

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-77/56(L)
7 Dicembre 1977

G. Nardelli e G. Preparata:
ALCUNI ASPETTI DELLA FISICA e^+e^- .

G. Nardelli e G. Preparata: ALCUNI ASPETTI DELLA FISICA e^+e^- .

Lezioni tenute da G. Preparata presso la Scuola di Fisica Sperimentale e Teorica, Frascati
26 Aprile - 6 Maggio 1977.

INDICE.

1. - $e^+e^- \longrightarrow$ LEPTONI	2
1. 1. - $e^+e^- \longrightarrow e^+e^-$	2
1. 2. - $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$	3
1. 3. - $e^+e^- \longrightarrow \gamma\gamma$	4
1. 4. - Tests dell'elettrodinamica quantistica	6
1. 5. - L'accoppiamento della Z_0	6
2. - $e^+e^- \longrightarrow$ ADRONI	7
2. 1. - Produzione di mesoni vettoriali	8
2. 2. - Produzione di sistemi a due corpi	10
2. 3. - La produzione multiadronica	12
2. 4. - Struttura degli stati finali	13
3. - LE NUOVE PARTICELLE	17
3. 1. - La $J-\psi$	17
3. 2. - La ψ'	19
3. 3. - Lo spettro del charmonio	20
3. 4. - Gli stati con charm	21
3. 5. - Il leptone pesante	22
4. - INTERPRETAZIONI TEORICHE DELL'URTO e^+e^-	23
4. 1. - Fisica del cono di luce	23
4. 2. - Modelli a partoni	24
4. 3. - Libertà asintotica	25
4. 4. - Modelli VMD	26
4. 5. - Geometrodinamica	26
5. - L'URTO	28
5. 1. - Processi a due fotoni	28
5. 2. - Stati finali adronici	30
APPENDICI	31

1. - e⁺e⁻ → LEPTONI.

Esamineremo innanzitutto il caso in cui lo stato finale sia costituito unicamente da leptoni ed in particolare l'urto e⁺e⁻ → e⁺e⁻ (scattering di Bhabha⁽¹⁾), l'urto e⁺e⁻ → γγ. Mostriamo poi come questi processi forniscano un test dell'elettrodinamica quantistica e come l'urto e⁺e⁻ possa fornire indicazioni sulle interazioni deboli.

1.1. - e⁺e⁻ → e⁺e⁻.

Consideriamo quindi

$$e^-(k_1) + e^+(k_2) \longrightarrow e^-(q_1) + e^+(q_2)$$

Se l'energia in gioco sono sufficientemente elevate, si può porre m_e=0, giacché la massa dell'elettrone appare nel rapporto m_e/E_b, ove E_b è l'energia del fascio.

Dunque, la sezione d'urto può calcolarsi nel sistema di riferimento del centro di massa, in cui:

$$\begin{aligned} k_1 &= (E, 0, 0, E) & q_1 &= (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta) \\ k_2 &= (E, 0, 0, -E) & q_2 &= (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta) \end{aligned}$$

L'elemento di matrice M è dato dalla somma di due grafici, uno di scattering e l'altro di annichilazione; $\sum_{\text{spin}} |M|^2$ conterrà dunque anche un termine di interferenza.

$$\begin{aligned} M &= \begin{array}{c} e^-(k_1) \quad e^-(q_1) \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ e^+(k_2) \quad e^+(q_2) \end{array} + \begin{array}{c} e^-(k_1) \quad e^-(q_1) \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \quad k_1+k_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ e^+(k_2) \quad e^+(q_2) \end{array} \\ &= e^2 \bar{u}(q_1) \gamma_\mu u(k_1) \frac{(-g^{\mu\nu})}{(k_1-q_1)^2} \bar{v}(k_2) \gamma_\nu v(q_2) - \\ &\quad - e^2 \bar{u}(q_1) \gamma_\mu v(q_2) \frac{(-g^{\mu\nu})}{(k_1+k_2)^2} \bar{v}(k_2) \gamma_\nu u(k_1) \end{aligned}$$

Il segno meno di fronte al secondo addendo deriva dal fatto che i due diagrammi differiscono per lo scambio di una coppia di linee fermioniche esterne).

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = e^4 \left\{ [1 + \cos^2 \theta] + \left[\frac{8 + 2(1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} \right] - \left[\frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{1 - \cos \theta} \right] \right\} \quad (1.1)$$

e i tre termini tra parentesi quadre derivano rispettivamente, il primo dal diagramma di annichilazione, il secondo dal diagramma di scattering e il terzo è il termine di interferenza.

Tenendo conto dell'espressione generale per la sezione d'urto data in appendice I, si perviene alla seguente espressione per la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2}{8 E^2} \left[(1 + \cos^2 \theta) + \frac{2}{(1 - \cos \theta)^2} (4 + (1 + \cos \theta)^2) - \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{1 - \cos \theta} \right] \quad (1.2)$$

La sezione d'urto per lo scattering Bhabha consta quindi di tre termini il cui contributo specifico è riportato in Fig. 1.

Essa mostra un picco alla Rutherford per $\theta=0$, dove l'andamento è dato dal termine dominante

$$\frac{1}{(1-\cos\theta)^2} \sim \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

analogo allo scattering coulombiano.

Lo scattering Bhabha è molto frequente nell'urto e^+e^- , dove viene usato come monitor per determinare la luminosità del fascio.

