

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 68/41
3 Luglio 1968

E. P. Balsamo, F. Lucari, N. Sacchetti e G. Sanna:
STUDIO PRELIMINARE DELLA SUPERFICIE DI FERMI DEL
BISMUTO MEDIANTE L'EFFETTO DE HAAS - VAN ALPHEN.

Nota interna : n. 408
3 Luglio 1968

E. P. Balsamo, F. Lucari^(x), N. Sacchetti e G. Sanna: STUDIO
PRELIMINARE DELLA SUPERFICIE DI FERMI DEL BISMUTO
MEDIANTE L'EFFETTO DE HAAS - VAN ALPHEN.

I. - INTRODUZIONE.

E' noto che la conoscenza della superficie di Fermi (abbr. nel seguito S. F.) di una sostanza pura monocristallina giuoca un ruolo di grande importanza nella previsione teorica di alcune proprietà fisiche e particolarmente delle cosiddette "proprietà di trasporto".

E' sufficiente ricordare a questo proposito che la conduttività elettrica, il comportamento galvanomagnetico e termoelettrico dei metalli e semi-metalli sono fenomeni altamente influenzati dalla struttura topologica e dalla geometria della S. F. in rapporto alla geometria della zona di Brillouin calcolabile dalla struttura cristallografica del solido^(1, 2).

E' quindi altamente interessante lo studio di quei fenomeni capaci di fornire informazioni dirette e di vario carattere riguardanti la S. F. Ricordiamo tra questi gli effetti De Haas - Van Alphen, Shu^ubnikoff - De Haas e l'assorbimento magneto-acustico⁽³⁾.

(x) - Borsista presso il Laboratorio di Fisica Nucleare Applicata del Centro Studi Nucleari della Casaccia.

2.

Il rilievo sperimentale della S. F. , fornisce anche la possibilità di controllare la fondatezza delle approssimazioni usate nel calcolo della struttura a bande di un solido.

Tra i fenomeni suddetti particolarmente usato è l'effetto De Haas - Van Alphen (abbrev. nel seguito DHVA); la sua importanza segue dal fatto che esso permette di misurare direttamente le sezioni estremali della S. F. con precisioni dell'ordine del % e talvolta anche superiori⁽⁴⁾.

Molte informazioni sulla S. F. di metalli e semimetalli sono state ottenute in passato con la tecnica dell'effetto DHVA⁽⁵⁾, ma spesso in modo incompleto e poco accurato a causa delle limitazioni delle tecniche di rivelazione e della inadeguatezza delle condizioni sperimentali.

La recente disponibilità presso molti laboratori di alti campi magnetici statici (> 30 KOersted) e di temperature molto basse ($< 0.1^\circ\text{K}$), unitamente allo sviluppo di tecniche di rivelazione di alta sensibilità e selettività, lascia intravedere ulteriori prospettive di ricerca. Si può infatti prevedere, da un lato il completamento e perfezionamento della indagine sistematica sulle S. F. di elementi già studiati, dall'altro l'estensione dell'indagine a nuovi elementi (ad esempio: le terre rare e alcuni metalli di transizione), lo studio della influenza sulla S. F. dell'alligaggio con elementi diversi (leghe diluite), della pressione e di "strain" e infine del "breakdown" magnetico⁽⁶⁾. Oltre a ciò va tenuto presente che l'effetto DHVA può offrire la possibilità di misurare le "masse di ciclotrone" e i "tempi di rilassamento" dei portatori di carica⁽⁷⁾.

Le misure descritte nella presente nota riguardano la S. F. del bismuto. Sebbene sia questo il primo elemento nel quale l'effetto DHVA è stato osservato⁽⁸⁾ (De Haas e Van Alphen, 1930) ancor oggi rimangono irrisolte varie questioni relative al suo spettro energetico. Tra queste ricordiamo la determinazione accurata della geometria di alcune parti della S. F. elettronica, lo studio della S. F. delle lacune, la misura del tensore delle "masse di spin" dei portatori di carica.

In questa relazione si descrivono le caratteristiche dell'effetto DHVA e si riportano le formule finali (§ 2). Si accenna quindi alla struttura cristallografica ed elettronica del bismuto riportando alcuni modelli teorici della sua S. F. (§ 3). Nel § 4 è descritto il principio di funzionamento del magnetometro usato per la rivelazione dell'effetto e sono analizzati gli effetti strumentali e perturbativi. I dettagli dell'apparato di rivelazione usato per le misure sono descritti nel § 5, mentre nel § 6 si riportano, oltre ai risultati delle necessarie misure di controllo del funzionamento della strumentazione, i risultati delle misure sistematiche delle sezioni estremali della S. F. del bismuto nel piano cristallografico normale all'asse trigonale.

II. - CARATTERISTICHE DELL'EFFETTO DHVA ED INFORMAZIONI OTTENIBILI.

L'effetto DHVA consiste nella comparsa, a temperatura sufficientemente bassa e a intensità di campo magnetico superiori ad un conveniente valore, di una o più componenti oscillatorie e nella relazione, ottenuta sperimentalmente, tra il momento diamagnetico di un monocristallo conduttore e l'intensità del campo applicato. Dette componenti oscillatorie presentano, come carattere fondamentale, una ben definita periodicità quando vengono rappresentate in funzione dell'inverso dell'intensità del campo magnetico. La loro frequenza risulta in genere dipendere dall'orientazione del campo rispetto agli assi cristallografici del campione e in particolari condizioni sono rilevabili componenti con frequenza multipla delle fondamentali.

L'ampiezza delle oscillazioni risulta invece dipendere in modo assai complesso da tutte le grandezze fisiche che definiscono le condizioni sperimentali, ossia la direzione e l'intensità del campo magnetico, la temperatura, il grado di purezza e di perfezione del cristallo.

L'effetto, dopo la sua scoperta nel bismuto, è stato messo in evidenza in un gran numero di metalli, nei semimetalli e nei semiconduttori⁽⁴⁾.

I primi tentativi di spiegazione teorica del fenomeno si ebbero per merito di R. Peierls⁽⁹⁾, ma rielaborazioni più dettagliate furono poi sviluppate da M. Blackman⁽¹⁰⁾, D. Shoemberg ed L. Landau⁽¹¹⁾, A. Akhieser⁽¹²⁾ e E. H. Sondheimer ed A. H. Wilson⁽¹³⁾. Quasi contemporaneamente ed indipendentemente L. Onsager⁽¹⁴⁾ e I. M. Lifshitz⁽¹⁵⁾ fornirono una semplice interpretazione del fenomeno ricorrendo a condizioni di quantizzazioni semi-classiche e ad una opportuna rappresentazione geometrica nello spazio degli impulsi.

Successivamente I. M. Lifshitz e A. M. Kosevich⁽¹⁶⁾, utilizzando questo risultato e partendo da ipotesi assai generali (gas di quasi-particelle soggette alla statistica di Fermi-Dirac e ad una legge di dispersione arbitraria), misero a punto una teoria capace di prevedere i fatti sperimentali fino ad allora osservati. Un elemento comune a tutte le indagini teoriche svolte consiste nel fatto che l'effetto deve attribuirsi alla quantizzazione del momento angolare dei portatori di carica (elettroni e lacune) attorno alla direzione del campo magnetico. A tale quantizzazione corrisponde anche una quantizzazione del contributo all'energia cinetica totale associato alla proiezione del moto dei portatori nel piano ortogonale al campo applicato. Questi effetti di quantizzazione sono poi resi sperimentalmente osservabili, in vicinanza dello zero assoluto di temperatura, in virtù del taglio netto nella distribuzione di energia degli elettroni che si verifica in corrispondenza dell'energia di Fermi. La presenza di questo taglio netto conduce, al crescere dell'intensità del campo magnetico all'esistenza di un contributo oscillatorio nell'energia libera dell'insieme dei portatori. Ciò determina anche la presenza di un contributo oscillatorio nella

4.

componente diamagnetica del momento magnetico totale del campione. La trattazione approfondita del fenomeno mostra poi che le oscillazioni diamagnetiche riflettono caratteristiche "geometriche" specifiche della S. F.

Nella presente nota non sarà sviluppata una trattazione teorica del fenomeno, ma verranno solamente riportate e commentate le formule finali. Per le trattazioni teoriche elementari si rimanda a testi di fisica dello stato solido^(17, 18) e ad alcuni articoli^(3, 19) di rassegna, mentre per quelle più evolute ci si può riferire agli articoli originali citati.

Dopo la trattazione fornita da Lifshitz e Kosevitch, ulteriori raffinamenti della teoria furono introdotti da vari autori per tener conto dell'effetto delle collisioni dei portatori con le impurezze ed i difetti reticolari del cristallo^(20, 21, 22) e dell'interazione diretta dello spin dei portatori col campo applicato anche in presenza dell'accoppiamento spin-orbita⁽²³⁾.

Più recentemente sono state effettuate trattazioni del fenomeno in schemi più evoluti (portatori considerati come sistema di molti corpi tra loro interagenti in presenza di un potenziale elettrico periodico e di un campo magnetico) senza tuttavia portare a sostanziali cambiamenti nelle formule finali⁽²⁴⁾.

Tenendo conto degli anzidetti perfezionamenti della teoria, la espressione del contributo alla parte diamagnetica del momento magnetico totale del cristallo, responsabile dell'effetto DHVA, si scrive⁽²⁵⁾ :

$$\begin{aligned}
 M_{osc} = & - \frac{2V}{\hbar^3 (2\pi)^{3/2}} \left(\frac{e\hbar}{c} \right)^{1/2} \frac{KT}{\sqrt{H}} \sum_1 \frac{S_1}{\left| \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_{||}^2} \right|^{1/2}}_{extr.} \times \\
 (1) \quad & \times \sum_{1j}^{\infty} \frac{e^{-2\pi^2 j \frac{cm^*KT D}{e\hbar H}}}{j^{1/2} \operatorname{senh} \left(2\pi^2 j \frac{cm^*KT}{e\hbar H} \right)} \cos \left(j\pi \frac{m^*}{m_s} \right) \times \\
 & \times \operatorname{sen} \left[j \frac{cS_1}{e\hbar H} + \frac{\pi}{4} - 2\pi j \gamma_1 \right].
 \end{aligned}$$

In questa formula, oltre alle costanti fondamentali e , c , \hbar , compaiono altri simboli ai quali va attribuito il significato seguente :

- V = Volume del cristallo;
- K = Costante di Boltzmann;
- T = Temperatura assoluta del campione;
- H = Intensità del campo magnetico esterno applicato;
- S₁ = Superficie della "massima" o della "minima" tra tutte le sezio

della S. F. effettuate con la famiglia di piani tra loro paralleli e perpendicolari alla direzione del campo \vec{H} . L'indice l si riferisce alla possibilità che la S. F. presenti una struttura topologica tale da fornire, nella particolare orientazione considerata di \vec{H} , più di un valore "estremale" per l'area di tali sezioni^(x);

$|\partial^2 S_1 / \partial p_{\parallel}^2|_{\text{extr.}}$ = Modulo della derivata seconda di S_1 eseguita rispetto alla componente parallela ad \vec{H} del "momento del cristallo" $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ ⁽²⁶⁾. La derivata si intende calcolata in corrispondenza del valore di p_{\parallel} che rende estremale la S_1 ^(o);

m^{\times} = Valore della "massa orbitale" o "massa di ciclotrone" dei portatori di carica. Tale massa è quella che si deve introdurre, al posto della massa di quiete m_0 dell'elettrone, nella espressione della pulsazione $\omega = (e/cm^{\times})H$ con cui precedono i portatori in campo magnetico, per ottenere il valore corretto della ω ⁽⁺⁾;

T_D = Temperatura di Dingle. E' un parametro, avente le dimensioni di una temperatura, introdotto per tener conto dell'effetto dell'allargamento dei livelli quantizzati in campo magnetico. Questo effetto è prodotto, dalle collisioni dei portatori con le impurezze e le imperfezioni strutturali del cristallo⁽⁻⁾;

γ_1 = Un numero positivo ($0 < \gamma_1 < 1$) dipendente dalla forma geometrica dell'orbita ($\gamma_1 = 1/2$ per un'orbita circolare) e quindi dall'orientamento del campo \vec{H} . Esso influenza solamente

(x) - Ad esempio, nel caso del bismuto, che direttamente ci interessa, l può assumere i valori 1, 2, 3, 4, cioè si hanno 4 sezioni estremali (cfr. § C).

(o) - La presenza del fattore $|\partial^2 S_1 / \partial p_{\parallel}^2|^{1/2}$ nella (1) fa sì che l'ampiezza M_{osc} risulti tanto più grande quanto più lenta è la variazione dell'area delle sezioni della S. F., fatte con piani normali ad \vec{H} , nell'intorno del valore di p_{\parallel} che rende estremale la sezione. Così, per una S. F. di forma "lenticolare" ed \vec{H} normale al piano della lente, M_{osc} risulterà minimo, mentre per una S. F. cilindrica ed \vec{H} lungo le generatrici M_{osc} diviene infinita.

(+) - Tale valore è quello che si osserverebbe in una esperienza di "risonanza di ciclotrone". La massa orbitale m^{\times} tiene conto dell'interazione del portatore col reticolo cristallino durante una rivoluzione completa. Essa è legata alla geometria delle superfici isoenergetiche dello spazio \vec{p} : $\epsilon(\vec{p}) = \text{cost}$, adiacenti alla S. F. $\epsilon(\vec{p}) = \zeta$ dalla relazione :

$$m^{\times} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon = \zeta}$$

dove ζ è l'energia di Fermi del metallo considerato⁽²⁸⁾.

(-) - Vedi nota pagina seguente.

6.

la fase delle oscillazioni DHVA e deriva dalla particolare condizione di quantizzazione dell'energia dei portatori nel campo magnetico^(x). Il doppio segno presente nell'argomento del fattore periodico in $1/H$ va poi inteso nel senso che si deve scegliere il segno se S_1 corrisponde ad un massimo e viceversa;

$m_s =$ Valore efficace da attribuire alla massa dei portatori di carica in tutti i fenomeni in cui interviene il loro spin. Tale massa (massa di spin) è presente nell'argomento del fattore coseno (fattore di "spin-splitting") introdotto nella (1) per tener conto dell'effetto dell'interazione diretta dello spin col campo $H^{(o)}$.

Come la (1) mostra, a M_{osc} contribuiscono oscillazioni periodiche in $1/H$, con ampiezze e frequenze diverse. Nell'insieme delle oscillazioni presenti, le principali sono quelle contraddistinte da un qualsiasi valore (intero e positivo) dell'indice l e da $j = 1$. Per queste oscillazioni (oscillazioni fondamentali) si può definire una frequen

(-) - Questo parametro risulta legato all'intervallo medio di tempo tra due collisioni successive τ in campo magnetico dalla relazione⁽²⁰⁾:

$$KT_D = \frac{\hbar}{\pi \tau} .$$

Per i migliori cristalli in fatto di regolarità di struttura e purezza si stima $T_D \approx 1^{\circ}K$, ossia: $\tau \approx 10^{-12}$ sec. In base alla (1), le impurezze e le imperfezioni cristalline influenzano, tramite il parametro T_D , in modo esponenziale la M_{osc} . Il tempo medio di collisione in campo magnetico τ è stato introdotto in modo fenomenologico; la relazione tra esso e il tempo di rilassamento che compare nella espressione della mobilità dei portatori in campo magnetico nullo non è chiaramente intesa⁽²²⁾. Bychkov⁽²¹⁾ ha mostrato che se $1/\omega\tau_0 \gg \hbar\omega/\xi$, l'effetto dello scattering delle impurezze è descritto dal fattore di Dingle con $\tau_D = 4\tau_0/\pi$, essendo τ_0 il tempo libero medio per $H = 0$.

(x) - Trascurando lo spin, l'energia totale di un portatore in campo magnetico può essere scritta, nella approssimazione di massa efficace e banda parabolica, nel modo seguente :

$$\mathcal{E}_{n,p} = (n + \gamma) \frac{e\hbar}{cm^*} H + \frac{p_{||}^2}{2m_{||}} ,$$

nella quale n è un intero positivo qualunque ed $m_{||}$ è la massa efficace nella direzione di \vec{H} . La $p_{||}$ è poi quantizzata nel modo consueto per $H = 0$ (cioè: $p_{||} = (\hbar/L_{||})n_{||}$, in cui $n_{||} = 0, 1, 2, \dots$ ed $L_{||}$ è la dimensione del cristallo nella direzione parallela ad \vec{H}). Per un valore fissato di $p_{||}$, i livelli energetici individuati dal numero quantico n sono riferiti come "livelli di Landau". Nella espressione della differenza di energia tra due successivi di tali livelli $(e\hbar/cm^*)H$, è stata introdotta la massa orbitale m^* .

