COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 67/61
31 Ottobre 1967

P. Spillantini e V. Valente : ANALISI STATISTICA DEI DATI NELLA MISURA DELLA ASIMMETRIA NELLA FOTOPRODUZIONE DI PIONI DA GAMMA POLARIZZATI. -

(Nota interna : n. 379)

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Servizio Documentazione

LNF-67/61

Nota interna: n. 379
31 Ottobre 1967

P. Spillantini e V. Valente: ANALISI STATISTICA DEI DATI NELLA MISURA DELLA ASIMMETRIA NELLA FOTOPRODUZIONE DI PIONI DA GAMMA POLARIZZATI. -

INTRODUZIONE. -

Nell'esperimento di misura dell'asimmetria nella fotoproduzione singola di π^+ da γ linearmente polarizzati(1) sono stati raccolti complessivamente più di 10^6 π^+ distribuiti in 7 angoli nel c. m. ed a 14 energie del γ.

Le misure erano particolarmente delicate perché il loro risultato si esprime essenzialmente come differenza tra due numeri di conteggi diversi tra loro solo di qualche percento.

E' stato pertanto necessario affrontare l'analisi statistica dei dati raccolti con criteri oggettivi e rigidi. Tutti i dati sono stati analizzati ed elaborati complessivamente con un solo programma di calcolo, cui nel seguito si farà riferimento con la sigla GED(x), che esegue anche le verifiche più significative sui risultati ottenuti. L'utilità di organizzare in modo generale e completo il lavoro di analisi statistica deriva, oltre che dalla necessità di analizzare la consistenza delle nostre misure, dalla opportunità di trasmettere criteri e "subroutines" utilizzabili per trattare i dati di analoghi esperimenti di misura di asimmetria.

Alla descrizione delle operazioni eseguite dal programma GED premettiamo una breve descrizione della logica della misura (§ I) e dell'apparato sperimentale (§ II)(o); successivamente (§ III) si espongono i criteri usati per fare il controllo di stabilità dei contatori in

---

(x) - GED (General Elaboration Data) è un programma in linguaggio FORTRAN IV scritto per l'elaboratore 7040 IBM.

(o) - Dettagli al riguardo si trovano in (1).

ogni blocco di misura e durante l'esperienza, ed i criteri in base ai quali si sono accettati i risultati. In particolare richiamiamo l'attenzione del lettore sui seguenti punti di più generale interesse: l'andamento dei vari contributi all'errore sulla asimmetria (Appendice A), il modo di correggere i conteggi ottenuti in base agli spettri misurati (§ I e tabella I), il criterio adottato per lo scarto delle singole misure (§ III - B) il criterio della probabilità della "skewness" adottato in aggiunta all'usuale criterio della probabilità di χ^2 (§ III - C e appendice D) e l'analisi di consistenza statistica sui risultati (§ III - F).

TABELLA I

Correzione di $N_\gamma(E_\gamma)$ - (Correzione di spettro)

Turni del 1. 6. 66 — $\theta_{CM} = 90^o$ E_γ centrale = 390 MeV

	Energia centrale della banda (MeV)		436	423	410	397	383	370	358	346
MISURE 1 ÷ 10	Pos. $C_\perp$ Spettro I $E_{picco} = 464.5$	$N_\gamma(E_\gamma)$ (unità arbitraria)	2.07	1.99	1.91	1.82	1.72	1.63	1.56	1.51
		Polarizzazione calcolata	.388	.312	.284	.255	.226	.198	.172	.145
MISURE 53 ÷ 60	Pos. $C_\parallel$ Spettro 2 $E_{picco} = 462.5$	$N_\gamma(E_\gamma)$ (unità arbitraria)	2.07	1.98	1.89	1.80	1.69	1.61	1.57	1.54
		Polarizzazione calcolata	.353	.317	.288	.259	.230	.202	.176	.149
	Fattore di correzione α per $C_\parallel$ ($\alpha = \frac{(N_\gamma)_\parallel}{(N_\gamma)_\perp}$)		1.000	1.015	1.005	1.010	1.015	1.010	1.990	0.980
	Polarizzazione media		.370	.314	.286	.257	.228	.200	.174	.147

I. - CALCOLO DELL'ASIMMETRIA PARTENDO DAL NUMERO DI PIONI RACCOLTI. -

Come è noto[1] le misure con γ linearmente polarizzati si possono esprimere mediante l'asimmetria A, definita come:

$$A(\theta, E_\gamma) = \frac{\sigma_\perp(\theta, E_\gamma) - \sigma_\parallel(\theta, E_\gamma)}{\sigma_\perp(\theta, E_\gamma) + \sigma_\parallel(\theta, E_\gamma)}$$

$\sigma_\perp$ ($\sigma_\parallel$) sono le sezioni d'urto differenziali di fotoproduzione singola da γ con vettore elettrico perpendicolare (parallelo) al piano di produzione del pione, cioè con polarizzazione, P, uguale a + 1 (- 1) (P è definita da $P = (N_\perp - N_\parallel)/(N_\perp + N_\parallel)$, con $N_\perp$ e $N_\parallel$ numero di γ con vettore elettrico rispettivamente perpendicolare e parallelo al piano di produzione del pione).

Il fascio γ usato per l'esperimento è quello coerente da monocristallo di diamante, già descritto altrove[1, 2]. L'andamento della sua intensità con l'energia del γ, $I(E_\gamma)$ (comunemente detta "spettro" del fascio: vedi Fig. 1) dipende dalla orientazione degli assi cristallografici rispetto alla direzione del fascio di elettroni incidente.

La riproducibilità degli spettri per uno stesso posizionamento del cristallo è di qualche % a tutte le energie. Ciò fa sì che a parità di

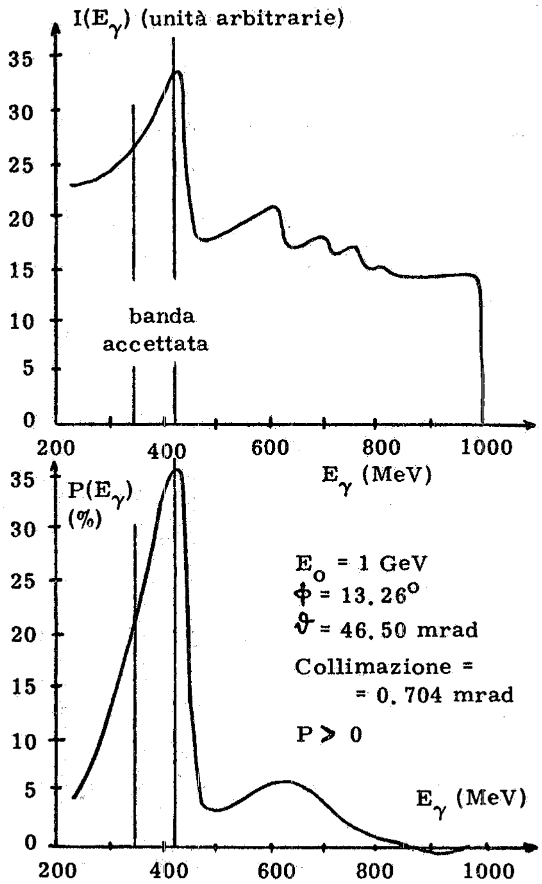


FIG. 1

dose raccolta (integrale di I(E_γ)) il numero di fotoni nella banda accettata dal dispositivo sperimentale possa di volta in volta variare di tale percentuale; i numeri dei pioni raccolti vanno dunque corretti per tali variazioni. A tale scopo, scelto uno degli spettri come riferimento, si rapportano, zona per zona, ad esso tutti gli altri. Un esempio di questo modo di procedere per un caso particolare è in Tabella I.

Indicando con $C_\perp$ e $C_\parallel$ i numeri di pioni raccolti per le due orientazioni del cristallo, cioè $P < 0$ e $P > 0$, rispettivamente corretti per le variazioni nello spettro γ, si ottiene la asimmetria nella fotoproduzione singola di pioni dalla formula (1):

$$(1) \qquad A = \frac{1}{P}\,\frac{(C_\perp - B_\perp) - (C_\parallel - B_\parallel)}{(C_\perp - B_\perp) + (C_\parallel - B_\parallel)}$$

$B_\perp$ (e $B_\parallel$) è il numero di pioni per dose prodotti da processi diversi dalla fotoproduzione singola e costituisce il "fondo della misura". Tale fondo è costituito quasi esclusivamente da pioni prodotti nei processi di fotoproduzione multipla: quindi, poiché nella regione che contribuisce alla fotoproduzione multipla (vedi Fig. 1) è $P(E_\gamma) \simeq 0$(x) è $B_\perp = B_\parallel = B$. Si ha perciò

$$(2) \qquad A \simeq \frac{1}{P}\,\frac{C_\perp - C_\parallel}{C_\perp + C_\parallel - 2B}$$

Detti ΔP, $\Delta C_\perp$, $\Delta C_\parallel$, B gli errori su P, $C_\perp$, $C_\parallel$, e B si ha (vedi Appendice A):

$$(3) \qquad \Delta A = \sqrt{\left(\frac{2}{P}\,\frac{C_\perp - \frac{B}{C_\parallel} - B}{\left(\frac{C_\perp - B}{C_\parallel - B}+1\right)^2}\right)^2 \left[\left(\frac{\Delta C_\perp}{C_\perp - B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_\parallel}{C_\parallel - B}\right)^2 + \left(\frac{\frac{C_\perp - C_\parallel}{B}}{\frac{C_\perp - C_\parallel}{B^2} - \frac{C_\perp + C_\parallel}{B} + 1}\,\frac{\Delta B}{B}\right)^2\right] + A^2\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2}$$

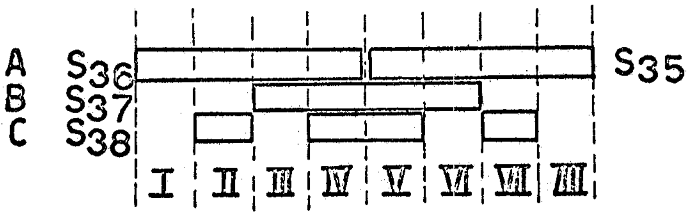
(x) - Fin quando ci si limiti a misure con $E_\gamma \lesssim 500$ MeV.

II. - METODO DI RACCOLTA DEI DATI. - PRESELEZIONE DELLE MISURE. -

Prima di procedere oltre premettiamo alcune informazioni sul dispositivo sperimentale e sul metodo di raccolta dei dati.

Il dispositivo sperimentale consiste di un magnete deflettore a focalizzazione forte e di un odoscopio di contatori, ed è stato già descritto in dettaglio[1]; qui è sufficiente accennare all'odoscopio di contatori che permette di dividere l'accettanza totale in momento in 8 canali di momento contigui.

L'odoscopio consiste di quattro contatori: S_{35}, S_{36}, S_{37}, S_{38}; La somma geometrica di S_{35} e S_{36} ($S_3 = S_{35} + S_{36}$) definisce l'accettanza in momento del dispositivo; le combinazioni logiche di S_{36}, S_{37}, S_{38} individuano invece gli otto canali in cui tale accettanza è divisa. La Fig. 2 mostra come tale suddivisione è realizzata.



I	$A\bar{B}\bar{C}$
II	$A\bar{B}C$
III	$AB\bar{C}$
IV	ABC
V	$\bar{A}BC$
VI	$\bar{A}B\bar{C}$
VII	$\bar{A}\bar{B}C$
VIII	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

Logica per la selezione del canale in momento

FIG. 2 - Odoscopio per la canalizzazione in momento.

Il contenuto di ciascun canale è presentato su scale; una ulteriore scala dà il numero totale dei pioni raccolti ($Q\bar{C}$). Per chiarezza ci rifaremo nel seguito alle definizioni seguenti:

a) Una misura consiste nella registrazione del numero di dosi di fascio e dei contenuti delle scale per $Q\bar{C}$ e per gli otto canali I, II, III. . . . VIII.

b) Un blocco di misure consiste di tutte le misure direttamente confrontabili (anche se non consecutive), cioè fatte nelle stesse condizioni cinematiche, con lo stesso segno di P e durante lo stesso gruppo di turni macchina consecutivi.

c) Un punto sperimentale è ricavato dai due blocchi di misure per $P > 0$ e $P < 0$ fatti nelle stesse condizioni cinematiche e durante lo stesso gruppo di turni macchina.

Dal nostro esperimento si sono accettate[x] per l'analisi stati-

---

(x) - Sono state scartate le misure per le quali la somma dei conteggi negli otto canali di momento era diversa dal conteggio nella scala QC, e quelle per le quali c'erano incertezze nella conoscenza del relativo spettro $I(E_\gamma)$.

stica 853 misure su 37 punti sperimentali, per un totale di 9 10^5 pioni. Ciascuna di esse, dopo essere stata corretta per i fattori α di correzione di spettro (vedi tab.I) è riportata su scheda perforata con tutte le indicazioni che servono ad identificarla (numero d'ordine, segno di P, E_γ , ϑ_{CM}, data). Utilizzando tali schede il programma GED fa una analisi di consistenza delle misure per ciascun blocco (§ III - B e C), e dà (sotto forma di tabelle e grafici) i risultati relativi alla consistenza delle misure ed alla stabilità dei contatori sull'esperimento (§ III - D), calcola le asimmetrie A (§ III - E) e stampa infine le tabelle ed i grafici dei risultati, facendo anche su di essi la analisi di consistenza (§ III - F).

