zeri)

$$\log F(x+i\epsilon) - \log F(x-i\epsilon) = 2i \delta_1(x)$$

e, scrivendo una relazione di dispersione si ottiene:

$$(III. 21) \quad F(z) = \exp \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dy \frac{\mathcal{S}_1(y)}{y-z}$$

Ricordando la (III. 18) abbiamo quindi:

$$(III. 22) \quad F_{\pi}(s) = c e^{i \mathcal{S}_1(x)} \left[ \exp \frac{P}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dy \frac{\mathcal{S}_1(y)}{y-s} \right]$$

dove:

$$c = F_{\pi}(0) \exp \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\mathcal{S}_1(y)}{y} dy$$

Mostriamo ora che la soluzione della eq. (III. 20) non è unica, infatti, se richiediamo che  $F'(z) = \phi_0(z)F(z)$  sia ancora una soluzione della eq. (III. 20) otteniamo

$$e^{-2i \mathcal{S}(x)} \phi_0(x+i\epsilon)F(x+i\epsilon) - \phi_0(x-i\epsilon)F(x-i\epsilon) = \phi_0(x+i\epsilon)F(x-i\epsilon) - \phi_0(x-i\epsilon)F(x+i\epsilon) = 0$$

cioè

$$\phi_0(x+i\epsilon) - \phi_0(x-i\epsilon) = 0$$

Ricordiamo che nelle espressioni precedenti era sempre sottintesa una funzione  $\theta(s-4\mu^2)$ ; ne segue che la funzione  $\phi_0(z)$  deve essere una funzione analitica in tutto il piano  $z$ , ad eccezione eventualmente del punto  $4\mu^2$  e del punto all'infinito. Se escludiamo la possibilità di singolarità essenziali, la potremo scrivere nella forma

$$\phi_0(z) = \frac{P(z)}{(z-4\mu^2)^n}$$

dove  $P(z)$  è un polinomio (se supponiamo che il fattore di forma, all'infinito possa avere una singolarità essenziale, allora  $P(z)$  in generale sarà una funzione intera).

Quindi la più generale soluzione dell'equazione di Omnès omogenea è data da

$$(III. 23) \quad F_{\pi}(t) = \frac{P(t)}{(t-4\mu^2)^n} \Omega(t+i\epsilon)$$

dove  $\Omega(z)$  è la cosiddetta funzione di Omnès nella sua forma non sottratta

$$(III. 24) \quad \Omega(z) = \exp \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\mathcal{S}_1(y)}{y-z} dy$$

L'ambiguità insita nella eq. (III. 23) si può di volta in volta ridurre, ricorrendo a considerazioni di carattere fisico o dettate dagli esperimenti: per esempio si può richiedere che il fattore di forma non diverga alla soglia e che abbia un certo comportamento all'infinito.

Per completezza diamo, senza ricavarla, la soluzione dell'equazione di Omnès nel caso non omogeneo.

Definendo

$$\rho(x) = \frac{P}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\delta_1(y)}{y-x} dy$$

per cui

$$\Omega(s+i\epsilon) = e^{\rho(s)+i\delta_1(s)}$$

si ha dalla (III.15b)

$$(III.25) \quad F_{\pi}(x) = \left\{ H(x) \cos \delta_1(x) + e^{\rho(x)} \frac{P}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{e^{-\rho(y)} H(y) \sin \delta_1(y)}{y-x} dy \right\} e^{i\delta_1(x) + \varphi(x)}$$

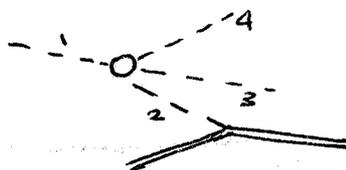
Dove  $\varphi(x)$  è una funzione del tipo dell'eq. (III.23).

#### 4. - Modelli fisici per $\delta_1(x)$ . -

Abbiamo visto che, nell'approssimazione in cui si considera soltanto il contributo elastico, una volta nota la fase dello scattering forte  $\pi^+ - \pi^-$  ( $I=1, J=1$ ) si può conoscere il fattore di forma pionico (a parte le ambiguità viste prima).

Il problema è ora quello di conoscere  $\delta_1(t)$ .