(o) - Vedi nota pagina seguente.

za F_1 (rispetto alla variabile $1/H$) in base alla relazione (cfr. (1)):

$$2\pi F_1 = \frac{cS_e}{e\hbar} ,$$

la quale fornisce :

$$(2) \quad F_1 = \left(\frac{c}{e\hbar} \right) S_1 .$$

Le frequenze fondamentali F_1 permettono pertanto di risalire immediatamente alle aree delle sezioni estremali S_1 per la data orientazione di \vec{H} . Determinando sperimentalmente la dipendenza delle F_1 (e quindi delle S_1) dall'orientazione del campo, è possibile ricavare o verificare la topologia della S. F. Limitandoci a considerare per ogni l il termine fondamentale ($j=1$) si può scrivere, al posto (1), la espressione semplificata :

$$M_{osc} = \sum_1 \mathcal{M}_{1,1}(H, T) \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi F_1}{H} + \psi_{1,1} \right) , \quad \text{in cui :}$$

$$\mathcal{M}_{1,1}(H, T) = - \frac{2V}{\hbar^3 (2\pi)^{3/2}} \left(\frac{e\hbar}{c} \right)^{1/2} KTH^{-1/2} \frac{S_1}{\left| \partial^2 S_1 / \partial p_{\parallel}^2 \right|^{1/2}} \times$$

$$\times \frac{\cos \left(\pi \frac{m^*}{m_s} \right) e^{-2\pi^2 \frac{cm^*KT_D}{e\hbar H}}}{\text{senh} \left(2\pi^2 \frac{cm^*KT}{e\hbar H} \right)}$$

(o) - Considerando anche lo spin, l'espressione dell'energia di un portatore nel campo \vec{H} diviene, nelle ipotesi già dette :

$$\mathcal{E}_{n, p_{\parallel}, s} = (n + \gamma) \frac{e\hbar}{cm^*} H + \frac{p_{\parallel}^2}{2m_{\parallel}} + s g_0 \frac{e\hbar}{2cm_s} H ,$$

in cui $g_0 \approx 2$ è il fattore g per elettroni liberi, e $s = \pm 1/2$. Perciò per un valore fissato di p_{\parallel} ciascuno dei livelli di Landau (separati tra loro in energia di $(e\hbar/cm^*)H$) risulta sdoppiato in due livelli separati in energia di $g_0(e\hbar/2cm_s)H$. In quest'ultima espressione è fatta comparire la "massa efficace di spin" m_s ; essa, analogamente a quanto già fatto per m^* , è introdotta per tener conto del valore effettivo del momento magnetico intrinseco dei portatori risultante da eventuale interazione spin-orbita. In assenza d'interazione spin-orbita, di solito presente negli elementi con elevato numero atomico, m_s si identifica con la massa di quiete dell'elettrone. Nel caso del bismuto, Cohen e Blount valutano invece $m_s \approx m^*$ (23). Infine, il termine dell'energia totale dovuto allo spin è comunemente scritto nella forma : $sg^* \beta_0 H$ nella quale è : $g^* = g_0(m_0/m_s)$ e $\beta_0 = e\hbar/2cm_0$ è il "magnetone di Bohr".

8.

$$e \quad \psi_{1,1} = + \frac{\pi}{4} - 2\pi\gamma_1.$$

L'ampiezza $\mathcal{M}_{1,1}$ risulta in genere una funzione lentamente dipendente da H, ma rapidamente variabile con la temperatura. Per una l fissata le oscillazioni corrispondenti a $j > 1$ costituiscono delle "armoniche superiori DHVA" e presentano di regola ampiezze decrescenti al crescere di j . Il rapporto tra l'ampiezza $\mathcal{M}_{1,j}$ della j -esima armonica e la fondamentale :

$$\frac{\mathcal{M}_{1,j}}{\mathcal{M}_{1,1}} = e^{-2\pi^2 \frac{cm^*T_D}{e\hbar H} (j-1)} \times \frac{\cos(\pi j \frac{m^*}{m_s})}{\cos(\pi \frac{m^*}{m_s})} \times \frac{\sinh(2\pi^2 \frac{cm^*KT}{e\hbar H})}{\sinh(2\pi^2 j \frac{cm^*KT}{e\hbar H})},$$

assume in genere valori trascurabili per j dell'ordine di qualche unità.

Oltre alla determinazione delle sezioni estremali della S. F. altre informazioni possono essere ricavate dall'effetto DHVA. Come già detto al § 1, studiando la dipendenza delle ampiezze dalla temperatura è possibile risalire al tensore delle masse efficaci orbitali m^* , mentre dallo studio della variazione delle ampiezze col campo magnetico è possibile ottenere il valore di T_D relativo al cristallo in esame⁽⁷⁾. Infine, misurando lo sdoppiamento dei massimi delle oscillazioni quando siano presenti fenomeni di "spin-splitting" è possibile determinare il tensore delle masse efficaci di spin m_s ^(28, 29).

III. - CENNI ALLA STRUTTURA ELETTRONICA DEL BISMUTO.

Uno degli elementi più idonei all'osservazione dell'effetto DHVA in campi magnetici producibili con mezzi ordinari (≈ 10 KOe) è il bismuto come è attestato dal fatto che le prime osservazioni del fenomeno furono eseguite proprio su di un monocristallo di tale elemento. Da allora vari sperimentatori hanno, con tecniche di rivelazione diverse, ottenuto informazioni soprattutto sulla forma della parte elettronica della S. F. Tuttavia, come già detto al § 1, rimangono ancora oggi diverse questioni non risolte nella conoscenza dello spettro energetico dei portatori di carica (elettroni e lacune) di questo elemento. Un contributo alla risoluzione di tali problemi può essere fornito effettuando misure sistematiche con grande sensibilità e precisione con la tecnica dell'effetto DHVA. In questo paragrafo verranno illustrati semplici modelli teorici della S. F. del Bi sulla base dei qua

li si è prevista la dipendenza delle aree delle sezioni estremali dalla direzione del campo \vec{H} nei piani cristallografici principali.

Riassumiamo qui brevemente alcune nozioni sulla struttura cristallina e sulle zone di Brillouin (Z. B.) di tale elemento.

Il bismuto cristallizza nel sistema romboedrico descrivibile per mezzo della cella fondamentale mostrata in fig. 1⁽³⁰⁾; in essa è :

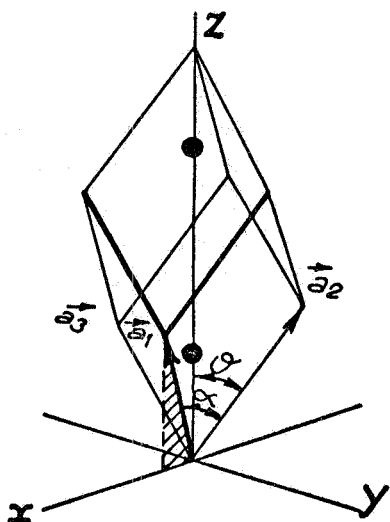


Fig. 1 - Cella unitaria romboedrica del bismuto contenente due atomi. Gli assi x, y e z sono rispettivamente gli assi binario, bisettore e trigonale.

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = a = 4.74 \text{ \AA} \quad e$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 57^\circ 23' .$$

Ad ogni punto reticolare di questa struttura è associata una base costituita da due atomi, la cui posizione è data relativamente ai vettori della cella fondamentale rispettivamente da :

$$\vec{r}_1 = u\vec{a}_1 + u\vec{a}_2 + u\vec{a}_3$$

$$\vec{r}_2 = -(u\vec{a}_1 + u\vec{a}_2 + u\vec{a}_3) ,$$

dove $u = 0.234$.

Tale cristallo ha quindi una simmetria ternaria intorno alla direzione individuata dall'asse z (asse trigonale) e una simmetria binaria intorno alla direzione dell'asse x e di 2 altri assi del piano xy formati con la direzione dell'asse x angoli di $\pm 120^\circ$ (assi binari). In base a questi elementi si può costruire il reticolo reciproco che avrà una cella fondamentale anch'essa romboedrica. Se chiamiamo \vec{b}_1 , \vec{b}_2 e \vec{b}_3 i vettori fondamentali di tale cella e β_1 , β_2 , β_3 gli angoli compresi tra di loro si può mostrare, utilizzando le definizioni di reticolo reciproco, che è⁽³¹⁾ :

$$|\vec{b}_1| = |\vec{b}_2| = |\vec{b}_3| = b = 1.68 \text{ \AA}^{-1}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 110^\circ 32' .$$

In base a questi elementi ed utilizzando la condizione di "riflessione di Bragg" si può ricavare la forma della Z. B. che è riportata nella fig. 2; in essa sono anche riportati i punti di simmetria e gli indici relativi alle varie facce⁽³²⁾.

Poichè come abbiamo visto in ogni cella unitaria esistono due atomi, in una zona di Brillouin potrà trovar posto un solo elettrone

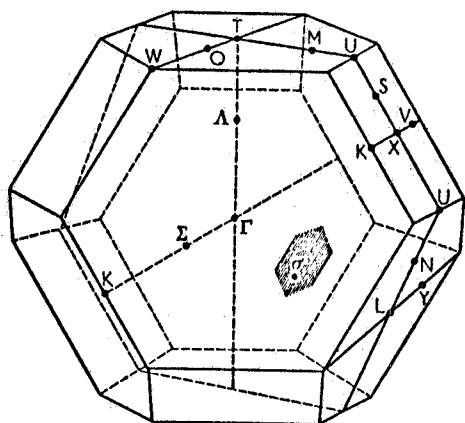


Fig. 2 - Zona di Brillouin e punti di simmetria del bismuto secondo la ref. (32).

all'interno della V^a zona rimane un numero di lacune pari al numero di elettroni presenti nella VI^a.

per atomo. Inoltre possedendo ogni atomo di bismuto cinque elettroni di valenza si dovrebbero avere completamente piene le prime 5 Z. B. Jones⁽³¹⁾ analizzando le proprietà fisiche del bismuto, giunse alla conclusione che esiste una piccola sovrapposizione, vicino al livello di Fermi, tra le bande energetiche corrispondenti alla V^a e alla VI^a zona. Tale sovrapposizione (cf. fig. 3), dovuta all'anisotropia della legge di dispersione $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\vec{p})$, comporta che un piccolo numero di elettroni va a riempire sei "tasche" poste nella VI^a zona in prossimità dell'intersezione degli assi binari con il confine della zona stessa. Quindi

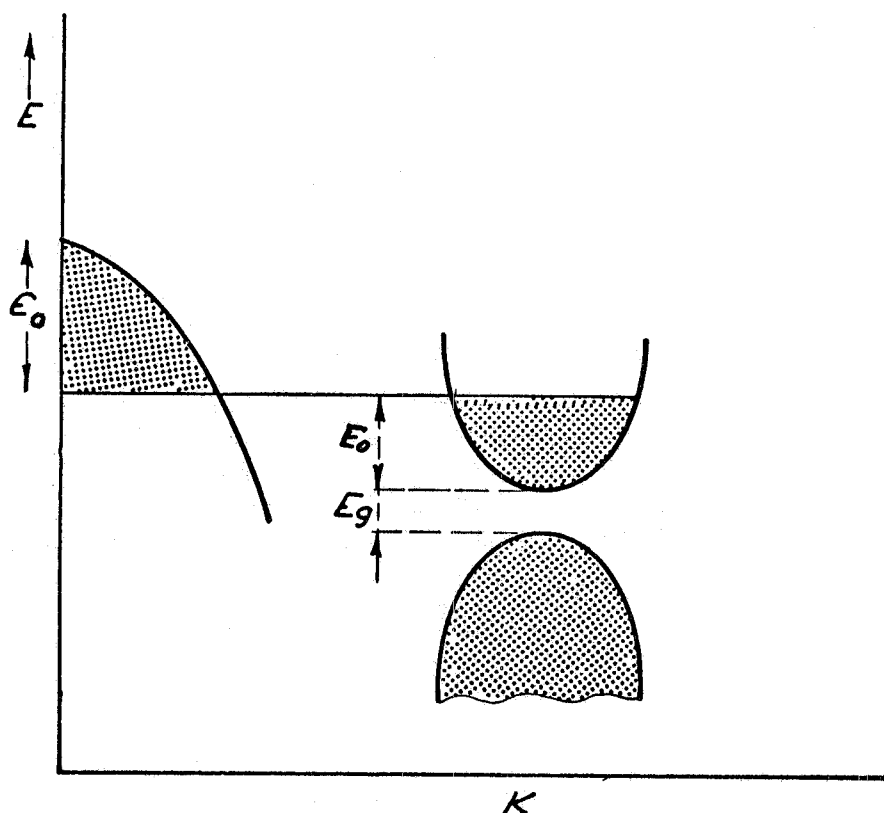


Fig. 3 - Rappresentazione schematica delle relazioni di dispersione $\mathcal{E} = \mathcal{E}(k)$ per due distinte direzioni cristallografiche.

L'assegnazione dei punti di simmetria della Z. B., in prossimità dei quali si verifica la sovrapposizione delle bande, è tuttavia ancora controversa dipendendo dal particolare modello teorico sviluppato^(32, 33, 36).

Operando una traslazione di vettori fondamentali del reticolo reciproco si possono riunire le tasche opposte di elettroni costituendo tre ellissoidi posti a 120° l'uno rispetto all'altro e centrati nei punti di incrocio degli assi binari con le pareti della zona di Brillouin. Analogamente si possono riunire le varie "sacche" di lacune della V^a zona per formare un unico ellissoide di rotazione intorno all'asse trigonale (vedi fig. 4). Tenendo conto anche di alcune osservazioni sperimentali di D. Shoemberg⁽³⁴⁾, il quale giunse alla conclusione che

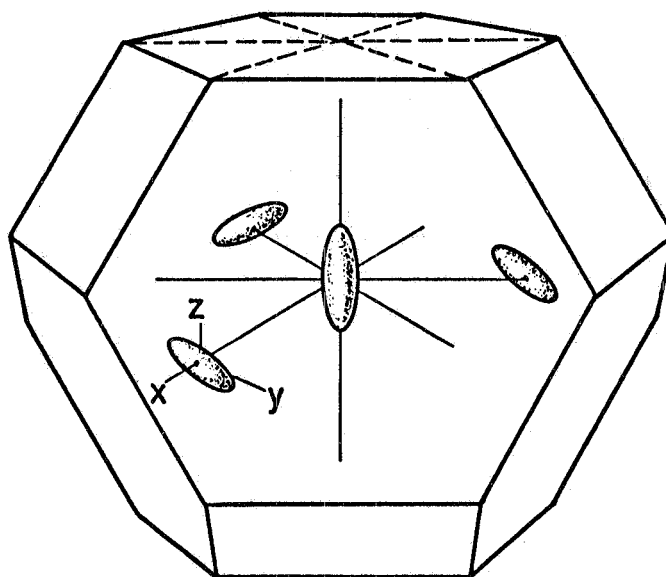


Fig. 4 - Rappresentazione schematica della S. F. del bismuto.

questi ellissoidi sono ruotati intorno al proprio asse binario di circa 6° probabilmente a causa di interazioni trascurate nel modello di Jones, si può scrivere per ciascuno dei tre ellissoidi costituenti la parte elettronica della S. F., del bismuto, un'equazione del tipo :

$$(3) \quad \alpha_{11}p_x^2 + \alpha_{22}p_y^2 + \alpha_{33}p_z^2 + 2\alpha_{33}p_y p_z + \alpha_{44} = 0.$$

Questa equazione è riferita ad una terna ortogonale levogira p_x, p_y, p_z con l'origine nel centro dell'ellissoide e formata rispettivamente dagli assi binario, bisettore^(x) e trigonale.

(x) - L'asse bisettore è definito come la normale al piano individuato dagli altri due assi.

12.

I tre ellissoidi sono poi disposti in modo tale da sovrapporsi esattamente l'uno l'altro per rotazioni di 120° attorno all'asse trigonale.

