

LNF - 69/5
27 Gennaio 1969

G. Matone: DIFFUSIONE DEL SISTEMA (α^-p) IN IDROGENO
GASSOSO. -

LNF-69/5

Nota interna: n. 428
27 Gennaio 1969

G. Matone: DIFFUSIONE DEL SISTEMA (μ^-p) IN IDROGENO GASSOSO.

INTRODUZIONE. -

Lo studio dello scattering



è risultato di particolare interesse durante l'esperimento di cattura di mesoni μ^- in idrogeno gassoso, realizzato ultimamente al CERN^(1,2).

In questo esperimento i mesoni μ^- , rallentati in idrogeno gassoso formano il sistema legato (μ^-p) , nel quale avviene il processo di cattura studiato; tale sistema, nello stato fondamentale, può stare in due stati di momento angolare totale $S=0$ ed $S=1$ ed il valore teorico per la velocità di cattura, calcolato con la teoria V-A delle interazioni deboli è $\Lambda_T = 13 \text{ sec}^{-1}$ per lo stato di tripletto e $\Lambda_S = 626 \text{ sec}^{-1}$ per lo stato di singoletto⁽³⁾. La differenza di energia tra i due diversi stati è 0.183 ev e per effetto delle molteplici collisioni contro le molecole di H_2 , possono avvenire transizioni tra i due stati che alterano l'iniziale miscela statistica di 3/4 di tripletto e di 1/4 di singoletto.

Per conoscere ad ogni istante del tempo, la percentuale di tripletto e di singoletto presente nel gas, fissata la pressione e la temperara

tura alla quale si lavora, è necessario ricostruire la storia del sistema (μ^-p) dall'atto della sua formazione fino all'istante in cui il μ^- decade od interviene il processo di cattura nucleare.

Nel presente lavoro ci si limita a considerare solo i processi di scattering elastici ed anelastici che il (μ^-p) può fare contro le molecole di idrogeno, trascurando sia il processo di trasferimento del μ^- ad eventuali impurità presenti nel gas, sia il processo di formazione dello ione molecolare $(p\mu p)^+$. Infatti lavorando a pressioni dell'ordine di ~ 10 atmosfere e con H_2 sufficientemente puro, questi due processi possono essere resi trascurabili rispetto ai processi di diffusione da parte delle molecole di H_2 .

In un recente esperimento⁽⁴⁾, si è dimostrato che l'energia cinetica del (μp) all'atto della sua formazione è $\simeq .55$ ev (da confrontarsi con l'energia termica $\simeq 0.04$ ev) e che inoltre, alla pressione di 25 atmosfere ed a temperatura ambiente, si ha un rapido processo di termalizzazione che porta il (μ^-p) allo stato fondamentale di singoletto in un tempo di ~ 30 ns. Scopo del presente lavoro è di verificare analiticamente il risultato e di estendere i calcoli al caso di pressioni di H_2 più basse, in modo da fornire una descrizione completa del processo di diffusione del sistema (μ^-p) . La trattazione si articola in due parti: nella prima si discute lo scattering del sistema (μ^-p) su protone libero, mentre nella seconda si estende il calcolo allo scattering $(\mu^-p)+H_2 \rightarrow (\mu^-p)+H_2$ tenendo conto sia della struttura iperfina del (μ^-p) sia dei livelli rotazionali e vibrazionali della molecola di H_2 .

Si riportano infine i risultati ottenuti con metodo di Montecarlo sulla distribuzione temporale degli stati di tripletto del sistema (μ^-p) in idrogeno gassoso a varie pressioni ed a temperatura ambiente.

I. - SCATTERING $(\mu^-p)+p \rightarrow (\mu^-p)+p$ SENZA TENER CONTO DELLA STRUTTURA IPERFINA DEL (μ^-p) . -

I. 1. - Approssimazione adiabatica - proprietà di simmetria ed equazioni finali.

Lo studio dello ione $(p\mu p)^+$ trova il suo analogo nello studio dello ione H_2^+ , per il quale, come è ben noto, si può far uso con notevole successo dell'approssimazione adiabatica, poichè il rapporto tra la massa dell'elettrone e quella del protone è sufficientemente piccolo. Nell'ambito di questa approssimazione la funzione d'onda totale del sistema può scriversi come prodotto di due termini, di cui il primo descrive il moto nucleare dei due protoni, mentre il secondo descrive il moto dell'elettrone per ogni fissato valore della distanza tra i due protoni.

Risolvendo l'equazione di Schrödinger per l'elettrone, si determina l'energia di legame in funzione della separazione R tra i due pro-

toni e quindi risolvendo l'equazione per i nuclei si determinano i livelli vibrazionali e rotazionali della molecola.

Nel sistema del baricentro dei due protoni, l'equazioni per il moto dell'elettrone e dei due nuclei sono rispettivamente :

$$(1) \quad \left\{ -\frac{1}{2} \Delta_r - \frac{1}{|\bar{r}_1|} - \frac{1}{|\bar{r}_2|} + \frac{1}{R} \right\} X_n(R, \bar{r}) = E_n(R) X_n(R, \bar{r})$$

$$(2) \quad \left\{ -\frac{1}{M} \Delta_R + E_n(R) \right\} \Phi_n(\bar{R}) = E \Phi_n(\bar{R})$$

dove si è posto :

\bar{r} = vettore che individua la posizione dell'elettrone;

\bar{R} = vettore separazione tra i due protoni;

\bar{r}_1, \bar{r}_2 = vettori che individuano la posizione dell'elettrone rispetto ai due protoni;

e si è usato un sistema in cui $\hbar = e = m_e = 1$.

L'Hamiltoniana della (1) è invariante rispetto a rotazioni intorno all'asse di congiunzione dei due protoni. Pertanto il momento angolare intorno a questo asse deve essere conservato.

Gli autovalori di questa quantità definiscono gli stati $\Sigma(n=0)$, $\Pi(n=1)$, ecc. che si possono avere. Nella nostra trattazione ci fermiamo a $n=0$, cioè a stati Σ per i quali la proiezione del momento angolare rispetto all'asse molecolare, su tale asse è uguale a zero.

Inoltre, tale Hamiltoniana è invariante rispetto allo scambio dei due protoni e pertanto la funzione d'onda $X_n(R, \bar{r})$ deve avere una definita proprietà di trasformazione rispetto allo scambio dei due protoni, cioè potrà essere o simmetrica o antisimmetrica rispetto a tale scambio. La funzione d'onda simmetrica è generalmente indicata con Σ_g , mentre la antisimmetrica con Σ_u ; inoltre per $R \rightarrow \infty$ si deve avere

$$\Sigma_g \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(\bar{r}_1) + \psi(\bar{r}_2)]; \quad \Sigma_u \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(\bar{r}_1) - \psi(\bar{r}_2)]$$

dove $\psi(\bar{r}_i)$ è la funzione d'onda del (e^-p) nello stato 1S, sull' i -esimo protone.

Se facessimo queste stesse considerazioni anche per lo studio dello ione $(p\mu p)^+$, giungeremmo ad un sistema di equazioni identiche alle (1, 2), dove il termine di potenziale $E_n(R)$ sarebbe ottenuto con una trasformazione di similitudine dal corrispondente termine ottenuto per lo ione H_2^+ , in conseguenza del fatto che il μ^- è 207 volte più pesante dell'elettrone. D'altra parte questo fatto rende inadeguata l'appross

4.

simazione di ordine zero che è stata fatta per lo ione H_2^+ e può dare solo una trattazione qualitativa della struttura del sistema $(p\mu p)^+$. Ciò trova conferma anche nel fatto che, se indichiamo con k^4 il rapporto tra la massa del μ^- e quella del protone, l'energia di rotazione e vibrazione dello ione molecolare $(p\mu p)^+$ sono legate all'energia di legame del μ^- dalla relazione⁽⁵⁾

$$\mathcal{E}_{\text{rot}} \simeq k^2 \mathcal{E}_{\text{vib}} \simeq k^4 \mathcal{E}_{\mu}$$

dalla quale si vede che tali livelli rotazionali e vibrazionali non si ottengono con un semplice rapporto di similitudine dai corrispondenti livelli per lo ione H_2^+ , poichè anche il rapporto k^4 nel caso dello ione $(p\mu p)^+$ è 207 volte più grande che nel caso dello ione H_2^+ .

Si rende pertanto necessaria l'introduzione di termini corretti vi al moto dei due protoni che tengano conto della presenza del μ^- .

Nell'approssimazione di ordine zero, il termine di potenziale $E_n(R)$, per $R \rightarrow \infty$ tende all'energia dello stato 1S dell'atomo mesico con massa infinita, che in unità mesiche ($\hbar = e = m_{\mu} = 1$) vale $E_0 = -1/2$, mentre tenendo conto del moto nucleare esso tenderebbe a $E_0 = -m^*/2$ dove m^* è la massa ridotta del sistema mesone μ^- -protone

$$m^* = \frac{M}{1+M} \simeq 1 - \frac{1}{M} \quad M \text{ (massa protone)} \gg 1.$$

Pertanto per $R \rightarrow \infty$, le correzioni all'approssimazione adiabatica di ordine zero sono dell'ordine di $1/M$ ⁽⁷⁾. D'altra parte, per $R \rightarrow \infty$ la funzione d'onda del nostro sistema potrà essere comunque scritta:

$$(3) \quad \Psi = A(\bar{R}) \Psi(\bar{r}_1) + B(\bar{R}) \Psi(\bar{r}_2)$$

dove $A(\bar{R})$, $B(\bar{R})$ descrivono il moto del secondo (primo) nucleo rispetto all'atomo mesico formato dal primo (secondo). $\Psi(\bar{r}_1)$ e $\Psi(\bar{r}_2)$ rappresentano le funzioni d'onda del μ^- sul primo (secondo) protone. Introduciamo le funzioni

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(G+H); \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}(G-H); \quad G = \frac{1}{\sqrt{2}}(A+B); \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}}(A-B).$$

Con questa introduzione la (3) diviene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(G+H)\Psi(\bar{r}_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(G-H)\Psi(\bar{r}_2) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Psi(\bar{r}_1) + \Psi(\bar{r}_2)\}G(\bar{R}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Psi(\bar{r}_1) - \Psi(\bar{r}_2)\}H(\bar{R}). \end{aligned}$$

Ricordando il comportamento asintotico delle $\Sigma_{g,u}$, possiamo porre come autofunzione del nostro sistema la

$$(4) \quad \Psi = G(\bar{R})\Sigma_g(R, \bar{r}) + H(\bar{R})\Sigma_u(R, \bar{r}).$$

Si può immediatamente vedere che la scelta della funzione d'onda nella forma espressa dalla (4) è sufficiente ad introdurre termini correttivi dell'ordine di $1/M$.

Consideriamo infatti l'Hamiltoniana totale del sistema che si può scrivere

$$H = H_p + H_\mu;$$

$$H_p = -\frac{1}{M}\Delta_R; \quad H_\mu = -\frac{1}{2}\Delta_r - \frac{1}{|r_1|} - \frac{1}{|r_2|} + \frac{1}{R}$$

ed introduciamo la (4) nella sua relativa equazione di Schrödinger

$$(H_p + H_\mu) \left[G(\bar{R})\Sigma_g + H(\bar{R})\Sigma_u \right] = E \left[G(\bar{R})\Sigma_g + H(\bar{R})\Sigma_u \right]$$

Poichè i nuclei (protoni) hanno masse uguali, moltiplicando a sinistra per Σ_g e Σ_u ambedue i membri ed integrando sulle coordinate del μ - si ottengono le due equazioni disaccoppiate

$$-\frac{1}{M}\Delta_R G(\bar{R}) + \left[E_g + K_{gg} \right] G(\bar{R}) = E G(\bar{R}),$$

$$-\frac{1}{M}\Delta_R H(\bar{R}) + \left[E_u + K_{uu} \right] H(\bar{R}) = E H(\bar{R})$$

dove $G(\bar{R})$ descrive lo stato simmetrico rispetto allo scambio dei due protoni mentre $H(\bar{R})$ lo descrive nello stato antisimmetrico rispetto a tale scambio. Gli elementi di matrice

$$K_{gg} = -\frac{1}{M} \int \Sigma_g(R, \bar{r}) \Delta_R \Sigma_g(R, \bar{r}) d\bar{r}$$

$$K_{uu} = -\frac{1}{M} \int \Sigma_u(R, \bar{r}) \Delta_R \Sigma_u(R, \bar{r}) d\bar{r}.$$

Sono termini correttivi dell'ordine di $1/M$ all'approssimazione adiabatica di ordine zero, che tengono conto del moto nucleare⁽⁷⁾.

E' ben noto che i due termini di potenziale $E_g(R)$ ed $E_u(R)$ sono molto ben approssimati da un potenziale tipo Morse nel primo caso e da un potenziale repulsivo esponenziale nel secondo. Ciò che è interessante notare è invece il fatto che la presenza dei due termini correttivi K_{gg} e K_{uu} non alterano sensibilmente queste due forme analitiche. Infatti essi rappresentano il valore medio dell'energia cinetica dei due protoni ed introducono solo uno "schift" nei valori asintotici dei E_g ed E_u traslando conseguentemente tutta la curva senza apportare alcuna grossa correzione all'andamento di E_g ed E_u per valori finiti di R . Quindi l'introduzione di questi termini correttivi ha solo un effetto di normalizzazione, inessenziale nel problema di scattering e pertanto il termine di potenziale che interviene nell'equazione per la $G(R)$ può essere ancora ben approssimato da un potenziale tipo Morse^(6, 7)

$$V_g(R) = E_g(R) + \frac{1}{M} K_{gg} = D \left[e^{-2\alpha(R-R_0)} - 2e^{-\alpha(R-R_0)} \right]$$

Analogamente il termine di potenziale per lo stato antisimmetrico può essere ben approssimato dal potenziale repulsivo

$$V_u(R) = E_u(R) + \frac{1}{M} K_{uu} = V_0 e^{-\beta R}$$

I valori dei parametri per i due termini di potenziale ora scritti, si ottengono dai corrispondenti termini che si hanno per lo ione H_2^+ , tenendo conto del fattore 207 tra la massa dell'elettrone e quella del mesone μ^- . Nel caso del potenziale di Morse, il valore di R_0 (separazione di equilibrio tra i due protoni) è dell'ordine di $2 a_\mu$ dove a_μ è il raggio di Bohr dell'atomo mesico; il valore di D risulta dell'ordine di ≈ 580 ev da confrontarsi con il corrispondente valore di ≈ 2.80 ev che si ha nel caso dello ione H_2^+ , mentre il valore di α rimane sostanzialmente identico a quello che si ottiene per lo ione H_2^+ .