A) - Raggruppamento dei canali di momento. -

La suddivisione negli otto canali di momento I,...... VIII è sovrabbondante per i nostri scopi: quindi GED somma il contenuto dei canali a due a due ottenendo una suddivisione dei conteggi in quattro canali che indicheremo simbolicamente 1 = I + II, 2 = III + IV, 3 = V + VI, 4 = VII + VIII(x) (i numeri romani si riferiscono alla canalizzazione di partenza).

Il programma memorizza per le successive elaborazioni il contenuto dei canali 1, 2, 3, 4 ed VIII, e dei contatori, (ancora simbolicamente) S_{36} = 1 + 2, S_{35} = 3 + 4, S_{37} = 2 + 3.

B) - Criteri adottati per scartare singole misure. -

GED calcola le medie con i rispettivi errori per S_{35}, S_{36} e VIII canale, e gli scarti (in numero di "standard deviations") delle singole misure rispetto a queste medie. Quindi calcola uno scarto limite (vedi Appendice B) tale che la sua probabilità integrale sia $P(\xi_L) = K/N$, dove N = numero di misure, e K = 0,15 (si impone in tal modo un taglio abbastanza severo sulle misure da accettare; infatti ξ_L viene così a variare fra 2 e 3). GED accetta per l'elaborazione successiva solo quelle misure i cui scarti nello VIII canale non superano ξ_L (vedi in Fig. 3 la distribuzione degli scarti nel canale VIII per tutta l'esperienza e nota (x)).

Con lo stesso taglio ξ_L vengono scartate le misure in S_{35} e S_{36} (indipendentemente nell'uno e nell'altro), mentre in S_{37} (data la sua posizione geometrica) vengono eliminate sia le misure scartate in S_{35} che in S_{36}. Vengono infine ricalcolate tutte le medie.

(x) = Si noti che il raggruppamento fatto fa sì che le ulteriori analisi prescindono dal comportamento del contatore S_{38}; solo il canale VIII è riportato separatamente, in quanto una qualunque anomalia nel dispositivo (calo di efficienza di un contatore, perdite elettroniche nella catena di elaborazione, anormale affollamento di un contatore, ecc.) si ripercuote in un andamento anomalo dei conteggi in tale canale, caratterizzato logicamente da solo anticpincidenze.

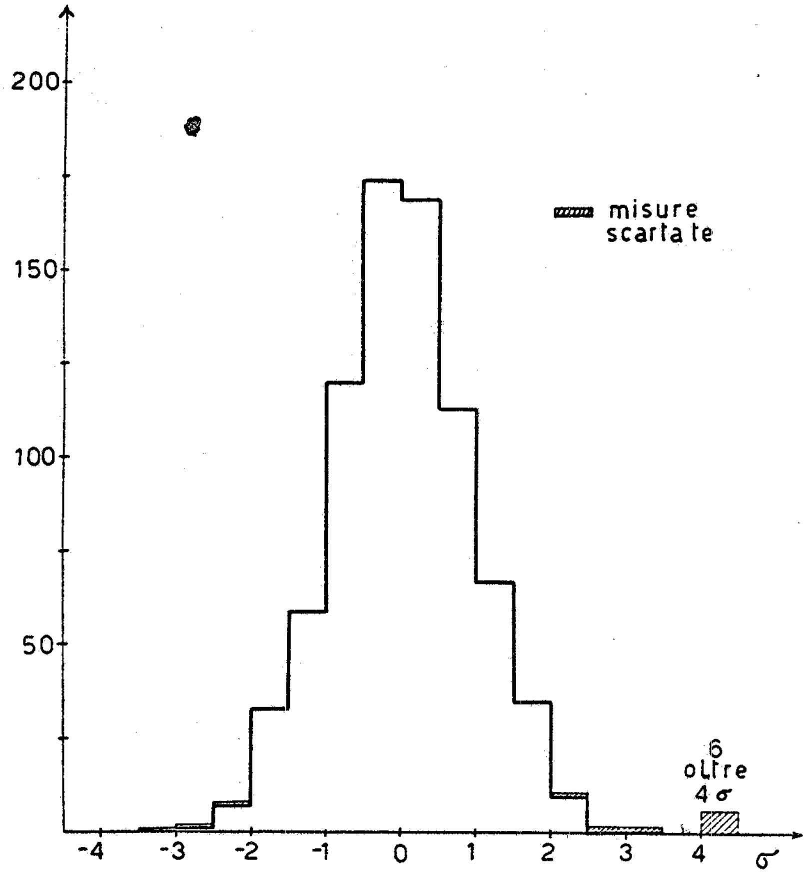


FIG. 3 - Istogramma scarti sul canale VIII rispetto alle medie parziali.

C) - Criteri adottati per scartare blocchi di misure. -

Per ciascun blocco di misure si calcolano e si memorizzano le seguenti quantità:

1) Il numero (NSC) di misure scartate, il numero (N) di misure accettate ed il loro rapporto (PSC = NSC/N);
2) Il valore della funzione χ^2 per la distribuzione delle misure e la sua probabilità integrale $P(\chi^2)$ (per il significato e le formule vedi Appendice C);
3) Il valore della skewness α e la sua probabilità integrale $P(\alpha)$ (vedi Appendice D);
4) Il numero (NU) di pioni utilizzati.

Il blocco di misure è accettato per il calcolo della asimmetria se le quantità calcolate in 1), 2), 3) soddisfano le seguenti richieste:

a) NSC $\leq$ KN (con K = 0.15), tranne il caso in cui sia NSC = 1 (cioè si accetta sempre uno scarto per blocco di misure);
b) $P(\chi^2) > K/N$ (in pratica $> 0.02 \div 0.03$) con K = 0.15 coerentemente a quanto già fatto per le singole misure;
c) $P(\alpha) > K/N$ (ancora K = 0.15).

D) - Stabilità delle misure: tabelle e grafici riassuntivi.

I risultati dell'esame statistico fatto in C) sono sommati su:

1) tutti i blocchi di misure corrispondenti ad uno stesso segno della polarizzazione P del fascio γ, su ciascun gruppo di turni macchina;
2) tutti i blocchi di misure con lo stesso segno della polarizzazione P su tutta l'esperienza;
3) ogni gruppo di turni macchina e tutta l'esperienza, sommando anche sul segno della polarizzazione P;

e sono presentati per mezzo di

- il grafico degli scarti e il numero totale di misure scartate in S_{35}, S_{36}, S_{37} per ciascun gruppo di turni macchina (vedi Appendice E e Fig. 4);
- l'istogramma del numero di misure in funzione dello scarto per S_{35}, S_{36}, S_{37} per ciascun gruppo di turni macchina (vedi Appendice E e Fig. 5);
- l'istogramma analogo (vedi Fig. 6) e l'istogramma dei valori ottenuti per la "skewness" α (vedi Fig. 7 e Appendice D) per S_{35}, S_{36}, S_{37} relativi a tutto l'esperimento;
- la tabella delle quantità N, NSC, χ^2, α, NU sommate su tutto l'esperimento (vedi tabella II).

Tale presentazione serve per controllare se tutte le quantità calcolate seguono, entro i limiti di confidenza imposti, l'andamento previsto dalla statistica(x).

E) - Calcolo delle asimmetrie A. -

Per ogni situazione cinematica il programma calcola l'energia centrale di ciascuno dei canali di momento 1, 2, 3, 4, e la loro risoluzione.

Dai due blocchi di misure per $P > 0$ e $P < 0$ fatti nella stessa situazione cinematica e durante lo stesso gruppo di turni macchina calcola in S_{35}, S_{36} e nei canali di momento 1, 2, 3, 4 la asimmetria A con il

---

(x) - E' risultato che tutte le distribuzioni relative a ciascun gruppo di turni macchina soddisfano le richieste (a), (b) e (c) in C), tranne quella di S_{36} nel gruppo di turni macchina del 13/7/1966 (non soddisfa la richiesta a)), i cui risultati sono tuttavia scartati in base ai criteri in F). Dalla tabella III risulta per il livello di confidenza medio su tutto l'esperimento:

$P(\chi^2) = 56\%$ $\quad [\chi^2 = 1363;$ gradi di libertà $1446]$

$P(\alpha) = 72\%$ $\quad [\alpha = -0.016]$

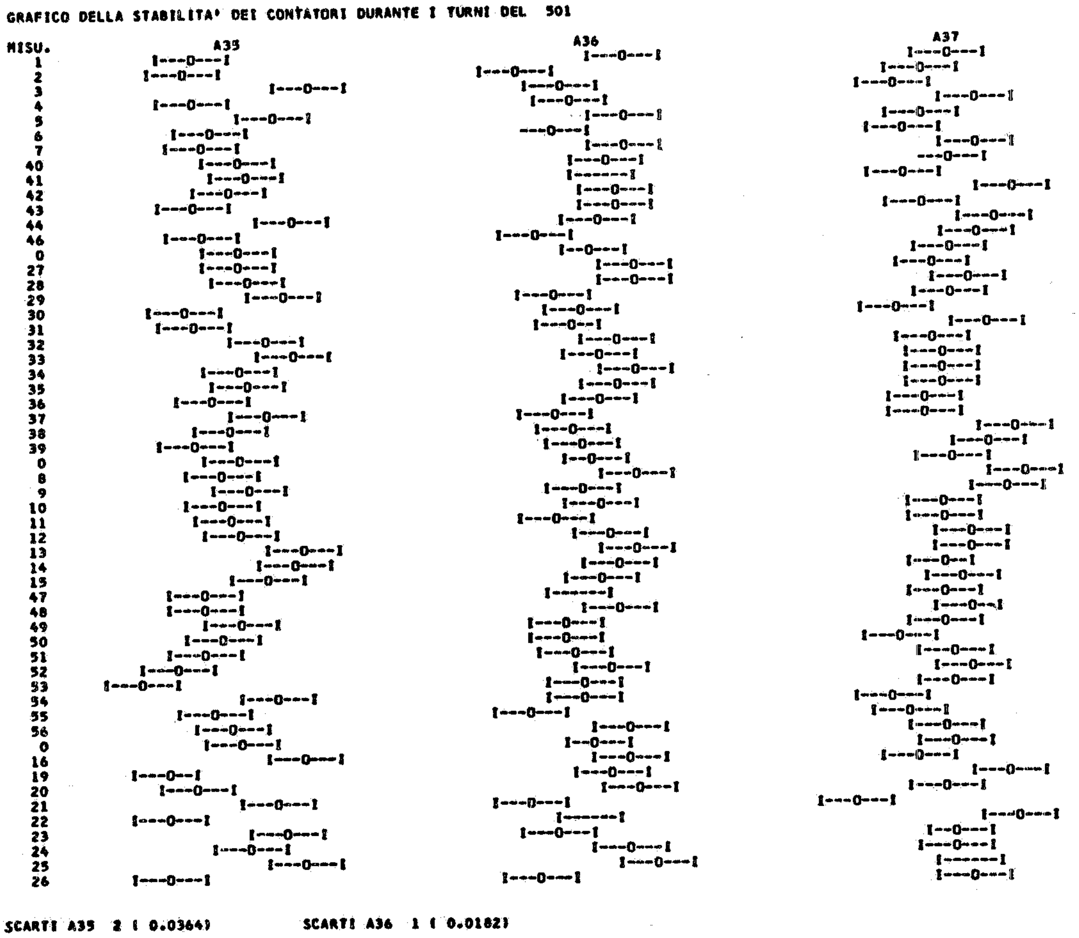


GRAFICO DELLA STABILITA' DEI CONTATORI DURANTE I TURNI DEL 501
MISU.
A35
A36
A37
SCARTI A35 2 (0.0364)
SCARTI A36 1 (0.0182)