La (3) può essere anche scritta nella forma :

$$(p_x, p_y, p_z) \cdot \|\alpha_{i,k}\| \cdot (p_x, p_y, p_z)^{-1} = 0$$

dove $\|\alpha_{i,k}\|$ è una matrice del 4° ordine i cui elementi sono dati da :

$$\alpha_{11} = m_0 \frac{1}{m_{11}}$$

$$\alpha_{22} = m_0 \frac{m_{33}}{m_{22}m_{33} - m_{23}^2}$$

$$\alpha_{33} = m_0 \frac{m_{22}}{m_{22}m_{33} - m_{23}^2}$$

$$\alpha_{23} = -m_0 \frac{m_{23}}{m_{22}m_{33} - m_{23}^2}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{14} = \alpha_{41} = \alpha_{24} = \alpha_{42} = \\ = \alpha_{34} = \alpha_{43} = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_{44} = -2 m_0 E_0$$

essendo m_0 la massa a riposo dell'elettrone e $m_{i,k}$ gli elementi del tensore delle masse elettroniche efficaci assunto da Jones e Shoemberg :

$$\|m_{i,k}\| = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} .$$

Con E_0 è poi indicata la differenza (allo zero assoluto) tra l'energia massima degli stati occupati nella banda di conduzione e l'energia degli stati nel fondo di tale banda (ossia al centro dell'ellissoide) (cfr. fig. 3).

Analogamente, seguendo Abeles e Meiboom⁽³⁷⁾, la parte della S. F. relativa alle lacune, può essere descritta da un unico ellissoide di rivoluzione attorno all'asse trigonale rappresentato dalla equazione :

$$(4) \quad \beta_{11} p_x^2 + \beta_{22} p_y^2 + \beta_{33} p_z^2 + \beta_{44} = 0 .$$

ovvero :

$$(p_x, p_y, p_z) \parallel \beta_{i,k} \parallel (p_x, p_y, p_z)^{-1} = 0,$$

nella quale $\parallel \beta_{i,k} \parallel$ è una matrice diagonale del 4° ordine, i cui elementi sono dati da :

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \frac{m_0}{M_{11}}$$

$$\beta_{33} = \frac{m_0}{M_{33}} \quad \beta_{i,k} = 0 \quad (i \neq k)$$

$$\beta_{44} = -2 m_0 E_0.$$

Anche in questo caso gli $M_{i,k}$ sono gli elementi del tensore delle masse efficaci per le lacune assunto da Abeles e Meiboom :

$$\parallel M_{i,k} \parallel = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{pmatrix}.$$

Allo scopo di stabilire un confronto con i risultati sperimentali (cfr. § 7c) è stata calcolata la dipendenza delle sezioni estremali (S_1, S_2, S_3) dei tre ellipsoidi elettronici e di quella (S_4) delle lacune dalla direzione del campo \vec{H} applicato nei tre piani cristallografici individuati dalle coppie di assi: trigonale-binario, trigonale-bisettore e binario-bisettore. Per tali calcoli si sono assunti ellipsoidi rappresentati dalle equazioni (3) e (4) con i valori seguenti dei parametri in esse contenuti^(x) :

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= 6.2 \times 10^{-3} \\ m_{22} &= 1.3 \\ m_{23} &= m_{32} = -8.5 \times 10^{-2} \\ m_{33} &= 1.7 \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \text{ per gli elettroni,}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{11} &= M_{22} = 5 \times 10^{-2} \\ M_{33} &= 0.7 \end{aligned} \right\} \text{ per le lacune,}$$

(x) - I valori dati delle masse sono espressi in unità di m_0 . I valori riportati corrispondono a quelli forniti da G. E. Smith⁽³⁸⁾ per gli elettroni, mentre per le lacune si sono assunti i valori forniti da N. B. Brandt⁽³⁹⁾.

14.

ed $E_0 = 2.8 \times 10^{-14}$ erg.

Gli andamenti di S_1, S_2, S_3, S_4 (e delle corrispondenti frequenze) in funzione dell'angolo ψ , compreso tra la direzione di \vec{H} ed un dato asse cristallografico, sono riportati nelle figg. 5, 6 e 7, che si riferiscono ai tre piani sopra specificati.

Oltre ai modelli illustrati della S. F. del Bi, sono stati sviluppati, in tempi più recenti, modelli più evoluti e dettagliati^(32, 40, 41) essi in genere si rifanno a presupposti diversi ed utilizzano tecniche diverse per il calcolo della struttura a bande e delle superfici iso-energetiche. Le loro conclusioni differiscono dai modelli descritti per alcuni particolari, come per la forma della S. F. delle lacune e per i valori da assegnare al tensore delle "masse di spin". Da ciò segue l'interesse per più accurate ed esaurienti investigazioni sperimentali.

IV. - TEORIA DELL'APPARATO DI RIVELAZIONE.

La tecnica sperimentale usata si fonda sul principio della modulazione di campo applicato per la prima volta alla rivelazione dell'effetto DHVA da D. Shoemberg e P. J. Stiles^(42, 43).

Questo metodo consiste nel porre il campione cristallino opportunamente raffreddato ($T \approx 1^{\circ}\text{K}$) in un campo magnetico di polarizzazione \vec{H}_0 variabile molto lentamente nel tempo. Ad esso è poi aggiunto un campo di modulazione sinusoidale $\vec{h}_m(t)$, così che il campo totale a cui è sottoposto il cristallo può essere descritto dalla relazione :

$$\vec{H}(t) = \vec{H}_0(t) + \vec{h}_m \cos \omega t ,$$

nella quale :

$$\frac{dH_0}{dt} \simeq 0 \quad \text{e} \quad h_m \ll H_0 .$$

Il campo di modulazione è prodotto inviando una corrente di pulsazione ω in un piccolo solenoide avvolto intorno al campione. La variazione temporale della magnetizzazione del cristallo, indotta dal campo $\vec{h}_m(t)$, produce un segnale di tensione ai terminali di un avvolgimento di prelievo posto attorno al campione stesso. L'analisi dei segnali indotti mostra che se la caratteristica di magnetizzazione del campione è non lineare sono presenti armoniche temporali di tensione con frequenze $n\omega$ (n intero positivo). L'ampiezza di queste componenti risulta poi dipendere dal particolare punto scelto sulla caratteristica suddetta, ossia dal valore del campo di polarizzazione. Sviluppando approfonditamente una analisi del funzionamento dello strumento, inizialmente impostata da Goldstein et al.⁽⁴⁴⁾ e successivamente perfezionata da L. Windmiller⁽⁴⁵⁾, si ottiene, per il segnale di tensione ai capi dell'avvolgimento di prelievo, l'espressione :

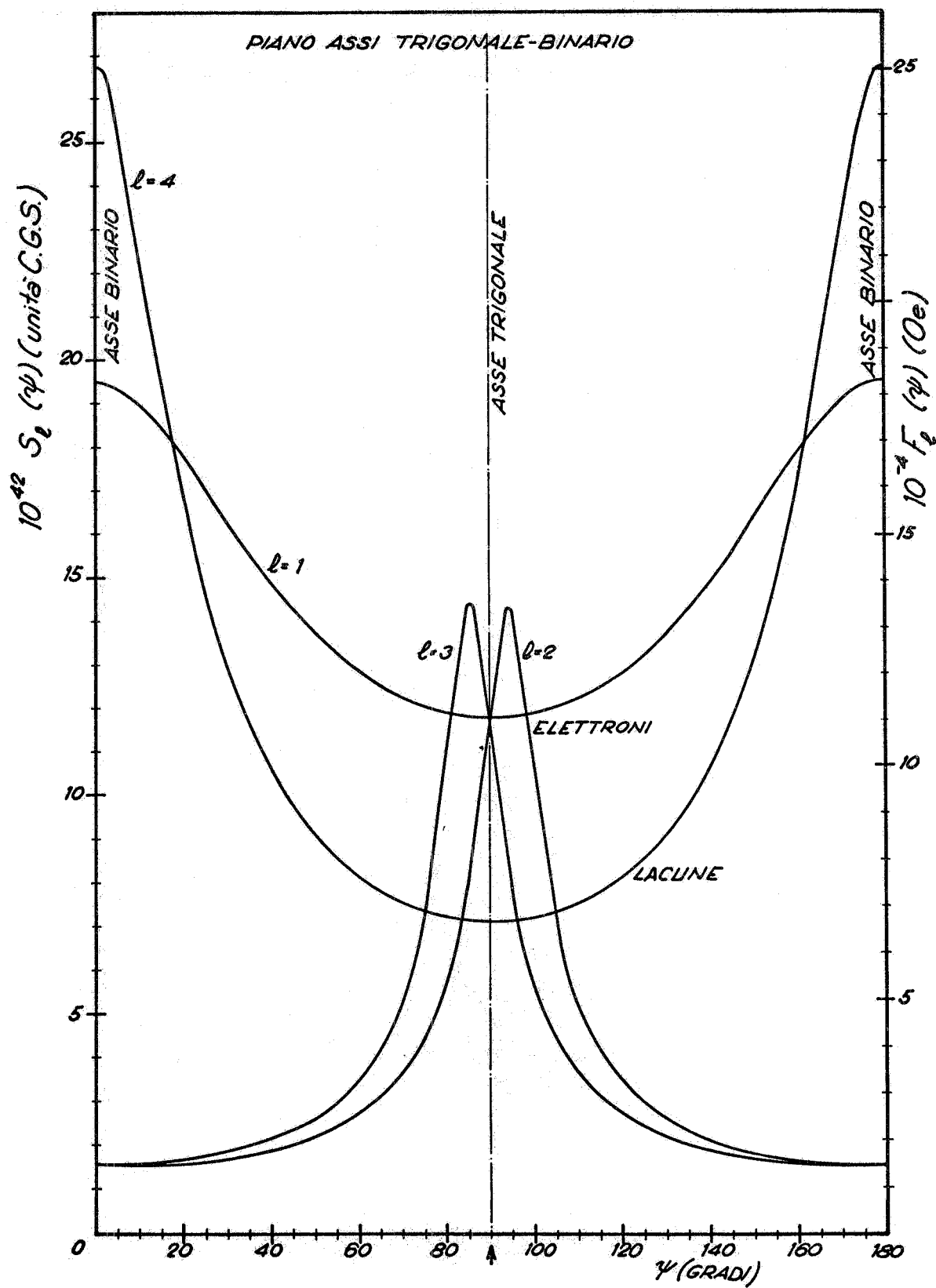


Fig. 5 - Distribuzione angolare delle sezioni estremali della S. F. e delle frequenze relative nel piano degli assi trigonale-binario.

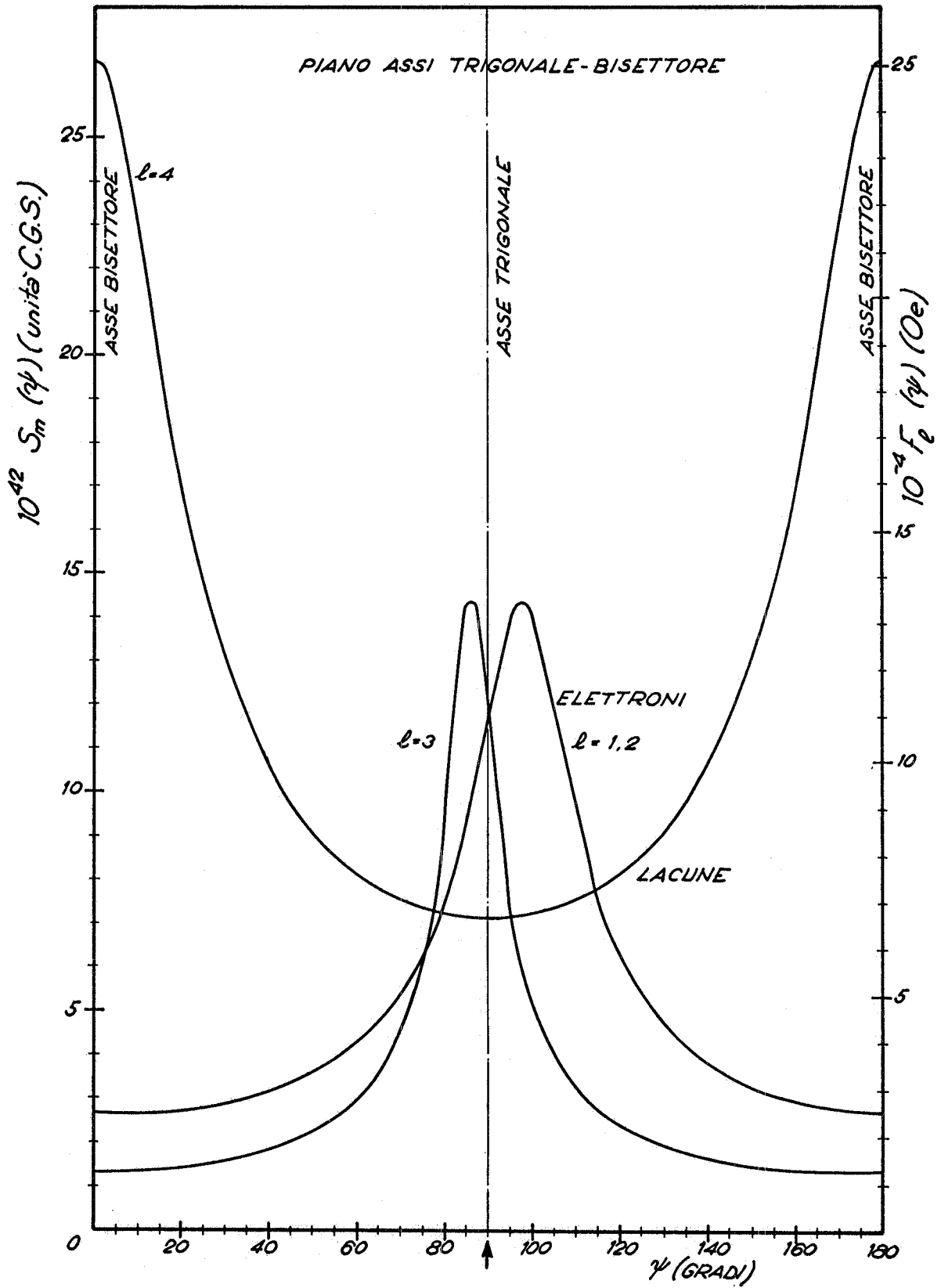


Fig. 6 - Distribuzione angolare delle sezioni estremali della S. F. e delle frequenze relative nel piano degli assi trigonale-bisettore.

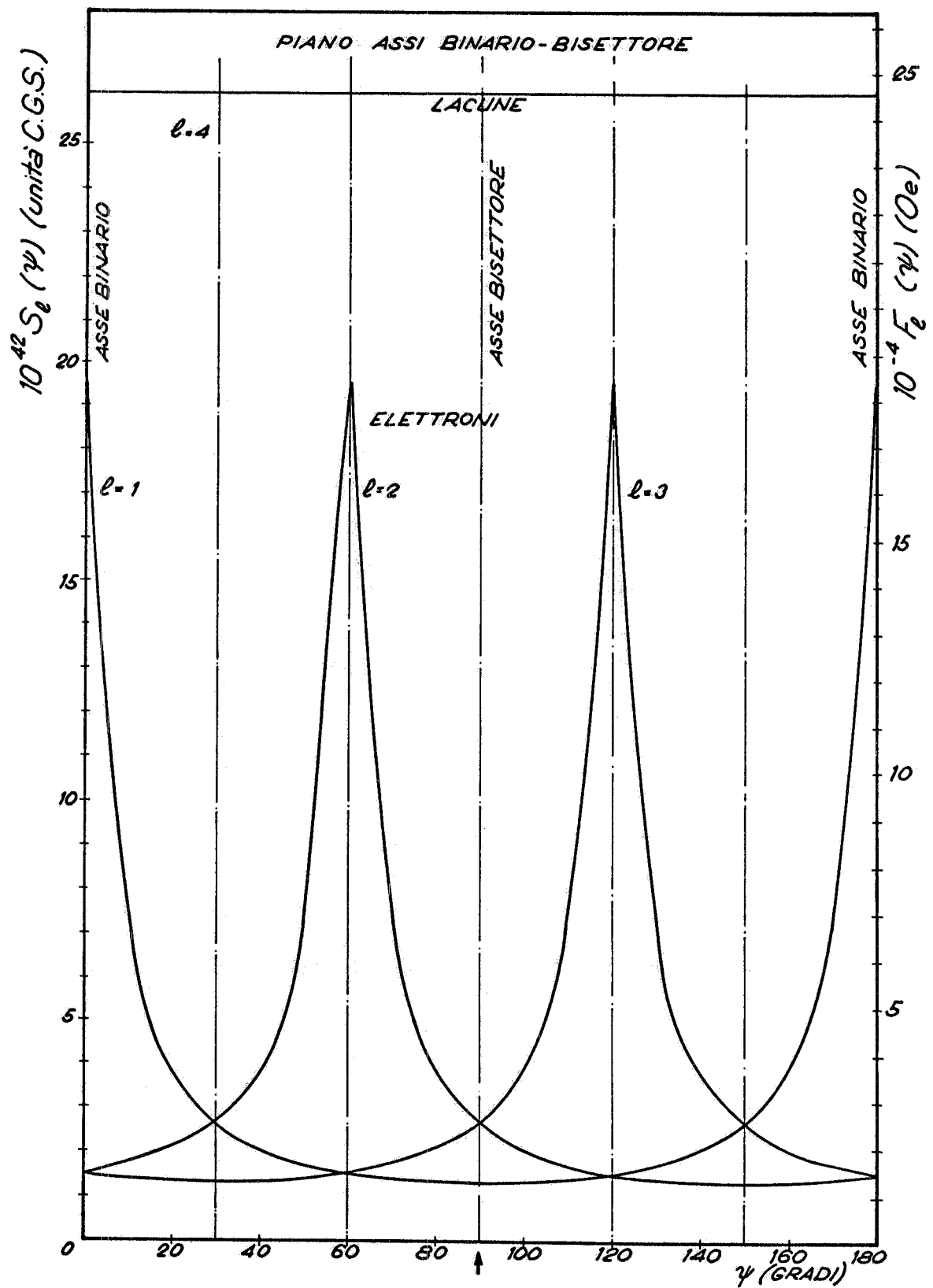


Fig. 7 - Distribuzione angolare delle sezioni estremali della S. F. e delle frequenze relative nel piano degli assi binario-bisetto.