I. 2. - Risoluzione e discussione delle equazioni trovate.

L'equazione radiale, in onda s , per lo stato antisimmetrico, dopo alcune posizioni esposte in dettaglio in Appendice I, può essere facilmente ricondotta allo studio di un'equazione di Bessel. L'espressione per lo scattering length risulta:

$$a_u = \frac{2}{\beta} \log \left(c \frac{\sqrt{MV_0}}{\beta} \right) = 5.25 \text{ unità mesiche}$$

e per la sezione d'urto si ottiene:

$$\sigma = 4\pi \frac{a_u^2}{1+k^2 a_u^2}.$$

Un più attento esame merita l'equazione per lo stato simmetrico, per la quale l'espressione per la matrice S ($l=0$) risulta (vedi Appendice II):

$$(5) \quad S(k) = e^{-2ik(R_0 + \frac{1}{\alpha} \log 2 \delta)} \frac{\Gamma(1+2is)}{\Gamma(1-2is)} \frac{\Gamma(-\delta + 1/2 - is)}{\Gamma(-\delta + 1/2 + is)}$$

I poli di $S(k)$ si hanno quando:

$$1^\circ) \quad \Gamma(1+2is) = \infty$$

cioè quando si ha un polo per la gamma di Eulero, il che avviene non appena il suo argomento raggiunge valori interi negativi (o zero) $1+2is = -n$, che sono "zeri sovrabbondanti della matrice S "⁽⁹⁾.

$$2^\circ) \quad \Gamma(-\delta + 1/2 - is) = \infty \quad \text{cioè}$$

$$-\delta + 1/2 - is = -n \quad n = \text{numero intero o zero;}$$

ricordando che $s = k/\alpha$ e $\delta = \sqrt{MD}/\alpha$, si ha:

$$(6) \quad ik = \alpha (-\delta + (n+1/2))$$

Perchè questa relazione sia valida, essendo reale il secondo membro, deve essere reale anche il primo, perciò k può essere solo immaginario puro $k = \pm i\chi$, $\chi > 0$, e quindi non ci possono essere stati risonanti.

Consideriamo i due casi:

$$a) \quad k = i\chi \quad \chi > 0$$

La (6) fornisce allora^(x):

$$-\chi = \alpha (-\delta + (n+1/2))$$

e ricordando che $E = k^2/M$

$$E = -D \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{MD}} (n+1/2) \right\}^2$$

(x) - Essendo $\delta = 1.41$ è possibile il solo valore $n=0$, quindi si ha un solo stato legato. Per $n > 0$, si possono avere solo stati virtuali.

8.

espressione che fornisce gli stati legati dal sistema ed in corrispondenza dei quali la funzione d'onda all'infinito è $X(R) \rightarrow e^{-\chi R}$.

$$b) \quad k = -i\chi \quad \chi > 0$$

In questo caso la funzione d'onda esplode all'infinito $X(R) \rightarrow e^{\chi R}$ e non si hanno stati legati: si parla in questo caso di stati virtuali. La (6) fornisce in questo caso $\chi = \alpha \{-\delta + (n+1/2)\}$ che è soddisfatta per tutti gli $n > 0$. Si vede che per $n=1$ si ha un polo nella regione molto prossima a $k/\alpha \ll 1$.

Vi è pertanto da aspettarsi che la presenza di un polo di stato virtuale molto prossimo alla regione di energia alla quale studiamo il processo, influenzi sensibilmente, la determinazione della sezione di urto.

Sviluppiamo in serie di k/α intorno allo zero le funzioni di Eulero che compaiono nella (5):

$$\begin{aligned} \Gamma(1 - 2is) &\simeq \Gamma(1) [1 - 2is\psi(1)] \\ \Gamma(-\delta + 1/2 + is) &\simeq \Gamma(-\delta + 1/2) [1 + is\psi(-\delta + 1/2)] \\ \Gamma(1 + 2is) &\simeq \Gamma(1) [1 + 2is\psi(1)] \\ \Gamma(-\delta + 1/2 - is) &\simeq \Gamma(-\delta + 1/2) [1 - is\psi(-\delta + 1/2)] \end{aligned}$$

e sostituiamo nell'espressione di $S(k)$:

$$S(k) = e^{-2i \frac{k}{\alpha} (\alpha R_0 + \log 2\delta)} \frac{1 + 2i(k/\alpha)\psi(1)}{1 - 2i(k/\alpha)\psi(1)} \frac{1 - i(k/\alpha)\psi(-\delta + 1/2)}{1 + i(k/\alpha)\psi(-\delta + 1/2)}$$

dove ψ è la derivata logaritmica della Γ di Eulero. Tale espressione può essere ancora scritta come:

$$S(k) = e^{-2ia_g k}$$

avendo posto

$$a_g = \frac{\psi(-\delta + 1/2) - 2\psi(1) + \lg 2\delta + \alpha R_0}{\alpha} = -17.3 \text{ unità mesiche}^{(7)}$$

Quindi

$$S(k) = \frac{1 - ikag}{1 + ikag}$$

che, come si vede, ha un polo per $ik = -1/ag$.

Ricordando che l'ampiezza in $l=0$ è

$$f(k) = \frac{S(k) - 1}{2ik}$$

la sezione d'urto totale diventa

$$\sigma = 4\pi \left| \frac{S(k) - 1}{2ik} \right|^2 = 4\pi \frac{a_g^2}{1 + k^2 a_g^2}$$

Interpretiamo il polo di stato virtuale in $n=1$ della (5) come una deficienza della forza del potenziale di Morse, almeno con i parametri che sono stati introdotti. In altri termini, se il potenziale fosse più forte trascinerrebbe il polo virtuale di k con $n=1$, nell'altro semipiano facendolo diventare uno stato legato. Supponiamo di variare leggermente il potenziale in modo da portare il polo virtuale nel punto zero. In questo modo l'energia del sistema è nulla e quindi dalla:

$$(8) \quad -D \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{MD}} (1 + 1/2) \right\}^2 = 0 \quad \text{si ricava } \delta = 1.5.$$

In questo punto la "scattering length" diventa infinita, come si può vedere dalla (7) ottenuta per $k \rightarrow 0$, ma tenendo fissati i parametri del potenziale. Ora dalla (8) si ricava, tenendo fisso il parametro $\alpha = 0.67$, il valore $D = 0.1140$, quindi con una variazione della sola profondità della buca di Morse $\sim 10\%$ si passa ad una "scattering length" infinita. E' evidente pertanto quanto siano delicati i valori assunti per i parametri del potenziale di Morse, per quanto riguarda il problema dello scattering a basse energie.

La ragione fisica di tutto ciò sta nel fatto che le grandezze dei livelli vibrazionali e rotazionali, il cui rapporto rispetto ai livelli elettronici è dell'ordine di $(m_e/M)^{1/2}$ e (m_e/M) per le molecole ordinarie, per le mesomolecole diventano comparabili con la profondità della buca di potenziale. Ciò spiega anche le relativamente alte energie dei pochi livelli rotazionali e vibrazionali che in questo modo sono permessi allo ione $(p, \mu p)^+(7)$.

A conferma di ciò è facile verificare che la lunghezza di decadimento dello stato legato coincide praticamente con il range del potenziale e che quindi la funzione d'onda del sistema è tutta raccolta entro la regione d'interazione.

II. - SCATTERING $(\mu^-p)+p \rightarrow (\mu^-p)+p$ TENENDO CONTO DELLA STRUTTURA IPERFINA DEL (μ^-p) . -

II. 1. - Sezioni d'urto.

Ora studiamo lo scattering tenendo conto dei due possibili stati di tripletto e singoletto in cui può trovarsi il sistema (μ^-p) . Le velocità e quindi le energie che entrano in gioco durante il processo sono molto piccole per cui potremo supporre che tutto avvenga in onda S e che quindi lo spin totale si conservi. Lo spin di un sistema di due protoni ed un mesone μ^- ha i soli valori possibili per lo spin totale:

sistema (p-p)	sistema (p-p) + μ^-
0	1/2
1	$\begin{cases} 1/2 \\ 3/2 \end{cases}$

Consideriamo lo stato iniziale di spin totale $s = 1/2$. La funzione d'onda per lo stato iniziale di spin 1/2, antisimmetrica nello scambio dei due protoni, si otterrà generalizzando la (4)

$$(9) \quad \psi = G(\bar{R}) \sum g(R, \bar{r}) S_{1/2, 1/2}^0(1, 2; \mu) + H(\bar{R}) \sum u(R, \bar{r}) S_{1/2, 1/2}^1(1, 2; \mu)$$

dove il numero in alto della funzione di spin indica lo stato di spin delle particelle separate dalla virgola nella parentesi. Nello stato finale ($R \rightarrow \infty$) lo stato di spin 1/2 si può realizzare sia in $F = 0$ (μ^-p in stato di singoletto), sia in $F = 1$ (μ^-p in stato di tripletto).

Lo stato $F = 0$ sarà descritto da una :

$$(10) \quad \psi^0 = K(\bar{R}) \psi(\bar{r}_1) S_{1/2, 1/2}^0(1, \mu; 2) - K(\bar{R}) \psi(\bar{r}_2) S_{1/2, 1/2}^0(2, \mu; 1)$$

e lo stato $F = 1$ da una :

$$(11) \quad \psi^1 = L(\bar{R}) \psi(\bar{r}_1) S_{1/2, 1/2}^1(1, \mu; 2) - L(\bar{R}) \psi(\bar{r}_2) S_{1/2, 1/2}^1(2, \mu; 1)$$

ambidue antisimmetriche nello scambio dei due protoni.

Le funzioni $K(\bar{R})$ e $L(\bar{R})$ descrivono il moto dei due protoni nello stato finale con il (μ^-p) nello stato di singoletto e di tripletto rispettivamente.

Con lo sviluppo asintotico di $\sum_{g, u}$ la (9) diviene :

$$(12) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} G(\bar{R}) \left\{ \Psi(\bar{r}_1) + \Psi(\bar{r}_2) \right\} S_{1/2, 1/2}^{0+}(1, 2; \mu) + \frac{1}{\sqrt{2}} H(\bar{R}) \left\{ \Psi(\bar{r}_1) - \Psi(\bar{r}_2) \right\} S_{1/2, 1/2}^{1+}(1, 2; \mu)$$

la quale, moltiplicando a sinistra per

$$S_{1/2, 1/2}^{0+}(1, 2; \mu) \quad \text{e} \quad S_{1/2, 1/2}^{1+}(1, 2; \mu)$$

fornisce rispettivamente:

$$G(\bar{R}) \frac{\Psi(r_1) + \Psi(r_2)}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad H(\bar{R}) \frac{\Psi(r_1) - \Psi(r_2)}{\sqrt{2}}.$$

Operando analogamente sulla (10) e (11) si ottengono le

$$(13) \quad \frac{K(\bar{R})}{\sqrt{2}} \frac{\Psi(r_1) - \Psi(r_2)}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} L(\bar{R}) \frac{\Psi(r_1) + \Psi(r_2)}{\sqrt{2}}$$

$$(14) \quad -\sqrt{\frac{3}{2}} K(\bar{R}) \frac{\Psi(r_1) - \Psi(r_2)}{\sqrt{2}} - \frac{L(\bar{R})}{\sqrt{2}} \frac{\Psi(r_1) - \Psi(r_2)}{\sqrt{2}}$$

Ricordando che per $R \rightarrow \infty$ la (9) deve essere una combinazione lineare della (10) e della (11), possiamo scrivere le relazioni che legano i comportamenti asintotici per le $p(R) = RK(R)$, $q(R) = RL(R)$ e le $g(R) = RG(R)$, $h(R) = RH(R)$.

$$\begin{aligned} p(R) &\rightarrow (\lambda - \sqrt{3}\nu)R + (\lambda a_g - \sqrt{3}\nu a_u) \\ q(R) &\rightarrow -(\lambda\sqrt{3} + \nu)R - (\lambda\sqrt{3}a_g + \nu a_u) \end{aligned} \quad (\lambda, \nu) \text{ sono costanti arbitrarie.}$$

Queste relazioni si sono ottenute usando le relazioni precedentemente trovate:

$$g(R) \rightarrow R + a_g \quad h(R) \rightarrow R + a_u$$

a) Scattering Singoletto/Singoletto e Tripletto/Tripletto.

Per descrivere lo scattering $S \rightarrow S$ e $T \rightarrow T$ occorre annullare il flusso totale associato all'onda di tripletto nel primo caso e di singoletto nel secondo. I flussi totali per le due onde si scrivono

$$\Phi \{q(R)\} \propto (\lambda\sqrt{3} + \nu)(\lambda\sqrt{3}a_g + \nu a_u) \quad \Phi \{p(R)\} = (\lambda - \sqrt{3}\nu)(\lambda a_g - \sqrt{3}\nu a_u)$$

e quindi le due condizioni citate si realizzano imponendo

12.

$$\lambda\sqrt{3} = -\gamma \quad \text{e} \quad \lambda = \sqrt{3}\gamma \quad \text{rispettivamente.}$$

Nei due casi si ha:

$$\text{SS)} \quad p(R) \rightarrow R + \frac{a + 3a_u}{4} \quad \sigma_{\text{SS}}^{1/2} = 4\pi \left(\frac{a + 3a_u}{4} \right)^2$$

$$\text{TT)} \quad q(R) \rightarrow R + \frac{3a + a_u}{4} \quad \sigma_{\text{TT}}^{1/2} = 4\pi \left(\frac{3a + a_u}{4} \right)^2$$

b) Scattering Tripletto/Singoleto e Singoleto/Tripletto.

In questo caso occorre imporre che sia nullo il contributo del flusso entrante di singoletto nel primo caso e di tripletto nel secondo.

Normalizzando al flusso incidente si ottengono le due sezioni d'urto (10):

$$\sigma_{\text{TS}}^{1/2} \simeq 4\pi \frac{3(a_u - a_g)^2}{16} \quad \sigma_{\text{ST}}^{1/2} \simeq 4\pi \frac{3(a_u - a_g)^2}{16}$$

In questo modo abbiamo determinato le varie sezioni d'urto che avvengono nello stato di momento angolare totale $S=1/2$.