FIG. 4

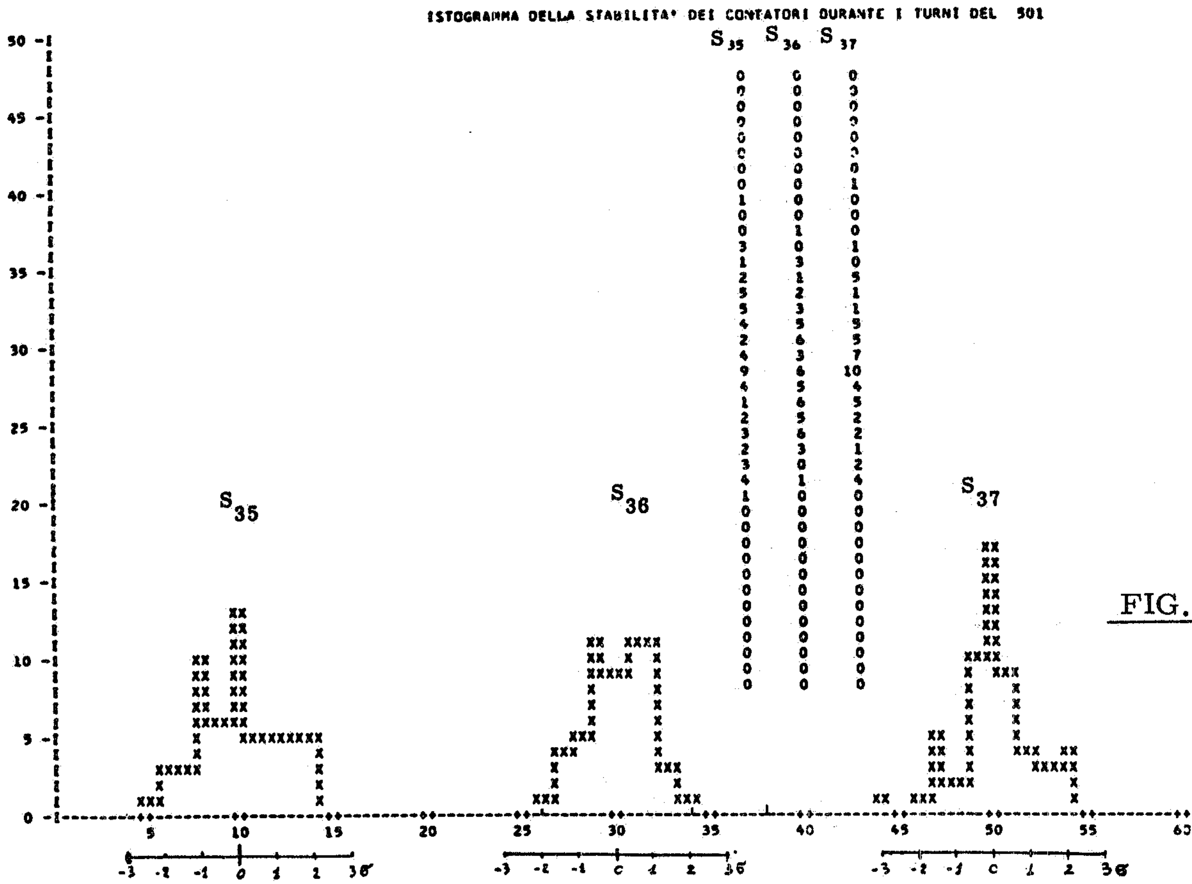

ISTOGRAMMA DELLA STABILITA' DEI CONTATORI DURANTE I TURNI DEL 501
S35
S36
S37

FIG. 5

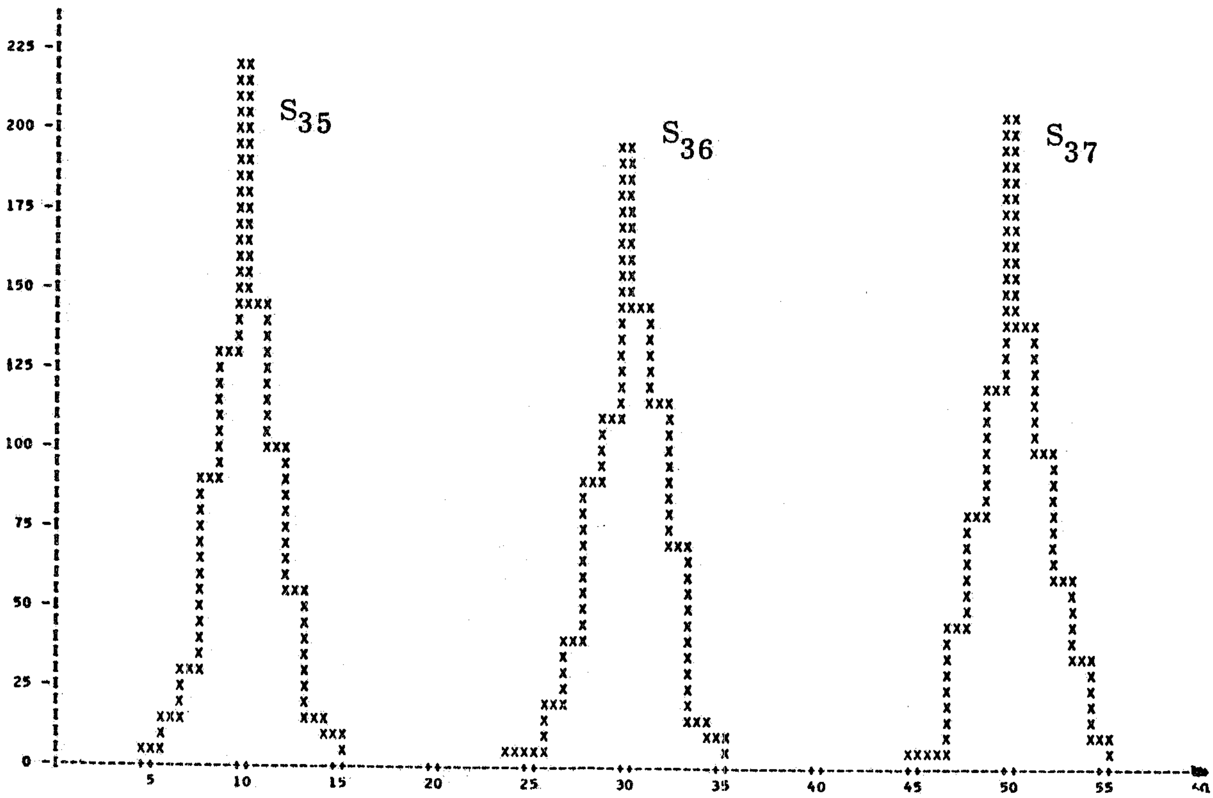


FIG. 6 - Distribuzione degli scarti dei conteggi nel nostro esperimento.

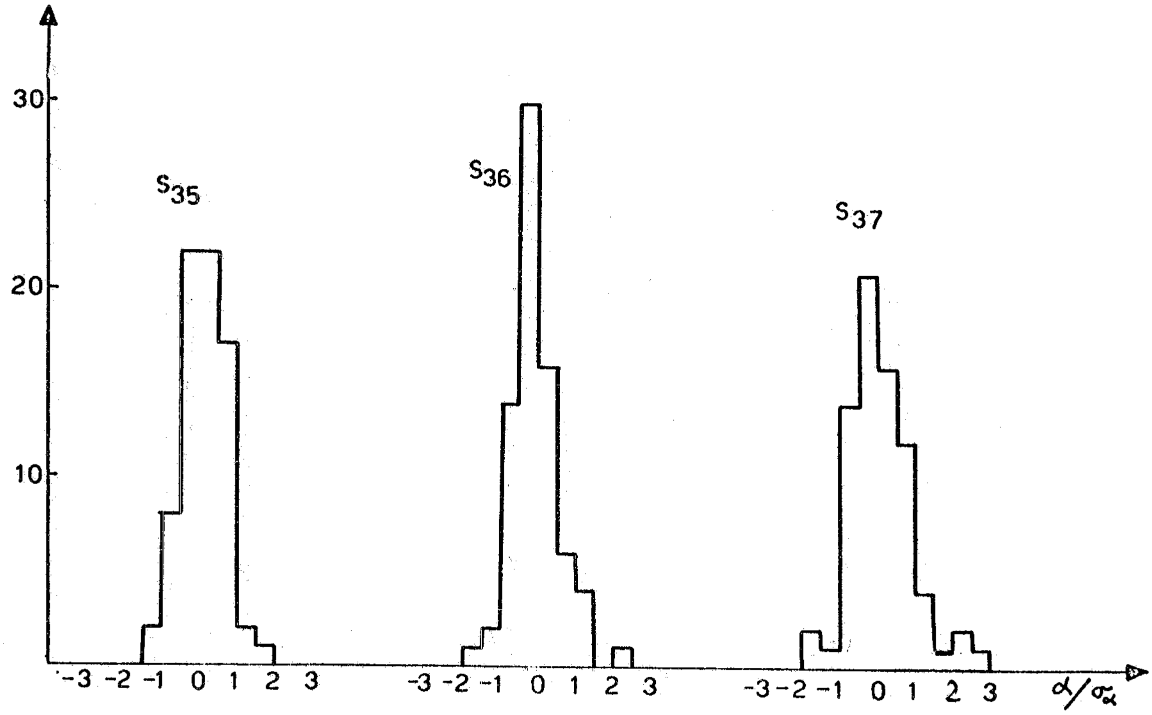


FIG. 7 - Distribuzione degli scarti della "skewsness" nel nostro esperimento.

TABELLA II

TABELLE RIASSUNTIVE DELLA STABILITA' DEI CONTATORI - RIASSUNTO PER BLOCCHI DI TURNI E RIASSUNTO TOTALE

TURNI DEL		$35	PCHI(CHI)	SKEWNESS	$36	PCHI(CHI)	SKEWNESS	$37	PCHI(CHI)	SKEWNESS	PIONI IN $35	E $36
1810	1	11	0.668(5.82)	0.795	13	0.434(10.09)	-0.453	10	0.295(8.46)	0.494	10787.	7162.
1810	2	18	0.968(6.64)	-0.154	19	0.581(14.25)	0.930	17	0.478(13.63)	0.240	14654.	8971.
1810	1+2	29	0.964(12.46)	0.414	32	0.558(24.34)	0.263	27	0.395(22.10)	0.333	25441.	16133.
1012	1	32	0.787(21.91)	-0.821	36	0.004(58.21)	0.240	32	0.807(21.46)	0.300	25899.	17650.
1012	2	38	0.635(30.63)	-0.279	39	0.507(34.22)	-0.122	38	0.460(34.17)	-0.508	20147.	13857.
1012	1+2	70	0.800(52.54)	-0.545	75	0.023(92.42)	0.165	70	0.704(55.63)	-0.268	46046.	31507.
1303	1	30	0.187(33.33)	0.032	30	0.113(36.13)	0.448	30	0.065(38.96)	0.078	20166.	12805.
1303	2	32	0.861(20.98)	-0.403	32	0.449(29.32)	-0.599	32	0.325(31.91)	0.200	18948.	11951.
1303	1+2	62	0.540(54.31)	-0.107	62	0.183(65.45)	0.030	62	0.088(70.87)	0.131	39114.	24756.
604	1	21	0.548(18.62)	0.270	21	0.070(30.08)	-0.608	21	0.331(22.20)	-0.084	4189.	1795.
604	2	14	0.013(27.10)	0.094	14	0.410(13.51)	0.167	14	0.996(3.64)	0.800	4254.	1865.
604	1+2	35	0.070(45.71)	0.161	35	0.104(43.59)	-0.365	35	0.809(25.84)	-0.036	8443.	3660.
2805	1	38	0.939(24.01)	0.628	38	0.375(38.11)	-0.500	38	0.947(23.53)	-0.058	14003.	6646.
2805	2	38	0.275(40.63)	0.401	38	0.946(23.55)	0.375	38	0.144(45.06)	-0.185	14106.	6629.
2805	1+2	76	0.720(64.65)	0.488	76	0.804(61.65)	-0.200	76	0.593(68.59)	-0.155	28109.	13275.
107	1	37	0.781(28.34)	0.229	37	0.178(42.57)	-0.239	37	0.001(181.14)	-0.367	21689.	15308.
107	2	25	0.033(37.10)	-0.193	25	0.499(22.38)	0.174	25	0.010(41.87)	2.024	16257.	11962.
107	1+2	62	0.235(65.44)	-0.051	62	0.249(64.95)	-0.104	62	0.001(223.01)	-0.103	37946.	27270.
3007	1	9	0.354(8.88)	-0.842	9	0.387(8.50)	-0.618	9	0.117(12.87)	-0.616	4567.	4594.
3007	2	10	0.892(4.30)	-0.375	10	0.155(13.19)	-0.473	10	0.198(12.29)	1.138	4326.	4063.
3007	1+2	19	0.726(13.17)	-0.760	19	0.198(21.69)	-0.530	19	0.092(25.16)	0.250	8893.	8657.
2409	1	17	0.023(27.99)	-0.219	15	0.641(10.65)	0.116	15	0.541(11.85)	0.068	4535.	6091.
2409	2	21	0.680(15.68)	0.058	20	0.180(23.32)	-0.101	18	0.419(16.51)	1.035	7125.	10315.
2409	1+2	38	0.125(43.67)	-0.142	35	0.327(33.97)	-0.050	33	0.500(28.35)	0.608	11660.	16406.
501	1	29	0.320(29.89)	0.626	30	0.887(19.39)	-0.570	28	0.419(26.84)	+0.363	18807.	17603.
501	2	22	0.023(34.61)	-0.250	22	0.354(21.78)	-0.083	22	0.196(25.16)	-0.552	12260.	10270.
501	1+2	51	0.047(64.51)	0.124	52	0.748(41.17)	-0.294	50	0.253(52.01)	-0.472	31067.	27873.
1401	1	63	0.667(51.92)	0.093	62	0.499(55.40)	-0.305	61	0.567(52.63)	0.687	41275.	47627.
1401	2	63	0.755(49.35)	-0.281	61	0.441(55.92)	-0.167	59	0.282(58.49)	1.007	34019.	33801.
1401	1+2	126	0.798(101.27)	-0.079	123	0.475(111.32)	-0.239	120	0.400(111.11)	0.880	75294.	81428.
803	1	44	0.752(32.70)	0.109	41	1.001(13.99)	-0.619	40	0.844(26.67)	0.512	36169.	47563.
803	2	44	0.982(22.96)	0.636	40	0.244(40.43)	0.266	38	0.600(30.37)	-0.304	23916.	32073.
803	1+2	88	0.975(55.66)	0.293	81	0.929(54.42)	0.086	78	0.827(57.03)	0.024	60085.	79636.
106	1	23	0.142(25.64)	0.420	23	0.329(21.15)	-0.600	23	0.410(19.76)	-0.233	19130.	17450.
106	2	30	0.985(13.00)	0.555	30	0.554(24.40)	-0.628	29	0.136(32.84)	-0.576	16592.	14684.
106	1+2	53	0.738(38.64)	0.525	53	0.450(45.55)	-0.623	52	0.176(52.60)	-0.495	35722.	32134.
1307	1	30	0.494(27.47)	0.445	26	0.233(28.70)	-0.293	26	0.001(61.33)	0.322	9871.	9392.
1307	2	28	0.960(14.88)	1.682	22	0.471(19.80)	-0.548	22	0.293(22.94)	0.376	9929.	8613.
1307	1+2	58	0.876(42.35)	0.825	48	0.297(48.50)	-0.395	48	0.001(84.27)	0.355	19800.	18005.
TOTALE 1		384	0.648(336.53)	0.152	381	0.137(372.98)	-0.185	370	0.001(507.68)	-0.160	231087.	211686.
TOTALE 2		383	0.860(317.85)	0.160	372	0.475(335.05)	-0.315	362	0.048(368.89)	0.147	196533.	169054.
TOTALE 1+2		767	0.852(654.38)	0.075	753	0.207(709.03)	-0.148	732	0.001(876.58)	0.060	427620.	380740.