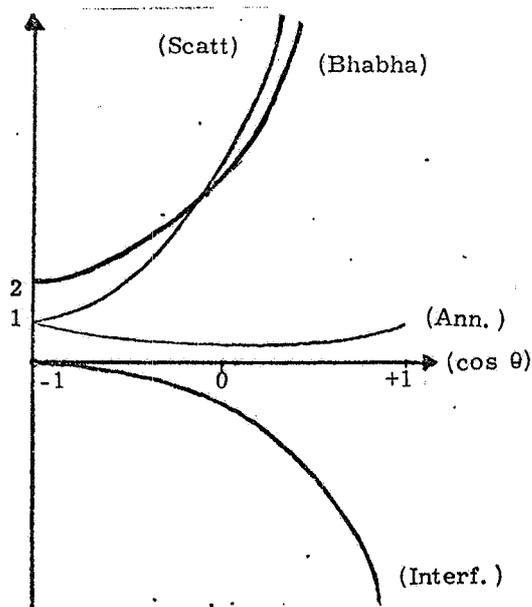


FIG. 1

1. 2. - $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

In questo caso, per la conservazione del numero muonico, esiste solo il diagramma di annichilazione. Nel limite in cui $m_\mu/E \ll 1$ la sezione d'urto si ricava dal caso precedente e vale:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2}{8 E^2} (1 + \cos^2 \theta) \tag{1.3}$$

Questa formula, così come quella dello scattering Bhabha, è valida nell'ipotesi di fasci iniziali di e^+ ed e^- non polarizzati. Nel caso, invece, che i fasci incidenti siano completamente polarizzati lungo l'asse x si ha, in luogo delle formule (A 2) dell'appendice I,

$$\sum_{\text{spin}} u(k_1) \bar{u}(k_1) = \frac{1 + \not{x} \gamma_5}{2} k_1$$

$$\sum_{\text{spin}} v(k_2) \bar{v}(k_2) = \frac{1 + \not{x} \gamma_5}{2} k_2$$

dove u^μ è il quadrivettore $(0, 1, 0, 0)$.

Si ottiene quindi facilmente, se

$$q_1 = (E, E \cos \phi, E \sin \phi \cos \theta, E \sin \phi \sin \theta)$$

che

$$|M|^2 = \frac{e^4}{(k_1+k_2)^4} \left[\text{Tr} \not{q}_1 \gamma_\mu \not{q}_2 \gamma_\sigma \right] \text{Tr} \left[(1 + \not{x} \gamma_5) \not{k}_2 \gamma^\mu (1 + \not{x} \gamma_5) \not{k}_1 \gamma^\sigma \right] =$$

$$= 8 (4\pi\alpha)^2 \left[1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right] \tag{1.4}$$

per cui la sezione d'urto è in questo caso

$$d\sigma/d\phi d \cos \theta = (\alpha^2/8 E^2) (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \tag{1.5}$$

Nel caso in cui entrambi i fasci siano solo parzialmente polarizzati lungo l'asse x, in luogo delle formule (A 2) occorre scrivere

$$\sum_{\text{spin}} u(k_1) \bar{u}(k_1) = \frac{1 + P_- \not{x} \gamma_5}{2} \not{k}_1$$

$$\sum_{\text{spin}} v(k_2) \bar{v}(k_2) = \frac{1 + P_+ \not{x} \gamma_5}{2} \not{k}_2$$

e, posto $P^2 = |P_+ P_-|$, $0 \leq P^2 \leq 1$, l'espressione per la sezione d'urto è la seguente:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\phi d\cos\theta} &= \frac{\alpha^2}{8E^2} \left\{ (1-P^2) \frac{1+\cos^2\theta}{2} + P^2 (1-\sin^2\theta \cos^2\phi) \right\} \\ &= \frac{\alpha^2}{8E^2} \left\{ \frac{1+\cos^2\theta}{2} - \frac{1}{2} P^2 \sin^2\theta \cos 2\phi \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Nella Fig. 2 si mostra l'andamento di $d\sigma/d\phi$ in funzione di ϕ , per l'urto $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ per due differenti polarizzazioni:

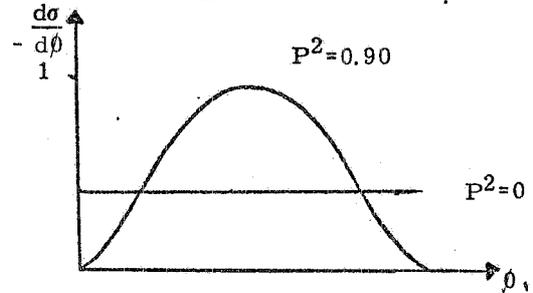


FIG. 2

Il caso trattato in questo paragrafo⁽²⁾ è importante perchè i fasci nell'urto e^+e^- sono naturalmente polarizzati (a SPEAR, ad esempio, la polarizzazione è del 90%) a causa della loro interazione con la radiazione di sincrotrone⁽³⁾. In assenza di fenomeni di depolarizzazione⁽⁴⁾ la polarizzazione dei fasci con la legge

$$P(t) = P_0 (1 - e^{-t/T}) \quad (1.7)$$

ove $P_0 \simeq 0.924$ e $T = 6.075 \times 10^4 / E^2 H^3$ min $\text{GeV}^2 (\text{Kg})^2$ (H è l'intensità del campo magnetico).

Se, quindi, i fasci sono polarizzati, poichè gli angoli θ e ϕ sono altamente correlati, basta effettuare le misure su piccoli angoli per ottenere informazioni sufficienti sulla sezione d'urto. Concludiamo osservando che l'apparire dell'espressione $1 + \cos^2\theta$ nella formula della sezione d'urto è conseguenza di un teorema generale per il quale, essendo il fotone una particella di spin uno, l'espressione della sezione d'urto può contenere un polinomio al più di grado secondo nelle funzioni angolari.

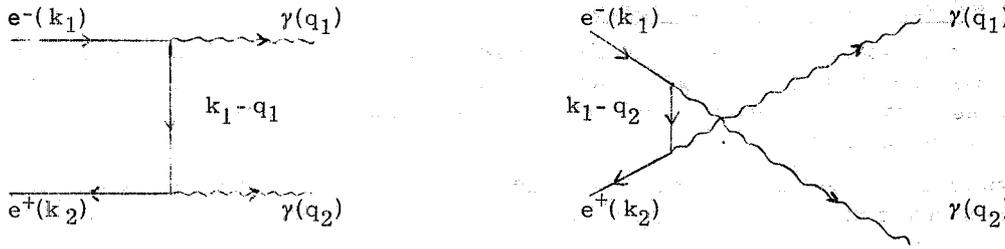
1.3. $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$.

Per calcolare la sezione d'urto del processo

$$e^-(k_1) + e^+(k_2) \longrightarrow \gamma(q_1) + \gamma(q_2)$$

osserviamo che la cinematica è la stessa del caso precedente, essendo $m_\gamma = 0$.

