

LNF-68/54
12 Sett. 1968

R. Baldini-Celio, B. Ballico-Lay, M. A. Mencuccini Spano: UN METODO DI MONTE CARLO AUTO-OTTIMIZZATO A PIU' STADI APPLICATO AL CALCOLO DI UN'EFFICIENZA DI RIVELAZIONE -

(Nota interna: n. 414)

Nota Interna: n° 414
12 Settembre 1968

R. Baldini-Celio, B. Ballico-Lay, M. A. Mencuccini Spano: UN METODO DI MONTE CARLO AUTO-OTTIMIZZATO A PIU' STADI APPLICATO AL CALCOLO DI UN'EFFICIENZA DI RIVELAZIONE. -

1. - INTRODUZIONE. -

In questa nota viene descritto un procedimento per rendere più veloce il calcolo fatto mediante il metodo di Monte Carlo (M. C.) dell'efficienza di rivelazione di un processo da parte di un dispositivo sperimentale^(x).

Come è noto il metodo di M. C. possiede molti, notevoli requisiti, tra cui: la semplicità, la possibilità di interrompere e di riprendere in qualsiasi istante il calcolo, la possibilità di ottenere contemporaneamente ad una stima dell'efficienza una stima dell'errore commesso. D'altra parte un grosso ostacolo nella applicazione di questo metodo è rappresentato dalla sua lenta convergenza: il calcolo di efficienze $\leq 10^{-4}$ (eventi rivelati)/(eventi simulati), ottenuto con un errore statistico del 10%, richiede usualmente, se non si usano

(x) - Tale calcolo viene usualmente eseguito simulando a caso un grande numero di volte lo sviluppo del processo che si va considerando. Giunti nello stato finale, per ciascun evento così simulato ci si domanda se possiede i requisiti per essere rivelato dal dispositivo sperimentale in esame. Definiamo come efficienza di rivelazione il rapporto tra il numero di eventi che sono rivelati ed il numero totale di eventi simulati.

2.

particolari accorgimenti, un tempo di calcolo di diverse ore per un calcolatore IBM 7040.

Tali accorgimenti usualmente consistono nel limitare gli intervalli di variabilità delle grandezze che il M.C. sorteggia, in maniera che più facilmente gli eventi simulati possano essere effettivamente rivelati, correggendo poi il valore dell'efficienza per un opportuno fattore.

Perchè ciò sia possibile occorre naturalmente possedere delle informazioni sul processo considerato che permettano di fissare queste limitazioni (tagli cinematici). Tali informazioni sono particolarmente difficili da conoscere a priori in quei casi in cui il dispositivo in esame non individua tutti i corpi presenti nello stato finale oppure vi sono diversi processi intermedi.

Nel procedimento che vogliamo descrivere (M.C. auto-ottimizzato: M.C.A.O.) queste informazioni sono tratte dai risultati che il M.C. stesso ha ottenuto in uno stadio precedente del calcolo. Tali informazioni vengono usate dal M.C. per concentrare le estrazioni negli intervalli ritenuti più opportuni. Procedendo per più stadi successivi è possibile, come vedremo, ottenere gli stessi risultati di un M.C. non ottimizzato (M.C. ordinario) con tempi di calcolo circa 100 volte inferiori.

2. - CALCOLO DI UNA EFFICIENZA MEDIANTE ESTRAZIONI PESATE. -

Ciò che esporremo in questo paragrafo, è una variante del classico metodo dello "Importance Sampling".

Volendo ad esempio calcolare secondo tale metodo un integrale, si estrae con probabilità maggiore nelle zone che maggiormente contribuiscono al valore dell'integrale, e si pesa, corrispondentemente, la funzione integranda per un fattore correttivo inversamente proporzionale alla densità di distribuzione con la quale si è estratto.

Esponiamo, ora, come si applica "l'Importance Sampling" nel nostro caso.