18.

$$\begin{aligned}
 v(t) = & v_1 \text{sen } \omega t + \sum_1 \sum_{1j}^{\infty} \left\{ \sum_{1n}^{\infty} v_{1j}^{(2n)} \text{sen } 2n\omega t + \right. \\
 (5) \quad & \left. + \sum_{0n}^{\infty} v_{1j}^{(2n+1)} \text{sen} [(2n+1)\omega t] \right\} .
 \end{aligned}$$

In questa relazione è :

$$(5') \quad v_1 = NA\omega h_m \cos \theta_{mp}$$

dove :

- N = numero delle spire dell'avvolgimento di prelievo;
- A = area media per spira;
- θ_{mp} = angolo compreso tra la direzione del campo di modulazione e l'asse dell'avvolgimento di prelievo.

Nella (5) è poi :

$$\begin{aligned}
 v_{1j}^{(2n)} = & 16\pi^2 (-1)^n j 2n \omega \eta (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{v}_p) \times \\
 (6) \quad & \times J_{2n}(\rho_{1j}) \mathcal{F}_{1j}(\vec{H}_0, T) \text{sen } \varphi_{1,j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{1j}^{(2n+1)} = & 16\pi^2 (-1)^n j (2n+1) \omega \eta (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{v}_p) \times \\
 (7) \quad & \times J_{2n+1}(\rho_{1j}) \mathcal{F}(\vec{H}_0, T) \cos \varphi_{1,j} ;
 \end{aligned}$$

dove :

- 2n, 2n+1 = ordini (pari o dispari) delle armoniche del segnale di modulazione (n = 0, 1, 2, 3, ...);
- η = una costante che tiene conto dei fattori geometrici determinanti l'accoppiamento magnetico tra l'avvolgimento di prelievo ed il cristallo;

$$- \vec{\mu}_1 = \left[\nabla_{\vec{H}} \left(\frac{F_e}{H} + \frac{\psi_{1,j}}{2j} \right) \right]_{H_0} , \text{ con } \psi_{1,j} = -2\pi j \gamma_1 \pm \frac{\pi}{4} ;$$

$$- \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}_m(t) ;$$

$$- F_1 = \frac{cS_1}{eh} ;$$

- \vec{v}_p = versore orientato lungo l'asse dell'avvolgimento di prelievo;

$$\begin{aligned}
 - \quad \mathcal{F}_{1j}(\vec{H}_0) &= \frac{2V_K}{h^3} \left(\frac{eh}{c} \right)^{3/2} \left| \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_{\parallel}^2} \right|^{-1/2} \text{extr.} \quad \text{TH}^{3/2} \quad \times \\
 &\times \frac{e^{-2\pi^2 j \frac{cm^*KT_D}{ehH}}}{j^{3/2} \sinh(2\pi^2 j \frac{cm^*KT}{ehH})} \cdot \cos(j\pi \frac{m^*}{m_s})
 \end{aligned}$$

è l'ampiezza della componente oscillatoria 1, j della energia libera (con lo stesso significato dei simboli usati nella (1));

$$- \quad \varphi_{1,j} = 2\pi j \left[\frac{F_1}{H} + \frac{\psi_{1,j}}{2\pi j} \right] \vec{H}_0 \quad ;$$

- J_{2n}, J_{2n+1} = funzioni di Bessel di 1^a specie e dell'ordine indicato;
- $\phi_{1j} = 2\pi j h_m (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\nu}_m)$ è argomento delle suddette funzioni; in esso $\vec{\nu}_m$ è un versore che indica la direzione del campo di modulazione.

Nella fig. 8 sono rappresentati i vettori ed i versori indicati nel testo.

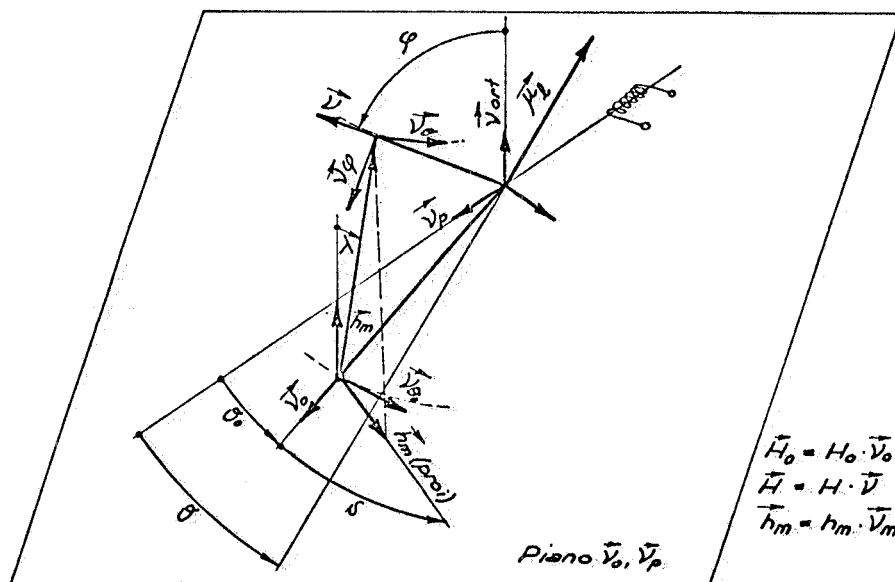


Fig. 8 - Disposizione dei campi di polarizzazione e modulazione a cui è sottoposto il cristallo. Nella figura è anche indicata la giacitura dell'asse dell'avvolgimento di prelievo avvolto attorno al campione e la terna di riferimento $\vec{\nu}_0, \vec{\nu}_{\theta_0}, \vec{\nu}_{\text{ort}}$ usata nei calcoli.

Il segnale $v(t)$, che come mostra la (5) risulta notevolmente complesso, può essere ridotto in forma più semplice effettuandone una opportuna elaborazione elettronica. Ad esempio se si seleziona una sola armonica temporale di indice s il segnale (5) si semplifica nella maniera seguente :

$$v(t) = v^{(s)}(t) = \sum_1 \sum_j v_{1j}^{(s)} \text{sen}(s \omega t).$$

Nel caso del bismuto, in cui l può variare da 1 a 4 e dove j può assumere più di un valore prima che divenga trascurabile l'ampiezza delle oscillazioni relative (armoniche superiori DHVA), si può avere ancora una notevole complessità del segnale osservato. Ciò può rendere difficile la discriminazione tra le varie frequenze F_1 , ma a questo fine risulta particolarmente vantaggiosa la tecnica sviluppata. Infatti, come mostrano le espressioni (6) e (7) per $v_{1,j}^{(s)}$, aggiustando opportunamente alcuni parametri sperimentali, è possibile annullare alcuni fattori di tali espressioni. Ad esempio, variando solo l'orientazione dell'avvolgimento di prelievo si può annullare il prodotto scalare $\vec{\mu}_1 \cdot \vec{v}_p$ per un l prescelto. Analogamente, fissando in modo opportuno la direzione del campo di modulazione, si può annullare, per un altro valore di l distinto dal precedente, il prodotto scalare $\vec{\mu}_1 \cdot \vec{v}_m$. In tal modo si annulla anche la funzione di Bessel.

Poi, regolando opportunamente h_m , si può fare in modo che, per un terzo valore di l , l'argomento $\phi_{1,j}$ sia tale da rendere massima la J_s .

In aggiunta ai risultati esposti sulla teoria del magnetometro, è opportuno, ai fini di una conoscenza completa dei limiti dello strumento, analizzare un gruppo di fenomeni collaterali la cui presenza può influenzarne le prestazioni. L'analisi qui svolta ha carattere essenzialmente qualitativo.

E' noto che in un campione conduttore posto in un campo magnetico variabile sinusoidalmente nel tempo si determinano delle correnti parassite il cui effetto è di produrre un indebolimento ed uno sfasamento progressivo dalla periferia verso il centro del campione del campo esterno applicato⁽⁴⁶⁾. E' consuetudine definire una lunghezza caratteristica nota come "profondità di penetrazione" del campo la quale determina la distanza dalla superficie del campione per la quale il campo è ridotto di un fattore $1/e$ rispetto al valore assunto alla periferia. La profondità di penetrazione δ è legata alla pulsazione del campo ω , alla permeabilità magnetica μ e alla resistività ρ del campione da una relazione del tipo :

$$(8) \quad \delta \approx \rho^{1/2} \mu^{-1/2} \omega^{-1/2}$$

Questo fenomeno è comunemente noto come "effetto pellicolare". Nel nostro campione la distribuzione di correnti parassite pro-

duce un flusso magnetico che si accoppia con l'avvolgimento di prelievo determinando una tensione spuria presente ai suoi terminali. E' interessante osservare che tale tensione spuria, che è sfasata di $\sim \pi/2$ rispetto al flusso prodotto dalle correnti parassite, risulta sfasata di $\sim \pi$ rispetto al campo di modulazione. Il segnale utile invece si può ritenere sfasato di $\sim \pi/2$ rispetto alla componente del momento magnetico responsabile dell'effetto DHVA. Potendosi assumere che questa componente sia in fase col campo di modulazione, si avrà in definitiva uno sfasamento di $\sim \pi/2$ tra il segnale utile e il segnale spurio dovuto alle correnti parassite. Oltre al fenomeno descritto, occorre tenere presente che in un monocristallo di bismuto di elevata purezza raffreddato a bassa temperatura ($T \approx 1^\circ\text{K}$) diventano importanti i fenomeni di "magnetoresistenza trasversa" e "Shubnikoff-DeHaas". Il primo fenomeno consiste nel fatto che il valore della resistività $\rho(H, T)$ osservato nella direzione della corrente, quando è applicato un campo magnetico \vec{H} ad essa ortogonale, risulta incrementato rispetto al valore $\rho(0, T)$ che si osserva per $H = 0$. L'aumento di resistività prodotto dal campo magnetico trasverso è poi anisotropo in un monocristallo ma presenta di regola una crescita monotona con H . Questo effetto è poi particolarmente intenso nel bismuto alle basse temperature indicate^(x). L'effetto Shubnikoff-DeHaas consiste invece nella presenza di una componente oscillatoria della resistività che si aggiunge all'aumento magnetoresistivo, e che è dotata di periodicità eguale a quella dell'effetto DHVA. L'ampiezza

(x) - Fisicamente, il vistoso effetto magneto-resistivo nasce dalla incapacità che un semimetallo ha di mantenere un campo di Hall opposto alla forza di Lorentz. Sia gli elettroni che le lacune, sono deviate verso lo stesso lato del campione e si ricombinano anzichè formare uno strato di carica. Ne risulta che le correnti di elettroni e lacune sono deviate, e per grandi angoli di Hall, esse presentano componenti piccolissime lungo l'asse del campione. A titolo indicativo riportiamo i dati seguenti⁽⁴⁷⁾ :

$$\frac{\rho_{T=4.2^\circ\text{K}, H=0}}{\rho_{T=273^\circ\text{K}, H=0}} \approx 2 \div 3 \times 10^{-3} \quad (\text{effetto di smorzamento termico})$$

$$\frac{\rho_{4.2^\circ\text{K}, H=10^4 \text{ gauss}}}{\rho_{273^\circ\text{K}, H=0}} \approx 2000 \div 5000 \quad (\text{effetto magnetoresistivo})$$

da cui :

$$\frac{\rho_{4.2^\circ\text{K}, H=10^4 \text{ gauss}}}{\rho_{4.2^\circ\text{K}, H=0}} \approx 0.6 \div 2.5 \times 10^6$$

Questi rapporti sono misurati lungo l'asse trigonale e sono fortemente influenzati dalla purezza del campione.

di queste oscillazioni risulta poi dipendere oltre che dall'orientazione di \vec{H} , anche dalla sua intensità e dalla temperatura. Se consideriamo il piano cristallino ortogonale ad \vec{H} ed indichiamo con φ l'angolo compreso tra due direzioni contenute in tale piano, l'una arbitrariamente fissata e l'altra variabile, la legge di variazione con H della resistività totale osservata nella direzione generica può rappresentarsi con la relazione^(x) :

$$(9) \quad \rho(H, T, \varphi) = a(T, \varphi) \cdot \left[1 + \frac{H^2}{b(T, \varphi)} \right] + \sum_1 \sum_j \rho_{1,j}(H, T, \varphi) \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi F_{1,j}(\varphi)}{H} + \phi_{1,j} \right].$$

I due fenomeni anzidetti influenzano certamente le correnti parassite indotte nel campione dal campo di modulazione $h_m(t)$ e, poichè il flusso magnetico prodotto da queste correnti, è, come già detto, accoppiato all'avvolgimento di prelievo, sembra lecito attendersi di trovare nel segnale di tensione spurio prodotto una traccia degli effetti menzionati. A questo punto è necessario però osservare che ciò che determina l'intensità delle correnti parassite è certamente il valore medio di $\rho(H, T, \varphi)$ su tutto l'azimuth φ :

$$\langle \rho(H, T) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(H, T, \varphi) d\varphi,$$

ovvero :

$$\langle \rho(H, T) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(T, \varphi) \left[1 + \frac{H^2}{b(T, \varphi)} \right] d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_1 \sum_j \rho_{1,j}(H, T, \varphi) \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi F_{1,j}(\varphi)}{H} + \phi_{1,j} \right] d\varphi.$$

(x) - Un trattamento classico⁽⁴⁸⁾, valido per alti campi magnetici ($\omega\tau \gg 1$) mostra che la magnetoresistenza trasversa cresce quadraticamente col campo quando siano presenti elettroni e lacune, come accade nel bismuto. Nel caso di eguali concentrazioni di elettroni e lacune isotropici, la parte monotona della resistività può essere rappresentata dall'espressione costituente il primo termine a secondo membro della (9). Questo trattamento è stato poi esteso al caso di tre gruppi di portatori anisotropici con risultati qualitativamente simili⁽⁴⁹⁾.

Il primo termine a secondo membro di questa relazione risulta ancora funzione crescente di H mentre il secondo è, per ogni valore del campo fortemente attenuato risultando dalla somma di contributi sfasati che si elidono in gran parte. Pertanto al crescere del campo di polarizzazione, l'aumento dello $\langle \mathcal{S}(H, T) \rangle$, che è prevalentemente di origine magnetoresistiva, determina un aumento della profondità di penetrazione δ o, in altri termini, una attenuazione globale del fenomeno delle correnti parassite.