Nello stato di momento angolare $S=3/2$ si può avere solo la transizione $T \rightarrow T$, d'altra parte l'unica scattering length che interviene è a_u . Ricordando che il peso dello stato di momento angolare $S=1/2$ è $1/3$, mentre quello dello stato di momento angolare $S=3/2$ è $2/3$ si ottiene:

$$\sigma_{\text{tripletto}}^{\text{Tot.}} = (\sigma_{\text{SS}}^{1/2} + \sigma_{\text{ST}}^{1/2}) = 4\pi \frac{3a_u^2 + a_g^2}{4}$$

$$\sigma_{\text{tripletto}}^{\text{Tot.}} = \frac{1}{3}(\sigma_{\text{TT}}^{1/2} + \sigma_{\text{TS}}^{1/2}) + \frac{2}{3}\sigma_{\text{TT}}^{3/2} = 4\pi \left\{ \frac{1}{3} \frac{3a_g^2 + a_u^2}{4} + \frac{2}{3} a_u^2 \right\}$$

dove il numero in alto indica lo stato di momento angolare totale in cui la reazione avviene. Pertanto

$$\sigma_{\text{totale}} = \frac{1}{4} \sigma_{\text{sing.}}^{\text{tot.}} + \frac{3}{4} \sigma_{\text{tripl.}}^{\text{tot.}} = 4\pi \frac{3a_u^2 + a_g^2}{4}$$

Concludendo, le sezioni d'urto trovate sono:

$$(15) \quad \sigma_{\text{SS}} = 4\pi \left(\frac{3a_u + a_g}{4} \right)^2 \quad \sigma_{\text{ST}} = 4\pi \frac{3(a_u - a_g)^2}{16}$$

$$\sigma_{TT} = 4\pi \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{3a_g + a_u}{4} \right)^2 + \frac{2}{3} a_u^2 \right\} \quad \sigma_{TS} = 4\pi \frac{3(a_u - a_g)^2}{16}$$

II. 2. - Risultati sperimentali. -

Recentemente è stato portato a termine un esperimento al CERN⁽⁴⁾ per lo studio della diffusione del sistema μ^-p in idrogeno gassoso, mediante il quale, trascurando in prima approssimazione la struttura della molecola di idrogeno, si sono potute determinare le sezioni d'urto per i vari processi che possono intervenire e quindi in ultima analisi i valori di a_g ed a_u .

Poiché la sezione d'urto dipende quadraticamente da a_g , assumendo per a_u il valore $a_u = +5$ si è giunti alla determinazione dei due seguenti valori

$$a_{g1} = -18 \pm 0,8 \quad a_{g2} = -11,2 \pm 0,8$$

tra i quali l'esperimento non può discriminare. Come si vede sono in debole accordo con il valore teorico $a_g = -17,3$.

Il potenziale di Morse descrive bene l'interazione dei due protoni a distanze relativamente piccole e pertanto può fornire ottime determinazioni delle energie di legame delle molecole diatomiche, ma è poco indicato nel descrivere problemi di scattering nei quali interviene il comportamento asintotico del potenziale. Inoltre esso è particolarmente critico a causa della presenza di un polo di stato virtuale nella matrice $S(K)$, proprio vicino allo zero, il quale se da una parte indica che la situazione è particolarmente delicata nello scattering a basse energie, dall'altra tende indubbiamente a diminuire il valore della scattering length a_g . Parallelamente al calcolo col potenziale di Morse, sviluppato da Gershtein e Zel'dovich in approssimazione di scattering length^(6,7,10), Cohen, Judd e Ridell⁽¹¹⁾ hanno impostato e risolto numericamente un calcolo perturbativo, anch'esso al primo ordine in (m_μ/M) , che porta ad una scattering length per lo stato simmetrico ancora negativa ma sensibilmente più grande $a_g = -11,0$ ed una scattering length per lo stato antisimmetrico $a = +5$ (in unità mesiche).

Alla luce dei dati sperimentali risulta pertanto più consistente assumere il valore $a_g = -11,2$ e spiegare il valore $a_g = -17,3$ come dovuto alle difficoltà del potenziale di Morse a cui si è accennato sopra. Pertanto in tutte le considerazioni che seguiranno assumeremo i valori $a_g = -11,2$ $a_u = +5$, con i quali le sezioni d'urto diventano⁽⁴⁾:

$$\sigma_{TS} = \sigma_{ST} = 4 \times 10^{-19} \text{ cm}^2 \quad \sigma_{\text{totale}} = 4,1 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{SS} = 7,6 \times 10^{-21} \text{ cm}^2$$

Rimane ora il problema di estendere le considerazioni fatte al caso in cui si considerino anche i livelli rotazionali e vibrazionali della molecola di H_2 , per studiare quanto questa struttura molecolare possa incidere sul processo di diffusione del (μ^-p) all'interno del gas.

III. - SCATTERING $(\mu^-p) + H_2 \rightarrow (\mu^-p) + H_2$ -

III. 1. - Transizioni Tripletto/Singoleto. - Sezioni d'urto differenziali.

L'equazione di Schrodinger, sotto forma integrale quando l'energia tende a zero, si scrive:

$$\psi = 1 - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{U(r') \psi(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr' \quad m = \text{massa ridotta}$$

Quando $r \rightarrow \infty$, tale espressione diventa:

$$\psi = 1 - \frac{a}{r} \quad \text{dove } a \simeq \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(r') dr'$$

Pertanto possiamo descrivere uno scattering in approssimazione di scattering length, con un potenziale^(12, 13)

$$(16) \quad U(\vec{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} a \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

dove a è la scattering length e \vec{r}_0 il centro della zona di interazione.

Nel caso di transizioni tra stati di spin diversi del (μ^-p) dovremo introdurre anche un termine tale da far passare il (μ^-p) dal singoleto al tripletto e viceversa. L'operatore

$$\hat{R} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\bar{S} - \bar{J}) \bar{i} \quad \begin{array}{l} \bar{S} = \text{spin del } \mu^- \\ \bar{J} = \text{spin protone legato} \\ \bar{i} = \text{spin protone libero} \end{array}$$

applicato allo stato di spin 1, 0 del $(\mu^-p)+p$ porta allo stato 0, 1 del $(\mu^-p)+p$. Possiamo allora descrivere la transizione TS e ST mediante il potenziale⁽¹⁴⁾

$$U(\vec{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} a \delta(\vec{r} - \vec{r}_p) \hat{R} \quad \begin{array}{l} \vec{r} = \text{coordinata del } (\mu^-p) \\ \vec{r}_p = \text{coordinata protone libero} \\ m = \text{massa ridotta del sistema } (\mu^-p)+p \end{array}$$

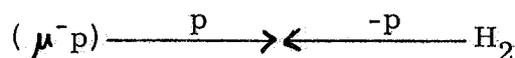
L'interazione con i due protoni della molecola di idrogeno può essere descritta dal potenziale:

$$U(r) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} a \frac{\bar{S} - \bar{J}}{\sqrt{3}} \left\{ \underbrace{(\bar{i}_1 + \bar{i}_2) \left[\delta(r-r_1) + \delta(r-r_2) \right]}_{(a)} + \underbrace{(\bar{i}_1 - \bar{i}_2) \left[\delta(r-r_1) - \delta(r-r_2) \right]}_{(b)} \right\}$$

dove \bar{r}_1 e \bar{r}_2 sono le coordinate dei due protoni. Come si vede è possibile scrivere tale potenziale come la somma di una parte (a) simmetrica nello scambio dei due protoni e di una parte (b) antisimmetrica rispetto a tale scambio.

Cominciamo a considerare lo scattering tripletto/singoletto: mettiamoci nel sistema del baricentro tra il (μ^-p) e la molecola di idrogeno e consideriamo la possibilità di transizione tra i seguenti stati A) e B): \bar{r}_1 ed \bar{r}_2 sono i vettori dei due protoni della molecola ed \bar{r} è il vettore del (μ^-p).

Stato iniziale A)



In tale caso il (μ^-p) è definito da:

$\bar{p} = \hbar \bar{k}$: quantità di moto

χ_{1, M_F} : funzione di spin nello stato di tripletto con terza componente M_F

e la molecola di idrogeno da:

$-\bar{p} = -\hbar \bar{k}$: quantità di moto

ψ_{I, M_I} : funzione di spin totale I dei due protoni con terza componente M_I

$\Phi_{J, M_J}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$: funzione d'onda della molecola di idrogeno nel J-esimo livello rotazionale con terza componente M_J .

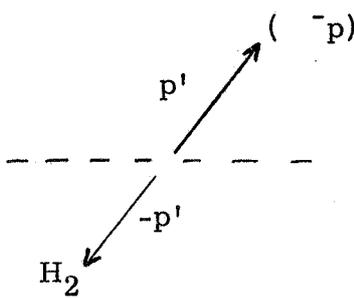
Stato finale B)

In tale caso il μ^-p è definito da:

$\bar{p}' = \hbar \bar{k}'$: quantità di moto

χ_{00} : funzione di spin nello stato di singoletto,

la molecola di idrogeno da:



$-\bar{p}' = \hbar \bar{k}'$: quantità di moto

$\varphi_{I', M_I'}$: funzione di spin totale I' dei due protoni con terza componente M_I'

$\Phi_{J', M_J'}$: funzione d'onda della molecola H nel J' -esimo livello rotazionale con terza componente M_J' .

Nello stato iniziale A) la funzione d'onda del sistema normalizzata in un volume V è:

$$\psi_i = \left\{ V^{-1/2} e^{i\bar{k} \cdot \bar{r}} \chi_{1, M_F} \right\} \left\{ V^{-1/2} e^{-i\bar{k} \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}} \Phi_{J, M_J}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \varphi_{I, M_I} \right\}$$

Nello stato finale B) diventa:

$$\psi_f = \left\{ V^{-1/2} e^{i\bar{k}' \cdot \bar{r}'} \chi_{00} \right\} \left\{ V^{-1/2} e^{-i\bar{k}' \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}} \Phi_{J', M_J'}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \varphi_{I', M_I'} \right\}$$

Notiamo che in questo formalismo abbiamo considerato che:

- il vettore di posizione della molecola di idrogeno sia il baricentro dei due protoni;
- l'energia di transizione $\Delta E = 0.183$ eV non sia sufficiente ad eccitare i livelli vibrazionali della molecola e che pertanto questa possa essere descritta dalle funzioni rotazionali $\Phi_{J, M_J}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$.

L'espressione per la probabilità di transizione per unità di tempo è data da:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \psi_f, U \psi_i \rangle \right|^2 \rho_E$$

dove U è il potenziale di cui abbiamo parlato precedentemente e ρ_E è il fattore di densità degli stati finali.

L'espressione per la sezione d'urto si scrive:

$$d\sigma = \frac{a^2 V^{-2}}{9(2I+1)(2J+1)} \left(\frac{\mathcal{M}}{m} \right)^2 \frac{k'}{k} \sum_{M_I, M_J, M_F} \sum_{M_I', M_J'} \left| \int e^{-i\bar{k}' \cdot (\bar{r} - \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2})} \chi_{00, J', M_I'}^* \Phi_{J', M_J'}^* \varphi_{I', M_I'}^* \left\{ (\bar{S} - \bar{J})(\bar{i}_1 + \bar{i}_2) \left[\delta(\bar{r} - \bar{r}_1) + \delta(\bar{r} - \bar{r}_2) \right] + (\bar{S} - \bar{J})(\bar{i}_1 - \bar{i}_2) \left[\delta(\bar{r} - \bar{r}_1) - \delta(\bar{r} - \bar{r}_2) \right] \right\} e^{i\bar{k} \cdot (\bar{r} - \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2})} \chi_{1, M_F} \Phi_{J, M_J} \varphi_{I, M_I} d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 d\bar{r} \right|^2 d\Omega$$

dove: $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{M_p + m} + \frac{1}{2M_p} \right)^{-1}$

V = volume di normalizzazione delle funzioni d'onda.

Per le proprietà delle funzioni δ si ha:

$$\int e^{-i\bar{k}'(\bar{r} - \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2})} \left[\delta(r-r_1) \pm \delta(r-r_2) \right] e^{i\bar{k}(\bar{r} - \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2})} d\bar{r} = e^{i(\bar{k} - \bar{k}') \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{2}} \pm e^{-i(\bar{k} - \bar{k}') \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{2}}$$

quindi l'integrale sotto il segno di sommatoria diventa:

$$\int \left[e^{i(\bar{k} - \bar{k}') \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{2}} \pm e^{-i(\bar{k} - \bar{k}') \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{2}} \right] \Phi_{J, M_J}^{\times}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \Phi_{J, M_J}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) d\bar{r}_1 d\bar{r}_2$$

Facendo il seguente cambiamento di variabile

$$\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 \quad \bar{p} = \frac{1}{2}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)$$

si ottengono le due espressioni seguenti:

$$2V \int \cos\left(\frac{\bar{k} - \bar{k}'}{2} \bar{r}\right) \Phi_{J, M_J'}(\bar{r}) \Phi_{J, M_J}(\bar{r}) d\bar{r}$$

$$2iV \int \sin\left(\frac{\bar{k} - \bar{k}'}{2} \bar{r}\right) \Phi_{J, M_J'}(\bar{r}) \Phi_{J, M_J}(\bar{r}) d\bar{r}$$

Consideriamo ora gli elementi di matrice degli spin sotto il segno di sommatoria:

$$\begin{aligned} & \langle \chi_{00}, \varphi_{I, M_I'} \left| (\bar{S} - \bar{J})(\bar{i}_1 + \bar{i}_2) \right| \chi_{1, M_F}, \varphi_{I, M_I} \rangle = \\ & = \langle \chi_{00} \left| \bar{S} - \bar{J} \right| \chi_{1, M_F} \rangle \langle \varphi_{I, M_I'} \left| \bar{i}_1 + \bar{i}_2 \right| \varphi_{I, M_I} \rangle \\ & \langle \chi_{00}, \varphi_{I, M_I'} \left| (\bar{S} - \bar{J})(\bar{i}_1 - \bar{i}_2) \right| \chi_{1, M_F}, \varphi_{I, M_I} \rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle \chi_{00} | \bar{S} - \bar{J} | \chi_{1, M_F} \rangle \langle \psi_{I', M_I'} | \bar{i}_1 - \bar{i}_2 | \psi_{I, M_I} \rangle$$

Osserviamo che il set di funzioni $\psi_{00} \psi_{11} \psi_{10} \psi_{1-1}$ per lo stato di singoletto e di tripletto formano un sistema ortonormale completo e che quindi, applicando l'operatore $(\bar{i}_1 - \bar{i}_2)$ allo stato ψ_{I, M_I} si otterrà uno stato decomponibile secondo la

$$(\bar{i}_1 - \bar{i}_2) \psi_{I, M_I} = C_0 \psi_{00} + \sum_1^3 m C_m \psi_{1, m}$$

In questa relazione il primo membro è antisimmetrico nello scambio dei due spin e tale dovrà essere perciò anche il secondo, quindi $C_m = 0$ per ogni m , e l'operatore $(\bar{i}_1 - \bar{i}_2)$ darà luogo solo a transizioni tra stati diversi di spin. Analogamente l'operatore $(\bar{i}_1 + \bar{i}_2)$ darà luogo solo a transizioni tra stati uguali di spin. Distinguendo i due casi avremo le due sezioni d'urto:

$I = I'$	orto-orto	para-para
$I \neq I'$	orto-para	para-orto

che sono esplicitamente ^(x):

$$d\sigma_{J, I}^{J', I'} = \frac{4a^2}{9(2I+1)(2J+1)} \left(\frac{\mathcal{H}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum_{M_I M_I' M_F} | \langle \chi_{00} | \bar{S} - \bar{J} | \chi_{1, M_F} \rangle |^2 \sum_{M_J M_J'} \left| \int \cos \frac{\bar{k} - \bar{k}'}{2} \bar{r} \Phi_{J', M_J'}(\bar{r}) \Phi_{J, M_J}(\bar{r}) d\bar{r} \right|^2 d\Omega$$

$$d\sigma_{J, I}^{J', I'} = \frac{4a^2}{9(2I+1)(2J+1)} \left(\frac{\mathcal{H}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum_{M_I M_I' M_F} | \langle \chi_{00} | \bar{S} - \bar{J} | \chi_{1, M_F} \rangle |^2 \sum_{M_J M_J'} \left| \int \sin \frac{\bar{k} - \bar{k}'}{2} \bar{r} \Phi_{J', M_J'}(\bar{r}) \Phi_{J, M_J}(\bar{r}) d\bar{r} \right|^2 d\Omega$$

(x) - Gli apici inferiori e superiori descrivono lo stato di momento angolare iniziale e finale del processo. J e I sono rispettivamente i momenti angolari rotazionali e di spin della molecola.