Sia V_0 il volume nel quale sono definite le variabili estratte dal M.C. (x). Supponiamo che V_0 sia suddiviso in m volumi V_i e di associare a

(x) - Tali variabili saranno distribuite uniformemente e si otterranno da esse le variabili fisiche del M.C. mediante il noto metodo dell'inversione della legge di distribuzione. Il procedimento può comunque essere facilmente generalizzato al caso in cui, non potendo realizzare praticamente la inversione, nel M.C. si estraggono le variabili fisiche x_i secondo una opportuna funzione di probabilità $g(x_i)$ e si pesa l'evento estratto per $f(x_i)/g(x_i)$, essendo $f(x_i)$ la funzione di probabilità esatta delle x_i .

ciascun volume una probabilità p_i . Vogliamo innanzitutto mostrare che la efficienza può essere calcolata come segue: si sorteggia un volume V_i , secondo la sua probabilità p_i , e all'interno del volume V_i si estrae un evento secondo le regole del M. C. ordinario. Se n_i è il numero di eventi rivelati che appartengono al volume V_i , N il numero totale di estrazioni ed \mathcal{E}_i la efficienza del volume V_i , si ha:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^m \frac{V_i}{p_i V_0} \cdot \frac{n_i}{N} \rightarrow \mathcal{E}$$

E per quanto riguarda la varianza:

$$(2) \quad \sigma^2 = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{E}_i V_i}{p_i V_0} - \mathcal{E}^2 \right\}$$

Alla (1) si perviene facilmente nel modo che segue: per essere le estrazioni uniformi all'interno di V_i , la parte efficiente di V_i sarà $\mathcal{E}_i V_0$, la probabilità q_i che un evento appartenga a V_i e sia rivelabile è, quindi:

$$q_i = p_i \cdot \frac{\mathcal{E}_i V_0}{V_i}$$

da cui

$$\sum_{i=1}^m \frac{V_i}{p_i V_0} \cdot \frac{n_i}{N} \rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{V_i}{p_i V_0} \cdot q_i = \mathcal{E}$$

La (2) si calcola osservando che le n_i sono distribuite secondo una legge di distribuzione polinomiale in $m+1$ variabili.

Vogliamo ora mostrare come, con una opportuna scelta dei pesi p_i e dei volumi V_i , si possa ridurre la varianza. Per esempio se fosse:

$$(3) \quad \begin{aligned} p_i &= \mathcal{E}_i / \mathcal{E} \\ V_i &= \mathcal{E}_i V_0 \end{aligned}$$

risulterebbe $\sigma^2 = 0$. Le condizioni (3) non sono ovviamente realizzabili, in quanto non sono noti a priori i volumi efficienti. Comunque la varianza si ridurrà notevolmente scegliendo dei pesi e dei volumi che approssimino le (3).

4.

3. - M. C. A. O. A PIU' STADI. -

In generale il M. C. A. O. a più stadi opera nel seguente modo: alla fine di ogni stadio si raggruppano in volumi V_i gli eventi rivelati (che sono stati memorizzati), considerati come punti dello spazio definito dalle variabili che il M. C. estrae. Si attribuisce quindi ad ogni volume V_i , un peso p_i calcolato in base al numero degli eventi rivelati trovati in tale volume (e secondo le regole che saranno esposte più avanti). Nello stadio successivo si estraggono i volumi V_i secondo i loro pesi. I pesi ed i volumi così costruiti costituiranno una sequenza che tende asintoticamente alle (3). Questo procedimento conduce comunque ad una riduzione nel tempo di calcolo. Tuttavia, se l'efficienza da calcolare è molto bassa, esso, così come è stato esposto, non sarebbe molto vantaggioso. Se l'efficienza è molto piccola infatti, per raccogliere le informazioni necessarie a costruire i pesi ed i volumi occorrerebbe avere a disposizione almeno per il primo stadio (eseguito con il M. C. ordinario) un tempo di macchina molto grande.

Conviene perciò incrementare il numero di informazioni che il M. C. A. O. può ricavare dalle estrazioni che ha eseguito.

Osserviamo a questo scopo che in generale l'efficienza è una funzione fortemente crescente dei parametri che definiscono le dimensioni dello apparato di rivelazione, quali ad esempio, le aperture dei contatori, e dello spettro in impulso delle particelle incidenti. Incrementando tali parametri avviene generalmente che l'efficienza di rivelazione cresce fortemente, senza che le nuove situazioni cinematiche permesse siano molto diverse da quelle che si vogliono selezionare.