All'elemento di matrice contribuiscono i due diagrammi:



per cui, nel caso di fasci non polarizzati

$$M = \left\{ e^2 \bar{v}(k_2) \gamma_\mu \frac{k_1 - q_1 + m_e}{(k_1 - q_1)^2 - m_e^2} \gamma_\nu u(k_1) + \bar{v}(k_2) \gamma_\nu \frac{k_1 - q_2 + m_e}{(k_1 - q_2)^2 - m_e^2} \gamma_\mu u(k_1) \right\} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu$$

e tenendo conto della (A 3) dell'appendice I, si ottiene

$$\frac{1}{4 \text{ spin}} \sum |M|^2 = \frac{e^4}{4} \left[\frac{8(1+\cos \theta)}{1-\cos \theta} + \frac{8(1-\cos \theta)}{1+\cos \theta} \right] = 4(4\pi\alpha)^2 \left[\frac{1+\cos^2 \theta}{1-\cos^2 \theta} \right] \quad (1.8)$$

per cui si ottiene

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2}{2 E^2} \frac{1+\cos^2 \theta}{1-\cos^2 \theta} \quad (1.9)$$

Nel caso di fasci di e^+e^- polarizzati si ottiene⁽²⁾:

$$\frac{d\sigma}{d \phi d \cos \phi} = \frac{\alpha^2}{4 E^2} \left[\frac{1+\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - P^2 \cos 2 \phi \right] \quad (1.10)$$

La sezione d'urto per fasci non polarizzati ha l'andamento mostrato in Fig. 3.

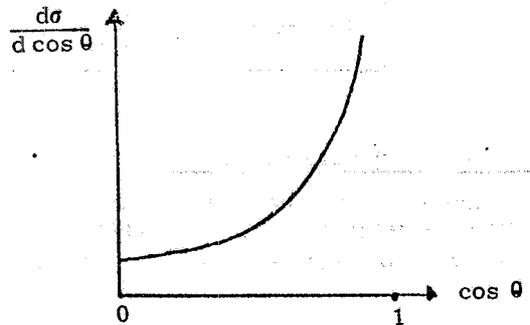


FIG. 3

Nella formula (1.9) la divergenza per $\theta=0$ è spuria, nel senso che si è indebitamente trascurata nel propagatore formionico la massa dell'elettrone. Se infatti, anzichè scrivere

$$\left[(k_1 - q_1)^2 - m_e^2 \right]^{-2} = 4 E^4 (1 - \cos \theta)^2$$

si scrive più esattamente

$$\left[(k_1 - q_1)^2 - m_e^2 \right]^{-2} = 4 E^4 \left[(1 - \cos \theta)^2 + (1 - \cos \theta) \frac{m_e^2}{E^2} \right]$$

si perviene alla formula corretta che non ha divergenze spurie:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi^2}{2 E^2} \frac{1+\cos^2 \theta}{1-\cos^2 \theta + (m_e^2/E^2)} \quad (1.11)$$

1. 4. - Tests dell'elettrodinamica quantistica.

L'urto e^+e^- può essere usato per controllare l'elettrodinamica quantistica. Per tali tests occorre naturalmente considerare soltanto i leptoni, dando loro come unica struttura quella proveniente dalla QED; i tests ottenuti, invece, usando gli adroni non sono attendibili giacchè non è lecito trascurarne le interazioni forti.

Una parametrizzazione delle violazioni della QED può farsi introducendo modelli fenomenologici. In pratica si usa ridefinire i propagatori del fotone e dell'elettrone mediante opportuni fattori di forma.

Si pone cioè, per il fotone

$$D_\gamma(q^2) = \frac{1}{q^2} F_\gamma(q^2) \quad F_\gamma(q^2) = 1 \pm \frac{q^2}{(\Lambda_\gamma^\pm)^2}$$

e per l'elettrone e il muone

$$D_\ell(q^2) = \frac{1}{q^2 - m^2} F_\ell(q^2) \quad F_\ell(q^2) = 1 \pm \frac{q^2}{(\Lambda_\ell^\pm)^2}$$

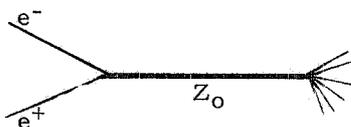
E' chiaro che gli urti $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$ e $e^+e^- \longrightarrow e^+e^-$ possono essere usati per verificare la forma di $D_\ell(q^2)$, mentre l'urto $e^+e^- \longrightarrow \gamma\gamma$ quella di D_γ . Una buona rassegna sperimentale si può trovare in (5). La Tabella I mostra i limiti superiori sperimentali.

TABELLA I

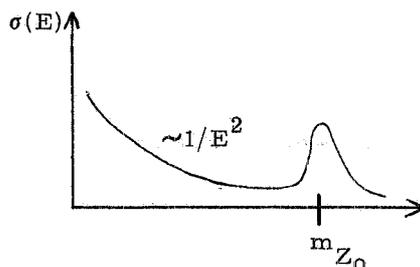
	Λ_\pm (GeV)	$e^+e^- \longrightarrow e^+e^-$	$e^+e^- \longrightarrow \gamma\gamma$	$e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$
SPEAR	Λ_+	22.8	6.2	14.5
	Λ_-	14.4	6.9	23.6
FRASCATI	Λ_+	9.8	3.9	7
	Λ_-	10.5	5.1	9

1. 5. - L'accoppiamento della Z_0 .

L'urto e^+e^- , per energie sufficientemente elevate (30+40 GeV nel centro di massa) raggiungibili da PEP o PETRA e non da ADONE o SPEAR, può fornire indicazioni sulle interazioni deboli, nel senso che può prodursi il mesone vettoriale neutro Z_0 che media le correnti neutre⁽⁶⁾:



Se consideriamo $\sigma(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-)$ ci aspettiamo un andamento di questo tipo:



e cioè un picco in prossimità della massa della Z_0 . La presenza della Z_0 può però manifestarsi anche ad energie E minori ($4 E^2 \ll m_{Z_0}^2$) a causa dell'interferenza tra i due diagrammi.