RIASSUNTO TOTALE ($35+$36) PROBABILITA'(CHI SQUARE)= 0.561(1363.40) SKEWNESS= -0.016 PIONI UTILI = 808360.

11.

TABELLA III - Stabilità dei contatori e risultati asimmetria

ANALISI DATI PER TETA C.M. 71 GRADI ED ENERGIA CENTRALE DEL GAMMA 280 MEV — TURNI DEL 1401

STABILITA' DEI CONTATORI PER LA POSIZIONE 1 DEL MONOCRISTALLO

MISU.	DOSI	A35/1000		A36/1000		A37/TOT		C8/TOT		SCARTI IN DEVIAZIONI STANDARD IN A35	A36	A37
8	50.0	1972	62	2544	71	SCARTATO A35		0.098	0.006	2.60	-1.48	0.80
9	97.1	1771	42	2641	52	0.525	0.008	0.081	0.004	-0.88	-0.15	0.44
10	100.0	1832	42	2658	51	0.514	0.007	0.085	0.004	0.54	0.16	-0.97
11	100.0	1799	42	2698	51	0.525	0.007	0.086	0.004	-0.23	0.93	0.47
12	25.0	1900	87	2664	103	0.523	0.015	0.099	0.009	1.05	0.14	0.13
								0.085	0.002			

TAGLIO A 2.173 STANDARDS (PROBABILITA'= 0.0300)

MISU.	DOSI	A35/1000		A36/1000		A37/TOT		PROBABILITA'		SKEWNESS
4	322.1	5826	76					PROBABILITA'(CHI SQUARE)=		SKEWNESS= 1.0000
4	100.0	1808	23					0.5313(	2.21)	(0.066)
5	372.1			9859	99			PROBABILITA'(CHI SQUARE)=		SKEWNESS= 0.0965
5	100.0			2649	26			0.5376(	3.13)	(-0.775)
4	322.1					0.521	0.004	PROBABILITA'(CHI SQUARE)= 0.7122(	1.38)	SK= 0.42(-0.80)

STABILITA' DEI CONTATORI PER LA POSIZIONE 2 DEL MONOCRISTALLO

MISU.	DOSI	A35/1000		A36/1000		A37/TOT		C8/TOT		SCARTI IN DEVIAZIONI STANDARD IN A35	A36	A37
41	66.7	1674	50	2283	58	0.533	0.010	0.090	0.006	0.29	0.26	0.85
42	50.0	1578	56	2254	67	0.535	0.011	0.076	0.006	-1.46	-0.21	0.94
43	50.0	1750	59	2288	67	SCARTATO A3		0.109	0.007	1.52	0.29	-3.54
44	59.0	1661	53	2222	61	0.511	0.010	0.099	0.006	0.02	-0.75	-1.34
45	25.0	1704	82	2216	94	0.515	0.016	0.082	0.009	0.53	-0.56	-0.59
46	34.1	1668	69	2234	80	0.532	0.014	0.090	0.008	0.12	-0.42	0.53
47	50.0	1744	59	2376	68	0.520	0.011	0.083	0.006	1.42	1.56	-0.39
48	18.6	1526	90	2241	109	0.522	0.019	0.074	0.010	-1.47	-0.24	-0.14
								0.086	0.003			

TAGLIO A 2.353 STANDARDS (PROBABILITA'= 0.0187)

MISU.	DOSI	A35/1000		A36/1000		A37/TOT		PROBABILITA'		SKEWNESS
7	303.4	5037	70					PROBABILITA'(CHI SQUARE)=		SKEWNESS= 0.5342
7	100.0	1660	23					0.3507(	6.70)	(-0.336)
7	303.4			6882	82			PROBABILITA'(CHI SQUARE)=		SKEWNESS= -0.1833
7	100.0			2268	27			0.7237(	3.66)	(1.462)
6	303.4					0.525	0.005	PROBABILITA'(CHI SQUARE)= 0.5199(	4.22)	SK= 0.70(-0.30)

CALCOLO ASIMMETRIA

CAN	ENERGIA		ASIMMETRIA		ERRORE PER STAT.	POL	FONDO	FONDO		POL
A36	295.2	15.2	0.300	0.043	0.031	0.011	0.028	0.07	0.08	0.281
A35	266.8	13.2	0.213	0.053	0.048	0.010	0.020	0.08	0.08	0.224
1	302.2	7.4	0.311	0.053	0.043	0.011	0.029	0.07	0.08	0.295
2	287.4	7.4	0.288	0.054	0.046	0.011	0.027	0.07	0.08	0.266
3	272.6	7.4	0.235	0.066	0.062	0.010	0.022	0.08	0.08	0.237
4	257.8	7.4	0.180	0.079	0.077	0.009	0.016	0.09	0.08	0.205

TABELLA IV

TABELLA FINALE DELLE ASIMMETRIE PER TETA C.M. 45 GRADI

ENERGIA		ASIMMETRIA		ERR.STAT.		POL	DATA	EN.CEN.	CAN	STABILITA'		SCARTI	
211.1	4.6	0.771	0.185	0.126		0.302	1810	225	1	0.72	0.56	1	0
220.4	4.6	0.459	0.121	0.097		0.308	1810	225	2	0.72	0.56	1	0
229.6	4.6	0.303	0.102	0.092	SCARTO PER NSC	0.308	1810	225	3	0.82	0.94	2	0
238.9	4.6	0.151	0.092	0.090	SCARTO PER NSC	0.305	1810	225	4	0.82	0.94	2	0
211.1	4.6	0.322	0.104	0.092		0.302	1012	225	1	0.35	0.49	0	0
220.4	4.6	0.351	0.087	0.069		0.308	1012	225	2	0.35	0.49	0	0
229.6	4.6	0.335	0.086	0.070	SCARTO PER NSC	0.308	1012	225	3	0.90	0.32	2	0
238.9	4.6	0.443	0.103	0.079	SCARTO PER NSC	0.305	1012	225	4	0.90	0.32	2	0
211.1	4.6	0.332	0.121	0.109		0.302	1303	225	1	0.54	0.41	0	0
220.4	4.6	0.345	0.095	0.080		0.308	1303	225	2	0.54	0.41	0	0
229.6	4.6	0.273	0.082	0.071		0.308	1303	225	3	0.18	0.80	0	0
238.9	4.6	0.329	0.092	0.079		0.305	1303	225	4	0.18	0.80	0	0
301.6	7.2	0.344	0.051	0.043	SCARTO PER NSC	0.295	1401	280	1	0.31	0.42	1	2
287.2	7.2	0.277	0.054	0.049	SCARTO PER NSC	0.267	1401	280	2	0.31	0.42	1	2
272.8	7.2	0.334	0.066	0.059		0.239	1401	280	3	0.55	0.89	0	0
258.4	7.2	0.384	0.083	0.076		0.209	1401	280	4	0.55	0.89	0	0
278.9	6.3	0.206	0.036	0.032	SCARTO PER NSC	0.407	803	260	1	0.86	0.31	2	2
266.3	6.3	0.250	0.044	0.037	SCARTO PER NSC	0.381	803	260	2	0.86	0.31	2	2
253.7	6.3	0.293	0.060	0.050		0.350	803	260	3	0.50	0.94	0	0
241.1	6.3	0.402	0.087	0.066		0.316	803	260	4	0.50	0.94	0	0
335.5	8.5	0.591	0.068	0.044	SCARTO PER NSC	0.346	803	310	1	0.98	0.63	0	3
318.5	8.5	0.576	0.066	0.044	SCARTO PER NSC	0.307	803	310	2	0.98	0.63	0	3
301.5	8.5	0.521	0.069	0.053		0.268	803	310	3	0.52	0.99	0	0
284.5	8.5	0.525	0.088	0.075		0.232	803	310	4	0.52	0.99	0	0
369.3	9.8	0.632	0.098	0.063		0.286	803	340	1	0.80	0.11	0	0
349.8	9.8	0.578	0.086	0.063		0.248	803	340	2	0.80	0.11	0	0
330.2	9.8	0.568	0.096	0.081		0.209	803	340	3	0.94	0.74	0	1
310.7	9.8	0.362	0.114	0.109		0.174	803	340	4	0.94	0.74	0	1
425.5	11.8	0.947	0.208	0.094		0.288	106	390	1	0.19	0.30	0	0
401.8	11.8	0.842	0.162	0.082		0.240	106	390	2	0.19	0.30	0	0
378.2	11.8	0.817	0.154	0.090		0.195	106	390	3	0.49	0.51	0	0
354.5	11.8	0.818	0.159	0.122		0.150	106	390	4	0.49	0.51	0	0
492.6	14.2	1.367	0.735	0.154		0.226	1307	450	1	0.92	0.89	0	0
464.2	14.2	1.107	0.364	0.134		0.183	1307	450	2	0.92	0.89	0	0
435.8	14.2	0.618	0.221	0.152		0.143	1307	450	3	0.46	0.34	0	0
407.4	14.2	0.944	0.245	0.183		0.108	1307	450	4	0.46	0.34	0	0

suo errore statistico, l'errore dovuto all'indeterminazione sulla conoscenza della polarizzazione P, quello dovuto all'errore sul fondo e l'errore totale. Questi risultati assieme a quelli in C) e D) relativi alla stabilità delle misure sono stampati su un'unica tabella per ogni punto sperimentale (vedi Tabella III).

I risultati relativi ai canali 1, 2, 3, 4 sono memorizzati su nastro magnetico: nel caso che la stabilità di S_{37}, per uno o entrambi i segni di P, risultasse non accettabile (criteri (a), (b) e (c) in C)) vengono memorizzati invece i risultati relativi ad S_{35} e S_{36}, tralasciando la ulteriore divisione in 4 canali.

F) Risultati: analisi della consistenza; tabella e grafici riassuntivi. -

Rileggendo dal nastro magnetico il programma GED compie per ogni angolo del pione nel c. m. le seguenti operazioni:

1) Stampa per ogni θ_{CM} la tabella dei risultati delle asimmetrie A con gli errori statistici, per il fondo e totali, le energie del γ e le risoluzioni in energia, la $P(\chi^2)$ di S_{35} od S_{36} ed il numero di scarti in S_{35} o S_{36} (a seconda che i risultati si riferiscano a canali di S_{35} o di S_{36}), per $P > 0$ e $P < 0$. Un esempio è la tabella IV. Sulla tabella scrive esplicitamente indicandone il motivo, quando il risultato non è accettabile perché i blocchi di misure da cui deriva non soddisfano tutti i criteri esposti in § III - C). Nelle successive operazioni 2), 3), 4) sono considerati solo i risultati accettabili.

2) Ordina i risultati in energia crescente e media tra loro quelli che distano meno di 2 MeV in E_γ.

TABELLA V

Risultati scartati per incompatibilità con il fit di tutti i risultati.

$\theta_{C.M.}$	n. scarti	Percent. %
30°	0	0
45°	0	0
71°	1	3. 8
90°	2	4. 9
120°	0	0
133°	0	0
144°	0	0
Totale	3	2. 4
Previsti	2	1. 3

3) Dei risultati ordinati e mediati viene fatto un fit polinomiale in funzione dell'energia per ciascun angolo θ_{CM} allo scopo di avere un andamento medio con cui confrontare i singoli punti. I punti incompatibili con il fit (secondo il solito criterio in III B) vengono scartati singolarmente, senza riguardo alla loro storia precedente, ed il numero di scarti deve essere, entro i limiti di confidenza imposti, vicino a quello prescritto dalla statistica. Tale numero, in effetti (vedi Tabella V), è compatibile con le previsioni statistiche. Questa parte del calcolo è fatta con la Subroutine FIT, che descriviamo in Appendice F.