Dal punto di vista sperimentale questo è molto difficile dato che, almeno al momento, esperimenti di scattering  $\pi - \pi$  non sono realizzabili, di ricavare delle informazioni, per esempio, dallo scattering anelastico  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$  supponendo che esso sia dominato da processi periferici del tipo



La difficoltà insita in questo tipo di procedimento è essenzialmente che il pione 2 è "off mass-shell" e quindi bisogna ricorrere a processi di extrapolazione per arrivare alla ampiezza del processo.

Dal punto di vista teorico, la mancanza di una teoria delle interazioni forti impedisce di ottenere per  $\delta_1(t)$  delle espressioni che non siano delle approssimazioni più o meno giustificate e di validità ristretta.

Esamineremo qui in dettaglio uno dei metodi più usati per costruire modelli per lo scattering pione-pione; in seguito considereremo in breve anche il modello che ha avuto maggior successo negli ultimi anni, cioè il modello di Veneziano.

#### Il metodo N/D. -

Ricordiamo che l'ampiezza di scattering  $M(s, \cos\theta)$  ha una struttura analitica ben determinata, dettata dall'unitarietà<sup>(2)</sup>.

Più precisamente definiamo le ampiezze parziali  $h_1(s)$

$$(III. 26) \quad M(s, \cos\theta) = 8\pi \sum_{l=0}^{\infty} h_l(s) (2l+1) P_l(\cos\theta)$$

dove

$$h_l(s) = \frac{\sqrt{s}}{k} e^{i\delta_l(s)} \sin \delta_l(s)$$

Si può dimostrare che, per  $k \rightarrow 0$ ,  $h_l(s) \sim k^{2l}$  ( $k$  è definito come il modulo del momento totale nel centro di massa, ed è lo stesso definito nelle equazioni di unitarietà per il fattore di forma).

E' in generale più conveniente usare una diversa definizione di ampiezza parziale, tale che vada a costante per  $k \rightarrow 0$ :

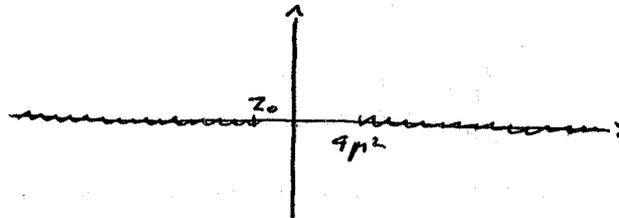
$$(III. 27) \quad g_l(s) = \frac{\sqrt{s}}{k^{2l+1}} e^{i\delta_l(s)} \sin \delta_l(s)$$

Per l'ampiezza  $g_l(s)$  l'equazione di unitarietà si scrive:

$$(III. 28) \quad \text{Im } g_l(s) = \frac{k^{2l+1}}{\sqrt{s}} |g_l(s)|^2$$

$g_l(s)$  è il limite per  $z \rightarrow s+i\epsilon$  di una funzione  $g_l(z)$ , analitica in tutto il piano  $z$  tranne che per un taglio da  $4\mu^2$  a  $+\infty$  sull'asse reale positivo e un taglio sull'asse reale negativo (da un certo punto  $z_0$  a  $-\infty$ ).

Rozzamente si può dire che il taglio a destra è dovuto all'unitarietà, mentre il taglio a sinistra riflette, attraverso il crossing, la struttura di singolarità nei canali  $t$  e  $u$ .



A questo punto definiamo le funzioni  $N(s)$  e  $D(s)$  tali che

$$(III. 29) \quad g_l(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

e che la funzione  $N(s)$  abbia il solo taglio a sinistra, mentre la  $D(s)$  abbia il solo taglio a destra.

Notiamo intanto che, per  $s > 0$ , la funzione  $D^{-1}(z)$  ha lo stesso taglio a destra e la stessa fase dell'ampiezza  $g_l(z)$ ; d'altra parte proprio da queste richieste si era partiti per ricavare la funzione di Omnès per cui faremo l'identificazione

$$(III. 30) \quad \Omega(z) = D^{-1}(z)$$

(In effetti, nello scrivere l'eq. (III. 30) si è fatta l'ipotesi semplificativa che la funzione di Omnès non abbia zeri).