Per quanto detto sopra si avrà inoltre

$$\begin{aligned} \sum_{M_I M'_I} &= \left| \langle \psi_{I, M'_I} | \bar{i}_1 + \bar{i}_2 | \psi_{I M_I} \rangle \right|^2 = \\ &= \sum_{M_I} \langle \psi_{I M_I} | \bar{i}_1 + \bar{i}_2 | \sum_{I' M'_I} | \psi_{I' M'_I} \rangle \langle \psi_{I' M'_I} | \bar{i}_1 + \bar{i}_2 | \psi_{I M_I} \rangle \end{aligned}$$

ed usufruendo della ortonormalità delle funzioni $\psi_{I M_I}$

$$= \sum_{M_I} \langle \psi_{I M_I} | (\bar{i}_1 + \bar{i}_2)^2 | \psi_{I M_I} \rangle = (2I+1)I(I+1)$$

quindi:

$$\frac{1}{2I+1} \sum_{M_I M'_I} \left| \langle \psi_{I M'_I} | \bar{i}_1 + \bar{i}_2 | \psi_{I M_I} \rangle \right|^2 = \begin{cases} 0 & \text{per } I=0 \\ 2 & \text{per } I=1 \end{cases}$$

per l'altro termine si avrà analogamente:

$$(17) \quad \frac{1}{2I+1} \sum_{M_I M'_I} \left| \langle \psi_{I' M'_I} | i_1 - i_2 | \psi_{I M_I} \rangle \right|^2 = 3 - I(I+1) = \begin{cases} 3 & \text{per } I=0 \\ 1 & \text{per } I=1 \end{cases}$$

La (17), per $I=1$, si scrive

$$\frac{1}{3} \sum_{M_I M'_I} \left| \langle \psi_{I' M'_I} | \bar{i}_1 - \bar{i}_2 | \psi_{1 M_I} \rangle \right|^2 = \sum_{M_I} \left| \langle \psi_{00} | \bar{i}_1 - \bar{i}_2 | \psi_{1, M_I} \rangle \right|^2 = 1$$

quindi per il rimanente elemento di matrice di spin si ha:

$$\sum_{M_F} \left| \langle \chi_{00} | \bar{S} - \bar{J} | \chi_{1 M_F} \rangle \right|^2 = 1$$

Pertanto le quattro sezioni d'urto trovate sono:

$$(18) \quad \begin{array}{ll} \text{para-para} & d\sigma_{J,0}^{J',0} = 0 \\ \text{orto-orto} & d\sigma_{J,1}^{J',1} = \frac{1}{2J+1} \frac{8a^2}{9} \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum_{M_J M'_J} \end{array}$$

$$\left| \int \cos \frac{\bar{k} - \bar{k}'}{2} \cdot \bar{r} \Phi_{I' M'_J}(\bar{r}) \Phi_{I M_J}(\bar{r}) d\bar{r} \right|^2 d\Omega$$

$$\text{para-orto} \quad d\sigma_{J,0}^{J',1} = \frac{1}{2J+1} \frac{4a^2}{3} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum_{M_J M_J'} \left| \int \text{sen} \frac{\bar{k}-\bar{k}'}{2} \bar{r} \Phi_{J',M_J'}(\bar{r}) \Phi_{JM_J}(r) d\bar{r} \right|^2 d\Omega$$

(19)

$$\text{orto-para} \quad d\sigma_{J,1}^{J',0} = \frac{1}{2J+1} \frac{4a^2}{9} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum_{M_J M_J'} \left| \int \text{sen} \frac{\bar{k}-\bar{k}'}{2} \bar{r} \Phi_{J',M_J'}(\bar{r}) \Phi_{JM_J}(\bar{r}) d\bar{r} \right|^2 d\Omega$$

Rimandando all'Appendice III per tutti i dettagli di calcolo, queste espressioni possono essere così riscritte:

$$d\sigma_{J,0}^{J',1} = \frac{4a^2}{3} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum (J, J') d\Omega \quad d\sigma_{J,1}^{J',0} = \frac{4a^2}{9} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum (J, J') d\Omega$$

$$d\sigma_{J,1}^{J',1} = \frac{8a^2}{9} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum (J, J') d\Omega \quad d\sigma_{J,0}^{J',0} = 0$$

dove

$$\sum (J, J') = (2J'+1) \sum_L (2L+1) C_{LJJ', J_L^2}(kr_e)$$

Infine, integrando su $d\Omega$, per le sezioni d'urto totali del processo $T \rightarrow S$ si ottiene⁽¹²⁾ (vedi Appendice III):

$$\sigma_{J,0}^{J',1} = \frac{4a^2}{3} \pi \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \left(\frac{2}{\xi}\right)^2 (2J'+1) A_{JJ'} \quad \sigma_{J,1}^{J',0} = \frac{4a^2}{9} \pi \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \left(\frac{2}{\xi}\right)^2 (2J'+1) A_{JJ'}$$

$$\sigma_{J,1}^{J',1} = \frac{8a^2}{9} \pi \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \left(\frac{2}{\xi}\right)^2 (2J'+1) A_{JJ'} \quad \sigma_{J,0}^{J',0} = 0.$$

III. 2. - Transizioni Singoletto/Tripletto. -

Con procedimento analogo a quello fatto per le transizioni tripletto/singoletto si possono ottenere le seguenti espressioni:

$$d\sigma_{J,I}^{J',I'} = \frac{4a^2}{3(2I+1)(2J+1)} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum_{M_I M_I' M_F} \left| \langle \chi_{1M_F} | \bar{S}-\bar{J} | \chi_{00} \rangle \right.$$

$$\left. \langle \psi_{IM_I} | \bar{i}_1 + \bar{i}_2 | \psi_{IM_I} \rangle \right|^2 \sum_{M_J M_J'} \left| \int \cos\left(\frac{\bar{k}-\bar{k}'}{2}\right) \bar{r} \Phi_{J'M_J}^*(\bar{r}) \Phi_{JM_J}(\bar{r}) d\bar{r} \right|^2 d\Omega$$

$$d\sigma_{J,I}^{J',I'} = \frac{4a^2}{3(2I+1)(2J+1)} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum_{M_I M_I' M_F} \left| \langle \chi_{1M_F} | \bar{S}-\bar{J} | \chi_{00} \rangle \right.$$

$$\left. \langle \psi_{I'M_I'} | \bar{i}_1 - \bar{i}_2 | \psi_{IM_I} \rangle \right|^2 \sum_{M_J M_J'} \left| \int \sin\left(\frac{\bar{k}-\bar{k}'}{2}\right) \bar{r} \Phi_{J'M_J}^*(\bar{r}) \Phi_{JM_J}(\bar{r}) d\bar{r} \right|^2 d\Omega$$

Dalla (17) segue

$$\sum_{M_F} \left| \langle \chi_{1M_F} | \bar{S}-\bar{J} | \chi_{00} \rangle \right|^2 = 1$$

Perciò le sezioni d'urto ST sono tre volte più grandi delle transizioni TS.

III. 3. - Transizioni Singoletto/Singoletto e Tripletto/Tripletto. -

In questo caso non introduciamo alcun operatore di spin che agisca sul $(\mu-p)$, ed assumiamo per $U(\bar{r})$ la semplice forma di potenziale

$$U(\bar{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} a \left\{ \delta(\bar{r}-\bar{r}_1) + \delta(\bar{r}-\bar{r}_2) \right\}.$$

Con la solita tecnica si ottengono allora le:

$$d\sigma_{J,I}^{J',I'} = \frac{4a^2}{2I+1} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} (2J'+1) \sum_L (2L+1) C_{LJJ'}^2(kr_e) \delta_{II'} \delta_{M_I M_I'} d\Omega$$

Le integrazioni di tutte le sezioni d'urto ST, TT, SS, sono ottenute in modo analogo a quanto è stato fatto per le transizioni tripletto/singoletto.

Facendo ora la posizione

$$(20) \quad B(J, J') = \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \left(\frac{2}{\xi}\right)^2 (2J'+1) A_{JJ'}$$

possiamo riassumere nello schema seguente le sezioni di urto trovate nei vari casi:

a) tripletto/singoletto

$$\begin{aligned} \Gamma_{J,0}^{J',0} &= 0 & \Gamma_{J,1}^{J',1} &= \frac{8\pi}{9} a_{TS}^2 B(J, J') \\ \Gamma_{J,1}^{J',0} &= \frac{4\pi}{9} a_{TS}^2 B(J, J') & \Gamma_{J,0}^{J',1} &= \frac{4\pi}{3} a_{TS}^2 B(J, J') \\ \Delta E &= +0,183 \text{ eV} & a_{TS}^2 &= 3 \left(\frac{a_g - a_u}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

b) singoletto/tripletto

$$\begin{aligned} \Gamma_{J,0}^{J',0} &= 0 & \Gamma_{J,1}^{J',1} &= \frac{8\pi}{3} a_{ST}^2 B(J, J') \\ \Gamma_{J,1}^{J',0} &= \frac{4\pi}{3} a_{ST}^2 B(J, J') & \Gamma_{J,0}^{J',1} &= 4\pi a_{ST}^2 B(J, J') \\ \Delta E &= -0,183 \text{ eV} & a_{ST}^2 &= 3 \left(\frac{a_u - a_g}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

c) singoletto/singoletto e tripletto/tripletto

$$\begin{aligned} \Gamma_{J,0}^{J',0} &= 4\pi a^2 B(J, J') & \Gamma_{J,0}^{J',1} &= 0 \\ \Gamma_{J,1}^{J',0} &= 0 & \Gamma_{J,1}^{J',1} &= \frac{4\pi}{3} a^2 B(J, J') \\ \Delta E &= 0 & a_{SS}^2 &= \left(\frac{3a_u + a_g}{4}\right)^2 & a_{TT}^2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{3a_g + a_u}{4}\right)^2 + \frac{2}{3} a_u^2 \end{aligned}$$

IV. - STUDIO DEI PROCESSI CHE INTERVENGONO IN IDROGENO GASSOSO A TEMPERATURA AMBIENTE. -

La funzione di ripartizione per i livelli rotazionali della molecola di idrogeno è

$$f_R = 3 \sum_{J \text{ dispari}} (2J+1) e^{-\frac{E_J}{K.T}} + \sum_{J \text{ pari}} (2J+1) e^{-\frac{E_J}{K.T}}$$

$$E_J = \frac{E_1}{2} J(J+1) \quad E_1 = 15 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

Alla temperatura di 300°K si ha: $f_R = 7.6$ e quindi possiamo riassumere nella tabella seguente le probabilità di trovare una molecola in $J=0, J=1, J=2, J=3$:

Stato di momento angolare rotazionale	Probabilità percentuale
$J = 0$	13%
$J = 1$	66%
$J = 2$	11%
$J = 3$	8%

Elenchiamo nella tabella che segue tutti i processi possibili che si hanno supponendo di considerare solo:

orto H_2 con $J=1$
para H_2 con $J=0, 2$

Partendo da un singoletto (μ^-p) si hanno i possibili stati di momento angolare totale J_T :

	J	0	1	2
orto H_2	1		$J_T = 0, 1, 2,$	
para H_2	0	$J_T = 0$		$J_T = 2$

Partendo da un tripletto si hanno invece i valori:

	I	J	0	1	2
orto H_2	1		$J_T = 0, 1, 2, 3$		
para H_2	0		$J_T = 1$		$J_T = 1, 2, 3$

Nello stato finale gli stati di momento angolare totale $J_T = 0, 1, 2, 3$ che si possono avere nello stato iniziale, si possono così riottenere (O sta per orto e P per para):

Stato finale di tripletto:

$J_T = 0$	con	T+O(J = 1)	$J_T = 1$	con	T+P(J = 0) T+P(J = 2) T+O(J = 1) T+O(J = 3)
$J_T = 2$	con	T+P(J = 2) T+O(J = 1) T+O(J = 3)	$J_T = 3$	con	T+P(J = 2) T+P(J = 4) T+O(J = 1) T+O(J = 3) T+P(J = 5)

Stato finale di singoletto:

$J_T = 0$	con	S+P(J = 0) S+O(J = 1)	$J_T = 1$	con	S+O(J = 1)
$J_T = 2$	con	S+P(J = 2) S+O(J = 1) S+O(J = 3)	$J_T = 3$	con	S+O(J = 3)

Quindi le sole espressioni di $B(J, J')$ che ci interessano sono

$\Delta E > 0$			$\Delta E = 0$			$\Delta E < 0$		
B(0,1)	B(1,0)	B(2,1)	B(0,0)	B(1,1)	B(2,0)	B(0,1)	B(1,0)	B(2,1)
	B(1,1)	B(2,3)	B(0,2)	B(1,3)	B(2,2)		B(1,1)	B(2,3)
	B(1,2)			B(1,5)	B(2,4)		B(1,2)	
	B(1,3)						B(1,3)	