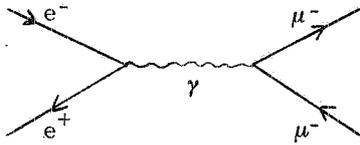


FIG. 4

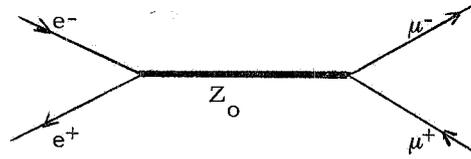


FIG. 5

Il termine di interferenza si ottiene a partire dall'elemento di matrice per il diagramma di Fig. 4 e quello di Fig. 5 che è il seguente

$$M = \begin{array}{c} e^-(k_1) \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ e^+(k_2) \end{array} \begin{array}{c} \mu^-(q_1) \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ \mu^+(q_2) \end{array} \quad (1.12)$$

$$= e_W^2 \bar{u}(q_1) \gamma_\mu (a+b \gamma_5) v(q_2) \frac{1}{4 E^2 - m_{Z_0}^2} \bar{v}(k_2) \gamma^\mu (a+b \gamma_5) u(k_1)$$

(a e b sono parametri reali dipendenti dal modello⁽⁷⁾).

Ne segue che la sezione d'urto comprende il contributo ad un fotone ed il termine di interferenza è data da

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}{d\cos\theta} = \frac{\pi a^2}{8 E^2} \left\{ (1+\cos^2\theta) + \frac{e_W^2}{e^2} \frac{1}{1-(m_{Z_0}^2/4E^2)} \left[a^2(1+\cos^2\theta) + 2b^2 \cos\theta \right] \right\} \quad (1.13)$$

Il termine di interferenza introduce quindi una asimmetria nella distribuzione angolare. Per $4E^2 \ll m_{Z_0}^2$ e $\theta \sim 90^\circ$ l'asimmetria è dell'ordine di

$$\frac{e_W^2}{e^2} \frac{4 E^2}{m_{Z_0}^2} a^2$$

Per una energia sui 20 GeV questo effetto è del 17% e quindi apprezzabile.

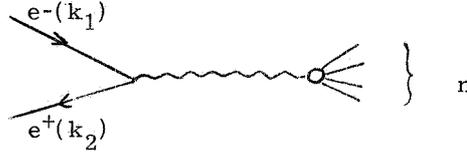
2. - $e^+e^- \rightarrow$ ADRONI.

L'importanza del settore leptonic della fisica dell'urto e^+e^- risiede essenzialmente nella possibilità di controllare alcune predizioni dell'elettrodinamica quantistica. E' però nella produzione adronica che si genera la fisica più interessante ed anche inaspettata, giacchè era convinzione comune, prima della scoperta delle nuove particelle, che ad alte energie le interazioni forti dovessero "spegnersi" a causa dell'andamento decrescente in q^2 dei fattori di forma.

Consideriamo un tipico processo di produzione adronica

$$e^-(k_1) + e^+(k_2) \rightarrow n$$

descritto, all'ordine più basso, dal grafico



con $q = k_1 + k_2$, $k_1 = (E, 0, 0, E)$, $k_2 = (E, 0, 0, -E)$, $m_e \approx 0$ ed $|n\rangle$ lo stato finale adronico.

L'elemento di matrice per tale processo è

$$M = e^2 \bar{v}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \langle n | J_\nu^{e.m.}(0) | 0 \rangle \quad (2.1)$$

dove $|0\rangle$ è il vuoto adronico.

La condizione $\partial^\mu J_\mu^{e.m.}(x) = 0$ fornisce $q^\mu J_\mu^{e.m.} = 0$, e poichè $\vec{q} = 0$ ciò implica $J^0 = 0$. D'altro canto, essendo $\vec{q} = 0$, $|n\rangle$ è anche autostato del momento angolare con autovalore zero; poichè il vuoto $|0\rangle$ ha numeri quantistici $J^{PC} = 0^{++}$ e J ha numeri quantistici $J^{PC} = 1^{--}$, $|n\rangle$ avrà i numeri quantistici $J^{PC} = 1^{--}$ che sono quelli tipici di un mesone vettoriale.

2.1. - Produzione di mesoni vettoriali.

Supponiamo ora che $|n\rangle = |V_i\rangle$, cioè che lo stato finale adronico sia costituito da un mesone vettoriale di massa m_i e impulso

$$q = (m_i, 0, 0, 0)$$

Si potrà scrivere

$$\langle V_i | J_\mu^{e.m.}(0) | 0 \rangle = \varepsilon_\mu(q) \frac{m_i^2}{2\gamma_i} \quad (2.2)$$

dove $\varepsilon_\mu(q)$ è un vettore di polarizzazione che soddisfa a $q^\mu \varepsilon_\mu(q) = 0$, il fattore $m_i^2/2\gamma_i$ è posto convenzionalmente, e γ_i è adimensionale.

Poichè (cfr. appendice I) risulta

$$\sum_{\text{spin}} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = \frac{m_i^2}{4\gamma_i^2} (4\pi\alpha)^2 \quad (2.3)$$

tenendo conto dell'espressione dello spazio delle fasi, la sezione d'urto totale per il processo $e^+e^- \rightarrow V_i$ è la seguente

$$\sigma_{\text{TOT}}(e^+e^- \rightarrow V_i) = \frac{4\pi^2 \alpha^2}{\gamma_i^2} \pi \delta_+(q^2 - m_i^2) \quad (2.4)$$

Questa formula è valida nell'ipotesi che V_i sia una particella stabile (risonanza di larghezza $\Gamma_i = 0$). In effetti per i mesoni vettoriali ρ , ω , ϕ , risulta sempre $\Gamma_i/m_i \ll 1$ e l'approssimazione $\Gamma_i = 0$ risulta soddisfacente.