Se ora calcoliamo, per  $s \geq 4\mu^2$  la parte immaginaria di  $D(s)$  abbiamo, dalla eq. (III. 29)

$$\text{Im } g_1(s) = \text{Im} \frac{N(s)}{D(s)} = N(s) \text{Im} \frac{D^*(s)}{|D(s)|^2} = \rho^1 \frac{N^2(s)}{|D(s)|^2}$$

(ricordiamo che per  $s \geq 4\mu^2$   $N(s)$  è reale)

Abbiamo definito

$$\rho^1(s) = \frac{k^{2l+1}}{\sqrt{s}} ;$$

dato che  $\text{Im } D^*(s) = -\text{Im } D(s)$ , abbiamo in definitiva

$$(III. 30) \quad \text{Im } D(s) = -\rho^1(s) N(s)$$

Introduciamo l'espressione così ottenuta per la parte immaginaria della funzione  $D(s)$  in una relazione di dispersione. Se consideriamo l'onda  $l=1$  (che è quella che ci interessa), a causa del fattore  $\rho^1(s)$  dovremo scrivere una relazione di dispersione sottratta una volta se  $N(s) \sim 1/s$  per  $s \rightarrow \infty$ , due volte se  $N(s)$  va a costante.

Nel primo caso avremo

$$(III. 31) \quad D(s) = D(0) - \frac{s}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \rho^1(x) \frac{N(x)}{(x-s-i\epsilon)x} dx$$

nel secondo

$$(III. 32) \quad D(s) = D(0) + s D'(0) - \frac{s^2}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \rho^1(x) \frac{N(x)}{(x-s-i\epsilon)x^2} dx$$

Il punto di sottrazione è stato scelto in  $s=0$  e  $D(0)$  e  $D'(0)$  sono a priori arbitrari.

Una volta nota la  $N(s)$ , a parte le ambiguità dovute alle sottrazioni, si può costruire la  $g_1(s)$ ; in teoria di potenziale la funzione  $N(s)$  è connessa alla "forza" del potenziale.

In teoria relativistica non si conoscono espressioni per la  $N(s)$ : tutto quello che si può fare sono ipotesi sulla sua forma e, una volta ricavata la  $D(s)$ , confrontare l'ampiezza ottenuta con i dati sperimentali.

Passiamo ora a vedere quali sono i modelli che si possono fare per  $N(s)$ .

a) Frazer e Fulco<sup>(5)</sup> sostituiscono il taglio a sinistra con un polo a  $s = -\bar{s}$ , scrivendo cioè la  $N(s)$  nella forma

$$N(s) = \frac{\bar{s}}{s + \bar{s}}$$

Introducendo nella eq. (III. 31) si ottiene una formula per la  $D(s)$  con due parametri liberi  $D(0)$  e  $\bar{s}$ .

b) Il modello di Vaughn e Wali<sup>(6)</sup> è analogo, con la  $N(s)$  data da un polo doppio

$$N(s) = \left( \frac{\bar{s}}{s + \bar{s}} \right)^2$$

e si usa una relazione di dispersione 2 volte sottratta, fissando però  $D(0)=1$ . I parametri liberi sono quindi ancora due.

c) Gounaris e Sakurai<sup>(7)</sup> pongono  $N(s)=\cos t=1$  e usano una relazione di dispersione due volte sottratta, con parametri arbitrari  $D(0)$  e  $D'(0)$ .

I parametri liberi presenti nelle precedenti espressioni vengono fissati richiedendo che nell'ampiezza forte  $\pi - \pi$  venga riprodotto il  $\rho$  alla massa fisica e con la giusta larghezza.

Esaminiamo ora più in dettaglio il modello di Gounaris e Sakurai<sup>(7)</sup>. Se nella equazione (III.31) si pone  $N(s)=1$  e si fa l'integrale si ottiene per l'ampiezza una espressione del tipo:

$$(III.33) \quad [g_1(s)]^{-1} = (s-4\mu^2)f(s) + a + bs = D(s)$$

con  $a$  e  $b$  parametri reali e  $f(s)$  una funzione la cui parte reale verrà specificata più avanti; la parte immaginaria è semplicemente data da:

$$4 \operatorname{Im} f(s) = \frac{k}{\sqrt{s}}$$

Ricordando che possiamo scrivere

$$[g_1(s)]^{-1} = \frac{k^3}{\sqrt{s}} \times \frac{e^{-i\delta_1(s)}}{\sin \delta_1(s)} = \frac{k^3}{\sqrt{s}} \cotg \delta_1(s) - \frac{ik^3}{\sqrt{s}}$$

abbiamo per lo sfasamento dello scattering  $\pi - \pi$  la seguente formula ("generalized effective range").