In definitiva si comprende come il segnale spurio tende a ridursi ad un valore costante al crescere di H_0 quando δ diviene molto maggiore del massimo diametro D della sezione del campione effettuato normalmente ad \vec{H}_0 . Durante la crescita di δ tra 0 e D si ha pure che le regioni del campione posto a distanze diverse rispetto al centro della sezione suddetta subiscono un campo di modulazione effettivo diverso come ampiezza e fase, per cui i loro contributi al segnale utile risulteranno diseguali ossia tanto più piccoli e tanto più sfasati quanto minore è la loro distanza dal centro. Questa conseguenza dell'effetto pellicolare scompare quando al crescere di H_0 il valore della $\langle \mathcal{S}(H, T) \rangle$ diviene tale da rendere $\delta \gg D$; si ha perciò in definitiva un incremento nell'ampiezza del segnale utile.

V. - DESCRIZIONE DEL DISPOSITIVO SPERIMENTALE.

L'apparato di rivelazione, che si ispira ai principi precedentemente descritti, è stato realizzato secondo lo schema della fig. 9.

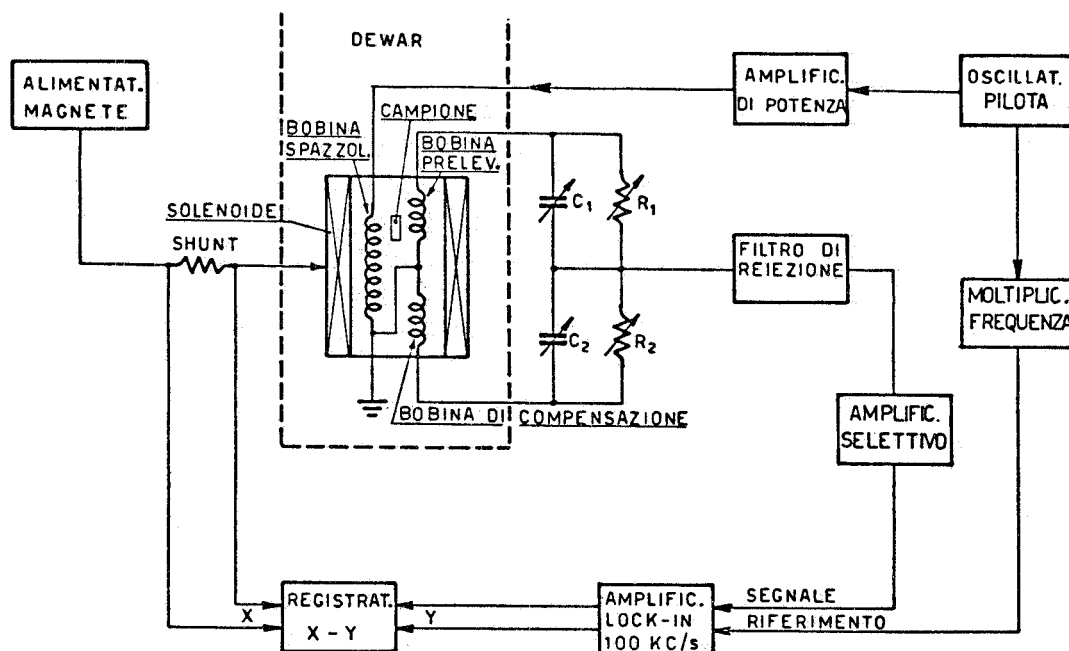


Fig. 9 - Schema a blocchi del dispositivo di rivelazione.

Nella versione usata per le misure descritte nella presente nota, gli assi degli avvolgimenti di modulazione e di prelievo coincidono con l'asse geometrico del campione cristallino. Pertanto nelle relazioni (6) e (7) si deve porre $\vec{v}_m = \vec{v}_p$ e si riducono, in queste condizioni, le capacità di discriminazione delle frequenze DHVA.

Il campo di modulazione a cui è sottoposto il cristallo è generato da un avvolgimento posto attorno al cristallo stesso e alimentato da una catena elettronica costituita da un oscillatore e da un amplificatore di corrente. Poichè la rivelazione dei segnali indotti è sempre effettuata nel nostro sistema sulla frequenza di 100 Kc/s, per poter osservare le armoniche della frequenza ω di modulazione corrispondenti a $s = 1, 2, 3, 4, 5$, sono stati costruiti oscillatori con frequenze $\omega = 100, 50, 33.3, 25, 20$ Kc/s. Allo scopo di eliminare il segnale indotto (5') dovuto all'accoppiamento diretto tra gli avvolgimenti di modulazione e di prelievo si è disposto un ulteriore avvolgimento di compensazione, di caratteristiche il più possibile simili a quello di prelievo^(x) ma magneticamente disaccoppiato da questo e dal cristallo. Questi due avvolgimenti costituiscono due rami di un ponte a resistenze e capacità variabili. Il ponte viene azzerato sul segnale (5'). Allo scopo di evitare sfasamenti tra i segnali indotti nelle bobine di prelievo e compensazione e di conseguenza lo squilibrio del ponte, è necessario che il segnale di modulazione abbia elevata stabilità in frequenza e in ampiezza e bassissima distorsione. Per tale scopo tutti gli oscillatori realizzati utilizzano cristalli piezoelettrici. L'amplificatore di corrente usato per l'alimentazione dell'avvolgimento di modulazione permette un'uscita regolabile fino a 1 Amp sul carico costituito dalla bobina di modulazione il cui coefficiente di autoinduzione è pari a 20 μ H e la cui costante caratteristica è pari a 50 Oersted/Amp. Si può pertanto ottenere un campo di modulazione massimo $h_m = 50$ Oersted. Il segnale utile (6) (o (7)), la cui ampiezza massima risulta essere nelle nostre condizioni dell'ordine di $0.1 \div 10 \mu$ V, dall'uscita del ponte, è inviato alla catena di rivelazione costituita da un filtro bloccabanda, un preamplificatore e un amplificatore sintonizzati. Il filtro bloccabanda riduce ulteriormente l'eventuale residuo di segnale alla frequenza fondamentale ancora presente all'uscita del ponte. Il preamplificatore è costituito da tre stadi, due dei quali sono sintonizzati con elementi L-C ed il terzo è un "emitter follower"; il primo stadio è anche reazionato in corrente ed usa come elemento di reazione un quarzo con risonanza serie pari a 100 Kc/s; si è ottenuto in tal modo un preamplificatore con basso rumore proprio ed un elevatissimo Q (~ 2000) che contribuisce ad un'ulteriore riezione del rumore.

L'amplificatore è invece un comune circuito sintonizzato a più stadi capace di erogare la potenza necessaria al pilotaggio dei

(x) - La compensazione delle aree equivalenti è realizzata entro $\sim 1\%$.

circuiti successivi (rivelatore sincrono, ecc).

Dopo essere stato amplificato il segnale utile è comparato in fase con un segnale di riferimento a 100 Kc/s ricavato tramite un moltiplicatore di frequenza (x2, x3, x4, x5) eccitato dallo stesso oscillatore pilota a frequenza ω . La comparazione di fase, col segnale di riferimento ossia la rivelazione sincrona del segnale utile risulta vantaggiosa al fine di separare questo dal segnale spurio e dal "rumore bianco" normalmente presente nei circuiti. Il rivelatore sincrono, costituito da un ponte di diodi, unitamente all'amplificatore selettivo e ad altri circuiti accessori fa parte di un "Lock-In Amplifier" di produzione commerciale (Model JRB-5 della Electronic, Missiles and Communication - Mount Vernon, USA). In uscita a tale strumento si produce una risposta in tensione continua proporzionale a $\sum_j v_j^{(s)}$ che è inviata all'ingresso Y di un registratore X-Y a penna il cui asse orizzontale è comandato da una tensione proporzionale al campo H_0 di polarizzazione. Il campo H_0 di polarizzazione è fornito da un solenoide privo di ferro e raffreddato in azoto liquido. Il segnale di tensione per l'asse X del registratore è prelevato ai capi di uno shunt di elevata accuratezza (0.2 %) collegato in serie al solenoide suddetto. Il campo H_0 così prodotto è fatto crescere nel tempo lentamente e con regolarità; il campo massimo di circa 18 KOersted è raggiunto in un tempo di circa due minuti. Il cristallo è immerso in un bagno di He liquido contenuto in un dewar in Pyrex ad estremità cilindrica rastremata (diametro esterno 4 cm) del tipo usato nelle esperienze di demagnetizzazione adiabatica. Aspirando i vapori dell'elio mediante pompe rotative e "booster" è possibile regolare la pressione al disopra del bagno nell'intervallo $760 \div 0.04$ torr, che corrisponde ad una regolazione della temperatura nell'intervallo $4.22 \div 0.9$ °K. L'orientazione del cristallo rispetto alla direzione del campo H_0 (coincidente con l'asse del solenoide prima descritto) può essere prefissata a piacere dall'esterno del dewar mediante un sistema di ingranaggi conici connesso mediante un discendente ad un numeratore esterno. Il sistema è tarato prima di ogni esperienza e le posizioni angolari del cristallo risultano determinate entro $\pm 10'$.

Il campione cristallino usato per le nostre esperienze è stato ricavato da un mono-cristallo non orientato di bismuto con purezza nominale 99.999 % fornito dalla Metal Research Co., England. Tale cristallo è stato preliminarmente orientato con un diffrattometro a raggi X del Laboratorio di Fisica Nucleare Applicata del CNEN e quindi è stato sfaldato lungo il piano, normale all'asse trigonale dopo raffreddamento in N_2 liquido. Con un opportuno "etching elettrochimico" sono state messe in evidenza tre famiglie di linee parallele disposte tra loro a 120° che individuano i tre assi binari. Utilizzando una "sega ad acido" del tipo descritto in bibl. (50) ed effettuando successivi etching è stato ricavato un cristallo cilindrico orientato con l'asse geometrico lungo l'asse binario. Le dimensioni del cristallo sono: diametro = 1.1 mm, lunghezza = 15 mm. Allo scopo di con-

servare l'allineamento del cristallo è stata poi saldata ad una delle sue basi una basetta di dielettrico recante la traccia dell'asse trigonale.

VI. - RISULTATI SPERIMENTALI.

Dopo le necessarie messe a punto dell'apparecchiatura furono eseguite alcune prove preliminari aventi lo scopo di controllare l'efficienza di rivelazione dell'apparato. In questa fase furono effettuate le osservazioni sperimentali descritte nei tre punti successivi.

- a) Separazione del segnale utile da quello spurio dovuto alla combinazione degli effetti pellicolare, magnetoresistivo e Shubnikov - De Haas. -

L'insieme di fenomeni descritti nel § 4 ha ricevuto una conferma sperimentale nelle registrazioni effettuate con H_0 crescente, fissando, per ognuna di esse, valori diversi dello sfasamento tra il segnale rivelato e il segnale di riferimento inviato al rivelatore di fase. Si può così fare in modo da osservare prevalentemente il segnale utile o quello spurio. Si osserva in genere che il segnale spurio varia bruscamente nell'intervallo di H_0 da 0 a 1000 Oersted. La fig. 10

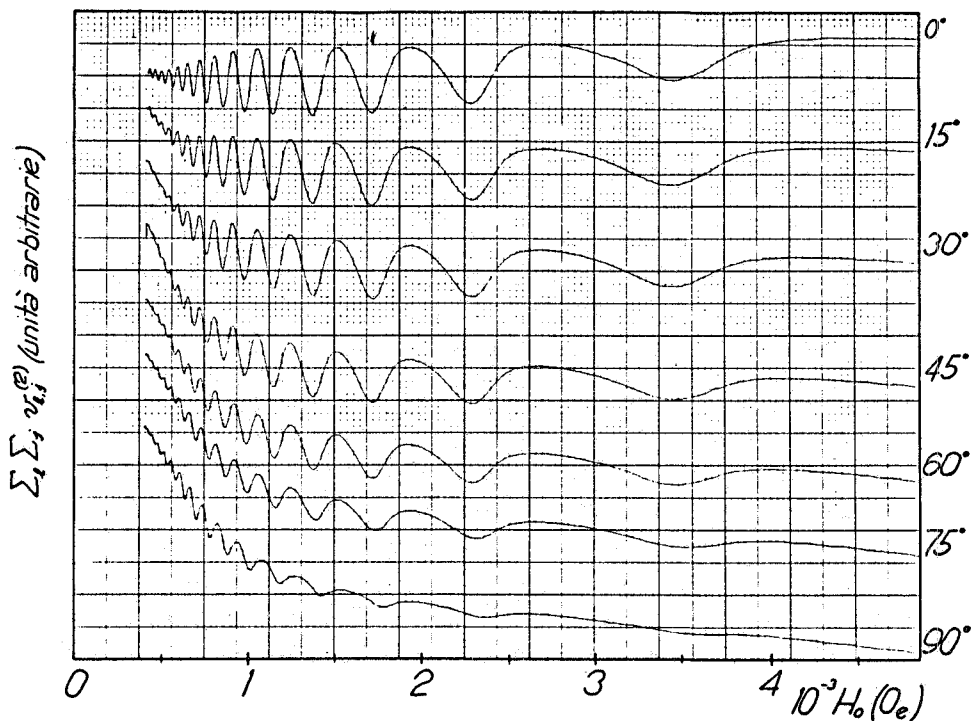


Fig. 10 - Registrazione in seconda armonica di segnali DHVA in corrispondenza di sfasamenti diversi tra il segnale rivelato e quello di riferimento.

riporta alcune registrazioni dei segnali osservati con differenze di fase rispettivamente di 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° rispetto al segnale di riferimento. Si può vedere che con la differenza di fase di 0° si ottiene l'eliminazione del segnale spurio causato dalle correnti indotte e la migliore osservazione del segnale DHVA puro.

L'interpretazione dei fenomeni riportata in precedenza appare chiaramente confermata dalle osservazioni sperimentali effettuate ed è in contrasto con i risultati di una analisi unidimensionale degli effetti delle correnti parassite svolta da D. Shoemberg e P. J. Stiles⁽⁴³⁾. Riteniamo pertanto che il magnetometro qui descritto possa validamente operare anche alle frequenze ω indicate in precedenza (cfr. § 5).

b) Osservazione della modulazione di ampiezza delle oscillazioni DHVA dovuta alle modalità intrinseche di funzionamento dello strumento. -

Come mostrano le (6) e (7) l'ampiezza delle oscillazioni osservate selezionando la s^{esima} armonica temporale del segnale di tensione (5) è modulato dal fattore $J_s(\phi_{1,j})$, cioè da una funzione di Bessel di 1^{a} specie ed ordine s . Questo effetto è stato osservato sistematicamente in tutte le registrazioni effettuate.

E' opportuno, per le considerazioni successive, riscrivere l'argomento della J_s :

$$\phi_{1,j} = 2\pi j h_m (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{v}_m) ,$$

in una forma più conveniente.