Se si tien conto della larghezza finita di V_i , occorre sostituire a $\pi \delta_+(q^2 - m_i^2)$ l'espressione (Breit-Wigner):

$$\frac{m_i \Gamma_i}{(q^2 - m_i^2) + (m_i \Gamma_i)^2} \quad (2.5)$$

giacchè risulta

$$\lim_{\Gamma_i \rightarrow 0} \frac{m_i \Gamma_i}{(q^2 - m_i^2)^2 + (m_i \Gamma_i)^2} = \pi \delta_+(q^2 - m_i^2) \quad (2.6)$$

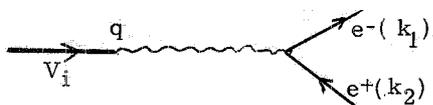
Ne segue, per la σ_{TOT} , l'espressione

$$\sigma_{TOT}(e^+e^- \rightarrow V_i) = \frac{4\pi^2 \alpha^2}{\gamma_i^2} \frac{m_i \Gamma_i}{(q^2 - m_i^2)^2 + (m_i \Gamma_i)^2} \quad (2.7)$$

che si riduce al picco a

$$\sigma_{TOT}(q^2 = m_i^2) = \frac{4\pi^2 \alpha^2}{\gamma_i^2} \frac{1}{m_i \Gamma_i} \quad (2.8)$$

La (2.8) può essere riscritta introducendo la width leptonica. Infatti, per il processo



risulta

$$\sum_{\text{spin}} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = 1/3 \frac{m_i^2}{\gamma_i^2} (4\pi\alpha)^2 \quad (2.9)$$

(la differenza rispetto alla (2.3) è che in questo caso gli stati di spin iniziali possibili sono 3 anziché 4) e quindi tenendo conto della (A.8) dell'appendice I, si ha

$$\Gamma_{e^+e^-} = \Gamma(V_i \rightarrow e^+e^-) = \frac{m_i \pi \alpha^2}{3 \gamma_i^2} \quad (2.10)$$

per cui, al picco

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow V_i) = \frac{12\pi}{m_i^2} \frac{(m_i \Gamma)_{e^+e^-}}{(m_i \Gamma)_{TOT}} = \sigma_J \frac{(m_i \Gamma)_{e^+e^-}}{(m_i \Gamma)_{TOT}} \quad (2.11)$$

dove la quantità $\sigma_J = 12\pi/m_i^2 = 4\pi/m_i^2(2J+1)$, ($J=1$), è il limite di unitarietà.

Per un mesone vettoriale come la ρ :

$$m_i \approx 10^3 \text{ MeV} \quad \Gamma_{e^+e^-} \approx 10^{-2} \text{ MeV} \quad \Gamma_{TOT} \approx 10^2 \text{ MeV} \quad 1/m^2 \approx 4 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$$

per cui, al picco

$$\sigma \approx 1500 \text{ nb} \quad (1 \text{ nb} = 10^{-33} \text{ cm}^2)$$

Nel caso della $J - \psi$ (8), si ha $\Gamma_{TOT} \approx 50 \text{ keV}$, $\Gamma_{e^+e^-} \approx 5 \text{ keV}$ e quindi

$$\sigma \approx 10^{-28} \text{ cm}^2$$

che è una quantità enorme. Essa va però ridotta, tenendo conto della risoluzione sperimentale

$$\Gamma_{\text{exp}} \approx 100 \Gamma_{TOT}$$

per cui

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \psi) \Big|_{\text{picco}} \approx 10^{-30} \text{ cm}^2 = 10^3 \text{ nb}$$

Informazioni sulla width leptonica e sulla risoluzione sperimentale (qualora essa sia più grande della larghezza reale) si possono ottenere da un'analisi della curva di eccitazione, mentre la width reale si ottiene dalla misura del branching ratio leptonico.

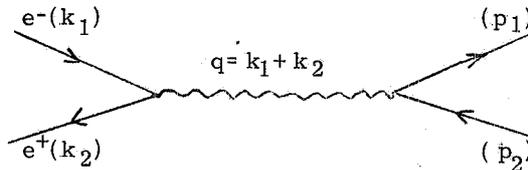
$$B_{e^+e^-} = \frac{\Gamma_{e^+e^-}}{\Gamma_{TOT}}$$

Per chiudere, si osservi che i numeri quantici interni di risonanze eccitate da un fotone virtuale sono

$$\begin{array}{ll} I=0 & (\text{risonanza del tipo della } \omega) \\ I=1 & (\text{risonanza del tipo della } \rho) \\ S=C=F=0 & (F \text{ eventuali altri sapori}) \end{array}$$

2. 2. - Produzione di sistemi a due corpi.

Considereremo ora i processi $e^+e^- \longrightarrow \pi^+\pi^-$ ed $e^+e^- \longrightarrow p\bar{p}$. In entrambi i casi il grafico rilevante è



con $k_1=(E, 0, 0, E)$, $k_2=(E, 0, 0, -E)$, $p_1=(E_1, |\vec{p}_1| \sin \theta, 0, |\vec{p}_1| \cos \theta)$, $p_2=(E_2, -|\vec{p}_1| \sin \theta, 0, -|\vec{p}_1| \cos \theta)$, $q=k_1+k_2$

2. 2. 1. - $e^+e^- \longrightarrow \pi^+\pi^-$.

In questo caso l'elemento di matrice è

$$M = e^2 \bar{v}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \langle \pi^+(p_1) \pi^-(p_2) | J_\nu^{e.m.}(0) | 0 \rangle \quad (2.12)$$

Da considerazioni di invarianza relativistica e da $q_\mu J_\mu^{e.m.} = 0$ segue che in tutta generalità:

$$\langle \pi^+(p_1) \pi^-(p_2) | J_\mu^{e.m.}(0) | 0 \rangle = (p_1 - p_2)_\mu F_\pi(q^2) \quad (2.13)$$

dove $F_\pi(q^2)$ è il fattore di forma time-like del pione.