$$(III.34) \quad \frac{k^3}{\sqrt{s}} \cotg \delta_1(s) = k^2 h(s) + a + bs$$

dove:

$$h(s) = 4 \operatorname{Re} f(s) = \frac{2}{\pi} \frac{k}{\sqrt{s}} \log \frac{\sqrt{s+k}}{2\mu}$$

I parametri  $a$  e  $b$  sono fissati dalla richiesta di consistenza dell'ampiezza forte alla massa del  $\rho$ ; in formule

$$\cotg \delta_1(m_\rho^2) = 0; \quad \left. \frac{d}{ds} \delta_1(s) \right|_{s=m_\rho^2} = \frac{1}{m_\rho \Gamma_\rho}$$

(dove  $\Gamma_\rho$  è la larghezza del  $\rho$ ) da cui

$$(III.35) \quad a = \mu^2 h(\mu^2) + m_\rho^2 \left[ \frac{k_\rho^3}{m_\rho \Gamma_\rho} + k_\rho^2 h'(m_\rho^2) \right]; \quad b = -1/4 h(\mu^2) - \left[ \frac{k_\rho^3}{m_\rho \Gamma_\rho} + k_\rho^2 h'(m_\rho^2) \right]$$

$$(k = \frac{1}{2} (m_\rho^2 - 4\mu^2)^{1/2})$$

A questo punto il fattore di forma elettromagnetico del pione è nuovamente fissato una volta che venga risolta l'ambiguità che discende dall'equazione di Omnès, Gounaris e Sakurai pongono

$$\frac{P(s)}{(s - 4\mu^2)^n} = D(0)$$

da cui, nella zona  $s \simeq m_\rho^2$ , si ha la seguente espressione per il fattore di forma elettromagnetico del pione nella zona time-like

$$(III. 36) \quad F_\pi(t) = \frac{m_\rho^2 (1 + d \frac{\Gamma_\rho}{m_\rho})}{m_\rho^2 - s + 0 [(m_\rho^2 - s)^2] - i m_\rho \Gamma_\rho (\frac{k}{k_\rho})^3 \frac{m_\rho}{\sqrt{s}}}$$

dove:

$$(III. 37) \quad d = \frac{3}{\pi} \frac{\mu^2}{k_\rho^2} \log \frac{m_\rho + 2k_\rho}{2\mu} + \frac{m_\rho}{2\pi k_\rho} - \frac{\mu^2 m_\rho}{\pi k_\rho^3}$$

Possiamo notare alcuni aspetti peculiari di questa espressione.

In primo luogo, la presenza del termine  $d \frac{\Gamma_\rho}{m_\rho}$  a numeratore porta ad una "rinormalizzazione" del residuo al polo  $s = m_\rho^2$  (che in una semplice espressione tipo Breit-Wigner sarebbe  $R = m_\rho^2$ ); questa rinormalizzazione è dell'ordine del 14%.

In secondo luogo il valore di picco dell'espressione (III. 36) non è al punto  $s = m_\rho^2$  ma è spostato all'indietro. Questo è comune a tutti i modelli che tengono conto dell'unitarietà e si riscontra anche nell'unitarizzazione dei modelli "alla Veneziano". I risultati del modello di Gounaris e Sakurai sono riportati in Fig. 10.