Introdotta la terna ortogonale di versori \vec{v}_o , \vec{v}_{θ_0} , \vec{v}_{ort} (cfr. Fig. 8), dalla definizione data di $\vec{\mu}_1$:

$$\vec{\mu}_1 = \left[\nabla_{\vec{H}} \left(\frac{F_1}{H} + \frac{\psi_{1,j}}{2\pi j} \right) \right]_{\vec{H}_0} ,$$

sviluppando le operazioni indicate, si ricava :

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_1 = \frac{F_1}{H_0^2} \left\{ -\frac{1}{F_1} \left[-\left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi} \right) \cdot \vec{v}_{\text{ort}} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{v}_{\theta_0} \right] - \vec{v}_o \right\} + \\ + \frac{1}{H_0} \left[-\left(\frac{\partial \psi_{1,j}}{\partial \psi} \right) \cdot \vec{v}_{\text{ort}} + \left(\frac{\partial \psi_{1,j}}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{v}_{\theta_0} \right] . \end{aligned}$$

In questa espressione F_1 e le sue derivate parziali rispetto a θ e ψ s'intendono calcolate nella direzione di \vec{H}_0 (ossia per $\theta = \theta_0$ e $\psi = \pi/2$). Se infine la direzione del campo di modulazione \vec{h}_m è indi-

viduata, rispetto alla terna suddetta, dagli angoli polari \mathcal{S} e λ , si ha per $\phi_{1,j}$ l'espressione seguente :

$$\begin{aligned} \phi_{1,j} = & 2\pi j F_1 \frac{h_m}{H_0^2} \left\{ -\frac{1}{F_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \right) \cos \lambda + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{F_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right) \operatorname{sen} \mathcal{S} \cos \mathcal{S} \right] \operatorname{sen} \lambda \right\} + \\ & + 2\pi j \frac{h_m}{H_0} \left[-\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \varphi} \right) \cos \lambda + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \theta} \right) \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \mathcal{S} \right]. \end{aligned}$$

Nelle condizioni in cui il presente lavoro è stato svolto risulta :

$$\vec{v}_m = \vec{v}_p$$

ossia :

$$\mathcal{S} = -\theta_0, \quad \lambda = \pi/2,$$

per cui si ottiene :

$$\phi_{1,j} = 2\pi j F_1(\theta_0) Y_1(\theta_0) \frac{h_m}{H_0^2} + 2\pi j Y_2(\theta_0) \frac{h_m}{H_0},$$

avendo posto in questa espressione :

$$Y_1(\theta_0) = - \left[\frac{1}{F_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right) \operatorname{sen} \theta_0 + \cos \theta_0 \right]$$

e

$$Y_2(\theta_0) = - \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \theta} \right) \operatorname{sen} \theta_0.$$

Fissati l e j e la direzione di \vec{H}_0 , ossia θ_0 , si può scrivere in definitiva, per una registrazione effettuata ad h_m costante :

$$\phi_{1,j} = 2\pi j h_m \left[\frac{F_1 Y_1}{H_0^2} + \frac{Y_2}{H_0} \right] = c_1 \left(\frac{1}{H_0} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1}{H_0} \right).$$

Allo scopo di mostrare come questa legge di variazione con H_0 dell'argomento $\phi_{1,j}$ di J_s è praticamente verificata, consideriamo la registrazione di Fig. 11a) effettuata selezionando la 2^a armonica temporale ($s = 2$) del segnale (5). Nella parte b) della stessa figura è ancora riportato il segnale $\sum_1 \sum_j v_{1,j}^{(2)}$ in funzione della variabile $1/H_0$; appare allora evidente il carattere periodico delle oscillazioni. La Fig. 12a) rappresenta ancora la registrazione di cui alla Fig. 11b) corretta per la deriva di tensione causata dagli effetti esaminati nel punto a)

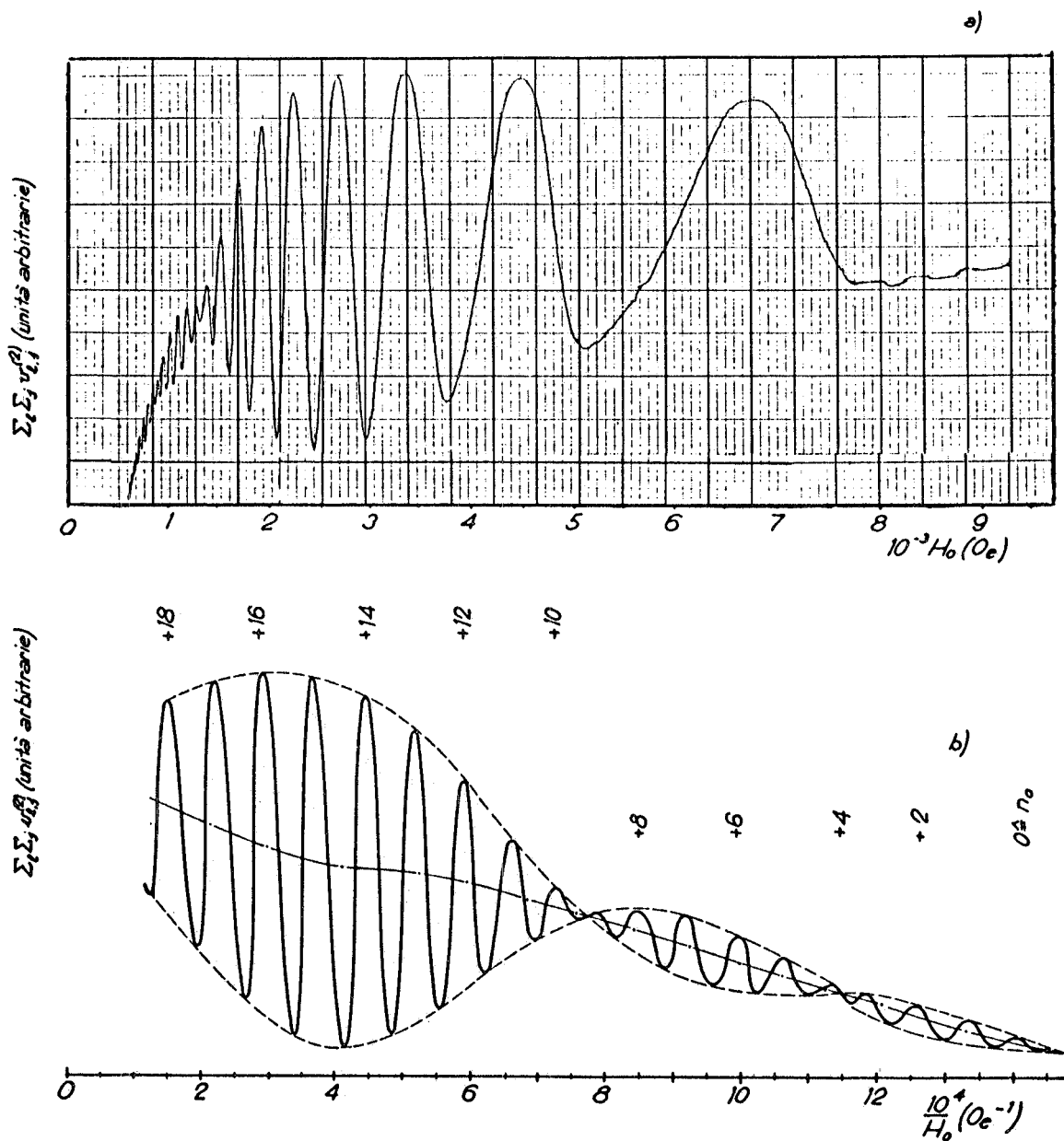


Fig. 11 - Registrazione in seconda armonica di una frequenza fondamentale DHVA. Nella parte a) della figura è rappresentata il segnale tracciato dal Recorder in funzione di H_0 ; nella parte b) lo stesso segnale è riportato in funzione di $1/H_0$ in una scala opportuna.

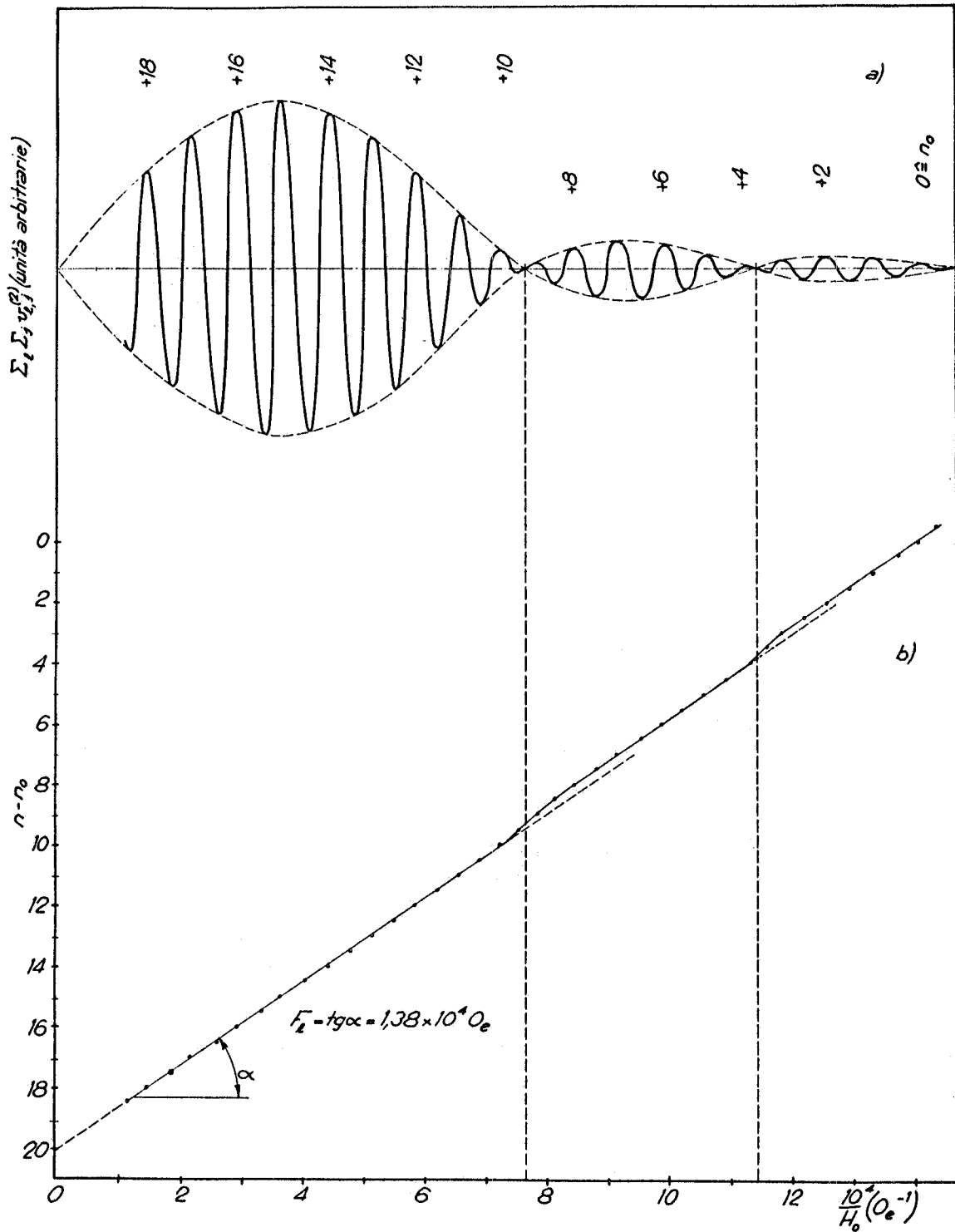


Fig. 12 - Nella parte a) della figura è riportato lo stesso segnale di cui alla fig. 11b) corretto dal "drift" di tensione prodotto dagli effetti descritti al §4; nella parte b) è rappresentato il numero d'ordine dei massimi e minimi delle oscillazioni in funzione di $1/H_0$.

di questo paragrafo. Per determinare la frequenza jF_1 , o le frequenze delle eventuali componenti oscillatorie del segnale osservato, si è seguita la procedura che descriviamo. Fatto corrispondere l'intero indeterminato n_0 al primo massimo osservato del segnale, si sono contrassegnati con gli interi crescenti $n_0+1, n_0+2, n_0+3, \dots$ i massimi successivi nel verso di H_0 crescente. Il minimo successivo all' n esimo massimo è stato poi contrassegnato col numero semintero $n+1/2$. Determinato per ciascun massimo e minimo il valore di $1/H_0$ corrispondente, si è costruito il grafico di $n-n_0$ in funzione di $1/H_0$ (v. Fig. 12b). In questo tipo di rappresentazione, il disporsi dei punti sperimentali lungo una retta rappresenta una oscillazione pura di frequenza F_1 che è espressa dalla pendenza della retta medesima. Tale frequenza è infatti definita dal rapporto tra il numero di oscillazioni e l'ampiezza dell'intervallo della variabile $1/H_0$ che lo contiene. Nel caso della registrazione esaminata, si è trovato che il grafico $(n-n_0)$ vs. $1/H_0$ risulta costituito da tre tratti rettilinei e paralleli con eguale pendenza $F_1 = 1.38 \times 10^4$ Oe. Questa frequenza si può ritenere generata da una sezione estrema di un ellissoide elettronico. Tale sezione risulta avere giacitura non troppo diversa da quella corrispondente alla sezione estrema minima (normale all'asse binario - cfr. Fig. 4). La F_1 osservata si può ritenere senz'altro una frequenza fondamentale o 1^a armonica DHVA ($j = 1$). Nella Fig. 12b) si può osservare che in corrispondenza degli zeri della $\sum_1 \sum_j v_{1,j}^{(2)}$ (ovvero della $v_{1,1}^{(2)}$) si manifestano scorrimenti di fase dei massimi e minimi più prossimi a tali punti, per cui il grafico $(n-n_0)$ vs $1/H_0$ non presenta più un andamento lineare nel loro intorno. Nella Fig. 13a) è rappresentata la funzione di Bessel di prima specie e 2^o ordine $J_2(\phi_{1,1})$ e sono segnati i valori dell'argomento $\phi_{1,1}$ corrispondenti ad alcuni zeri, massimi e minimi⁽⁵¹⁾. Nella parte b) della stessa figura, in un grafico $\phi_{1,1}$ vs. $1/H_0$ sono riportati con le relative incertezze, i valori di $1/H_0$ corrispondenti agli zeri (punti con cerchietti) dell'involuppo della $v_{1,1}^{(2)}$ ricavata sperimentalmente (Fig. 12a). Sullo stesso grafico è stata poi tracciata la parabola di equazione :

$$\phi_{1,1} = 5.52 \times 10^3 \left(\frac{1}{H_0} \right) + 1.50 \times 10^6 \left(\frac{1}{H_0} \right)^2$$

che rappresenta il "best fit" dei dati sperimentali. Si può quindi ritenere, dato l'ottimo accordo, che la legge (8) di variazione dell'argomento della J_2 con H_0 sia verificata. Sempre nello stesso grafico sono anche riportati i valori di $1/H_0$ corrispondenti ai massimi dell'involuppo di $v_{1,1}^{(2)}$ (punti con triangolo); per questi punti si osserva, rispetto alla parabola di "best fit", un accordo meno soddisfacente. Si ritiene che esso sia imputabile alla ragione seguente. In base alle (6) e (8) si può scrivere^(x) :

(x) - Infatti il fattore $\vec{\mu}_1 \cdot \vec{v}_p$ della (6), essendo nelle nostre condizioni $\vec{v}_p = \vec{v}_m$ diviene : $\vec{\mu}_1 \cdot \vec{v}_p = \frac{\phi_{1,j}}{2\pi j h_m}$

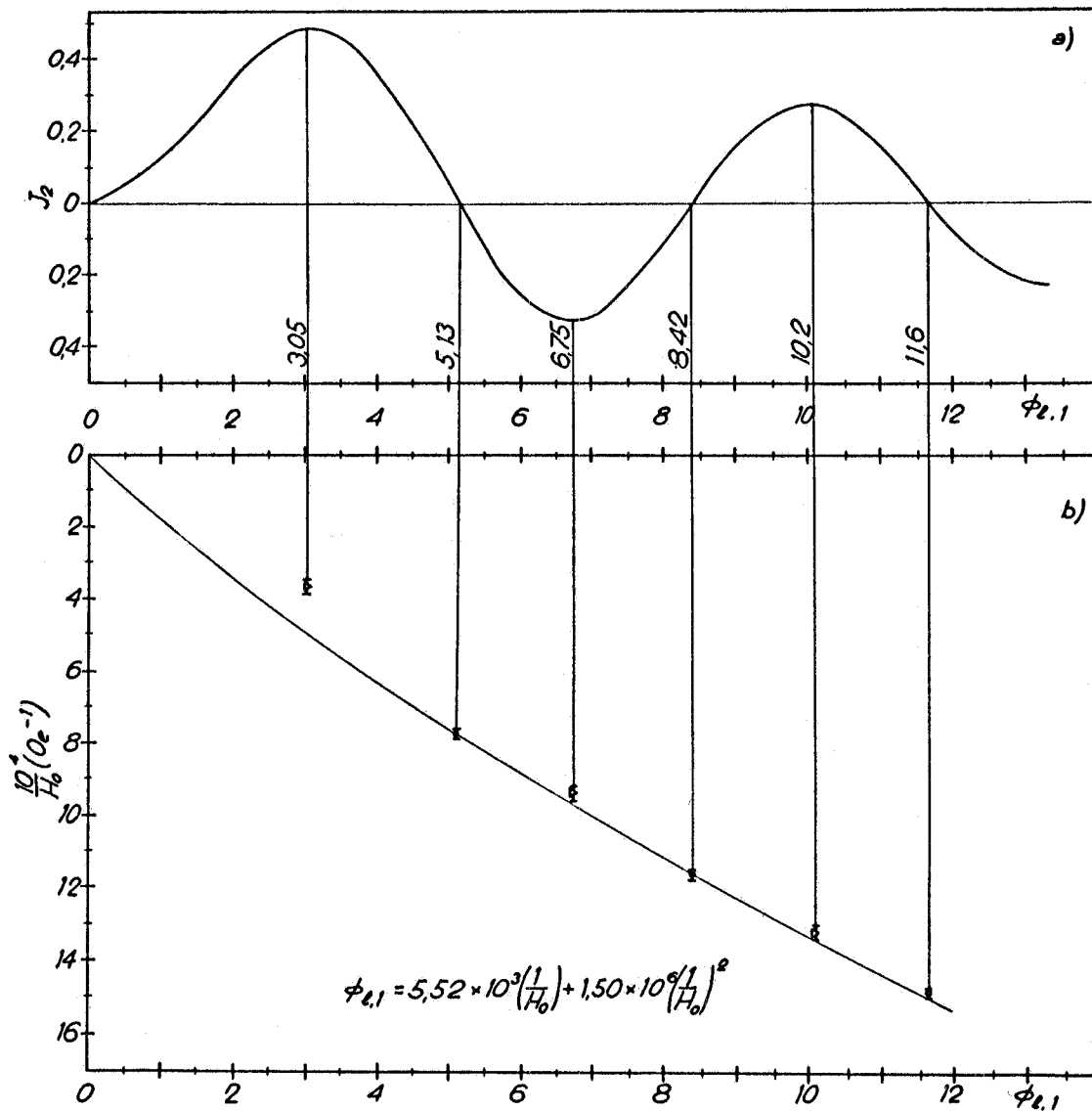


Fig. 13 - In a) è rappresentata la funzione di Bessel di prima specie e secondo ordine J_2 in funzione dell'argomento $\phi_{1,1}$. In b) sono riportati, in corrispondenza degli zeri della $J_2(\phi_{1,1})$ i valori di $1/H_0$ corrispondenti ai nodi dell'involuppo dell'oscillazione di fig. 12a). E' pure tracciata la legge di variazione della fase $\phi_{1,1}$ in funzione di $1/H_0$ che meglio approssima i risultati sperimentali.