4) Dà il grafico delle asimmetrie calcolate (riportando le asimmetrie con il loro errore statistico ed il loro errore totale) ed il loro miglior fit polinomiale, calcolato in 3), utilizzando la Subroutine PLOTBU; un esempio di questi grafici è in Fig. 8.

Come si può facilmente comprendere dalla schematica descrizione fattane, la struttura del programma è piuttosto complessa. Rinunziamo quindi ad una descrizione più dettagliata, anche perché molte delle cose sono particolari del nostro esperimento e altre rientrano nella normale tecnica di programmazione: diamo soltanto in Fig. 9 il diagramma a blocchi molto schematico del programma per facilitare la comprensione di quanto sopra esposto.

Più utili sono invece le molte "subroutines" e "functions" di cui abbiamo dovuto corredare il programma e che descriviamo nelle appendici, anche se alcune di esse sono banali e altre sono miglioramenti di subroutines già esistenti presso il Centro Calcolo dei LNF.

Ringraziamo sentitamente il Dott. M. Buonanni per averci spesso seguito nel corso del lavoro con indicazioni e consigli; ringraziamo anche tutti i colleghi del gruppo: M. Grilli, M. Nigro, E. Schiavuta, F. Soso per le utili discussioni sull'impostazione generale del metodo usato.

BIBLIOGRAFIA. -

(1) - R. Giantin, M. Grilli, M. Nigro, E. Schiavuta, P. Spillantini, F. Soso and V. Valente, LNF-66/68 (1966); Nuovo Cimento, in corso di pubblicazione.
(2) - G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambrini and G. P. Murtas, Phys. Rev. Letters 8, 112 (1962).
(3) - P.C.Guest, Numerical Methods of curve fitting (Cambridge, 1961), pag. 15 e 16.
(4) - C. G. Paradine and B. H. Rivett, Statistical methods for technologists (Oxford, 1960), pag. 18 e 82.
(5) - G. Fronterotta e A. Rambaldi, LNF-62/27 (1962).

GRAFICO DELL'ASIMMETRIA SPERIMENTALE E TEORICA PER TETA C.M. 45 GRADI

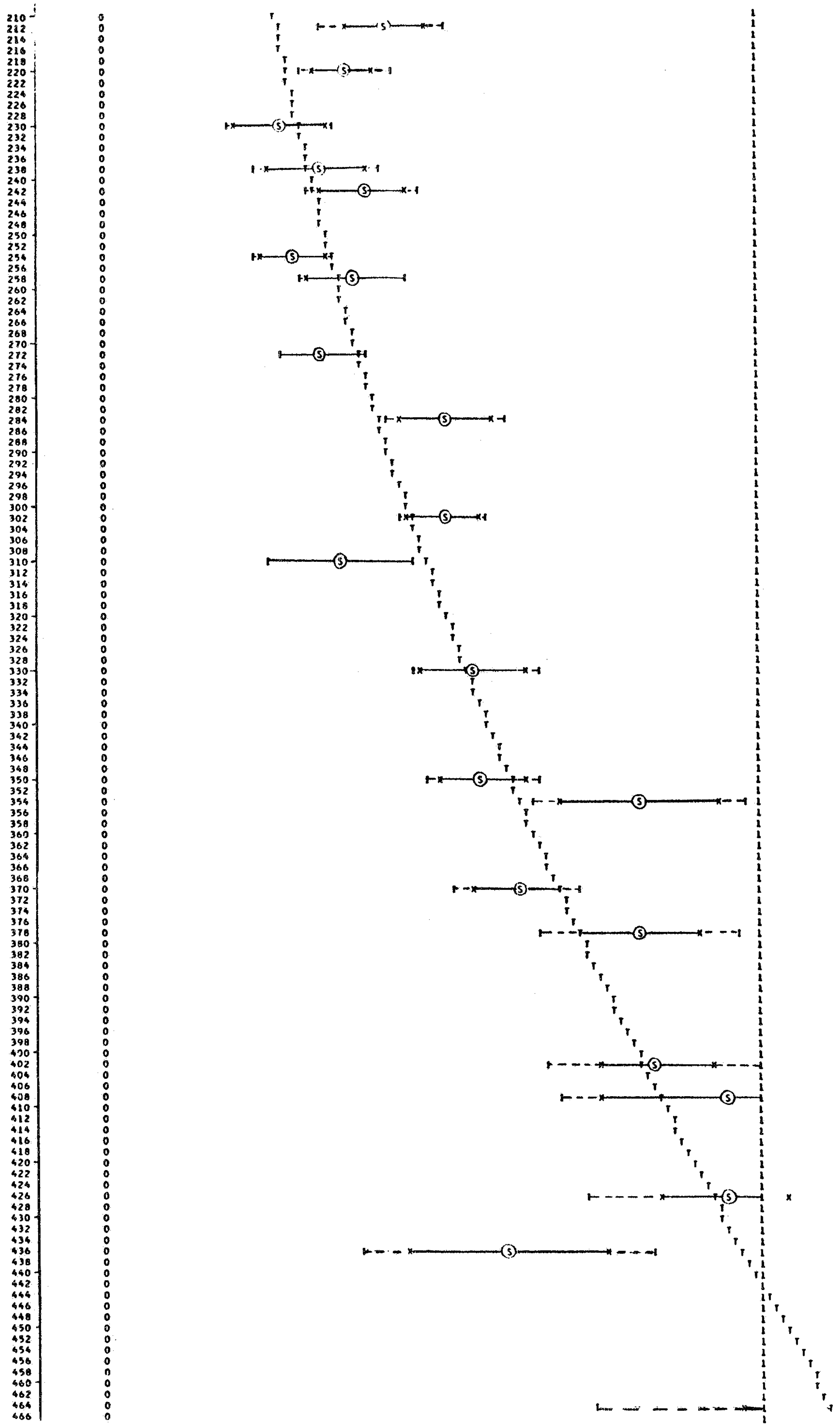


FIG. 8 - Grafico di $A(E_\gamma)$ sperimentale e del suo fit.

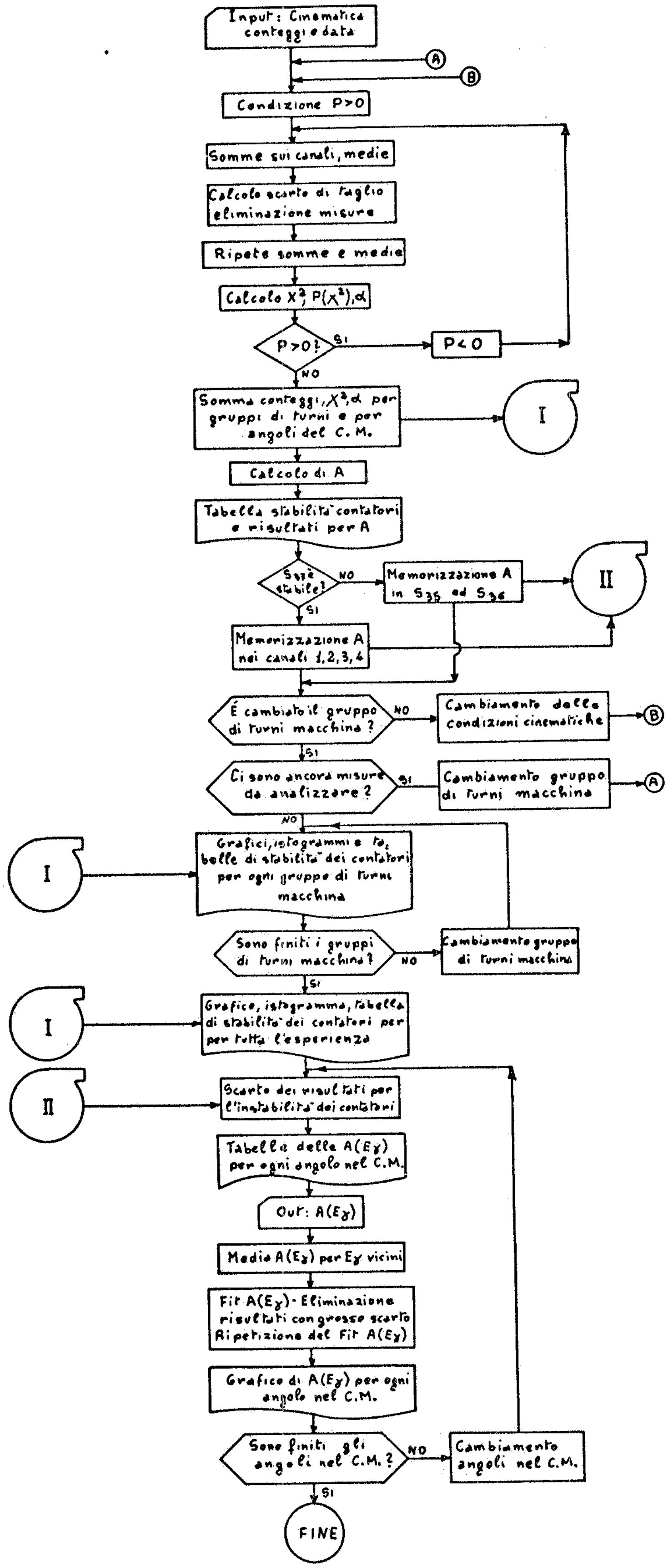


FIG. 9 - Diagrama a blocchi del programma GED.

APPENDICE A. -

Ricaviamo per esteso i contributi all'errore ΔA degli errori di tutte le grandezze che determinano A.

Dalla formula (2) si ha:

1) Errore su A dovuto all'errore su P:

$$\Delta A = - \frac{C_\perp - C_\parallel}{C_\perp + C_\parallel - 2B} \frac{\Delta P}{P^2} = - A \frac{\Delta P}{P}$$

2) Errore su A dovuto all'errore su $C_\perp$:

$$\Delta A = \frac{2}{P} \frac{1}{\left(\frac{C_\perp - B}{C_\parallel - B} + 1\right)^2} \frac{\Delta C_\perp}{C_\parallel - B}$$

e ponendo $R = \frac{C_\perp - B}{C_\parallel - B}$

$$\Delta A = \frac{2}{P} \frac{R}{(R + 1)^2} \frac{\Delta C_\perp}{C_\perp - B}$$

3) Errore su A dovuto all'errore su $C_\parallel$: in modo del tutto analogo si ha:

$$\Delta A = - \frac{2}{P} \frac{R}{(R + 1)^2} \frac{\Delta C_\parallel}{C_\parallel - B}$$

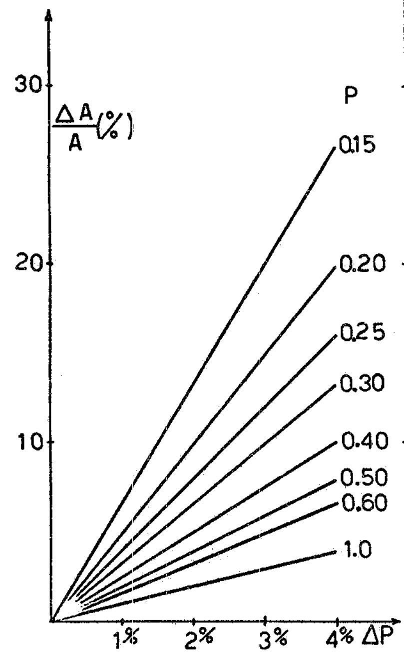


FIG. 10

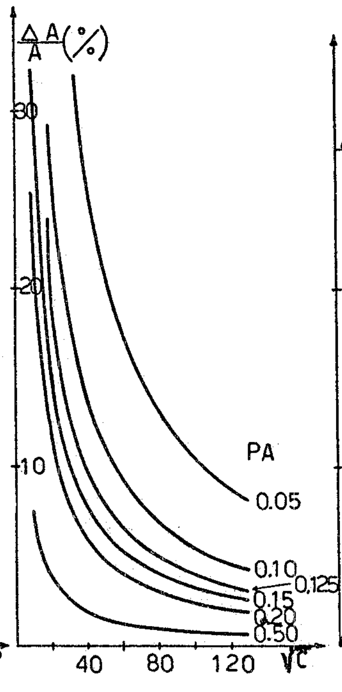


FIG. 11

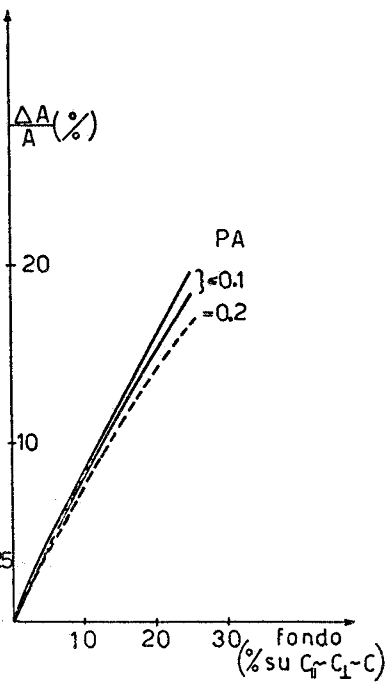


FIG. 12

4) Errore su A dovuto all'errore su B

$$\Delta A = \frac{2}{P} \frac{C_{\perp} - C_{\parallel}}{(C_{\perp} + C_{\parallel} - 2B)^2} \Delta B =$$

$$= \frac{2}{P} \frac{R}{(R+1)^2} \frac{(C_{\perp} - C_{\parallel})/B}{\left(\frac{C_{\perp} C_{\parallel}}{B^2} - \frac{C_{\perp} + C_{\parallel}}{B} + 1\right)} \frac{\Delta B}{B}$$

Combinando quadraticamente contributi di 1), 2), 3), e 4) si ottiene la (3). Nelle Figg. 10, 11, 12 sono riportati gli andamenti di $(\Delta A/A)(\Delta P)$, $(\Delta A/A)(\Delta C_{\perp})$, $(\Delta A/A)(\Delta B)$ opportunamente parametrizzati.