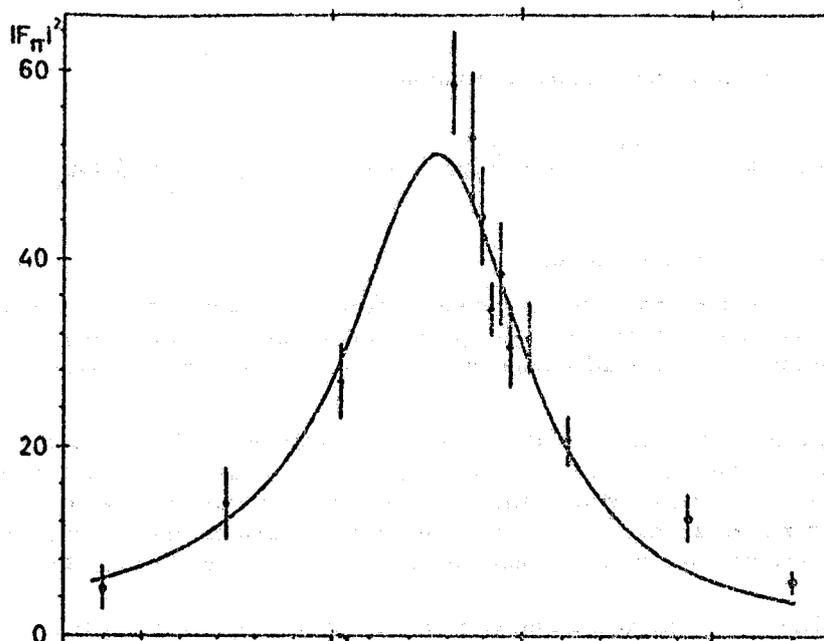


FIG. 10

Unitarizzazione dei fattori di forma "alla Veneziano". -

Nella prima parte di queste lezioni sono stati presentati dei modelli di fattori di forma (detti "alla Veneziano") che contengono un numero infinito di poli. Questi fattori di forma non sono unitari, in quanto la parte immaginaria è data da una somma infinita di funzioni delta di Dirac.

In quello che segue verrà esposto brevemente un procedimento per ottenere una espressione (almeno approssimativamente) unitaria a partire in generale da un modello di fattore di forma che presenta una serie infinita di poli sull'asse reale<sup>(8)</sup>.

Più precisamente, consideriamo la seguente espressione (non unitaria)

$$(III. 38) \quad F(t) = c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{t-t_n}$$

La sua parte immaginaria è data da:

$$(III. 39) \quad \text{Im} F(t) = c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \delta(t-t_n)$$

L'ipotesi che si fa a questo punto è che il fattore di forma (III. 38), se in qualche modo è una buona approssimazione, sia per così dire vicino all'unitarietà, cioè che la eq. (III. 39) descriva abbastanza bene la parte immaginaria del fattore di forma fisico, almeno per  $t$  maggiore di qualche  $t_1$ , mentre al di sotto di  $t_1$  la parte immaginaria è data correttamente dall'equazione dell'unitarietà.

Ricordiamo l'equazione d'unitarietà nel caso in cui si tenga conto anche dei canali anelastici

$$(III. 40) \quad \text{Im} F_{\pi}(t) = \theta(t-4\mu^2) e^{-i\delta_1(t)} \sin \delta_1(t) F_{\pi}(t) + I(t)$$

Scriveremo quindi, nella nostra approssimazione:

$$(III. 41) \quad \text{Im} F_{\pi}(t) = \theta(t-4\mu^2) \theta(t_1-t) e^{-i\delta_1(t)} \sin \delta_1(t) F_{\pi}(t) + c_0 \pi \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n \delta(t-t_n)$$

(abbiamo scritto esplicitamente le funzioni  $\theta$ ).

Questo equivale a dire che, dato che si ritiene il modello di partenza una buona approssimazione, si prende da esso il contributo alla parte immaginaria nella zona di  $t \geq t_1$ , mentre nella zona  $t < t_1$  (corrispondente alla zona del  $\rho$ ) si tiene conto correttamente della unitarietà elastica.

In altre parole siamo partiti da un modello che aveva solo poli sull'asse reale e ci siamo costruiti un fattore di forma che ha il corretto taglio dovuto alla unitarietà fino a  $t_1$ , mentre da  $t_1$  a infinito continua ad avere poli sull'asse reale; è per questo aspetto che tale metodo si può chiamare di unitarizzazione parziale. Notiamo ancora che questo metodo ha senso solo se il modello di partenza è in effetti una buona approssimazione del fattore di forma fisico.

Inserendo l'eq. (III. 41) in una relazione di dispersione non sottratta si ottiene la seguente equazione integrale per il fattore di forma

$$(III. 42) \quad F_{\pi}(t) = c g(t) + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{t_1} \frac{e^{-i\delta_1(x)} \sin \delta_1(x) F_{\pi}(x)}{x-t-i\epsilon} dx$$

dove  $g(t) = (1/c)F(t) - \gamma_0/(t-t_0)$ .

Questa equazione è del tipo di Omnès non omogenea, con la differenza che l'estremo superiore di integrazione è  $t_1$  e non  $\infty$ .