Le espressioni di $B(J, J')$ fornite dalla (20) sono state calcolate e successivamente fittate con dei polinomi di quinto grado. Nelle Figs. 1, 2, 3 sono riportati i risultati del calcolo e del successivo fit: mentre in tabella I sono riportate le espressioni dei polinomi trovati. E' risultato particolarmente comodo l'uso del parametro E attraverso il quale vengono espressi i valori di $B(J, J')$. Esso è definito come segue:

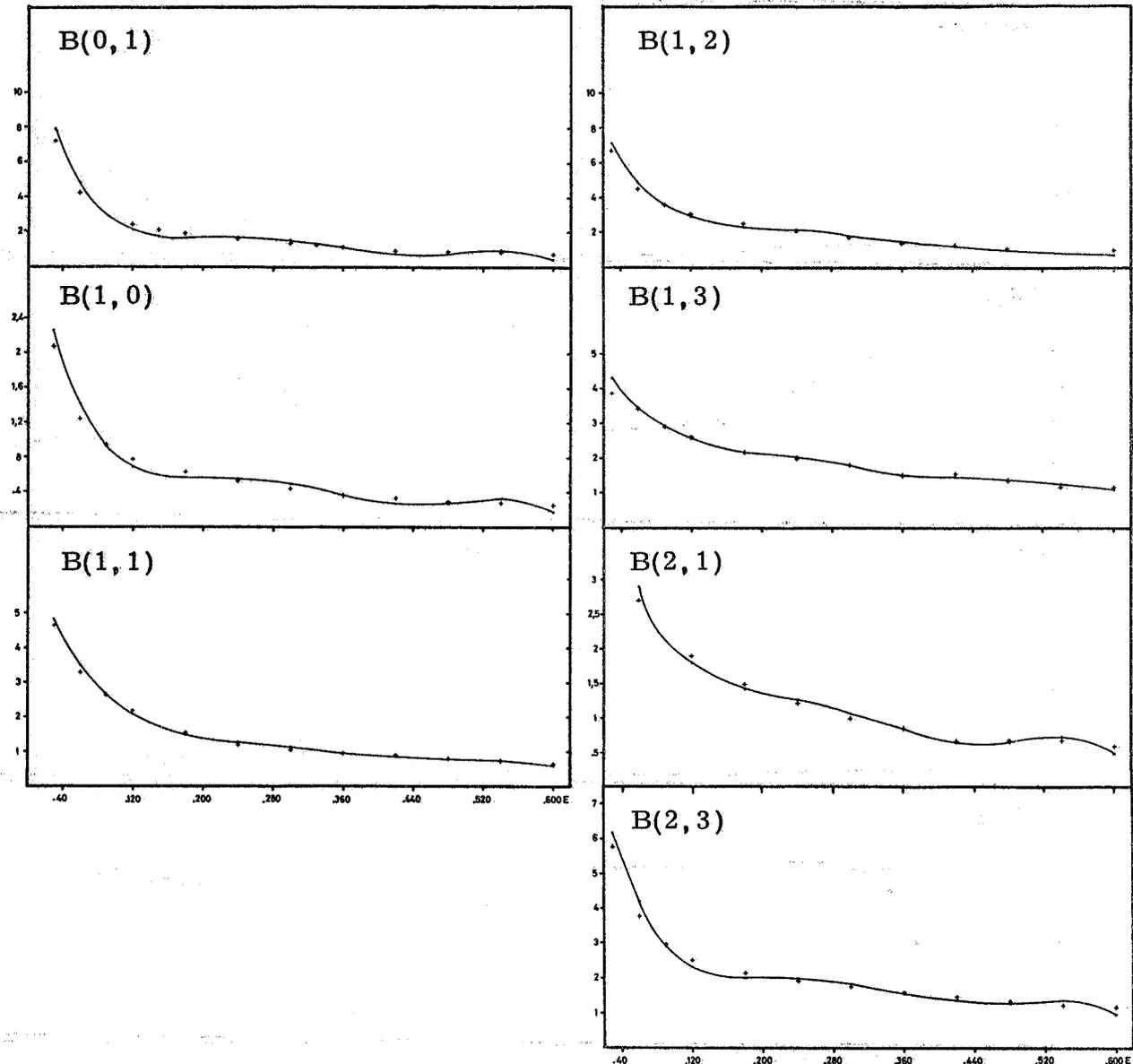


FIG. 1 - Andamento di $B(J, J')$ con $\Delta E > 0$ in funzione di E .
I punti sono calcolati mentre la linea è risultato del fit.

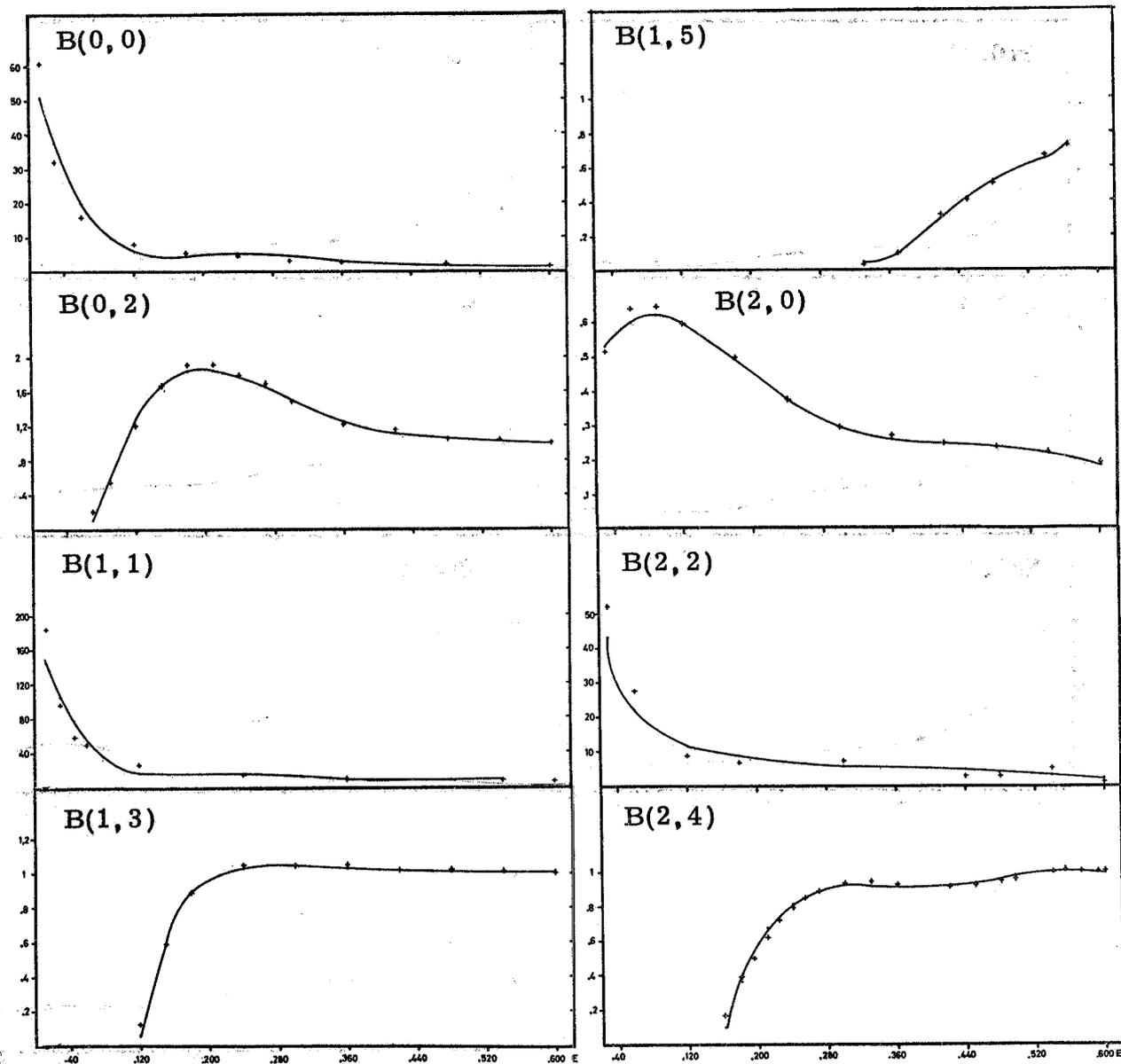


FIG. 2 - Andamento di $B(J, J')$ con $\Delta E = 0$ in funzione di E .
I punti sono calcolati mentre la linea è risultato del fit.

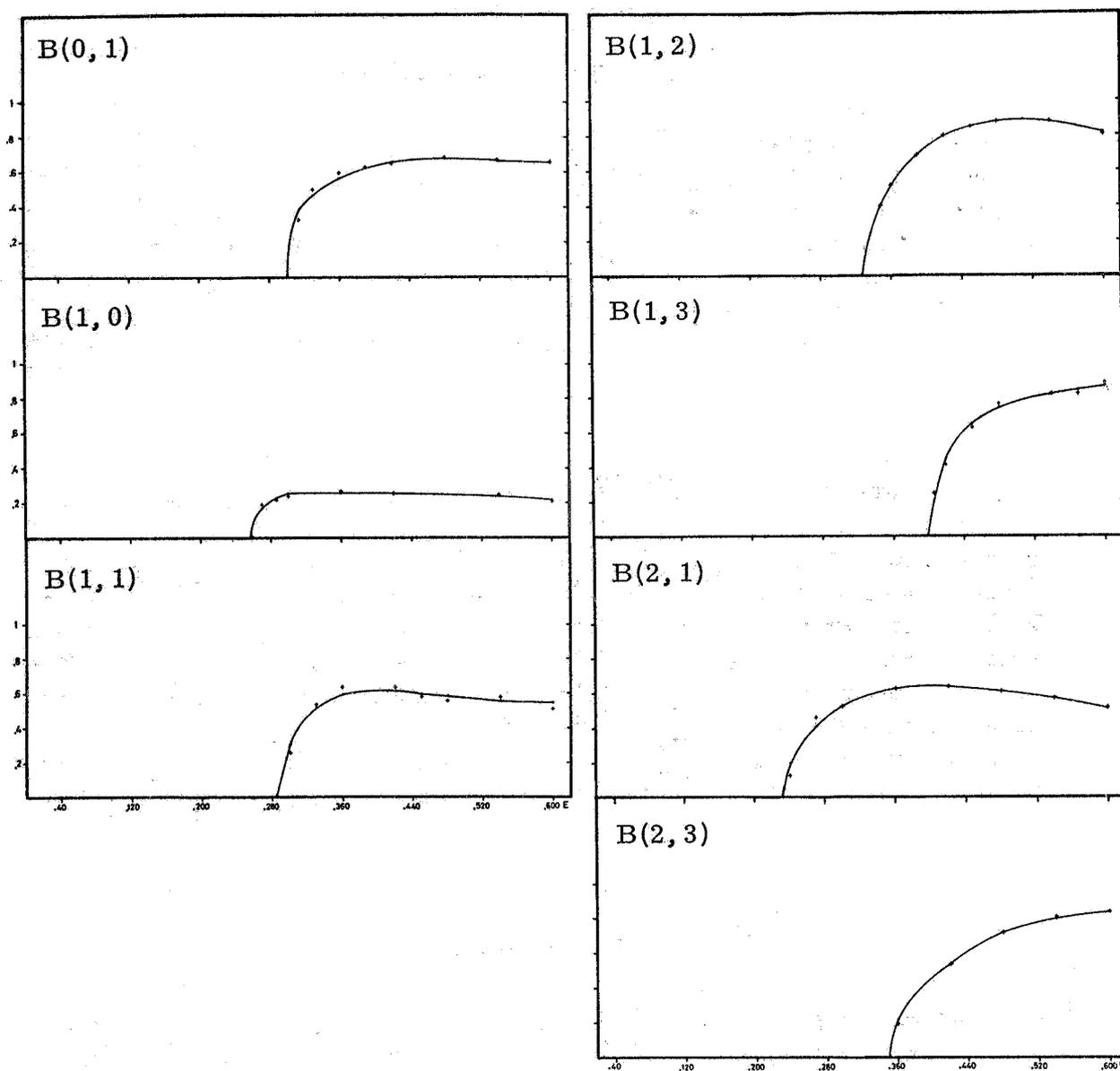


FIG. 3 - Andamento di $B(J, J')$ con $\Delta E < 0$ in funzione di E .
I punti sono calcolati mentre la linea è risultato del fit.