Aggiungiamo qui di seguito la SUBROUTINE ASIM usata per il calcolo di A, $\Delta A(\Delta P)$, $\Delta A(\Delta C_{\perp}, \Delta C_{\parallel})$, $\Delta A(\Delta B)$, ΔA totale e della corrispondente energia E_{γ} e risoluzione ΔE_{γ}.

```
3E26.GED                            FORTRAN SOURCE LIST                         02/17/67
         ISN      SOURCE STATEMENT

 $IBFTC ASIM
       SUBROUTINE ASIM(ICAN,CPE,CPA,DPE,DPA,POSCA,POLB,B,DB,MX,LAB,A,DAST
      1A,DAP,DAF,DATOT,EN,DEN,POL,BI,DBI)
       POL=POLB
       EG=MX
       TCM=LAB
       DCPE=SQRT(CPE)
       DCPA=SQRT(CPA)
       CPE=CPE/DPE
       CPA=CPA/DPA
       DCPE=DCPE/DPE
       DCPA=DCPA/DPA
       B=CPE*B
       DB=CPE*DB
       R=(CPE-B)/(CPA-B)
       A=(R-1.)/((R+1.)*POL)
       PIPPO=2.*R/((R+1.)*(R+1.)*POL)
       DCPE2=(DCPE*DCPE)/((CPE-B)*(CPA-B))
       DCPA2=(DCPA*DCPA)/((CPA-B)*(CPA-B))
       DASTA=PIPPO*SQRT(DCPE2+DCPA2)
       DAP=(.01*A)/POL
       DAF1=(DB*(CPE-CPA)/B)/(((CPE*CPA/(B*B))-(CPE+CPA)/B+1.)*B)
       DAF=PIPPO*DAF1
       DAF2=DAF1*DAF1
       DATOT=SQRT(PIPPO*PIPPO*(DCPE2+DCPA2+DAF2)+DAP*DAP)
       EMPR=939.55
       EMN=938.256
       EMPI=139.58
       EEP=EMPR*EMPR
       EEN=EMN*EMN
       EEPI=EMPI*EMPI
       W2=EEP+2.*EG*EMPR
       W=SQRT(W2)
       S=EMPR/W
       DEPCM=(EMPR*W-(EEPI-EEN)*S)/(2.*W2)
       EPCM=(W2+EEPI-EEN)/(2.*W)
       GC=(EG/W)+S
       DGC=(W-(EG+EMPR)*S)/W2
       GCBC=EG/W
       DGCBC=(1.-(EG*EMPR/W2))/W
       CK=EEPI+EEN-EEP-2.*EG*EMPR
       AZ=CK*CK-4.*EEPI*EEN
       PPICM=SQRT(ABS(AZ))/(2.*W)
       AR=((-CK*W2*2.*EMPR)-W*AZ*S)/(2.*W2*W2)
       DPCM=AR/(2.*PPICM)
       SOS=EPCM*DGC+GC*DEPCM
       TETA=TCM*0.01745329
       SES=COS(TETA)*(DGCBC*PPICM+DPCM*GCBC)
       UFFA=PPICM*SIN(TETA)
       ACCA=PPICM*COS(TETA)+GCBC*EPCM/GC
       PLAB=SQRT(UFFA*UFFA+GC*GC*ACCA*ACCA)
       BLAB=PLAB/SQRT(PLAB*PLAB+EEPI)
       DPI=(SOS+SES)/BLAB
       EN=EG+0.03375*PLAB*(-POSCA)/DPI
       DEN=ABS((EN-EG)/POSCA)
       BI=B/CPE
       DBI=DB/CPE
       RETURN
       END
```

APPENDICE B. -

Dato un limite $P(\xi_L)$ sulla probabilità integrale della gaussiana degli scarti, si vuole lo scarto ξ_L corrispondente a questo limite. La probabilità integrale può essere calcolata tra $-\infty$ e $+\xi_L$ o $-\xi_L$ e $+\xi_L$ a seconda che l'indice NPARTE sia 1 o 2. $P(\xi_L)$ è uguale al rapporto tra una costante (PROBAB) e il numero di punti della distribuzione (NMIS). Quando il risultato ξ_L eccede tre "standard deviations" è posto sempre uguale a 9.9999 "standard deviations".

Il procedimento di calcolo è talmente banale (interpolazione lineare) che è superfluo descriverlo e ci limitiamo a riportare il tabulato della "FUNCTION TAGLIO".

```
3E26,GED                        FORTRAN SOURCE LIST                        02/17/67
          SOURCE STATEMENT

  $IBFTC TAGLIO
          FUNCTION TAGLIO(PROBB,NMIS,NPARTE)
   C                    CALCOLO DEL TAGLIO
          DIMENSION P(40)
          P( 1)=0.0000
          P( 2)=0.0398
          P( 3)=0.0793
          P( 4)=0.1179
          P( 5)=0.1555
          P( 6)=0.1915
          P( 7)=0.2257
          P( 8)=0.2580
          P( 9)=0.2881
          P(10)=0.3159
          P(11)=0.3413
          P(12)=0.3643
          P(13)=0.3849
          P(14)=0.4032
          P(15)=0.4192
          P(16)=0.4332
          P(17)=0.4452
          P(18)=0.4554
          P(19)=0.4641
          P(20)=0.4713
          P(21)=0.4772
          P(22)=0.4821
          P(23)=0.4861
          P(24)=0.4893
          P(25)=0.4918
          P(26)=0.4938
          P(27)=0.4953
          P(28)=0.4965
          P(29)=0.4974
          P(30)=0.4981
          P(31)=0.4987
          PMIS=NMIS
          PT=PROBB/PMIS
          PARTE=NPARTE
          PT=(0.500*PARTE-PT)/PARTE
          DO 10 I=1,31
          IT=I
          IF(PT.LE.P(I)) GO TO 11
       10 CONTINUE
          TAGLIO=9.99999
          RETURN
       11 CIT=IT
          TAGLIO=CIT-(1.-(PT-P(IT-1))/(P(IT)-P(IT-1)))
          TAGLIO=(TAGLIO-1.)*0.1
          RETURN
          END
```

APPENDICE C. - "χ^2" e probabilità di "χ^2".

Quando di una grandezza X si fanno N misure x_i di peso p_i = $= 1/\mu_i^2$ l'uso del criterio di "χ^2" è molto semplice e di facile interpretazione: infatti il valore previsto per X è semplicemente la media pesata delle misure, $\bar{x} = (\Sigma x_i\, p_i / \Sigma p_i)$. La dispersione della distribuzione degli scarti da x si può calcolare in due modi, a partire dagli scarti o dai pesi delle misure:

$$\text{(1)} \qquad \sigma_1^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})\, p_i}{(N-1)\Sigma p_i} \qquad\qquad \sigma_2^2 = \frac{1}{\Sigma p_i}$$

I due risultati sono legati dalla funzione " ^{2}" di N-1 gradi di libertà; infatti(3)

$$\text{(2)} \qquad (N-1)\,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \Sigma (x_i - \bar{x})^2\, p_i = \Sigma \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\mu_i}\right)^2 = \chi^2_{(N-1)}$$

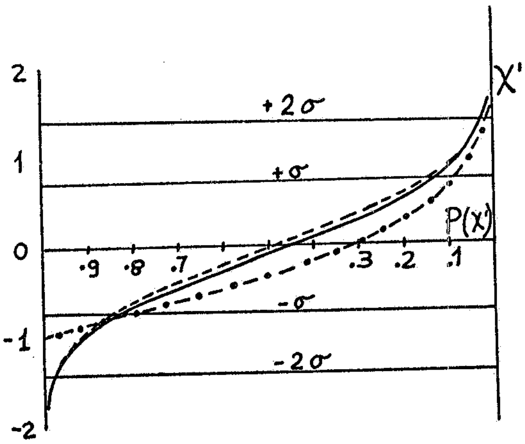


FIG. 13 - Distribuzione di $\chi' = \chi - \sqrt{\nu}$ in funzione della sua probabilità integrale tra $-\infty$ e χ' per i tre casi:

$\nu = 1$ —·—·—·—
$\nu = 10$ - - - - - - - -
$\nu = \infty$ ————

Quindi dati vari "sets" di N misure (x_i, p_i) e calcolato per ciascun "set" in rapporto $(N-1)\,(\sigma_1^2/\sigma_2^2)$, tali rapporti si distribuiscono come la funzione probabilità di χ^2 $\varphi(\chi^2)$, di $\nu = N-1$ gradi di libertà.

Per ottenere la probabilità integrale tra $\bar{\chi}^2$ e $+\infty$ di avere il valore $\bar{\chi}^2$ per χ^2 partiamo dalla distribuzione $\chi = \sqrt{N-1}\,(\sigma_1/\sigma_2)$, che per N abbastanza grande(x) è una gaussiana distribuita attorno a $\sqrt{N-1} = \sqrt{\nu}$ = con semilarghezza $\sigma = 1/\sqrt{2}$.

In Fig. 13 diamo le probabilità integrali tra $\chi' = \chi - \sqrt{\nu}$ e $+ \infty$ per N=1, 10 e ∞; da queste, poiché le probabilità integrali si devono conservare passando da χ' a χ^2

(x) - Quando N è molto piccolo (<10) la seconda delle (1) non dà più per σ_2 una approssimazione buona, ma si deve usare la formula più generale:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{\Sigma p_i} \left\{ 1 + \frac{4}{(\Sigma p_i)^2}\; \Sigma\, p_i\, (\Sigma p_j - p_i)\, \frac{1}{n_i'} \right\} \qquad \text{con}$$

$$n_i' = n_i - 1 - \frac{4\,(N-2)}{(N-1)}$$

(cioè $P(\chi') = P(\chi^2)$ se $\chi^2 = (\chi' + \sqrt{\nu})^2$) si possono calcolare le probabilità integrali tra $\bar{\chi}^2$ e $+\infty$ di avere il valore $\bar{\chi}^2$ per χ^2. In particolare:

se χ_o non scarta da $\sqrt{\nu}$: $\chi_o = \sqrt{\nu}$ quadrando $\chi_o^2 = \nu$

" χ_1 scarta σ da " : $\chi_1 = \sqrt{\nu} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ " $\chi_1^2 = \frac{1}{2} + \nu + \sqrt{2\nu}$

" χ_2 scarta 2σ da " : $\chi_2 = \sqrt{\nu} \pm \frac{2}{\sqrt{2}}$ " $\chi_2^2 = 2 + \nu \pm 2\sqrt{2\nu}$

" χ_3 scarta 3σ da " : $\chi_3 = \sqrt{\nu} \pm \frac{3}{\sqrt{\nu}}$ " $\chi_3^2 = \frac{9}{2} + \nu \pm 3\sqrt{2\nu}$

Gli andamenti di χ_o^2, χ_1^2, χ_2^2, χ_3^2 sono riportati nella Fig. 14 che dà $P(\chi^2)$ parametrizzata in ν ed in Fig. 15 che dà $\nu(\chi^2)$ parametrizzata in $P(\chi^2)$. Si vede da queste figure che oltre al taglio inferiore sullo $P(\chi^2)$ che di solito si considera per un "set" di misura (cioè $P(\chi^2)$ accettata $>$ $P(\chi^2)$ scelta come taglio inferiore), si deve in linea di principio considerare anche un taglio superiore (cioè $P(\chi^2)$ accettata $<$ $P(\chi^2)$ scelta come taglio superiore): infatti quando il χ^2 risulta troppo piccolo si potrebbe sospettare l'esistenza, per esempio, di un fondo continuo non statistico, o di una inefficienza costante (o comunque non dipendente dai pesi p_i) dell'apparato che misura i valori x_i per X. Particolarmente indicativo è il caso in cui si fanno, per X, N misure x_i di peso $p_i = 1/x_i$ (per esempio con tecniche di conteggio) con una inefficienza costante η ; la tabella VI mostra che i valori di $P(\chi^2)$ variano molto con η, specialmente per N grandi.

TABELLA VI

η	$P(\chi^2)$		
	N = 11	N = 41	N = 101
0	45%	48%	50%
10%	56%	60%	75%
20%	65%	81%	91%
30%	77%	94%	99%
50%	86%	99%	99. 7%

Per il nostro esperimento era sempre N $\lesssim$ 10 e certamente $\eta \ll 10\%$, e quindi non si è dovuto introdurre nessun taglio superiore su $P(\chi^2)$.