La soluzione di questa equazione può essere ottenuta con un metodo del tutto simile a quello di Omnès ed è data da

$$(III. 43) \quad F_{\pi} = c \left[ G_{\pi}(t) + \frac{\Psi(t)}{(t-4\mu^2)^n (t-t_1)^m} \exp \left[ \int \rho(t) \right] \right] e^{i \int_1^t}$$

dove:

$$G_{\pi}(t) = g(t) \cos \int_1^t + \exp \left[ \int \rho(t) \right] \frac{P}{\pi} \int_{4\mu^2}^{t_1} \frac{\sin \int_1^x g(x) \exp \left[ \int \rho(x) \right]}{x-t} dt$$

e  $\rho(t)$  è stato definito nel paragrafo 3.  $\Psi(t)$  è una funzione a priori arbitraria,  $n$  e  $m$  sono degli interi. Anche in questo caso la soluzione è largamente arbitraria; se però si fanno le seguenti ipotesi:

a) che  $F_{\pi}(t)$  non abbia singolarità a  $t=4\mu^2$  e a  $t=t_1$ . Questo implica che sia  $n=0$  o  $1$  e  $m=0$ . (In realtà questo risultato dipende dalla scelta del punto  $t_1$ );

b) che il fattore di forma non abbia singolarità al di fuori del taglio dovuto all'unitarietà ed ai poli di input, e che inoltre abbia lo stesso andamento asintotico del modello di partenza, l'unica soluzione possibile è  $\Psi(t)$  costante  $=k$  e  $k$  è fissato;

$$(III. 44) \quad k = \gamma_0 + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{t_1} \sin \int_1^x G_{\pi}(x) dx$$

La costante  $c$  che appare nella eq. (III. 41), (III. 42) e (III. 43) è fissata dalla normalizzazione a  $t=0$ .

Per  $\int_1^t$  è stata scelta la parametrizzazione suggerita da Lovelace<sup>(9)</sup> e collaboratori<sup>(10)</sup> in termini della funzione di Veneziano, scrivendo

$$(III. 45) \quad h_1(t) = \frac{V_1(t)}{1+r(t)V_1(t)}$$

dove

$$r(t) = -i \frac{k}{\sqrt{t}} - \frac{2\mu^2}{k\sqrt{t}} \log \left[ \frac{\sqrt{t+k}}{2\mu} \right]; \quad V_1(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos \theta d(\cos \theta) [V(t, s) - V(t, u)]$$

e

$$V(s, t) = -\beta \frac{\Gamma(1-\alpha(s)) \Gamma(1-\alpha(t))}{\Gamma(1-\alpha(s)-\alpha(t))}$$

Il parametro  $\beta$  è fissato come al solito dalla richiesta che l'ampiezza (III. 45) riproduca il  $\rho$  con massa e larghezza giuste.

La determinazione della fase  $\int_1^t$  e l'estremo superiore di integrazione sono stati scelti in modo che sia

$$\delta_1(4\mu^2) = -\pi, \quad \delta_1(t_1) = 0$$

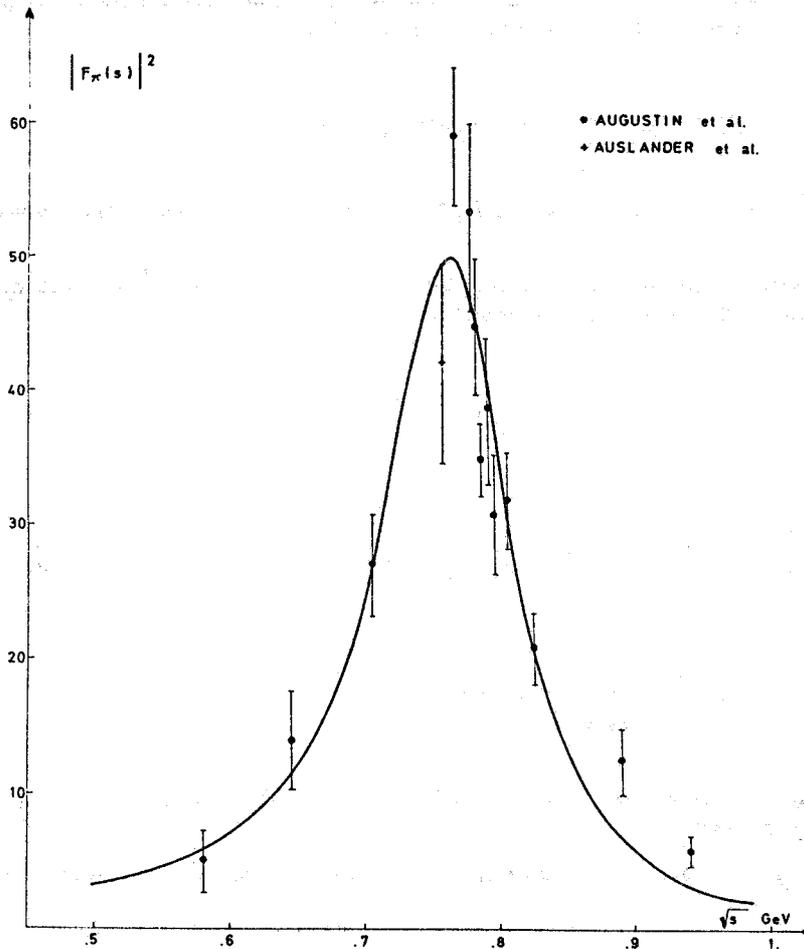
Come modelli non unitari di partenza sono stati scelti il modello proposto da Oyanagy<sup>(11)</sup> (vedi la prima parte di queste lezioni) e quello proposto da Suura<sup>(12)</sup>. La differenza tra questi due modelli sta nella maniera diversa in cui vengono ricavati dall'ampiezza di Veneziano, dall'algebra delle correnti e dalle field-current identities. Più precisamente, come è stato detto nella prima parte di queste lezioni, il modello di Oyanagy