TABELLA I

Transizioni Tripletto/Singoletto

$$\begin{aligned}
B(0,1) &= -4.007 \times 10^3 E^5 + 7.058 \times 10^3 E^4 - 4.671 \times 10^3 E^3 + 1.437 \times 10^3 E^2 - 2.07 \times 10^2 E + 12.954 \\
B(1,0) &= -1.124 \times 10^3 E^5 + 1.970 \times 10^3 E^4 - 1.294 \times 10^3 E^3 + 3.951 \times 10^2 E^2 - 5.656 \times 10 E + 3.638 \\
B(1,1) &= -1.031 \times 10^3 E^5 + 1.899 \times 10^3 E^4 - 1.346 \times 10^3 E^3 + 4.618 \times 10^2 E^2 - 7.945 \times 10 E + 6.879 \\
B(1,2) &= -2.804 \times 10^3 E^5 + 4.887 \times 10^3 E^4 - 3.199 \times 10^3 E^3 + 9.796 \times 10^2 E^2 - 1.446 \times 10^2 E + 1.071 \times 10 \\
B(1,3) &= -7.565 \times 10^2 E^5 + 1.367 \times 10^3 E^4 - 9.400 \times 10^2 E^3 + 3.074 \times 10^2 E^2 - 5.092 \times 10 E + 5.584 \\
B(2,1) &= -1.430 \times 10^3 E^5 + 2.489 \times 10^3 E^4 - 1.633 \times 10^3 E^3 + 5.051 \times 10^2 E^2 - 7.695 \times 10 E + 6.106 \\
B(2,3) &= -1.280 \times 10^3 E^5 + 2.275 \times 10^3 E^4 - 1.525 \times 10^3 E^3 + 4.792 \times 10^2 E^2 - 7.237 \times 10 E + 5.577
\end{aligned}$$

Transizioni Tripletto/Tripletto e Singoletto/Singoletto

$$\begin{aligned}
B(0,0) &= -2.486 \times 10^4 E^5 + 4.342 \times 10^4 E^4 - 2.845 \times 10^4 E^3 + 8.637 \times 10^3 E^2 - 1.209 \times 10^3 E + 6.711 \\
B(0,2) &= 4.023 \times 10^2 E^5 - 1.033 \times 10^3 E^4 + 9.936 \times 10^2 E^3 - 4.413 \times 10^2 E^2 + 8.71 \times 10 E - 4.327 \\
B(1,1) &= -7.127 \times 10^4 E^5 + 1.242 \times 10^5 E^4 - 8.117 \times 10^4 E^3 + 2.454 \times 10^4 E^2 - 3.415 \times 10^3 E + 1.881 \times 10^2 \\
B(1,3) &= -1.096 \times 10^2 E^5 + 8.666 E^4 + 1.817 \times 10^2 E^3 - 1.525 \times 10^2 E^2 + 4.597 \times 10 E - 3.489 \\
B(1,5) &= 9.009 \times 10^2 E^5 - 1.557 \times 10^3 E^4 + 9.016 \times 10^2 E^3 - 1.554 \times 10^3 E^2 - 2.11 \times 10 E + 6.489 \\
B(2,0) &= 1.388 \times 10^2 E^5 - 2.744 \times 10^2 E^4 + 1.991 \times 10^2 E^3 - 6.270 \times 10 E^2 + 6.914 E + 3.791 \times 10^{-1} \\
B(2,2) &= -3.417 \times 10^4 E^5 + 5.963 \times 10^4 E^4 - 3.902 \times 10^4 E^3 + 1.182 \times 10^4 E^2 - 1.650 \times 10^3 E + 9.205 \times 10 \\
B(2,4) &= -1.993 \times 10^2 E^4 + 3.497 \times 10^2 E^3 - 2.241 \times 10^2 E^2 + 6.237 \times 10 E - 5.444
\end{aligned}$$

Transizioni Singoletto/Tripletto

$$\begin{aligned}
B(1,0) &= -1.232 \times 10^2 E^5 + 1.672 \times 10^2 E^4 - 4.546 \times 10 E^3 - 2.815 \times 10 E^2 + 1.712 \times 10 E - 2.194 \\
B(0,1) &= -2.181 \times 10^2 E^5 + 3.773 \times 10^2 E^4 - 1.905 \times 10^2 E^3 - 8.557 E^2 + 3.089 \times 10 E - 5.565 \\
B(1,1) &= -1.594 \times 10^3 E^5 + 2.751 \times 10^3 E^4 - 1.594 \times 10^3 E^3 + 2.722 \times 10^2 E^2 + 4.633 \times 10 E - 1.349 \times 10 \\
B(1,2) &= -5.274 \times 10^2 E^5 + 8.649 \times 10^2 E^4 - 3.797 \times 10^2 E^3 - 7.424 \times 10 E^2 + 9.151 \times 10 E - 1.642 \times 10 \\
B(1,3) &= 4.441 \times 10^2 E^5 - 5.429 \times 10^2 E^4 + 1.878 \times 10^2 E^3 - 5.347 \times 10 E^2 + 4.655 \times 10 E - 1.254 \times 10 \\
B(2,1) &= -1.489 \times 10^2 E^4 + 2.893 \times 10^2 E^3 - 2.108 \times 10^2 E^2 + 6.772 \times 10 E - 7.404 \\
B(2,3) &= +4.355 \times 10 E^3 - 7.646 \times 10 E^2 + 4.431 \times 10 E - 7.983
\end{aligned}$$

$$E = \frac{3M + m}{8 \mathcal{M}} \mu E_1 \xi^2 \quad \xi^2 = \left(\frac{r_e}{\hbar}\right)^2 p^2 \quad p = \text{impulso nel baricentro.}$$

Note così le sezioni d'urto dei processi che intervengono con usuale metodo di Montecarlo si è potuta ricostruire la distribuzione temporale di tripletto in H_2 gassoso a $300^\circ K$, tenendo conto che:

- 1) all'atto della formazione il μ^-p si forma in una miscela statistica di 3/4 di tripletto e di 1/4 di singoletto;
- 2) il (μ^-p) possiede un'energia iniziale di $0,55 \text{ ev}^{(4)}$;
- 3) il μ^- ha una vita media di $2,2 \mu s$;
- 4) le molecole hanno una distribuzione Maxwelliana di velocità;
- 5) a causa del moto molecolare la densità appare modificata per il fattore⁽¹⁵⁾

$$= \left(1 + \frac{1}{2 \xi^2}\right) \Phi(\xi) + \pi^{-1/2} \frac{1}{\xi} e^{-\xi^2} \quad \xi = \sqrt{\frac{2E}{kT}}$$

$$\Phi(\xi) = 2 \pi^{-1/2} \int_0^\xi e^{-x^2} dx$$

Non si è invece tenuto conto:

- 1) della dipendenza angolare della sezione d'urto, che si è assunta isotropa nel baricentro;
- 2) dell'8% di molecole in $J = 3$;
- 3) del processo di cattura nucleare.

Nelle Figs. 4, 5, 6, 7 sono mostrate le distribuzioni temporali di tripletto, che si sono ottenute per i valori di (1/2, 5, 8, 25) atmosfere di pressione.

V. - CONCLUSIONI. -

a) Tutte le distribuzioni presentano una fase iniziale che corrisponde alla situazione in cui, per effetto dell'alta energia iniziale del (μ^-p) e della struttura della molecola di idrogeno, vi è equilibrio statico tra il numero di tripletti che transiscono a singoletto ed il numero dei singoletti che transiscono a tripletti.

b) Dopo queste fasi iniziali il (μ^-p) ha raggiunto un'energia pari a circa quella di transizione $E \approx 1,18 \text{ eV}$ e tutte le distribuzioni mostrano dei decadimenti approssimativamente esponenziali le cui vite medie sono determinate essenzialmente dalla sezione d'urto σ_{TS} . Il risul