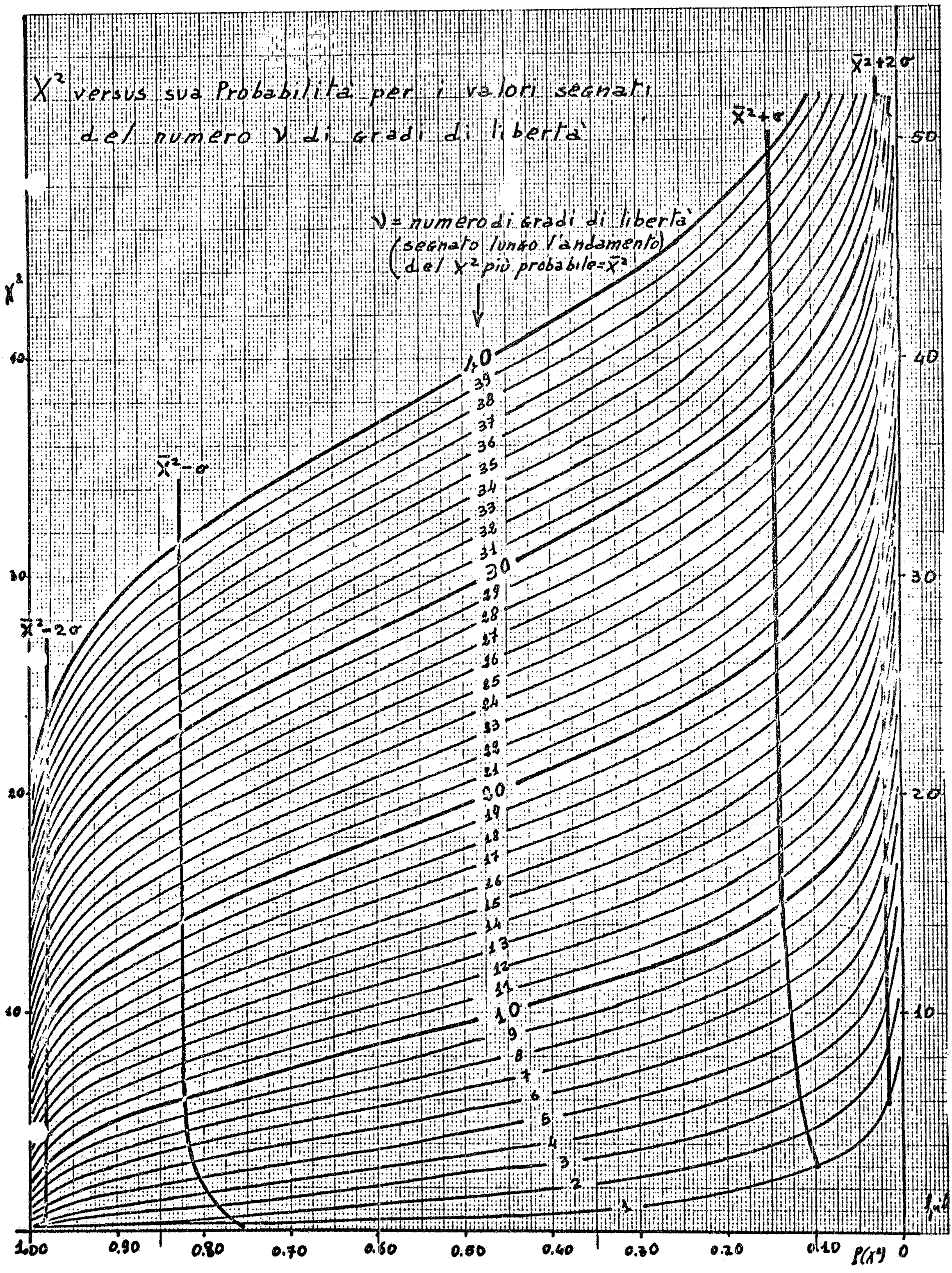
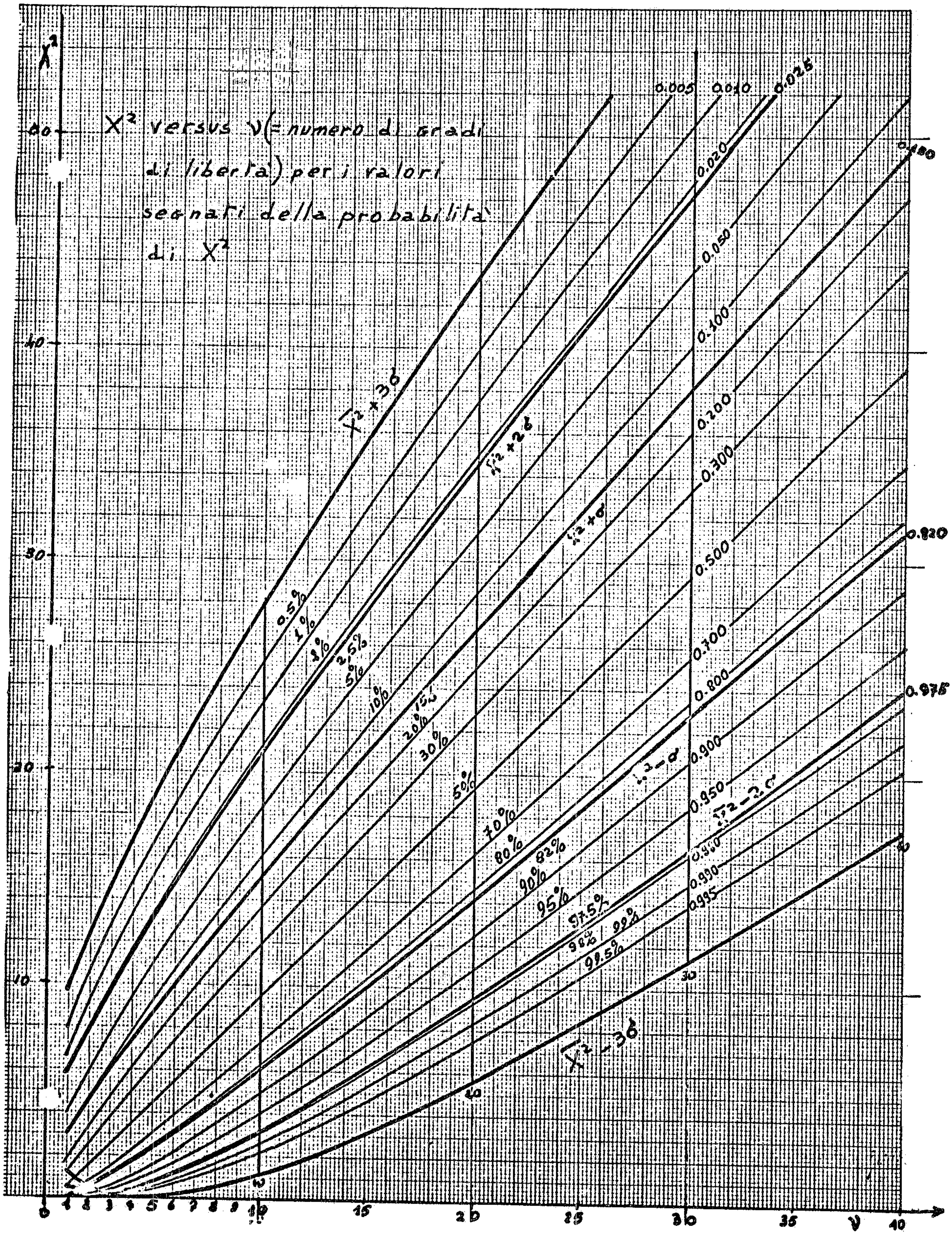

χ^2 versus sua Probabilità per i valori segnati del numero ν di gradi di libertà
ν = numero di gradi di libertà (segnato lungo l'andamento del χ^2 più probabile = $\bar{\chi}^2$)
$\bar{\chi}^2 - 2\sigma$
$\bar{\chi}^2 - \sigma$
$\bar{\chi}^2 + \sigma$
$\bar{\chi}^2 + 2\sigma$
χ^2
$P(\chi^2)$
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0
10
20
30
40
50

FIG. 14



χ^2 versus ν (= numero di gradi di libertà) per i valori segnati della probabilità di χ^2
χ^2
ν
$\bar{\chi}^2+3\sigma$
$\bar{\chi}^2+2\sigma$
$\bar{\chi}^2+\sigma$
$\bar{\chi}^2-\sigma$
$\bar{\chi}^2-2\sigma$
$\bar{\chi}^2-3\sigma$
0.005
0.010
0.025
0.020
0.050
0.100
0.200
0.300
0.500
0.700
0.800
0.900
0.950
0.980
0.990
0.995
0.975

FIG. 15

FUNCTION PCHISQ.-

In essa si calcola il valore $\varphi_\nu(\chi^2)$ poi si incrementa χ^2 di 1 e si ripete il calcolo per $\chi^2 = \chi^2 + 1$ e così si procede fino a $\chi^2_3 = 9/2 + \nu + 3\sqrt{2\nu}$ cioè tale che $P_\nu(\chi^2_3) < 3\,^{o}/_{oo}$.

I valori di $\varphi_\nu(\chi^2)$ così ottenuti sono integrati col metodo di Cavalieri-Simpson per ottenere la probabilità integrale $P_\nu(\chi^2)$.

Le formule usate sono:

$$\varphi_\nu(\chi^2) = \frac{{}^{-\frac{\chi^2}{2}}\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\left(\frac{\ }{2} - 1\right)}}{2\,\Gamma\left(\frac{\ }{2}\right)}$$

$$P_\nu(\chi^2) = \int_{\chi^2}^{\infty} \varphi_\nu(\chi^2)\, d\chi^2$$

Per calcolare la funzione $\varphi_\nu(\chi^2)$ abbiamo dovuto calcolare il suo logaritmo e poi ripassare alla funzione per mezzo di un esponenziale altrimenti per $\nu > 32$ il calcolatore va in "overflow". Alleghiamo qui di seguito il tabulato della "FUNCTION PCHISQ".

```
3E26,GED                                  FORTRAN SOURCE LIST
     ISN        SOURCE STATEMENT

 $IBFTC PCHISQ
        FUNCTION PCHISQ(CHI2,N)
 C                    CALCOLO DELLA PROBABILITA DI CHI SQUARE INTEGRALE
 C                    TRA IL VALORE DATO ED INFINITO
 C
        BADA=10.**(-8.)
        PCHIS=0.
        SIMP=1.
        G=N
        BUDA=9./2.+G+3.*SQRT(2.*G)
        IF(CHI2-BUDA) 4,4,40
      4 G=G/2.
        C=CHI2/2.
     30 A=G*(ALOG(G)-1.)-ALOG(G)/2.+ALOG(2.*3.1416)/2.+ALOG(1.+1./(12.*G))
        FCHIS=-C+(G-1.)*ALOG(C)-ALOG(2.)-A
        FCHIS=EXP(FCHIS)
      3 IF(FCHIS-BADA) 40,40,41
     41 PCHIS=PCHIS+FCHIS*SIMP
        C=C+.5
        IF(SIMP-2.) 10,10,20
     10 SIMP=4.
        GO TO 30
     20 SIMP=2.
        IF(C-BUDA) 30,30,40
     40 PCHIS=PCHIS/3.
        PCHIS=PCHIS+0.001
        PCHISQ=PCHIS
        RETURN
        END
```

APPENDICE D. - Significatività della "skewsness". -

La funzione χ^2 dà indicazione circa la larghezza della distribuzione degli scarti attorno a $\bar{x}$, non dice nulla sulla forma della distribuzione, che potrebbe essere gaussiana, rettangolare, fortemente asimmetrica attorno a $\bar{x}$, ecc....

Per esplorare la forma della distribuzione è necessario ricorrere ai suoi momenti superiori al secondo.

Particolarmente significativa è la misura della asimmetria rispetto a $\bar{x}$, che si può esprimere quantitativamente attraverso un parametro chiamato in statistica "skewsness" (cioè asimmetria), della distribuzione.

La skewsness è definita come il momento terzo della distribuzione misurato in standard deviations(4). Per un set di N misure, x_i, di peso $p_i = 1/\mu_i^2$, di una grandezza X, essa è data da

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}} = \frac{\sum\left[(x_i - \bar{x})^3 p_i\right]\sqrt{\sum p_i}}{\left(\sum\left[(x_i - \bar{x})^2 p_i\right]\right)^{3/2}}$$

e si distribuisce attorno al valore zero come una gaussiana di semilarghezza $\sqrt{\text{range degli scarti/numero delle misure}}$; quindi ad ogni valore $\bar{\alpha}$ di α corrisponde una probabilità $\varphi(\bar{\alpha})$ ed una probabilità integrale

$$P(\bar{\alpha}) = \int_{-\infty}^{-\bar{\alpha}} \varphi(\alpha)\, d\alpha + \int_{\bar{\alpha}}^{\infty} \varphi(\alpha)\, d\alpha = 2\int_{\bar{\alpha}}^{\infty} \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

Si può quindi fissare un criterio quantitativo per non accettare una serie di misure la cui distribuzione degli scarti abbia un $\bar{\alpha}$ tale che $P(\bar{\alpha}) < P(\alpha_t)$, con $P(\alpha_t)$ prefissato.