Tale considerazione ci suggerisce una procedura per rendere più veloce il M. C. A. O., e cioè: incrementare le dimensioni dell'apparato di rivelazione (in generale tutti i parametri che controllano il valore della efficienza), memorizzare gli eventi rivelati in queste condizioni e costruire, utilizzando tali eventi, pesi e volumi. Naturalmente i pesi e i volumi così costruiti non sono stime delle (3). Tuttavia se ad ogni stadio si diminuiscono le dimensioni del dispositivo di rivelazione, a partire dal valore iniziale prescelto fino al valore finale, al progredire degli stadi i pesi ed i volumi si avvicineranno sempre più alle condizioni (3).

In base a ciò si è trovato conveniente di scegliere per i pesi ed i volumi da utilizzare al generico stadio $(j+1)$ mo:

$$(3') \quad \begin{aligned} V_i &= \xi_i^{(j)} \cdot V_0 \\ p_i &= \xi_i^{(j)} \cdot \frac{(1-p_f)}{\sum_K \xi_K^{(j)}} \end{aligned}$$

dove $\varepsilon_i^{(j)}$ è l'efficienza del volume V_i stimata nello stadio j^{mo} e p_f è il peso da attribuire al volume $V_o = \sum V_K$, essendo $\sum V_K$ l'insieme dei volumi dove $\varepsilon_K^{(j)} \neq 0$.

Il peso p_f (peso di fondo) è un parametro libero che può essere fissato in base alla precisione finale richiesta al M.C.A.O. Tale peso non dovrà ovviamente essere scelto troppo alto, altrimenti si perde in ottimizzazione, nè troppo basso, per non rischiare di perdere un volume efficiente. Tale rischio tuttavia non sussiste se le dimensioni del dispositivo di rivelazione variano abbastanza da stadio a stadio e se ad ogni stadio si conosce l'efficienza con sufficiente precisione. In questi casi, infatti, il volume efficiente relativo ad un certo stadio sarà tutto interno a quello costruito in base ai risultati ottenuti alla fine dello stadio precedente.

Le scelte (3'), oltre ad essere le più naturali estensioni delle (3), rendono le estrazioni uniformi in tutto il volume considerato efficiente. Ciò può essere vantaggioso in quanto non si sa a priori come andranno a disporsi all'interno del volume considerato efficiente gli eventi rivelati nello stadio successivo. Comunque è evidente che una scelta errata dei pesi non altererebbe il valore dell'efficienza calcolata.

L'unica conseguenza di un'errata scelta dei pesi sarebbe infatti una riduzione del fattore di ottimizzazione.

4. - VARIANZA E FATTORE DI OTTIMIZZAZIONE PER UN M. C. A. O. A PIU' STADI. -

Introduciamo la quantità K_j definita come il rapporto tra l'efficienza $\varepsilon^{(j)}$ corrispondente alle dimensioni dell'apparato di rivelazione assegnate allo stadio j^{mo} e l'efficienza finale ε da calcolare: $K_j = \varepsilon^{(j)} / \varepsilon$.

Per semplicità facciamo l'ipotesi che non vi siano eventi nel volume di fondo. Assegnati i pesi secondo il paragrafo precedente, la varianza dello stadio j^{mo} sarà:

$$\sigma_j^2 = \frac{K_j^2 \varepsilon^2}{N_j} \left[\frac{K_{j-1}}{K_j P_o} - 1 \right] \quad \text{con } j = 2, \dots, f$$

e $P_o = 1 - P_F$

Se l'efficienza varia rapidamente da stadio a stadio sarà

$$\frac{K_{j-1}}{K_j} \gg 1$$

e perciò

$$\sigma_j^2 \simeq \varepsilon^2 \frac{K_j K_{j-1}}{N_j P_o} \quad (j = 2, \dots, f)$$

6.