Poichè

$$\sum_{\text{spin}} |M|^2 = 1/2 (4\pi\alpha)^2 \left[1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2} \right] \sin^2 \theta |F_\pi(q^2)|^2, \quad (2.14)$$

tenendo conto dell'espressione dello spazio delle fasi (appendice I) si ha

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi\alpha^2}{4q^2} \left[1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2} \right]^{3/2} |F_\pi(q^2)|^2 \sin^2 \theta \quad (2.15)$$

Ne segue che una misura della sezione d'urto differenziale fornisce una misura del modulo di F_π . Per altro la dipendenza da q^2 di F_π non è nota: se per esempio il decadimento in $\pi^+\pi^-$ avviene tramite il decadimento di una risonanza con un branching ratio apprezzabile, F_π avrà una forma alla Breit-Wigner. Si fa l'ipotesi che F_π soddisfi ad una relazione di dispersione del tipo:

$$F_\pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dm^2}{q^2 - m^2 - i\epsilon} \text{Im } F_\pi(m^2) \quad (2.16)$$

e nel caso di una risonanza

$$\text{Im } F_{\pi}(m^2) = \pi \delta(m^2 - m_R^2) g_{R,\pi\pi} \frac{m_R^2}{2\gamma_R} \quad (2.17)$$

I risultati sperimentali⁽⁹⁾ mostrano che nel canale $\pi\pi$ è presente una struttura più ricca della sola ρ : è chiaro comunque che il fattore di forma decresce per gradi q^2 almeno come $1/q^2$ e quindi⁽¹⁰⁾

$$\sigma(q^2) \sim \frac{1}{(q^2)^3} \quad (2.18)$$

In Fig. 6 è riportato l'andamento di $|F_{\pi}(q^2)|^2$ in funzione di q^2 nella regione time-like⁽⁹⁾.

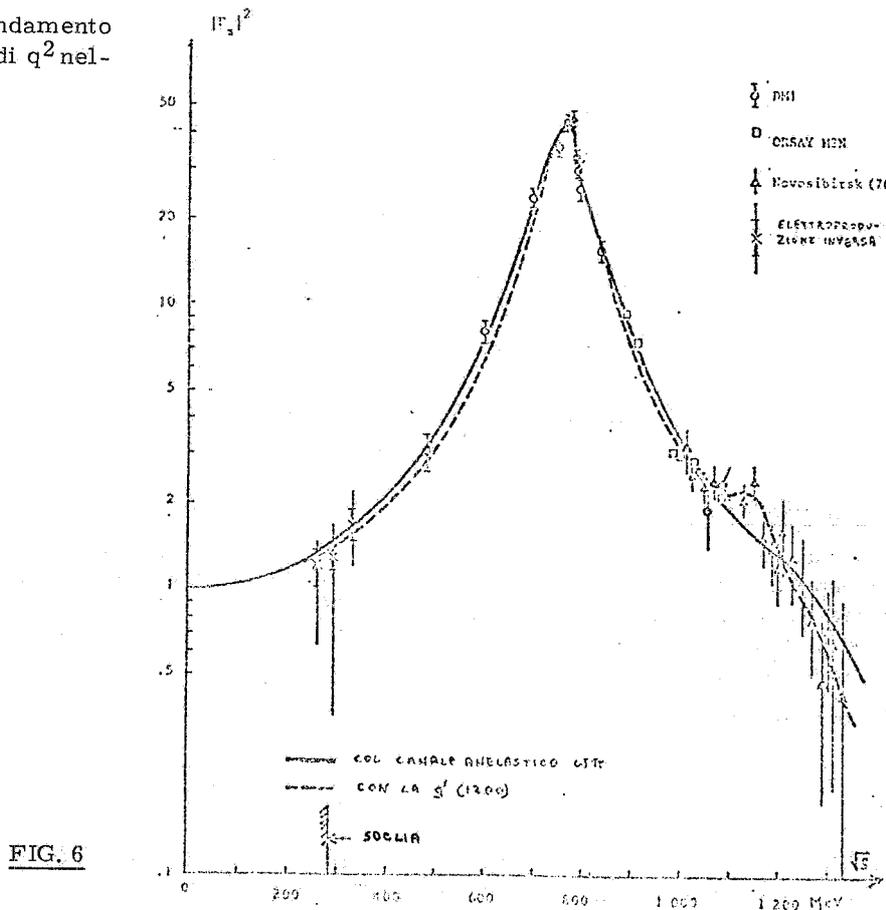


FIG. 6

2.2.2. - $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$.

Nel caso di e^+e^- che vanno nella coppia protone-antiprotone, in luogo della (2.13) occorre scrivere

$$\langle p(p_1) \bar{p}(p_2) | J_{\mu}^{e.m.}(0) | 0 \rangle = \bar{u}(p_1) \left[\gamma_{\mu} F_1(q^2) + i \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} \frac{F_2(q^2)}{2m} \right] v(p_2) \quad (2.19)$$

dove F_1 è il fattore di forma di Dirac ed F_2 quello di Pauli⁽¹¹⁾. In luogo di F_1 ed F_2 si possono introdurre i fattori di forma $G_E(q^2)$, $G_M(q^2)$ ⁽¹²⁾ legati ai primi da

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{4m^2} F_2(q^2) \quad (2.20)$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2)$$

La sezione d'urto differenziale assume la forma (13):

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi a^2}{2q^2} \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2} \left[\frac{4m^2}{q^2} |G_E|^2 \sin^2 \theta + |G_M|^2 (1 + \cos^2 \theta) \right] \quad (2.21)$$

Per fattori di forma point-like e per $q^2 \rightarrow \infty$ la (2.21) si riduce alla (1.3), cioè alla sezione d'urto del processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Osserviamo ora che, nel caso di particelle scalari, la sezione d'urto point-like si ottiene dalla (2.15) ed è

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi a^2}{4q} \sin^2 \theta \quad (2.22)$$

da cui si ottiene, per la σ_{TOT} :

$$\sigma(q^2) = \frac{\pi a^2}{3q^2} \quad (2.23)$$

D'altro canto, dalla (2.21) nelle stesse ipotesi si ha

$$\sigma(q^2) = \frac{4}{3} \frac{\pi a^2}{q} \quad (2.24)$$

per cui si perviene al risultato

$$\frac{\sigma_{spin 0}}{\sigma_{spin 1/2}} \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \quad (2.25)$$

2.3. - La produzione multiadronica.

Si è già detto che la scoperta di una grande ricchezza di stati finali adronici - ben oltre quanto ci si sarebbe aspettati da semplici considerazioni sui fattori di forma - costituì una sorpresa ed è doveroso citare, a riguardo, il lavoro pionieristico svolto dall'anello di ADONE. Poichè gli stati esclusi vi mostrano tutti una forte decrescita in q^2 ⁽¹⁴⁾, è lecito chiedersi cosa mantiene elevata la produzione adronica ad alte energie.