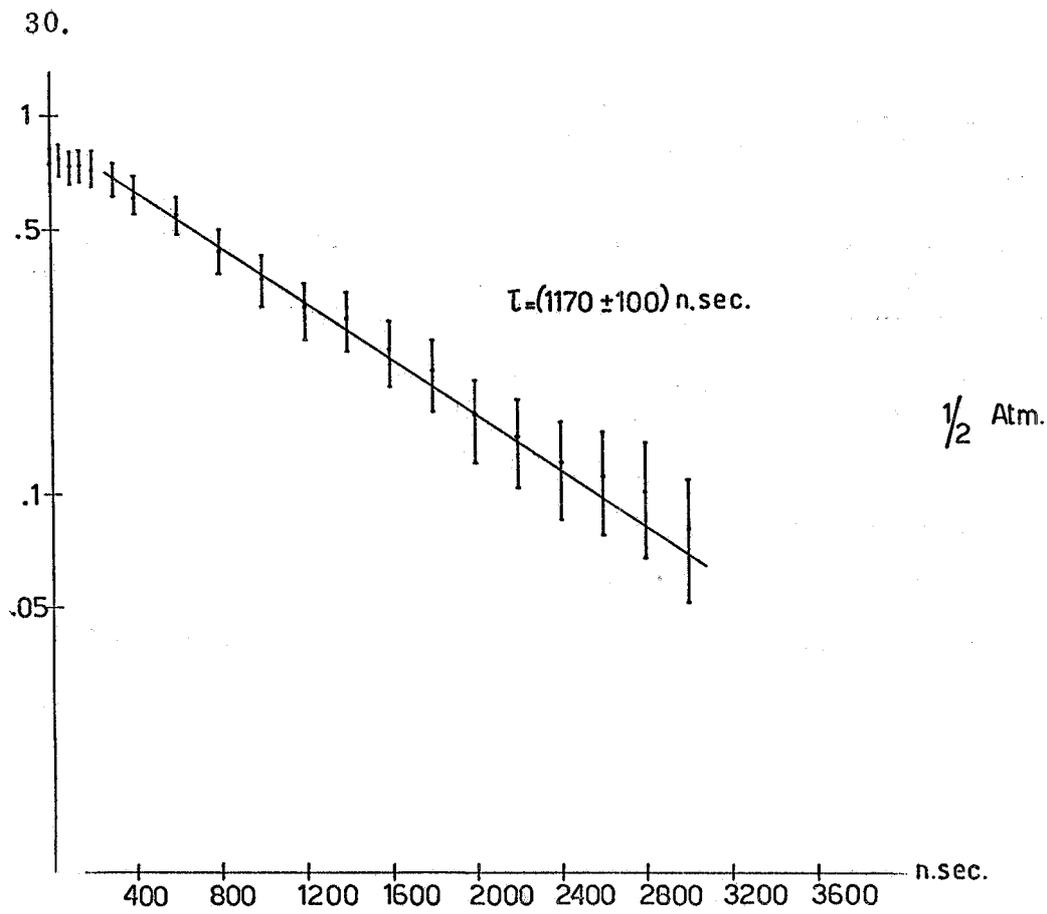


FIG. 4

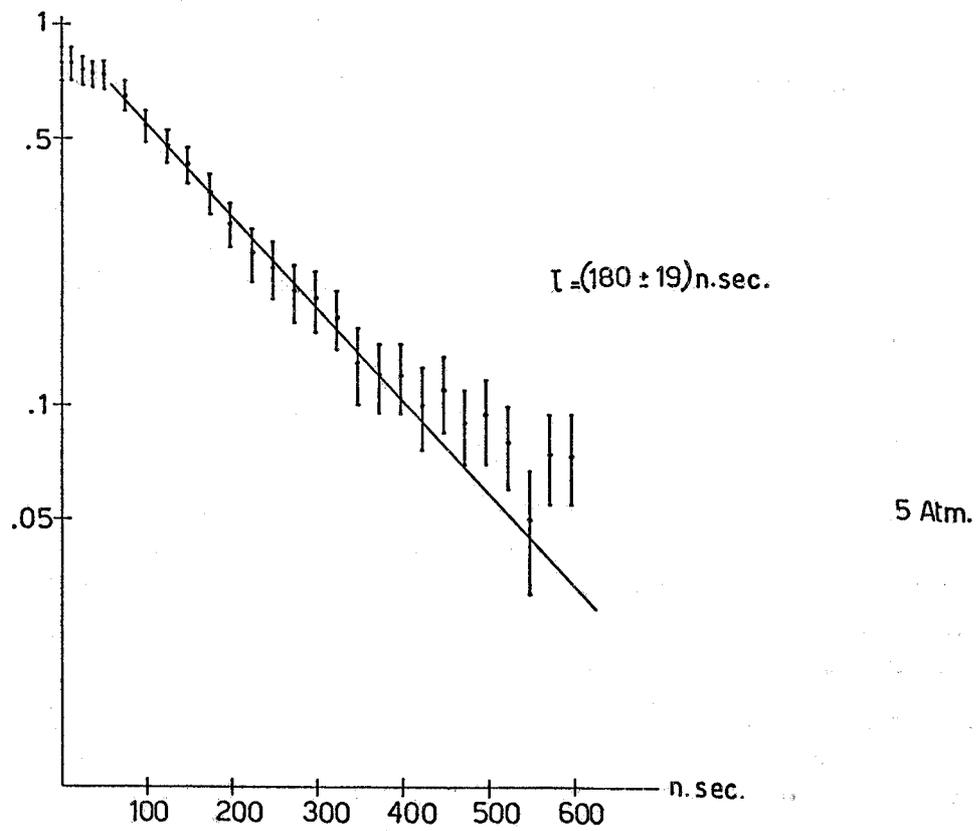


FIG. 5

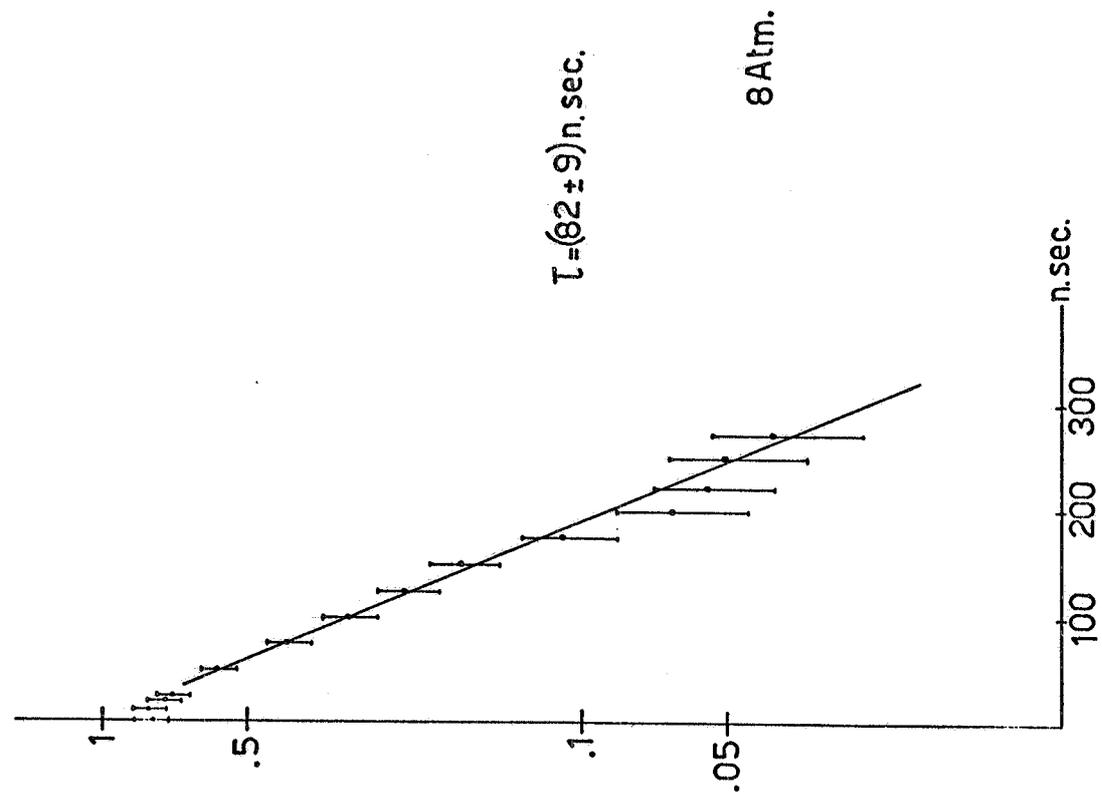


FIG. 6

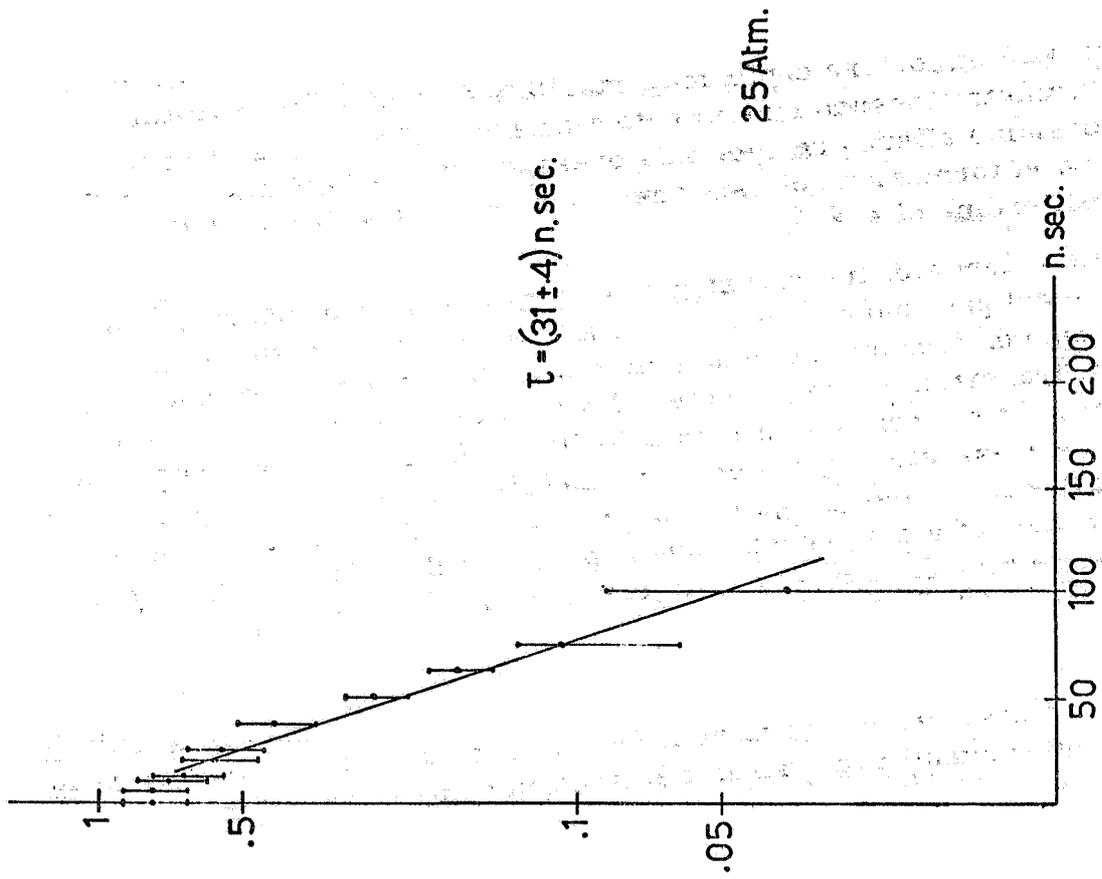


FIG. 7

tato ottenuto a 25 atmosfere conferma i risultati sperimentali forniti in referenza⁽⁴⁾; inoltre facendo riferimento a quanto è affermato in referenza⁽²⁾, possiamo affermare che, alla pressione di 8 atmosfere, e 900 nsec dopo la formazione del sistema (μ^-p), la contaminazione di tripletto è dell'ordine di e^{-9} (2).

c) Le velocità di transizione sono grosso modo proporzionali alla pressione del gas fino ai valori di 2-3 atmosfere, al di sotto dei quali il processo di decadimento comincia a diventare competitivo con il processo di transizione. Inoltre sotto .2 atmosfere le distribuzioni decadono praticamente con la vita media del μ^- ; questo risultato è particolarmente interessante in vista della possibilità di poter determinare la velocità di cattura del μ^- su protone nello stato di 3/4 di tripletto e 1/4 di singoletto. Infatti in questa zona il processo di diffusione non altera più l'iniziale miscela statistica con cui si forma il sistema μ^-p .

L'autore desidera ringraziare il Dr. E. Zavattini per le utili discussioni e i suggerimenti avuti durante lo svolgimento del presente lavoro.

BIBLIOGRAFIA. -

- (1) - A. Alberigi Quaranta, A. Bertin, P. Dal Piaz, G. Matone, F. Palmonari, A. Placci; G. Torelli and E. Zavattini, Phys. Letters 25B, 429 (1967).
- (2) - A. Alberigi Quaranta, A. Bertin, P. Dal Piaz, G. Matone, F. Palmonari, A. Placci, G. Torelli and E. Zavattini, Preprint CERN, 18 Agosto 1968.
- (3) - P. K. Kabir, Z. Phys. 191, 447 (1966).
- (4) - A. Alberigi Quaranta, A. Bertin, P. Dal Piaz, G. Matone, F. Palmonari, A. Placci, G. Torelli and E. Zavattini, Nuovo Cimento 47B, 72 (1967).
- (5) - A. Messiah, Mecanique Quantique, (Dunod, Paris, 1962) vol. III.
- (6) - Y. B. Zel'dovich and S. S. Gershtein, Soviet Phys. - JETP 8, 451 (1959).
- (7) - Y. B. Zel'dovich and S. S. Gershtein, Soviet Phys. - Uspekhi 3, 593 (1961).
- (8) - E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis (The University Press, Cambridge, 1952).
- (9) - Dealfaro - Regge, Potential Scattering (North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965).
- (10) - S. S. Gershtein, Soviet Phys. - JETP 7, 318 (1958).
- (11) - S. Cohen, D. L. Judd and R. J. Riddell, Phys. Rev. 119, 384 (1960).
- (12) - J. Schwinger and E. Teller, Phys. Rev. 52, 286 (1937).
- (13) - M. Hamermesch and J. Schwinger, Phys. Rev. 69, 145 (1946).
- (14) - S. S. Gershtein, Soviet Phys. - JETP 7, 685 (1958).
- (15) - S. Schwinger, Phys. Rev. 58, 1004 (1940).

APPENDICE I

Ponendo $\frac{H(R)}{R} = \chi(R)$, l'equazione radiale in onda S per lo stato antisimmetrico è la seguente:

$$-\frac{1}{M} \frac{d^2 \chi}{dR^2} + V_0 e^{-\beta R} \chi(R) = E \chi(R)$$

Facendo il seguente cambiamento di variabili:

$$\xi = e^{-\frac{\beta}{2} R} \quad M V_0 = d^2 \quad M E = k^2$$

si ottiene la:

$$\xi^2 \frac{d^2 \chi}{d\xi^2} + \xi \frac{d\chi}{d\xi} - \left(\frac{4d^2}{\beta^2} \xi^2 - \frac{4k^2}{\beta^2} \right) \chi = 0.$$

Ponendo ancora

$$\xi' = \frac{2d}{\beta} \xi \quad \frac{2k}{\beta} = i \nu'$$

si ottiene l'equazione di Bessel

$$\xi'^2 \frac{d^2 \chi}{d\xi'^2} + \xi' \frac{d\chi}{d\xi'} - (\xi'^2 + \nu'^2) \chi = 0$$

che ha per soluzione la $\chi = A I_{\nu'}(\xi') + B I_{-\nu'}(\xi')$.

Per $R \rightarrow \infty$ cioè $\xi' \rightarrow 0$ si ha che:

$$I_{\nu'}(\xi') \rightarrow \left(\frac{1}{2} \xi' \right)^{\nu'} \frac{1}{(\nu'+1)} = \left\{ \frac{1}{2} \frac{2d}{\beta} e^{-\frac{\beta}{2} R} \right\}^{\nu'} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2ik}{\beta} + 1\right)}$$

$$I_{-\nu'}(\xi') \rightarrow \left(\frac{1}{2} \xi' \right)^{-\nu'} \frac{1}{\Gamma(-\nu'+1)} = \left\{ \frac{1}{2} \frac{2d}{\beta} e^{-\frac{\beta}{2} R} \right\}^{-\nu'} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{2ik}{\beta} + 1\right)}$$

perciò per $R \rightarrow \infty$ si ha:

36.

$$(I. 1) \quad \chi(R) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} A e^{\frac{2ik}{\beta} \left\{ -\frac{\beta}{2} R + \lg \frac{d}{\beta} \right\}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2ik}{\beta} + 1\right)} +$$

$$+ B e^{-\frac{2ik}{\beta} \left\{ -\frac{\beta}{2} R + \lg \frac{d}{\beta} \right\}} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{2ik}{\beta} + 1\right)}$$

Per $R = 0$ si ha $\chi(0) = 0$ e quindi

$$\frac{A}{B} = - e^{2i\varphi} = - e^{-\frac{4ik}{\beta} \log \frac{d}{\beta}} \frac{\Gamma\left(\frac{2ik}{\beta} + 1\right)}{\Gamma\left(-\frac{2ik}{\beta} + 1\right)}$$

per la (I. 1) si ha allora:

$$\chi(R) \propto e^{\frac{2ik}{\beta} \lg \frac{d}{\beta} + i\varphi} \frac{e^{-ikR}}{\Gamma\left(\frac{2ik}{\beta} + 1\right)} - \frac{2ik}{\beta} \log \frac{d}{\beta} - i\varphi \frac{e^{ikR}}{\Gamma\left(-\frac{2ik}{\beta} + 1\right)}$$

per $k \rightarrow 0$ questa espressione diventa:

$$\chi(R) \sim \sin(kR + \varphi) \sim R + \frac{1}{k \cotg \varphi}.$$

Ma $\lim_{k \rightarrow 0} k \cotg \varphi = \frac{1}{\left(\frac{d\varphi}{dk}\right)_{k=0}}$ e

$$\left(\frac{d\varphi}{dk}\right)_{k=0} \sim \left(\frac{d\varphi}{dk}\right)_{k=0} = \frac{2}{\beta} \log \frac{d}{\beta} + \frac{2}{\beta} \psi(1)$$

(ψ è la derivata logaritmica della Γ di Eulero)

la quale, ponendo $\psi(1) = -\log c$, diventa:

$$\left(\frac{d\varphi}{dk}\right)_{k=0} = \frac{2}{\beta} \log \left(c \frac{\sqrt{MV_0}}{\beta} \right).$$

Usufruendo dei valori dei parametri del potenziale repulsivo dati in referenza⁽⁶⁾, per la scattering length si ha:

$$a_u = \frac{2}{\beta} \log \left(c \frac{\sqrt{MV_0}}{\beta} \right) = 5.25 \text{ unità mesiche}$$

e la sezione d'urto è data da:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \varphi = \frac{4\pi}{k^2 + k^2 \cotg^2 \varphi} = 4\pi \frac{a_u^2}{1 + k^2 a_u^2}$$

APPENDICE II. -

Ponendo $G(R)/R = \chi(R)$, l'equazione radiale per lo stato simmetrico ed in onda S è la seguente:

$$(II. 1) \quad -\frac{1}{M} \frac{d^2 \chi}{dR^2} + D \left\{ e^{-2\alpha(R-R_0)} - 2e^{-\alpha(R-R_0)} \right\} = E \chi$$

I valori dei parametri del potenziale di Morse sono riportati in referenza (6, 7) come risultati di accurati calcoli variazionali condotti sul lo studio della funzione d'onda del sistema $(p\mu p)^+$. Essi sono

$$D = 0.1055 \quad \alpha = 0.57 \quad R_0 = 2.15 \quad (\text{in unità mesiche})$$

Facendo il seguente cambiamento di variabili

$$\xi = 2\delta e^{-\alpha(R-R_0)} \quad S = \frac{\sqrt{ME}}{\alpha} = \frac{k}{\alpha} \quad \delta = \frac{\sqrt{MD}}{\alpha}$$

la (II. 1) diventa:

$$(II. 2) \quad \frac{d^2 \chi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\chi}{d\xi} + \left(\frac{S^2}{\xi^2} + \frac{\delta}{\xi} - \frac{1}{4} \right) \chi = 0.$$

Questa equazione può essere considerata come un caso particolare della

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + p(z) \frac{d\psi}{dz} + q(z) \psi = 0$$

dove:

$$p(z) = \frac{1 - \lambda - \lambda'}{z} \quad q(z) = -K^2 + \frac{2\alpha}{z} + \frac{\lambda \lambda'}{z^2}$$

il cui integrale generale può essere scritto come combinazione lineare di funzioni ipergeometriche confluenti⁽⁸⁾:

$$(II. 3) \quad \begin{aligned} \psi = & A e^{-kz} z^\lambda F\left(\frac{1+\lambda-\lambda'}{z} - \frac{\alpha}{K} \mid 1+\lambda-\lambda' \mid 2kz\right) + \\ & + B e^{-kz} z^{\lambda'} F\left(\frac{1-\lambda+\lambda'}{2} - \frac{\alpha}{K} \mid 1-\lambda+\lambda' \mid 2kz\right) \end{aligned}$$

Le costanti della (II. 3) sono nel nostro caso

$$\lambda = -is \quad \lambda' = is \quad k = 1/2 \quad \alpha = \delta/2$$

quindi per la (II. 2) si ottiene

$$\begin{aligned} = & A e^{-\xi/2} \xi^{-is} F(-\delta+1/2-is \mid 1-2is \mid \xi) + \\ & + B e^{-\xi/2} \xi^{is} F(-\delta+1/2+is \mid 1+2is \mid \xi) \end{aligned}$$

Imponiamo ora la condizione che $\chi(0) = 0$. Al punto $R=0$ corrisponde $\xi = \xi_0 = 2\delta e^{\alpha R_0}$ perciò:

$$A \xi_0^{-is} F(-\delta+1/2-is \mid 1-2is \mid \xi_0) + B \xi_0^{is} F(-\delta+1/2+is \mid 1+2is \mid \xi_0) = 0$$

e quindi

$$(II. 4) \quad \frac{A}{B} = - \frac{\xi_0^{2is} F(-\delta+1/2+is \mid 1+2is \mid \xi_0)}{\xi_0^{-2is} F(-\delta+1/2-is \mid 1-2is \mid \xi_0)}$$