Per il nostro esperimento abbiamo fissato $P(\alpha_t) = 0.15/N$ (N= =numero di misure). Con questo taglio tutte le distribuzioni in S_{35} ed S_{36} sono risultate accettabili, mentre tre distribuzioni per S_{37} non lo erano; in tali casi non abbiamo considerato S_{37} nella suddivisione in canali (vedi Fig. 7).

Riportiamo, solo per comodità d'uso, il tabulato della function PROBAB che abbiamo usato per passare da α alla sua probabilità integrale $P(\alpha)$.

```
26,GED                                                       FORTRAN SOURCE LIST
     ISN        SOURCE STATEMENT

       0 $IBFTC FUNTION
       1        FUNCTION PROBAB(SIGMA)
         C      TABULAZIONE DELLA PROBABILITA' INTEGRALE DELLA FUNZIONE DI GAUSS
         C      CALCOLC DELLA PROBABILITA' INTEGRALE PER SIGMA DATO
       2        DIMENSION P(40)
       3        P( 1)=0.0000
       4        P( 2)=0.0398
       5        P( 3)=0.0793
       6        P( 4)=0.1179
       7        P( 5)=0.1555
      10        P( 6)=0.1915
      11        P( 7)=0.2257
      12        P( 8)=0.2580
      13        P( 9)=0.2881
      14        P(10)=0.3159
      15        P(11)=0.3413
      16        P(12)=0.3643
      17        P(13)=0.3849
      20        P(14)=0.4032
      21        P(15)=0.4192
      22        P(16)=0.4332
      23        P(17)=0.4452
      24        P(18)=0.4554
      25        P(19)=0.4641
      26        P(20)=0.4713
      27        P(21)=0.4772
      30        P(22)=0.4821
      31        P(23)=0.4861
      32        P(24)=0.4893
      33        P(25)=0.4918
      34        P(26)=0.4938
      35        P(27)=0.4953
      36        P(28)=0.4965
      37        P(29)=0.4974
      40        P(30)=0.4981
      41        P(31)=0.4987
      42        K=ABS(SIGMA)*10.+1.
      43        C=ABS(SIGMA)*10.+1.
      44        C1=K
      45        IF(C1.LE.31.) GO TO 1
      50        PRCBAB=0.000000
      51        RETURN
      52      1 PROBAB=2.*(0.500-P(K)*(1.+C-C1))
      53        RETURN
      54        END
```

APPENDICE E. -

La SUBROUTINE JOAN, che ci è servita per la rappresentazione grafica degli istogrammi è già in dotazione al calcolatore 7040 dell'ISS, e noi ci siamo limitati ad usarla(x). Riportiamo qui di seguito il modo con cui essa è richiamata nel programma:

```
      ............
      COMMON NIST,BLANK,SEGN,VOCAL,VVMI,VVMA,DELTAA
      COMMON KOUNT,TITLE
      READ 250,NIST,VVMI,VVMA,DELTAA
  250 FORMAT (I3,3F12.6)
      READ 251,BLANK,SEGN,VOCAL
  251 FORMAT (3A1)
      READ 253,(TITLE(M),M=1,12)
  253 FORMAT (12A6)
      ................
C     DURANTE IL CALCOLO MEMORIZZA IST(K), ISTT(K), ECC... CON K=1,60
      ...............
      DO 350 K=1,60
  350 KOUNT(K)=IST(K)
      CALL JOAN
      ..............
      DO 370 K=1,60
  370 KOUNT(K)=ISTT(K)
      CALL JOAN
      ...............


C     BLANK,SEGN,VOCAL SONO I CARATTERI DA USARE FUORI,SUL CONTORNO E DENTRO LO
C     ISTOGRAMMA

C     NIST,VVMI,VVMA,DALTAA SONO  IL NUMERO DEGLI INTERVALLI DI BASE DELLO
C     ISTOGRAMMA,IL LORO VALORE MINIMO E MASSIMO ED IL LORO PASSO

C     TITLE E' UNA QUALSIASI SCRITTA DI COMMENTO CHE SI VUOLE SULL' ISTOGRAMMA

C     KOUNT  E' L'ORDINATA DELL'ISTOGRAMMA (NON RICHIEDE ALCUNA NORMALIZZAZIONE)
```

Riportiamo qui di seguito, solo per comodità d'uso, anche il tabulato della SUBROUTINE PLOTBU che ci è servita per fare i grafici e che è solo leggera modifica di una subroutine già esistente presso la biblioteca del SCN dei LNF scritta dal Dott. M. Buonanni.

```
3E26,GED                                  FORTRAN SOURCE LIST                          02/17/67
       ISN        SOURCE STATEMENT

         0 $IBFTC SUBR
         1        SUBROUTINE PLOTBU(M,NSYMB,N,V,VMIN,VMAX,IRANGE)
         2        DIMENSION A(120),V(30),VMIN(30),VMAX(30),SYMB(30)
         3        IF(NSYMB.EQ.1) READ (5,881) (SYMB(I),I=1,N),BLAN
        12        DO 1 J=1,120
        13      1 A(J)=BLAN
        15        DO 3 I=1,N
        16        J=1.-119.*(V(I)-VMIN(I))/(VMIN(I)-VMAX(I))+.5
        17        IF(J.EQ.0.OR.J.GT.120) GO TO 2
        22        A(J)=SYMB(I)
        23        GO TO 3
        24      2 IRANGE=IRANGE+1
        25      3 CONTINUE
        27        WRITE(6,880) M,(A(I),I=1,120)
        34        RETURN
        35    880 FORMAT (I5,1X,120A1)
        36    881 FORMAT (28A1)
        37        END
```

(x) - Recentemente è stata scritta dal Dr. P. Verri una subroutine di più semplice uso (SUBROUTINE VGISTO - biblioteca del SCN dei LNF - - UG 47): richiede solo di dimensionare una variabile in virgola fissa su 120 posizioni di memoria. Per esempio, se durante il calcolo si memorizzano i valori di IST (K), per ottenere la rappresentazione grafica dell'istogramma bastano i due "statements":

DIMENSION IST (120)

CALL VGISTO (IST)

APPENDICE F. -

SUBROUTINE FIT. -

Anche questa subroutine è in parte una modifica del programma scritto da Fronterotta e Rambaldi per il calcolatore 1620 disponibile presso la biblioteca del Servizio Calcoli Numerici dei LNF e descritto in (5). Noi abbiamo aggiunto il calcolo della P(χ^2), la scelta del grado che dà la miglior P(χ^2), l'esclusione delle misure il cui scarto supera lo scarto limite (calcolato con la FUNCTION TAGLIO: Appendice B) e la ripetizione del calcolo senza di esse. Si memorizzano inoltre i coefficienti del polinomio che dà la miglior P(χ^2).

Per l'uso di questa subroutine sono necessarie la "function PCHISQ" e la "function TAGLIO".

Riportiamo qui di seguito il tabulato della subroutine.

```
3E26,GED                              FORTRAN SOURCE LIST                              06/20/67
      ISN       SOURCE STATEMENT

        0 $IBFTC FIT
        1        SUBROUTINE FIT(NMIN,NM,M,X,Y,CSI,A,ALPA,PQMN)
        2        DIMENSION X(50),Y(50),CSI(50),PHI(10,50),B(10),A(10),H(10,10)
        3        DIMENSION ALPA(10),F(10,10),FN(50),DFN(50),PQN(10),SC(50),ISC(26)
        4        DO 50 I=1,M
        5     50 CSI(I)=1./((CSI(I)*CSI(I))+1.0E-30)
        7        IRIPET=0
       10        ISTAMP=0
       11        N=NMIN
       12        NMC=NM+1
       13    117 P=0.
       14    100 N1=N+1
       15        DO 1 I=1,NMC
       16        A(I)=0.
       17      1 ALPA(I)=0.
       21        DO 2 I=1,M
       22        DO 2 K=1,N1
       23        J=K-1
       24        IF(J)10,10,400
       25     10 PHI(1,I)=1.
       26        GO TO 2
       27    400 PHI(K,I)=X(I)**J
       30      2 CONTINUE
       33        DO 85 L=1,N1
       34        DO 85 K=1,N1
       35        SUM=0.0
       36        DO 4 I=1,M
       37      4 SUM=SUM+PHI(L,I)*PHI(K,I)*CSI(I)
       41     85 H(K,L)=SUM
       44        DO 666 K=1,N1
       45        DO 666 L=1,N1
       46    666 F(K,L)=H(K,L)
       51        DO 314 K=1,N1
       52        COM=F(K,K)
       53        F(K,K)=1.
       54        DO 311 J=1,N1
       55        SUM=F(K,J)/COM
       56    311 F(K,J)=SUM
       60        DO 314 I=1,N1
       61        IF(I-K)312,314,312
       62    312 COM=F(I,K)
       63        F(I,K)=0.0
       64        DO 313 J=1,N1
       65        SUM=F(I,J)-COM*F(K,J)
       66    313 F(I,J)=SUM
       70    314 CONTINUE
       73        DO 5 L=1,N1
       74        SUM=0.0
       75        DO 22 I=1,M
       76     22 SUM=SUM+PHI(L,I)*Y(I)*CSI(I)
      100      5 B(L)=SUM
      102        DO 6 K=1,N1
      103        SUM=0.0
      104        DO 35 L=1,N1
      105     35 SUM=SUM+F(K,L)*B(L)
      107      6 A(K)=SUM
      111        QN=0.0
      112        DO 8 I=1,M
```

```
      SUM=0.0
      DO 7 K=1,N1
    7 SUM=SUM+A(K)*PHI(K,I)
      FN(I)=SUM
      SC(I)=ABS((FN(I)-Y(I))*SQRT(CSI(I)))
    8 QN=QN+(FN(I)-Y(I))*(FN(I)-Y(I))*CSI(I)
      MN=M-N-1
      ZN=MN
      WN=QN/ZN
      PQN(N1)=PCHISQ(QN,MN)
      PQMN=PQN(N1)
      DO 30 K=1,N1
      IF(F(K,K))333,333,444
  333 ALPA(K)=WN*F(K,K)
      GO TO 30
  444 ALPA(K)=SQRT(WN*F(K,K))
   30 CONTINUE
      DO 555 I=1,M
      SUM2=0.0
      DO 34 K=1,N1
      SUM=0.0
      DO 33 L=1,N1
   33 SUM=SUM+F(K,L)*PHI(K,I)*PHI(L,I)
   34 SUM2=SUM2+SUM
      IF(SUM2)888,888,999
  888 DFN(I)=SUM2*WN
      GO TO 555
  999 DFN(I)=SQRT(WN*SUM2)
  555 CONTINUE
      IF(ISTAMP.GT.1) GO TO 104
      PRINT 1001,N,M
 1001 FORMAT (1H1,6HGRADO=I3,5X,11HNUM.MISURE=I4//50X,12HCOEFFICIENTI,8X
     1,15HERR. SUI COEFF.)
      DO 222 K=1,N1
  222 PRINT 1004,A(K),ALPA(K),K
 1004 FORMAT (47X,E16.7,5X,E16.7,5X,I4)
      PRINT 1005
 1005 FORMAT (1H0,12X,4HX(I),17X,4HY(I),14X,10HY(I) CALC.,13X,5HDY(I),13
     1X,11HDY(I) CALC.,14X,4HPESO)
      DO 1111 I=1,M
      PSI=1./SQRT(CSI(I))
 1111 PRINT 1000,X(I),Y(I),FN(I),PSI,DFN(I),CSI(I)
 1000 FORMAT (6(5X,E16.7))
      PRINT 1003,MN,QN,WN,PQMN
 1003 FORMAT (1H0,23HNUM. GRADI DI LIBERTA'=I4,5X,7HCHISQ= ,E16.7,5X,E16
     1.7,5X,8HPCHISQ= ,E16.7)
      IF(PQN(N1).LT.P) GO TO 102
      N=N+1
      P=PQN(N1)
      IF(N.LE.NM) GO TO 100
      N=N-1
      GO TO 105
  102 N=N-1
  105 IF(IRIPET.GT.1) GO TO 118
      READ 254,NPARTE,PROBAB
  254 FORMAT (I2,F8.4)
      SCL=TAGLIO(PROBAB,MN,NPARTE)
      J=1
      DO 106 I=1,M
      IF(SC(I).LT.SCL) GO TO 107
      GO TO 106
  107 ISC(J)=I
      J=J+1
  106 CONTINUE
      K=0
      J=1
      DO 111 I=1,M
      IF(I.GE.ISC(J)) GO TO 110
  112 J=J+K
      X(I)=X(J)
      Y(I)=Y(J)
      CSI(I)=CSI(J)
      GO TO 111
  110 K=K+1
      J=J+1
      M=M-1
      NSC=K
      GO TO 112
  111 CONTINUE
      IRIPET=2
      PRINT 1010,NPARTE,PROBAB,NSC,N
 1010 FORMAT (1H1,10HSCARTI DA I2,24H PARTI CON PROBABILITA' F7.4,4H/MIS
     1/5H NUM.I3,30H SCARTI CON POLINOMIO DI GRADOI3)
      IF(NSC.NE.0) GO TO 116
  118 ISTAMP=2
      GO TO 100
  116 N=1
      GO TO 117
  104 N=NMIN
      RETURN
      END
```