La risposta è suggerita dal famoso rapporto⁽¹⁵⁾

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \text{cost.} \quad (2.26)$$

La Fig. 7⁽¹⁶⁾ mostra un sommario dei dati riguardanti R; nella Fig. 8⁽¹⁶⁾ è meglio visibile il settore in cui si apre il canale della produzione di particelle charmate (cfr 3.4)

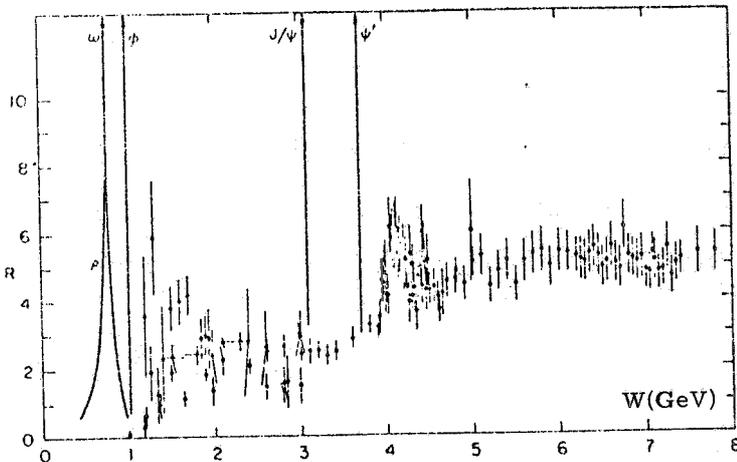


FIG. 7

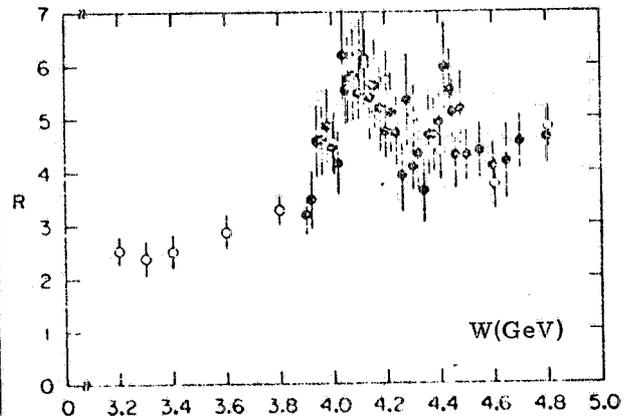


FIG. 8

Poichè R non decresce con q^2 , appare chiaro che la forte decrescita in q^2 nelle reazioni esclusive è dovuta alla presenza dei fattori di forma. Se, in luogo di considerare sezioni d'urto esclusive, sommiamo sugli stati finali, in modo da non introdurre fattori di forma, ci aspettiamo che la sezione d'urto non decresca così fortemente.

Consideriamo allora

$$\pi_{\mu\nu}(q^2) = \sum_{\text{spin}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - P_n) \langle 0 | J_\nu(0) | n \rangle \langle n | J_\mu(0) | 0 \rangle \quad (2.27)$$

dove si somma su tutti gli stati finali e \sum_n comprende l'integrazione sullo spazio delle fasi. Per ragioni di covarianza e per l'equazione di continuità, il tensore di polarizzazione del vuoto $\pi_{\mu\nu}(q^2)$ è dato da

$$\pi_{\mu\nu}(q^2) = (-g_{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) \pi(q^2) \quad (2.28)$$

E' facile provare che

$$\pi_{\mu\nu} = \int dx e^{iqx} \langle 0 | J_\mu(x) J_\nu(0) | 0 \rangle \quad (2.29)$$

Difatti risulta $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$, giacchè $|n\rangle$ è un sistema ortonormale completo, e inoltre

$$J_\mu(x) = e^{iPx} J_\nu(0) e^{-iPx}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \int dx e^{iqx} \langle 0 | J_\mu(x) J_\nu(0) | 0 \rangle &= \sum_n \int dx e^{i(q-P_n)x} \langle 0 | J_\mu(0) | n \rangle \langle n | J_\nu(0) | 0 \rangle = \\ &= \pi_{\mu\nu}(q^2). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Si ha quindi che la sezione d'urto totale inclusiva è data da

$$\sigma_{\text{TOT}}(e^+ e^- \longrightarrow \text{adroni}) = \frac{8\pi^2 \alpha^2}{q} \pi(q^2) \quad (2.31)$$

Ora, se nella (2.27) si effettua il limite per $q^2 \longrightarrow \infty$, l'integrale a secondo membro oscilla a meno che $|x| \longrightarrow 0$. Dunque, la zona fisicamente interessante è, per $q^2 \longrightarrow \infty$, quella in cui $|x| \sim 1/|q|$, ossia il cono di luce ($x^2=0$); ma su questo torneremo nel cap. 4.

2.4. - Struttura degli stati finali.

Tra i fatti sperimentali degni di interesse, oltre al già citato rapporto R , vi è pure l'andamento della molteplicità dei carichi in funzione dell'energia. In Fig. 9 sono riportati i dati di ADONE⁽¹⁷⁾, CEA⁽¹⁸⁾, SPEAR^(19, 25) relativi al numero medio di particelle cariche nello stato finale, $\langle n_{\text{ch.}} \rangle$ ⁽¹⁶⁾ in funzione dell'energia.

L'andamento è ben descritto da una formula empirica del tipo

$$\langle n_{\text{ch.}} \rangle = .75 \ln q^2 + 1.93 \quad (2.32)$$

L'andamento della molteplicità espresso dalla (2.32) è analogo a quello che si ha in molti altri processi adronici⁽²⁰⁾.

La crescita di $\langle n_{\text{ch.}} \rangle$ con l'energia mostra che, con l'aumentare dell'energia, si aprono sempre nuovi canali per la produzione adronica.