La varianza relativa al primo stadio è quella del M.C. ordinario, si ha cioè:

$$\sigma_1^2 = \frac{K_1 \varepsilon (1 - K_1 \varepsilon)}{N_1} \approx \frac{K_1 \varepsilon}{N_1}$$

Supponiamo poi di fissare la precisione percentuale C con cui vogliamo calcolare l'efficienza allo stadio j^{mo} e imponiamo quindi:

$$\frac{\sigma_j}{K_j \varepsilon} \approx C$$

Si ricava allora che la varianza dello stadio finale f sarà:

$$\sigma_f^2 \approx \frac{K_{f-1} \varepsilon^2}{N_f P_o} \approx \frac{\varepsilon}{(P_o C^2)^{f-1} N_1 N_2 \dots N_f}$$

Definiamo fattore di ottimizzazione F_{ott} , per il confronto tra il M.C.A.O. ed il M.C. ordinario, il rapporto tra i tempi di calcolo necessari per ottenere la medesima varianza ovvero, a parità di tempo di calcolo, il rapporto tra le varianze. Per il M.C. ordinario sarà, se N è il numero di estrazioni totali:

$$\sigma_{\text{ord}}^2 = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{N} \approx \frac{\varepsilon}{N}$$

Per quanto riguarda il M.C.A.O. si ha che l'aumento nel tempo di calcolo dovuto alle estrazioni pesate e alla scelta dei pesi è, in pratica, trascurabile e perciò il confronto può essere fatto a parità di estrazioni totali.

In definitiva avremo quindi:

$$(4) \quad F_{\text{ott}} \approx \frac{\sigma_{\text{ord}}^2}{\sigma_f^2} \approx \frac{(P_o C)^{f-1} N_1 N_2 \dots N_f}{N}$$

Tenendo presente la condizione

$$\sum_{i=1}^f N_i = N$$

si ricava (fissato il numero totale di estrazioni, la precisione percentuale ri chiesta per cambiare stadio, il peso di fondo ed il numero degli stadi) la con dizione di massima ottimizzazione:

$$(5) \quad N_1 = N_2 = \dots = \frac{N}{f}$$

In funzione poi del numero di stadi il fattore di ottimizzazione possiede un massimo per un numero di stadi pari a

$$f_o = P_F \frac{C^2 N}{e}$$

da cui

$$(6) \quad F_{\text{ott max}} = \frac{e^{f_o}}{P_o C^2 N}$$

5. - LIMITI E APPLICAZIONI PRATICHE DEL M. C. A. O. A PIU' STADI. -

Se nella (6) si sostituiscono valori ragionevoli di c , N , e P_F si ottengono subito fattori di ottimizzazione estremamente elevati. Per esempio per $N = 10^5$, $C = 0.05$ e $P_o \simeq 1$, si ha $F_{\text{ott}} \gg 10^3$. Un tale risultato per F_{ott} non è però realistico in quanto le condizioni di ottimizzazione massima non sono in pratica realizzabili. Esistono, infatti dei limiti nella scelta dei parametri, derivanti sia dalle esigenze particolari di una data esperienza che dal meccanismo di funzionamento del C. M. A. O.

Ad esempio le dimensioni del dispositivo di rivelazione al primo stadio, da cui dipende il valore di k_1 , non possono essere scelte ad arbitrio. Infatti se si ingrandisce eccessivamente il dispositivo di rivelazione al 1° stadio, il M.C. può selezionare condizioni cinematiche molto diverse da quelle richieste, favorendo così zone che risulteranno non efficienti per lo effettivo dispositivo di rivelazione.

Le differenze tra le dimensioni dell'apparato relative a stadi consecutivi devono essere tali che la zona efficiente relativa al generico stadio $(j+1)^{\text{mo}}$ sia tutta contenuta all'interno della zona considerata efficiente in base alle estrazioni dello stadio j^{mo} .

In quanto all'errore statistico relativo C dell'efficienza nei diversi stadi esso è limitato superiormente dalla necessità di conoscere le zone efficienti in ogni stadio con sufficiente precisione. Tale limite superiore si può ragionevolmente assumere uguale al massimo errore statistico percentuale richiesto all'ultimo stadio.

Tutte le suddette condizioni limitano praticamente il numero degli stadi ricavabile dalle relazioni precedentemente scritte.

E' difficile in conclusione, dare un criterio generale per la scelta migliore dei parametri. Uno dei possibili modi di procedere è il seguente:

8.

si fissano le dimensioni iniziali (x) e l'errore statistico relativo massimo della efficienza ad ogni stadio precedente lo stadio finale; dal tempo di calcolo a disposizione si potrà risalire al numero totale di estrazioni effettuabili. Si determinerà quindi il numero degli stadi per il quale le differenze tra le dimensioni dell'apparato di rivelazione relative a stadi consecutivi sono sufficientemente grandi.