$$\left| v_{1,1}^{(2)} \right| \propto \left[\frac{F_1 Y_1}{H_0^2} + \frac{Y_2}{H_0} \right] \cdot J_2 \left(\frac{c_1}{H_0^2} + \frac{c_2}{H_0} \right) \cdot \mathcal{F}_{1,1}(H_0, T).$$

Questa relazione mostra che mentre per i valori di H_0 per cui risulta $J_2 = 0$, si ha anche $\left| v_{1,1}^{(2)} \right| = 0$, non si può affermare che per i valori di H_0 per cui J_2 è massima, sia pure massima la $\left| v_{1,1}^{(2)} \right|$ a causa della presenza degli altri fattori variabili col campo. La presenza di questi può produrre infatti uno spostamento dei massimi di $\left| v_{1,1}^{(2)} \right|$ rispetto ai massimi corrispondenti di J_2 .

c) Osservazione della dipendenza angolare delle sezioni estremali nel piano normale all'asse trigonale.

Una volta spiegati e verificati gli effetti strumentali cui si è accennato nei due punti precedenti si è passati ad osservazioni di più diretto interesse fisico. Si è a tal fine effettuata, col cristallo descritto al § 5, una sistematica di registrazioni a campo crescente nella quale si è assunto, come parametro variabile, l'angolo $\psi = -\theta_0$ tra l'asse geometrico del cristallo e la direzione di \vec{H}_0 . L'intensità del campo magnetico era fatta variare da 0 a ~ 18 KOe in modo monotono con una velocità media di salita $\langle dH_0/dt \rangle \approx 10^2$ Oe/sec. La temperatura T , che si conservava costante al valore scelto nel corso di ogni singola registrazione, poteva assumere, nel corso delle diverse prove, valori compresi tra 0.9 a 1.3 °K. L'angolo ψ veniva variato ogni volta di $\Delta\psi = 5^\circ$ nell'intervallo tra $+35^\circ$ e -75° (x). La modulazione di campo era applicata al cristallo lungo il suo asse geometrico e mantenuta costante, al valore ritenuto più opportuno, durante tutta una registrazione. La frequenza di tale modulazione era pari a 50 Kc/s così che tutte le registrazioni dei segnali uscenti dalla catena elettronica furono effettuate selezionando la 2^a armonica temporale della tensione (5). Alcune delle registrazioni ottenute sono riportate in Fig. 14. Seguendo la procedura descritta al punto b) si è preparato, per ciascuna registrazione, un grafico $(n - n_0)$ vs. $1/H_0$. In Fig. 15 sono rappresentati i grafici di questo tipo corrispondenti alle registrazioni riportate nella figura precedente. Da questi si può rilevare che in quasi tutte le registrazioni riportate sono presenti due componenti oscillatorie nettamente separate e individuate, in questa rappresentazione, da due segmenti rettilinei con pendenze diverse. Si può anche notare come le suddette pendenze variano con regolarità al variare dell'angolo ψ . Determinate, con il procedimento già descritto, le frequenze F_1 corrispondenti ai diversi tratti dei grafici di Fig. 15, si sono calcolate le aree (nello spazio dei mo

(x) - Quando si è ritenuto opportuno, ad esempio nelle regioni di ψ in cui $\partial S_1 / \partial \psi$ assume valori elevati, le registrazioni sono state prese ad intervalli $\Delta\psi$ più piccoli; ad esempio $\Delta\psi = 1^\circ$.

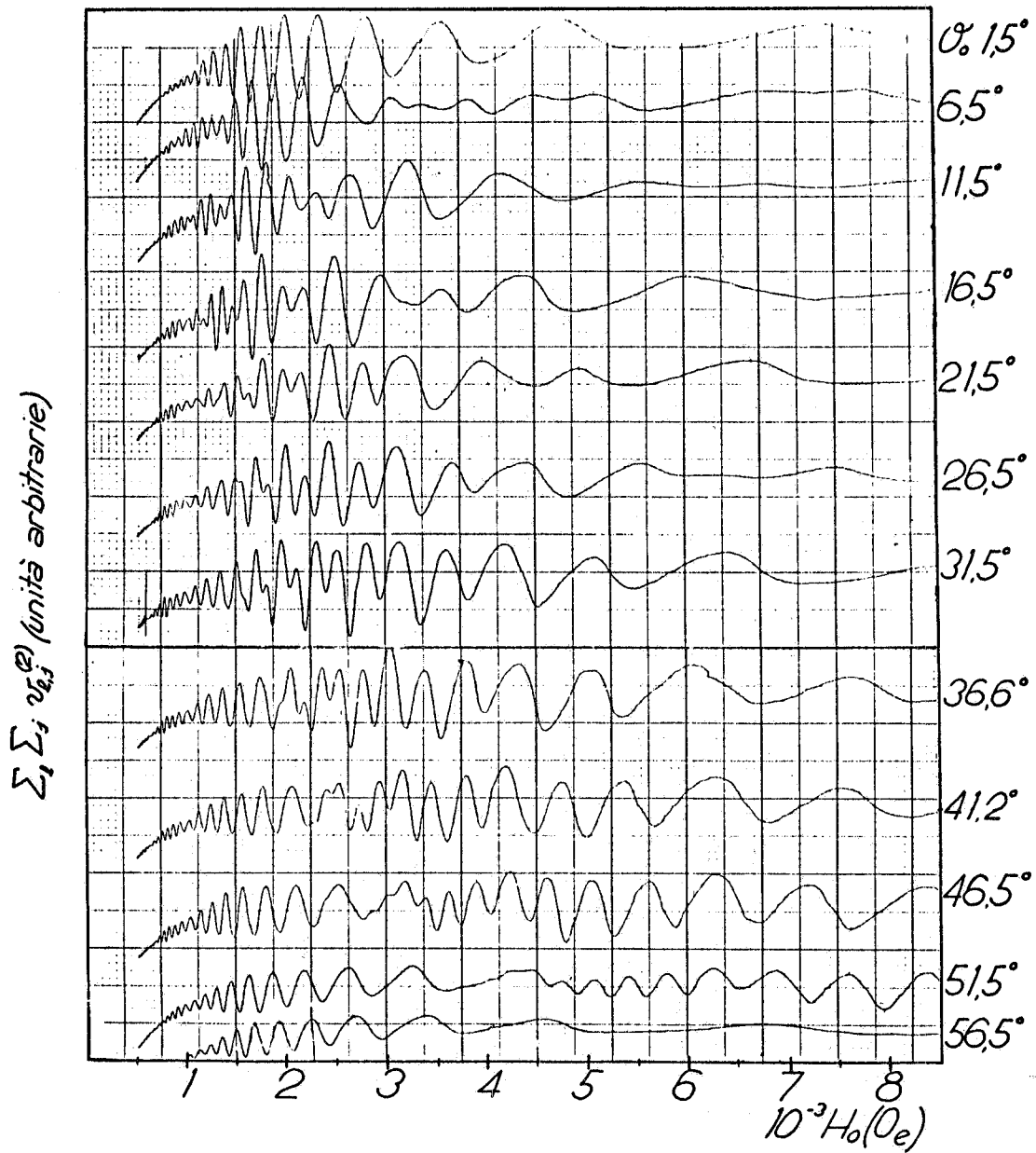


Fig. 14 - Serie di registrazioni di segnali DHVA effettuate nel piano binario-bisettore ad angoli diversi tra la direzione del campo H_0 e l'asse binario.

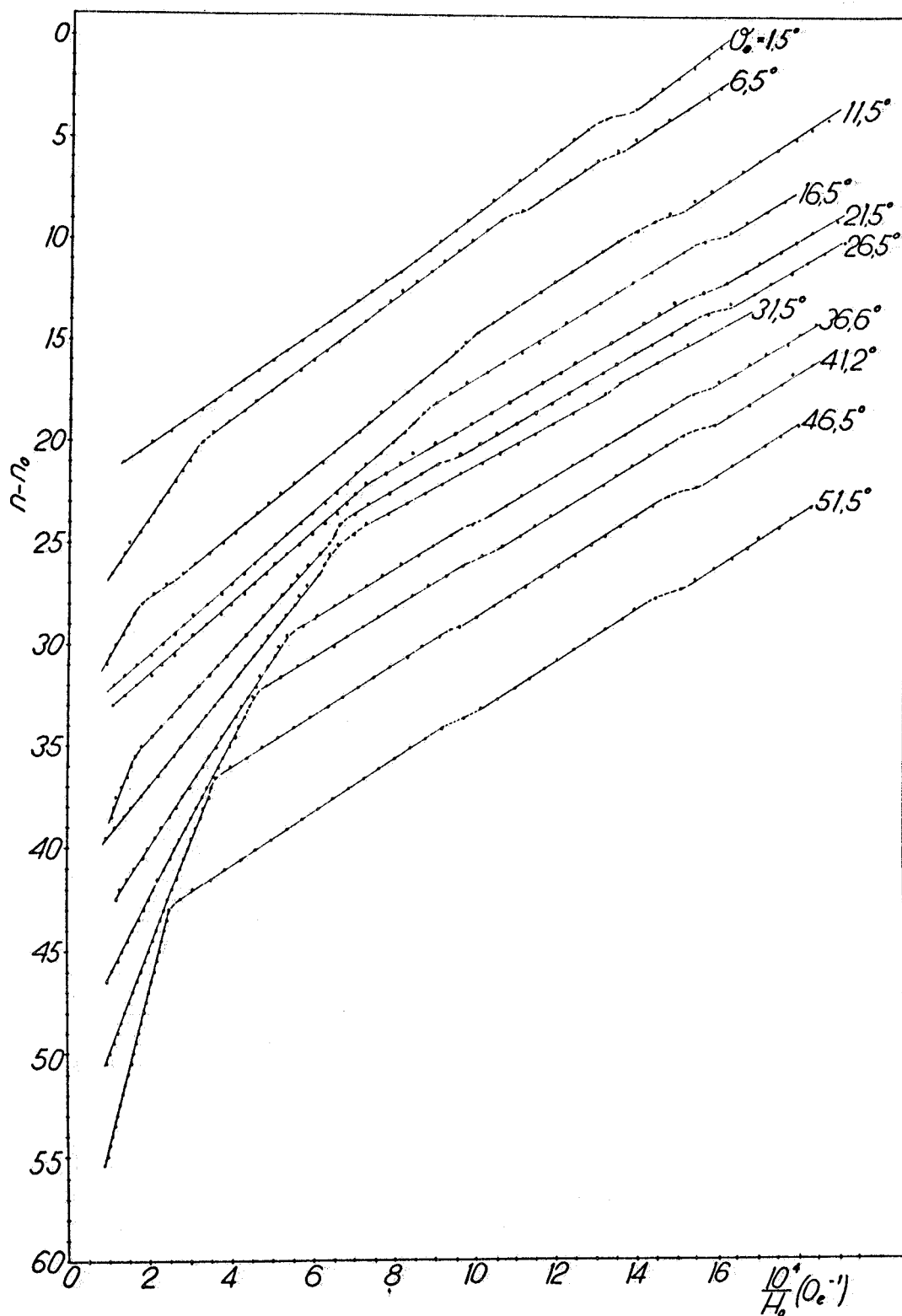


Fig. 15 - Grafici $(n - n_0)$ vs. $1/H$ per le registrazioni di Fig. 14.

menti) delle sezioni estremali della S. F. associate alle F_1 , mediante la relazione (2). Tale relazione dà infatti :

$$S_1 = \left(\frac{eh}{c}\right) F_1 = 1.061 \times 10^{-46} F_1 \quad (\text{unità C. G. S.}).$$

Si è potuto così effettuare un controllo sperimentale della relazione $S_1(\psi)$ ricavata teoricamente (cfr. Fig. 7). I punti sperimentali ottenuti sono riportati nella Fig. 16.

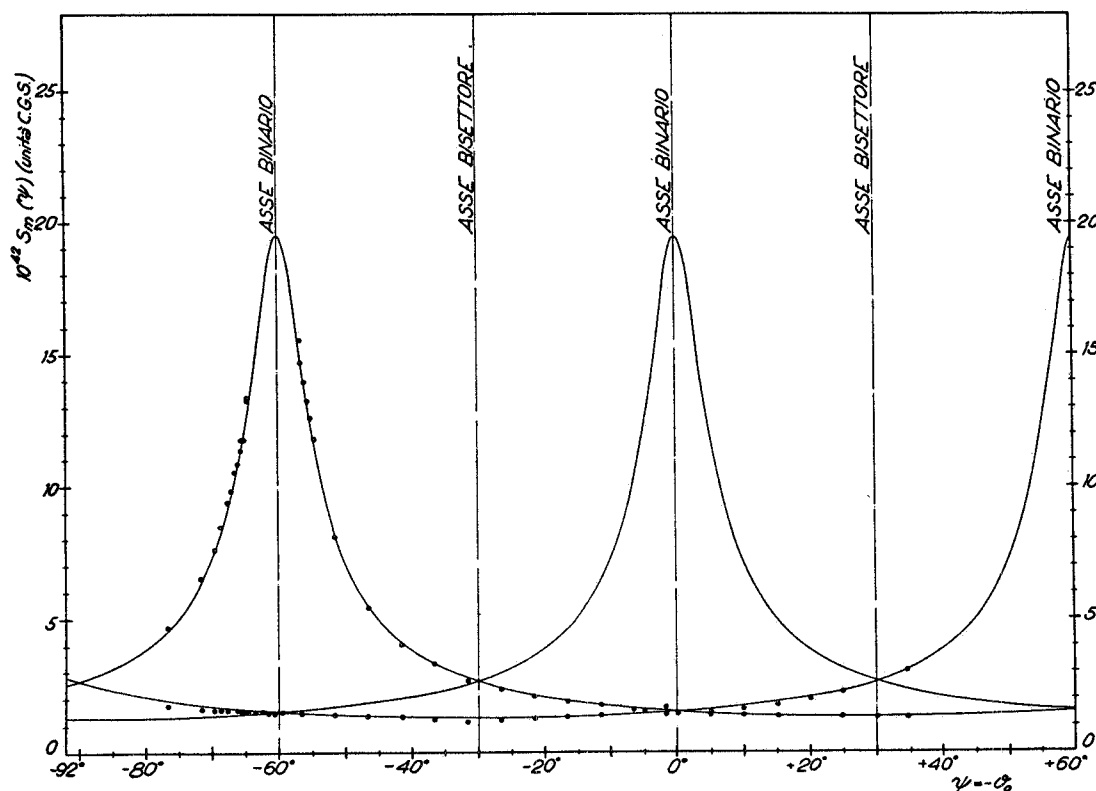


Fig. 16 - Distribuzione angolare delle sezioni estremali S_1 ottenute sperimentalmente. Per confronto sono tracciate anche le curve teoriche di $S_1(\psi)$ ricavate in base ai modelli del § 3.