Assumendo che $2\delta e^{\alpha R_0} = \xi_0 \gg 1$, in modo da poter utilizzare il comportamento asintotico della F per $z \rightarrow \infty$ ⁽⁸⁾

$$F(a \mid c \mid z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^{-z}, \quad \Gamma(x) = \text{gamma di Eulero}$$

la (II. 4) diventa

$$\frac{A}{B} = - \frac{\Gamma(1+2is)}{\Gamma(1-2is)} \frac{\Gamma(-\delta+1/2-is)}{\Gamma(-\delta+1/2+is)} = - e^{2i\varphi} \times \text{costante},$$

e per la $\chi(R)$ si ha:

$$\begin{aligned} \chi(R) \propto & e^{-\xi/2} \left\{ e^{i\varphi} \xi^{-is} F(-\delta+1/2-is \mid 1-2is \mid \xi) + \right. \\ & \left. + e^{-i\varphi} \xi^{is} F(-\delta+1/2+is \mid 1+2is \mid \xi) \right\} \end{aligned}$$

Per $R \rightarrow \infty$, cioè per $\xi \rightarrow 0$ la

$$F(a | c | \xi) = 1 + \frac{a}{c} \xi + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)} \xi^2 + \dots$$

tende a 1 e quindi, ricordando che $\xi^{-is} = e^{ikR - ikR_0 - is \log 2\delta}$ il comportamento asintotico della $\chi(R)$ diventa:

$$(II. 5) \quad \chi(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} e^{i\varphi + ikR - ikR_0 - is \log 2\delta} + e^{-i\varphi - ikR + ikR_0 + is \log 2\delta}$$

La (II. 5) si può scrivere nella forma $\chi(R) \rightarrow e^{ikR} + S(k) e^{ikR}$ dove

$$S(k) = e^{2i\omega(k)} \quad \omega(k) = \varphi - kR_0 - k \frac{\log 2\delta}{\alpha}$$

cioè

$$S(k) = e^{-2ik(R_0 + \frac{1}{\alpha} \log 2\delta)} \frac{\Gamma(1 + 2is)}{\Gamma(1 - 2is)} \frac{\Gamma(-\delta + 1/2 - is)}{\Gamma(-\delta + 1/2 + is)}$$

APPENDICE III. -

Per calcolare le sommatorie della (18) e (19) del testo possiamo trattare la molecola di idrogeno come un rotatore rigido e porre^(12,13)

$$(III. 1) \quad \Phi_{JM_J}(\vec{r}) = P_J^{M_J}(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_e)^{1/2} \quad P_J^{M_J}(\vec{r}) = \text{armonica sferica}$$

dove \vec{r}_e è la distanza media tra i due protoni della molecola di idrogeno. Ricordiamo che per il sistema dei due protoni la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica e quindi, essendo

$$\Phi_{JM_J}(-\vec{r}) = P_J^{M_J}(-\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_e)^{1/2} = (-1)^J \Phi_{JM_J}(\vec{r})$$

si deve avere:

	spin totale	momento angolare rotaz.
para-idrogeno	$I = 0$	$J = 0, 2, 4, \dots$
orto idrogeno	$I = 1$	$J = 1, 3, 5, \dots$

Pertanto se noi calcoliamo la sommatoria:

$$(III. 2) \quad \sum_{M_J M_J'} \left| \int e^{i \frac{\bar{k}-\bar{k}'}{2} \bar{r}} \Phi_{J', M_J'}^{\mathbf{x}}(\bar{r}) \Phi_{J M_J}(\bar{r}) d\bar{r} \right|^2$$

vediamo subito che per tutte le transizioni del tipo

$$\Delta I = 0 \quad \begin{cases} \text{para-para} \\ \text{orto-orto} \end{cases}$$

ΔJ deve essere pari ($= 0, 2, 4, \dots$), quindi il prodotto $\Phi_{J'}^{\mathbf{x}} \Phi_J$ è una funzione anch'essa pari e la (III. 2) si riduce alla sommatoria della (18) del testo. Viceversa, per tutte le transizioni del tipo

$$\Delta I = 1 \quad \begin{cases} \text{para-orto} \\ \text{orto-para} \end{cases}$$

ΔJ deve essere dispari ($1, 3, 5, \dots$), quindi il prodotto $\Phi_{J'}^{\mathbf{x}} \Phi_J$ è una funzione dispari e la (III. 2) si riduce alla sommatoria della (19) del testo. Calcoliamo pertanto la sommatoria (III. 2), con la posizione (III. 1). Si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2J+1} \sum_{M_J M_J'} \left| \int e^{i \frac{\bar{k}-\bar{k}'}{2} \bar{r}} \Phi_{J' M_J'}^{\mathbf{x}}(\bar{r}) \Phi_{J M_J}(\bar{r}) d\bar{r} \right|^2 = \\ & = \frac{1}{2J+1} \sum_{M_J M_J'} \left| \int e^{i \bar{K} \bar{r}} P_{J'}^{\mathbf{x} M_J'}(\bar{r}) \delta(\bar{r}-\bar{r}_e)^{1/2} P_J^{M_J}(\bar{r}) \delta(\bar{r}-\bar{r}_e)^{1/2} d\bar{r} \right|^2 \end{aligned}$$

avendo posto $\bar{k}-\bar{k}'/2 = \bar{K}$.

Possiamo scrivere tale espressione nel modo seguente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2J+1)} \sum_{M_J M_J'} e^{i \bar{K}(\bar{r}-\bar{r}')} P_{J'}^{\mathbf{x} M_J'}(\bar{r}) P_J^{M_J}(\bar{r}) P_J^{M_J}(\bar{r}') P_{J'}^{M_J'}(\bar{r}') \times \\ & \times \delta(\bar{r}-\bar{r}_e) \delta(\bar{r}'-\bar{r}_e) d\bar{r} d\bar{r}'. \end{aligned}$$

Per note proprietà delle armoniche sferiche si ha:

$$\sum_{M_J} P_J^{\mathbf{x} M_J}(\bar{r}) P_J^{M_J}(\bar{r}') = \frac{2J+1}{4\pi} P_J(\cos \theta)$$

dove θ è l'angolo fra \bar{r} ed \bar{r}' ; quindi la nostra espressione diventa:

$$(2J'+1) \int e^{i\bar{K}(\bar{r}-\bar{r}')} P_J(\cos\theta) P_{J'}(\cos\theta) \delta(\bar{r}-\bar{r}_e) \delta(\bar{r}'-\bar{r}_e)$$

ed integrando sui moduli di \bar{r} ed \bar{r}' facendo uso della presenza delle funzioni δ , si ha:

$$(2J'+1) \int e^{i\bar{K}(\bar{r}-\bar{r}')} P_J(\cos\theta) P_{J'}(\cos\theta) \frac{d\omega}{4\pi} \frac{d\omega'}{4\pi}$$

essendo $|\bar{r}| = |\bar{r}'| = r_e$.

Ora è chiaro che la sezione d'urto non può dipendere dall'angolo tra \bar{K} ed $(\bar{r}-\bar{r}')$, quindi nell'espressione trovata possiamo sostituire $e^{i\bar{K}(\bar{r}-\bar{r}')}$ con il suo valore medio su questo angolo β dato da:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{iK|\bar{r}-\bar{r}'| \cos\beta} d(\cos\beta) = \frac{\text{sen} K |\bar{r}-\bar{r}'|}{K |\bar{r}-\bar{r}'|} \quad K = |\bar{K}|.$$

D'altra parte

$$|\bar{r}-\bar{r}'| = 2 r_e \text{sen} \frac{\theta}{2}$$

quindi si ha:

$$(2J'+1) \int \frac{\text{sen}(2K r_e \text{sen} \frac{\theta}{2})}{2K r_e \text{sen} \frac{\theta}{2}} P_J(\cos\theta) P_{J'}(\cos\theta) \frac{d\omega}{4} \frac{d\omega'}{4}.$$

Ora, ricordando lo sviluppo⁽¹²⁾:

$$\frac{\text{sen}(2K r_e \text{sen} \frac{\theta}{2})}{2K r_e \text{sen} \frac{\theta}{2}} = \sum_0^{\infty} L(2L+1) J_L^2(K r_e) P_L(\cos\theta)$$

$$\left[J_L(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{L+1/2}(x) \right]$$

sono le funzioni di Bessel sferiche] ed integrando la nostra espressione su $d\omega'$ e su $d\theta$ si ottiene:

$$(2J'+1) \sum_L (2L+1) C_{LJJ'} J_L^2(K r_e)$$

dove:

42.

$$C_{LJJ'} = \int_0^\pi P_L(\cos \theta) P_J(\cos \theta) P_{J'}(\cos \theta) \frac{\sin \theta d\theta}{2} =$$

$$= \frac{(J+L-J')!(J'+L-J)!(J+J'-L)!}{(J+J'+L+1)} \frac{\left(\frac{J+J'+L}{2}\right)!}{\left(\frac{J+L-J'}{2}\right)! \left(\frac{J'+L-J}{2}\right)! \left(\frac{J+J'-L}{2}\right)!}$$

Infine, ponendo:

$$\sum (J, J') = (2J'+1) \sum_L (2L+1) C_{LJJ'} J_L^2(K r_e)$$

le quattro sezioni d'urto differenziali diventano:

$$d\sigma_{J,0}^{J',1} = \frac{4a^2}{3} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum (J, J') d\Omega \quad d\sigma_{J,1}^{J',0} = \frac{4a^2}{9} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum (J, J') d\Omega$$

$$d\sigma_{J,1}^{J',1} = \frac{8a^2}{9} \left(\frac{\mathcal{V}}{m}\right)^2 \frac{k'}{k} \sum (J, J') d\Omega \quad d\sigma_{J,0}^{J',0} = 0$$

Consideriamo il termine comune alle sezioni d'urto ora scritte ed integriamo su $d\Omega$. Ricordiamo che per le posizioni fatte

$$K r_e = \frac{r_e}{2\hbar} (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta)^{1/2}$$

e quindi, ponendo:

$$x = \frac{r_e}{2\hbar} (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta)^{1/2} \quad d(\cos \theta) = - \frac{x dx}{pp' \left(\frac{r_e}{2\hbar}\right)^2}$$

l'integrale da studiare

$$\int_0^\pi J_L^2 \left[\frac{r_e}{2\hbar} (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta)^{1/2} \right] \sin \theta d\theta$$

si può scrivere:

$$\frac{1}{pp'} \left(\frac{2\hbar}{r_e}\right)^2 \int_{\frac{r_e}{2\hbar}(p-p')}^{\frac{r_e}{2\hbar}(p+p')} J_L^2(x) dx$$

L'espressione per le sezioni d'urto totali diventa:

$$\int \frac{d\Omega}{d\Omega} d\Omega \propto \pi \left(\frac{\mathcal{C}}{m}\right)^2 (2J'+1) \left(\frac{2\hbar}{p r_e}\right)^2 A_{JJ'}$$

dove

$$A_{JJ'} = 2 \sum_L (2L+1) C_{LJJ'} \int_{\frac{r_e}{2h}(p-p')}^{\frac{r_e}{2h}(p+p')} J_L^2(x) dx$$

Ricordando che (12)

$$\int_0^x x J_L^2(x) dx = \int_0^x x J_0^2(x) dx - \frac{1}{2} x^2 \left[J_0^2(x) + \sum_1^{L-1} \frac{2K+1}{K(K+1)} J_K^2(x) + \frac{1}{L} J_L^2(x) \right]$$

dove

$$\int_0^x x J_0^2(x) dx = \frac{1}{2} \text{Cin } 2x$$

tale espressione può essere così scritta

$$A_{JJ'} = \left[\text{Cin } 2x - \sum_L (2L+1) C_{LJJ'} f_L(x) \right] \begin{matrix} \frac{r_e}{2h}(p+p') \\ \frac{r_e}{2h}(p-p') \end{matrix}$$

dove

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } L = 0 \\ x^2 (J_0^2 + J_1^2) & \text{per } L = 1 \\ x^2 (J_0^2 + \sum_1^{L-1} \frac{2K+1}{K(K+1)} J_K^2 + \frac{1}{L} J_L^2) & \text{per } L > 1 \end{cases}$$

Dalla relazione di conservazione dell'energia si ha:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2\mathcal{C}} + \Delta E + E_J &= \frac{p'^2}{2\mathcal{C}} + E_{J'} \\ \Delta E &= 0,183 \text{ eV} \\ E_J &= \frac{\hbar^2}{2M_r r_e^2} J(J+1) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_r = \text{massa ridotta dei due protoni} = M_p/2 \\ M_p = \text{massa protone} \\ M = \text{massa del } \mu^- \end{array} \right.$$

44.

Da questa si può ricavare

$$p'^2 = p^2 + 2\mathcal{V}_0 \Delta E + 2\mathcal{V}_0 \frac{\hbar^2}{2M_e r_e^2} \left[J(J+1) - J'(J'+1) \right]$$

cioè

$$\frac{r_e p'}{\hbar} = \left[\mathcal{M}^2 + 2 \left(\frac{\mathcal{V}_0}{M_p} \right) \left[J(J+1) - J'(J'+1) + 2 \frac{\Delta E}{E_1} \right] \right]^{1/2}$$

dove: $\mathcal{M} = p r_e / \hbar$.

L'espressione per $A_{JJ'}$ diventa così:

$$A_{JJ'} = \left[\text{Cin } 2x - \sum_L (2L+1) x \right. \\ \left. \times C_{LJJ'} f_L(x) \right] \\ \left[\frac{1}{2} \left| \mathcal{M} + \left[\mathcal{M}^2 + 2 \frac{\mathcal{V}_0}{M_p} (J(J+1) - J'(J'+1) + 2 \frac{\Delta E}{E_1}) \right]^{1/2} \right| \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left| \mathcal{M} - \left[\mathcal{M}^2 + 2 \frac{\mathcal{V}_0}{M_p} (J(J+1) - J'(J'+1) + 2 \frac{\Delta E}{E_1}) \right]^{1/2} \right| \right]$$

e per le sezioni d'urto del processo $T \rightarrow S$ si ottiene⁽¹²⁾:

$$\sigma_{J,0}^{J',1} = \frac{4a^2}{3} \pi \left(\frac{\mathcal{V}_0}{m} \right)^2 \left(\frac{2}{\mathcal{M}} \right)^2 (2J'+1) A_{JJ'} \quad \sigma_{J,1}^{J',0} = \frac{4a^2}{9} \pi \left(\frac{\mathcal{V}_0}{m} \right)^2 \left(\frac{2}{\mathcal{M}} \right)^2 (2J'+1) A_{JJ'}$$

$$\sigma_{J,1}^{J',1} = \frac{8a^2}{9} \pi \left(\frac{\mathcal{V}_0}{m} \right)^2 \left(\frac{2}{\mathcal{M}} \right)^2 (2J'+1) A_{JJ'} \quad \sigma_{J,0}^{J',0} = 0.$$