A titolo di esempio riportiamo il valore del fattore di ottimizzazione atteso per il calcolo di un'efficienza dell'ordine di 10^{-4} , mediante un M.C.A.O. a soli 2 stadi, con un numero di estrazioni uguale per ogni stadio.

Il fattore di ottimizzazione calcolato dalla formula:

$$F_{\text{ott}} = \frac{P_0}{K_{f-1} \xi^f}$$

per

$$\xi = 10^{-4} \quad K_{f-1} = 4^4 \quad f = 2 \quad P_0 \sim 1$$

è $F_{\text{ott}} \sim 20$.

Come si vede tale valore, anche se lontano dal massimo teoricamente raggiungibile, è comunque sufficiente ai fini pratici dell'ottimizzazione di un M.C. ordinario.

6. - APPLICAZIONE DEL M.C.A.O. A PIU' STADI. -

Allo scopo di verificarne la validità, il M.C.A.O. è stato applicato al calcolo dell'efficienza di rivelazione del processo

$$\begin{array}{l} \gamma + p \rightarrow \eta + p \\ \quad \quad \quad \rightarrow 2\gamma \end{array}$$

osservato mediante due Cerenkov integrali con cui si rivelano i fotoni di decadimento dell' η . Il calcolo di tale efficienza era già stato effettuato (relativamente ad una esperienza in corso all'elettrosincrotrone dei LNF (3)) mediante un M.C. ordinario nel quale erano stati inseriti dei tagli cinematici. E' possibile quindi controllare i valori dell'efficienza calcolati dal M.C.A.O. Affinchè l'applicazione fosse più generale, nel M.C.A.O. non sono stati introdotti tagli cinematici ed i fattori di ottimizzazione riportati sono quindi riferiti ad un M.C. ordinario anch'esso privo di tagli cinematici. Questi tagli possono

(x) - E' chiaro che è necessaria la conoscenza, almeno approssimativa, dello andamento della ξ in funzione delle dimensioni e delle aperture dei contatori che costituiscono l'apparato di rivelazione.

comunque essere introdotti nel M.C.A.O. senza alterare i fattori di ottimizzazione.

Va ribadito il fatto che l'applicazione del M.C.A.O. è soprattutto utile in quei casi in cui tali tagli non possono essere decisi a priori.

Come parametri da variare ad ogni stadio sono state scelte le aperture dei Cerenkov $\Delta\beta$ e l'energia massima dello spettro di bremsstrahlung dei fattori incidenti. Infatti si ha, per piccole aperture:

$$\varepsilon \approx (\Delta\beta)^4 \{E_{\gamma_{\max}} - \text{cost}\}$$

Il calcolo è stato effettuato mediante due o tre stadi; l'apertura dei contatori al primo stadio è stata scelta 4 volte più grande di quelle usate nell'esperimento ($\sim 4^\circ$), la precisione percentuale richiesta per cambiare stadio è stata dell'ordine del 5%, e si è posto $P_F = 0.1$

I risultati ottenuti con il C.M.A.O. sono riportati nella Tabella I. L'efficienza, calcolata nel modo detto sopra, è

$$\varepsilon = (0.30 \pm 0.01) \cdot 10^{-4} \text{ ev. rivel./ev. simulati.}$$

TABELLA I

N. totale di estrazioni eseguite	N. di stadi	$(\varepsilon \pm \sigma) \cdot 10^4$	$F_{\text{ott}} = \frac{\varepsilon}{N \sigma_{\text{ott}}^2}$
60.000	2	0.29 ± 0.03	56
90.000	2	0.28 ± 0.03	37
120.000	2	0.30 ± 0.03	28
90.000	3	0.32 ± 0.02	84
360.000	3	0.28 ± 0.01	84

Come si vede l'efficienza calcolata mediante il M.C.A.O. coincide, entro l'errore, con l'efficienza calcolata con un M.C. ordinario ed il tempo di calcolo richiesto dal M.C.A.O. è circa 50 volte minore di quello richiesto da un M.C. ordinario, a parità di errore.

7. - DESCRIZIONE DEL PROGRAMMA CHE REALIZZA L'OTTIMIZZAZIONE DEL MONTE CARLO. -

Il programma che realizza il metodo precedentemente descritto è stato elaborato in linguaggio FORTRAN ed è stato eseguito sul 7040 IBM dello Istituto Superiore di Sanità.