$$(III. 46) \quad F_\pi(t) = c \frac{\Gamma(1 - \alpha(t))}{\Gamma(5/2 - \alpha(t))}$$

tratta in maniera non simmetrica le correnti vettoriali e assiali, al contrario di quanto fa il modello di Suura:

$$(III. 47) \quad F(t) = c \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha(t))}{\Gamma(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\alpha(t))}$$

Nella versione unitarizzata il modello di Oyanagy non dà una buona rappresentazione dei dati sperimentali; il modello di Suura, invece si accorda abbastanza bene con i risultati delle esperienze. Nella Fig.11 è riportato il valore del fattore di forma di Suura unitarizzato, insieme ai dati sperimentali.



Recentemente sono stati proposti altri metodi di unitarizzazione per i fattori di forma del pione<sup>(13)</sup>, sempre rifacendosi, seppure in maniere diverse, alla ampiezza di Veneziano. Tutti questi modelli danno una rappresentazione abbastanza buona dei dati sperimentali sul fattore di forma elettromagnetico del pione.

FIG. 11

## BIBLIOGRAFIA E NOTE. -

- (1) - Queste lezioni sono in parte basate sulle lezioni di M. Gourdin, Electron and positrons annihilation into hadrons, tenuta all'Istitute of Theoretical Physics, Boulder (July 14 August 15 1969).
- (2) - Vedi per es. : G. Barton, Dispersion techniques in field theory, (Benjamin, New York, 1965).
- (3) - Per la discussione sui possibili stati intermedi, vedi la prima parte di queste lezioni.
- (4) - R. Omnès, Nuovo Cimento 8, 316 (1958).
- (5) - W. R. Frazer and J. Fulco, Phys. Rev. Letters 2, 365 (1959); Phys. Rev. 117, 1603 (1960).
- (6) - M. T. Vaughn and K. W. Wali, Phys. Rev. Letters 21, 938 (1968).
- (7) - G. Gournaris and J. J. Sakurai, Phys. Rev. Letters 21, 244 (1968); La Fig. 1 è tratta da: J. Augustin et al., Let. Nuovo Cimento 2, 214 (1969).
- (8) - F. Drago and A. F. Grillo, LNF-68/58 (1968); in corso di pubblicazione sul Nuovo Cimento.
- (9) - C. Lovelace, non pubblicato.
- (10) - Vedi p. es. : F. Wagner, CERN preprint TH-1012.
- (11) - Y. Oyanagy, Tokyo University preprint UT 16-69 (1969); R. Jengo and E. Remiddi, CERN Preprint TH-1050 (1969).
- (12) - H. Suura, Phys. Rev. Letters 23, 551 (1969).
- (13) - A. Amaty and M. O. Taha, Trieste preprint IC/69/55, (1969); P. Gensini, Let. Nuovo Cimento 2, 791 (1969); Gr. Ghizica and M. Visinescu, Let. Nuovo Cimento 3, 9 (1970).