E' opportuno a questo punto svolgere qualche considerazione sugli errori da cui si possono ritenere affette le misure descritte. Per quanto riguarda l'incertezza esistente nella determinazione dell'angolo ψ si può valutare che essa sia dell'ordine di $\pm 10'$ come già detto (cfr. § 5). Uno spostamento sistematico di $\sim 4^\circ$ rispetto alle curve teoriche è stato osservato per tutti i punti sperimentali ottenuti; questo va attribuito alla non perfetta coincidenza dell'asse binario con l'asse geometrico del cristallo. L'errore è tuttavia facilmente individuabile ed eliminabile. Per ciò che riguarda invece la

stima della incertezza nelle misure di F_1 effettuate è opportuno svolgere qualche considerazione. Innanzi tutto, data la piccolezza degli errori relativi con cui sono note le costanti fondamentali e , h , c , si può scrivere, in virtù della (2) :

$$\frac{\delta S_1}{S_1} = \frac{\delta F_1}{F_1} .$$

Inoltre, poichè tra l'intensità del campo \vec{H}_0 e lo spostamento x (parallelo all'asse X) della penna del Recorder vale la relazione :

$$H_0 = C x \quad (C > 0, \quad x \geq 0)$$

con^(x):

$$C = K \frac{1}{R} \frac{1}{S_x} ,$$

si ha che la semi-ampiezza dell'errore max connesso nella determinazione del valore di $1/H_0$ corrisponde ad un punto di massimo o minimo di una registrazione, è espressa dalla relazione :

$$\delta \left(\frac{1}{H_0} \right) = \frac{\delta H_0}{H_0} \frac{1}{H_0} = \left(\frac{\delta c}{c} + \frac{\delta x}{x} \right) \frac{1}{H_0} .$$

In essa δx è la semi-ampiezza dell'errore max commesso nella determinazione della ascissa x del punto considerato, e :

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{\delta K}{K} + \frac{\delta R}{R} + \frac{\delta S_x}{S_x} .$$

Nelle condizioni sperimentali in cui sono state ottenute le registrazioni di Fig. 14 si può assumere :

$$K = 44.8 \text{ Oe/Amp} , \quad R = 120 \times 10^{-6} \text{ ohm} ,$$

$$S_x = 0.200 \text{ inch/mVolt} = 5.08 \times 10^3 \text{ mm/Volt} ,$$

(x) - In questa relazione $K = H_0/i_0$ (Oe/Amp) è la costante caratteristica del solenoide che produce il campo di polarizzazione, R è il valore della resistenza inserita nel circuito del solenoide e $S_x = x/V$ (mm/Volt). La tensione $V = Ri_0$ è quella letta ai terminali della R e S_x rappresenta la sensibilità della scala X del Recorder. Combinando queste relazioni, si ha :

$$H_0 = K i_0 = K \frac{V}{R} = \left(K \frac{1}{R} \frac{1}{S_x} \right) x = C x .$$

$$\delta K/K = 5 \times 10^{-3}, \quad \delta R/R = 10^{-3}, \quad \delta S_x/S_x = 10^{-3},$$

pertanto :

$$\frac{\delta C}{C} = 7 \times 10^{-3}.$$

E' opportuno osservare che l'errore col quale è rilevata l'ascissa x di un punto di max o min di una registrazione è in effetti in gran parte di natura accidentale. Esso nasce infatti dalla valutazione soggettiva della posizione del max o min, valutazione che è resa spesso difficile da cause varie quali la piccola ampiezza delle oscillazioni^(x), il "noise" presente, lo spessore finito della traccia della penna, ecc. Inoltre, verso la fine della registrazione (cioè a valori di H_0 elevati) si verifica sistematicamente un appiattimento dei max o min causato dal progressivo allargamento dei periodi; questo effetto si combina talvolta con la riduzione di ampiezza dell'inviluppo in prossimità di uno zero della J_2 rendendo maggiormente incerto il rilevamento.

Nella zona intermedia delle registrazioni, dove in genere la posizione dei max e min è assai bene apprezzabile, si può stimare che la semi-ampiezza dell'errore max sia $\delta x \approx 0.5 \times 10^{-2} x$. Nei casi più sfavorevoli si può invece assumere $\delta x \approx 1.3 \times 10^{-2} x$. Pertanto si può stimare per i punti nella zona intermedia delle registrazioni :

$$\delta(1/H_0) \approx 1.2 \times 10^{-2} 1/H_0,$$

e :

$$\delta(1/H_0) \approx 2 \times 10^{-2} 1/H_0$$

nei casi più sfavorevoli.

Per il tracciamento delle rette di Fig. 15 e la determinazione delle loro pendenze (ossia delle F_1) si può dire che nella totalità dei casi osservati la strettissima disposizione di un gran numero di punti sperimentali (in alcuni casi anche 25 punti) lungo andamenti rettilinei, ha reso superfluo procedere alla determinazione delle "migliori rette" con il metodo dei "minimi quadrati". Si può approssimativamente stimare $\delta F_1/F_1$ con le considerazioni seguenti. Se la determinazione di F_1 fosse effettuata considerando $(n_k - n_1)$ periodi di oscillazione e determinando soltanto x_1 e x_k con gli errori max corrispondenti, si otterrebbe^(o) :

(x) - Questo fatto si verifica sistematicamente all'inizio delle registrazioni (cioè a bassi valori di H_0).

(o) - La quantità $\text{tg } \gamma$ rappresenta ovviamente la pendenza della retta passante per i due punti $(1/x_1, n_1)$ e $(1/x_k, n_k)$.

$$F_1 = \frac{\frac{n_k - n_i}{1} - \frac{1}{H_{0,i}}}{\frac{1}{H_{0,k}} - \frac{1}{H_{0,i}}} = c \frac{\frac{n_k - n_i}{1} - \frac{1}{x_i}}{\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_k}} = c \operatorname{tg} \gamma$$

($n_k > n_i$)

con un errore relativo :

$$\frac{\delta F_1}{F_1} = \frac{\delta c}{c} + \frac{\delta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \gamma} ,$$

dove :

$$\frac{\delta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\delta x}{x} \left(\frac{x_k + x_i}{x_k - x_i} \right) , \quad \text{e} \quad \frac{\delta x_i}{x_i} \approx \frac{\delta x_k}{x_k} = \frac{\delta x}{x} .$$

L'errore calcolato è certamente più grande di quello in effetti commesso. Infatti la determinazione di F_1 è in realtà effettuata tracciando visualmente la retta che meglio si adatta alla distribuzione dei $[2(n_k - n_i) + 1]$ punti sperimentali disponibili. Se si indica con $\overline{\operatorname{tg} \gamma}$ la pendenza di questa retta nel grafico $(n - n_0)$ vs. $1/x$, si può scrivere :

$$F_1 = c \overline{\operatorname{tg} \gamma} \quad \text{e} \quad \frac{\delta F_1}{F_1} = \frac{\delta c}{c} + \frac{\delta \overline{\operatorname{tg} \gamma}}{\overline{\operatorname{tg} \gamma}} .$$

Dall'esame dei risultati di Fig. 15 si può approssimativamente stimare che per la maggioranza delle rette ottenute l'incertezza complessiva nella determinazione della pendenza risulti $2 \delta \overline{\operatorname{tg} \gamma} \approx \approx 2 \delta \overline{\gamma} \approx (1/3)^\circ$. Essendo poi : $0.6 < \overline{\operatorname{tg} \gamma} < 6$, si ha in definitiva:

$$\frac{\delta S_1}{S_1} = \frac{\delta F_1}{F_1} = (0.7 \div 1.2) \times 10^{-2} .$$

Come mostra la fig. 7, che riporta anche le curve teoriche di $S_m(\gamma)$ calcolate in base al modello di Jones-Shoemberg ed ai valori di E_0 ed $m_{i,k}$ dati al § 3, le frequenze osservate sono attribuibili alle sezioni estremali dei due ellissoidi elettronici disposti a $\pm 120^\circ$ rispetto all'asse binario, coincidente approssimativamente con l'asse geometrico del cristallo utilizzato. Si può dire anche che, per quanto riguarda le parti osservate della S. F. elettronica del bismuto, l'accordo tra i risultati sperimentali e le previsioni teoriche appare veramente soddisfacente. Il valore più elevato osservato per le sezioni estremali S_1 supera i $15 \times 10^{-42} \text{ gr}^2 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$ e corrisponde ad una sezione di un ellissoide elettronico effettuata normalmente ad una direzione contenuta nel piano normale all'asse trigonale e formante un angolo di

$\sim 3^{\circ}30'$ rispetto all'asse binario. Nelle condizioni sperimentali descritte non è stato possibile osservare sezioni estremali S_1 ad angoli minori di questo; ciò si ritiene dovuto a cause fisiche quali la rapida diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni $\mathcal{F}_{1,j}$ (cfr. le (6) e (7)) conseguente al rapido aumento della "massa di ciclotrone" m^* e alla rapida diminuzione del fattore $(\partial^2 S_1 / \partial p_{||}^2)^{-1/2}_{\text{extr}}$ quando l'angolo ψ approssima la direzione di un asse binario. Considerazioni quasi analoghe possono essere addotte per la mancata osservazione di oscillazioni prodotte dalle sezioni estremali della S. F. delle lacune. Infatti nel piano cristallografico esaminato è possibile prevedere, in base al modello di Abeles e Meiboom, un valore molto elevato e costante con l'angolo ψ della m^* .

In vista di uno studio più completo e dettagliato della S. F. del bismuto si pensa di incrementare la selettività dell'attuale apparato sperimentale rendendo indipendente rispetto al cristallo le direzioni della modulazione e l'asse del solenoide di prelievo e selezionando armoniche temporali di ordine più elevato. Si pensa anche di lavorare in condizioni fisiche più opportune abbassando la temperatura ($a \approx 0.1^{\circ}\text{K}$) con un criostato a He^3 o a miscela $\text{He}^3\text{-He}^4$ e innalzando il valore massimo del campo H_0 ($a \approx 25 \text{ KOe}$) con un magnete più idoneo.

RINGRAZIAMENTI.

E' nostro desiderio ringraziare i proff. M. H. Cohen e N. B. Brandt per le utili discussioni e suggerimenti, il prof. G. Sacerdoti per il costante incoraggiamento e supporto, ed i sigg. G. Pasotti e A. Bianchini per l'aiuto fornito durante le prove sperimentali.

Vogliamo anche ringraziare i dott. i G. Mazzone e M. Diana, del Laboratorio di Fisica Nucleare Applicata del C. S. N. della Casaccia, per la collaborazione fornita nella determinazione delle orientazioni del cristallo di Bi con la tecnica di raggi X.

BIBLIOGRAFIA. -

- (1) - J. M. Ziman, *Electrons and phonons* (Clarendon Press, 1960).
- (2) - C. Kittel, *Quantum theory of solids* (Wiley, 1964).
- (3) - A. B. Pippard, *Rep. Prog. Phys.* 23 (1961).
- (4) - D. Shoenberg and P. J. Stiles, *Proc. Roy. Soc.* A281, 62 (1964).
- (5) - D. Shoenberg, *Proc. IX Int. Conf. on Low Temp. Physics* (1964), p. 680.
- (6) - M. H. Cohen and L. M. Falicov, *Phys. Rev. Letters* 7, 231 (1961).
- (7) - D. Shoenberg, *Prog. Low Temp. Physics* (ed. by Gorter, 1957), vol. II, p. 255.
- (8) - W. J. de Haas and P. M. van Alphen, *Leiden Comm.* 208d, 212a (1930) e 220d (1933).
- (9) - R. Peierls, *Z. Physik* 81, 186 (1933).
- (10) - M. Blackman, *Proc. Roy. Soc.* A166, 1 (1938).
- (11) - D. Shoemberg, *Proc. Roy. Soc.* A170, 341 (1939).
- (12) - A. Akhiezer, *C. R. Acad. Sci. URSS* 23, 874 (1939).
- (13) - E. H. Sondheimer, A. H. Wilson, *Proc. Roy. Soc.* A210, 173 (1951).
- (14) - L. Onsager, *Phil. Mag.* 43, 1006 (1952).
- (15) - I. M. Lifshitz, *Comunicazione tenuta alla Accademia Ucraina delle Scienze, Gennaio 1951* (non pubblicata).
- (16) - I. M. Lifshitz and A. M. Kosevich, *Soviet Phys. - JETP* 2, 636 (1956).
- (17) - J. M. Ziman, *Principles of the theory of solids* (Cambridge Univ. Press, 1964), p. 274.
- (18) - C. Kittel, *Quantum theory of solids* (Wiley, 1964), p. 220.
- (19) - A. B. Pippard, *The dynamics of conduction electrons. Physique des basses temperatures*, Edited by C. De Witt et al. (Les Houches, 1961).
- (20) - R. B. Dingle, *Proc. Roy. Soc.* A211, 517 (1952).
- (21) - Y. A. Bychkov, *Soviet Phys. - JETP* 12, 977 (1961).
- (22) - R. J. Sladek, *Phys. Rev.* 108, 590 (1957).
- (23) - M. H. Cohen and E. I. Blount, *Phil. Mag.* 5, 115 (1960).
- (24) - J. M. Luttinger, *Phys. Rev.* 121, 1251 (1961).
- (25) - S. J. Williamson, S. Foner and R. A. Smith, *Phys. Rev.* 136A, 1065 (1964); L'espressione riportata di M_{osc} è stata ottenuta per derivazione rispetto ad H , assumendo T costante, della espressione (12) della componente oscillatoria della energia libera fornita dagli autori suddetti. Si è fatto solamente l'ipotesi, correntemente accettata, che l'ampiezza di tale componente sia funzione lentamente variabile di H .
- (26) - J. M. Ziman, *Principles of the theory of solids* (Cambridge Univ. Press, 1964); p. 147.
- (27) - J. M. Ziman, *c. s.*, p. 250.
- (28) - Y. Saito, *J. Phys. Soc. Japan* 18, 1845 (1963).
- (29) - G. E. Smith et al., *Phys. Rev.* 135A, 1118 (1964).
- (30) - W. S. Boyle and G. E. Smith, *Progr. Semicond.* 7, 1 (1963).
- (31) - H. Jones, *The theory of Brillouin zones and electronic states in crystal* (North Holland Publ. Co., 1964), p. 55.

- (32) - M. H. Cohen, Phys. Rev. 121, 387 (1961).
- (33) - H. Jones, Proc. Roy. Soc. A147, 369 (1934); A155, 653 (1963).
- (34) - D. Shoenberg, Proc. Roy. Soc. A170, 341 (1939).
- (35) - B. Lax, Bull. Am. Phys. Soc. 5, 167 (1960); Phys. Rev. Letters 5, 241 (1960).
- (36) - S. Masc, J. Phys. Soc. Japan 13, 434 (1958); 14, 584 (1959).
- (37) - B. Abeles and S. Meiboom, Phys. Rev. 101, 544 (1956).
- (38) - G. E. Smith, Phys. Rev. Letters 9, 487 (1962).
- (39) - N. B. Brandt, Soviet Phys. -JETP 38, 1355 (1960).
- (40) - A. A. Abrikosof and L. A. Falkovskii, Soviet Phys. -JETP 16, 769 (1963).
- (41) - S. Golin, Band structure of bismuth pseudopotential approach, Internal Report, Univ. of Illinois, Urbana (USA).
- (42) - D. Shoenberg and P. J. Stiles, Phys. Letters 4, 274 (1963).
- (43) - D. Shoenberg and P. J. Stiles, Proc. Roy. Soc. A281, 62 (1964).
- (44) - A. Goldstein et al., Rev. Sci. Instr. 36, 1356 (1965).
- (45) - L. R. Windmiller, Phys. Rev. 149, 472 (1966).
- (46) - R. M. Bozorth, Ferromagnetism (Van Nostrand, 1954).
- (47) - P. B. Alers and R. T. Weber, Phys. Rev. 91, 1060 (1953).
- (48) - I. M. Lifshitz, M. I. Azbel and M. I. Kaganov, Soviet Phys. -JETP 4, 41 (1957).
- (49) - A. Bass, M. I. Kaganov, and M. Slezov, Phys. Metals Metall. 5, N. 3, 24 (1953).
- (50) - M. D. Hunt, J. A. Spittle and R. W. Smith, J. Sci. Instr. 44, 230 (1967).
- (51) - E. Janhke, E. Emde and M. Lösch, Tables of higher functions (Teubner, 1960).