Esso è valido per uno spazio S a n dimensioni, essendo n il numero delle variabili estratte dal M.C. ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$) che definiscono ogni singolo evento.

Per motivi dipendenti dal particolare metodo usato e dal linguaggio FORTRAN, non può comunque superare il valore 10.

Il range di estrazione delle n variabili ξ_1, ξ_2, \dots considerate come coordinate di un punto nello spazio S , definisce un certo volume V_0 in cui va fatta la indagine.

Si comincia col suddividere V_0 in volume parziali V_K , uguali fra loro. La scelta della suddivisione esige un compromesso tra una suddivisione troppo grossolana, che non darebbe informazioni soddisfacenti, e una troppo fine, che, per evitare di perdere volumi efficienti, renderebbe necessaria una statistica molto elevata.

Nella prima fase l'estrazione dei punti (ξ_1, ξ_2, \dots) avviene a random in modo uniforme entro tutto il volume V_0 . I punti estratti vengono esaminati secondo il criterio che li definisce buoni o no agli effetti dell'efficienza di rivelazione.

Per ogni evento buono si memorizzano le coordinate e si individua il volume parziale V_K cui esso appartiene, attribuendo a tale volume un indice $IC1(K)$.

Alla fine di un numero prefissato NMAX di estrazioni (i criteri di scelta di tale numero sono stati discussi in precedenza), il volume V_0 sarà composto da un certo numero NBV di volumi buoni, ossia contenenti almeno un punto buono, e da un'unica zona di fondo in cui tutti gli eventi esaminati sono risultati da scartare.

Il programma prevede un controllo, dopo NMAX estrazioni, tra lo errore statistico percentuale commesso fino a questo punto nel calcolo e un errore massimo relativo da noi prefissato; nel caso che il risultato non sia soddisfacente, si incrementa il numero massimo NMAX di estrazioni e si procede ampliando la statistica fino a che il controllo risulti positivo.

Su ciascuno dei volumi buoni V_K è possibile, dalla conoscenza delle coordinate dei punti, individuare la zona più ristretta in cui sono addensati gli eventi e creare così dei volumetti V'_K che sostituiscono, agli effetti della efficienza, i precedenti volumi parziali V_K .

Quando, però, due volumi V_K sono contigui, gli estremi dei volumetti V'_K che essi contengono vengono raccordati in modo da avere continuità della

zona efficiente; questo perchè si suppone che, in questo caso, lo spazio tra i due volumetti V'_K sia ancora sede di eventi buoni di cui mancano, però, informazioni a causa del numero limitato di estrazioni in questa fase del calcolo.

A ciascuno di questi volumi V'_K così modificati si attribuisce un peso $P(K)$ in base ai criteri esposti in precedenza.

Si incrementa ora l'indice IND che individua la fase (IND raggiunge un valore massimo INDMA da noi fissato) e si aggiornano i parametri che variano con tale indice.

La seconda fase del programma provvede alla estrazione pesata, estrazione che si riferisce, ora, non più ai singoli eventi, ma ai volumi; il volume estratto risulterà o uno degli NBV volumi buoni, o il generico volume di fondo (avendo attribuito ad esso un peso PESF diverso da zero). Per dettagli sul modo di condurre queste estrazioni si veda il diagramma a blocchi.

Nell'interno del volume prescelto si va ora a riestrarre in modo uniforme e si procede in modo del tutto analogo al primo stadio, memorizzando gli eventi buoni, le coordinate e il volume cui l'evento appartiene.

La fase successiva sfrutterà le informazioni di questa fase e tutto viene iterato di fase in fase, fino alla fase corrispondente al valore INDMA.

BIBLIOGRAFIA. -

- (1) - J. M. Hammersley, D. C. Handscomb, Monte Carlo Methods, Methuen's Monographs.
- (2) - Y. Shreider, Method of statistical testing, Elsevier publ. Company.
- (3) - C. Bacci, R. Baldini-Celio, C. Mencuccini, A. Reale, M. Spinetti, A. Zallo, Angular distribution for the meson photoproduction from hydrogen at 775 - 850 MeV - Phys. Rev. Letters 20, 11 (1968).

DIAGRAMMA A BLOCCHI DEL M.C.A.O.