Esaminiamo ora l'andamento della sezione d'urto inclusiva per produzione di una singola particella. E' chiaro che in questo caso non si può usare la relazione di completezza $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$. Se al-

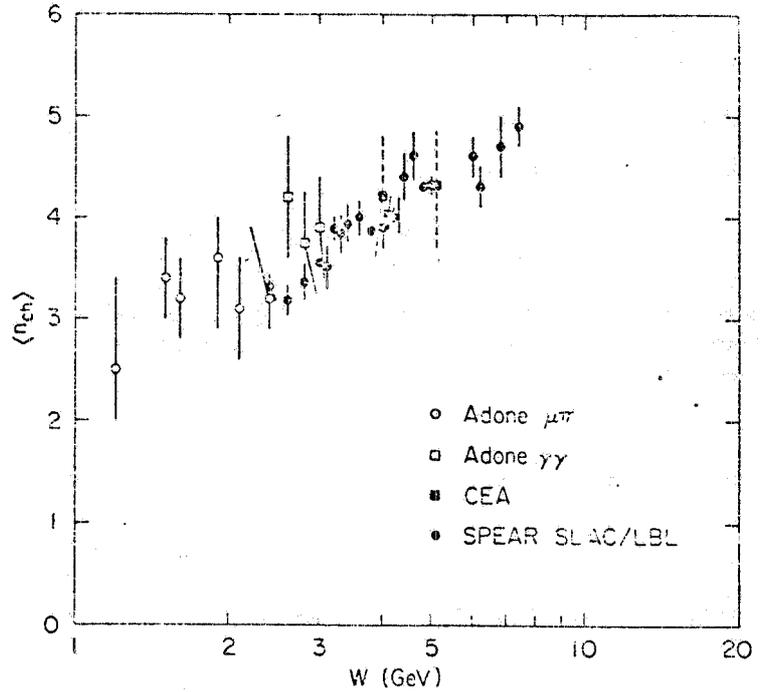
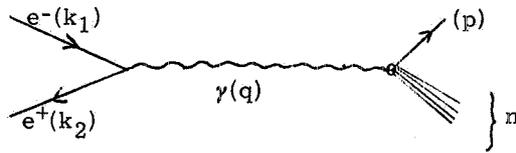


FIG. 9

lora $|n\rangle$ rappresenta il "resto" dello stato finale



e se la cinematica è la seguente

$$k_1 = (E, 0, 0, E) \quad (k_2 = (E, 0, 0, -E))$$

$$p = (E^*, p^* \cos \theta, p^* \sin \theta \cos \phi, p^* \sin \theta \sin \phi)$$

la sezione d'urto può scriversi

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2E}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{e^4}{q^4} \mathcal{L}_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \right\} (2\pi) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E^*} \quad (2.33)$$

dove

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1 k_2) g^{\mu\nu} \quad (2.34)$$

$$W^{\mu\nu}(q, p) = \sum_n (2\pi)^3 \delta^4(q-p-P_n) \langle 0 | J^\nu(0) | p, n \rangle \langle p, n | J^\mu(0) | 0 \rangle \quad (2.35)$$

E' facile accorgersi che il tensore simmetrico del secondo rango più generale che possa costruirsi con le quantità p^μ , q^μ e $g^{\mu\nu}$ e soddisfi alle condizioni $q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0$ (conservazione della carica) è la seguente:

$$W_{\mu\nu}(q, p) = \left(-g_{\mu\nu} \frac{q_\mu q_\nu}{2}\right) W_1 + \left(p_\mu - q_\mu \frac{pq}{q^2}\right) \left(p_\nu - q_\nu \frac{pq}{q^2}\right) W_2 \frac{1}{m^2} \quad (2.36)$$

dove W_1 e W_2 sono due funzioni scalari adimensionali:

$$W_J = W_{J}(p, q, q^2)$$

e sono analoghe alle funzioni di struttura che appaiono nello scattering di elettrone⁽²¹⁾.

Se introduciamo le due variabili

$$x = \frac{2 p q}{q^2} = \frac{E^*}{E} \quad \nu = \frac{q^2 x}{2 m}$$

poichè

$$\frac{d^3 \vec{p}}{2 E^*} = \pi \beta \frac{q^2}{4} x dx \sin \theta d \theta \quad (2.37)$$

($\beta = \frac{p^*}{E^*}$ è la velocità della particella), e

$$\frac{e^4}{q^4} \ell_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = \frac{16 \pi^2 \alpha^2}{q^2} \left[W_1 + \frac{p^* x}{2} \frac{W_2}{m^2} \sin^2 \theta \right] \approx \frac{16 \pi^2 \alpha^2}{q^2} \left[W_1 + \frac{m}{4} x \nu \frac{W_2}{m^2} \sin^2 \theta \right] \quad (2.38)$$

(l'ultimo passaggio è valido per $\beta \approx 1$), si trae

$$\frac{d\sigma}{dx \cos \theta} = \frac{2 \pi \alpha^2}{4 q^2} \beta x \left[W_1 + \frac{x \nu}{4} \frac{W_2}{m^2} \sin^2 \theta \right] \quad (2.39)$$

In relazione alle due funzioni di struttura, Bjorken⁽²²⁾ formulò l'ipotesi di scaling, cioè che per produzione adronica ad alte energie W_1 e N_2 tendono a funzioni della sola x :

$$\begin{aligned} W_1 &\longrightarrow F_1(x) \\ \frac{\nu}{m} W_2 &\longrightarrow F_2(x) \end{aligned} \quad (2.40)$$

E' ben verificata sperimentalmente, inoltre, la relazione di Callan-Gross⁽²³⁾

$$F_2(x) = - \frac{2}{x} F_1(x) \quad (2.41)$$

Nella ipotesi (2.40) e (2.41) la sezione d'urto si riduce a

$$d\sigma = \frac{\pi \alpha^2}{2 q^2} (1 + \cos^2 \theta) F_1(x) dx d \cos \theta \quad (2.42)$$

Se assumiamo per le particelle puntiformi $F_1(x) = \delta(x-1)$, la (2.42) si riduce alla (1.3) che dà la sezione d'urto per il processo $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$; d'altro canto è chiaro che la (2.42) può essere interpretata introducendo il concetto di partone⁽²⁴⁾: $F_1(x)$ rappresenta la densità di particelle puntiformi ciascuna delle quali porta solo una frazione dell'energia incidente; che i partoni abbiano spin 1/2 è suggerito dalla dipendenza in $(1 + \cos^2 \theta)$ che è tipica dei fermioni (cfr. 1.3) e (2.15).

In Fig. 10 e 11 appaiono le distribuzioni angolari in θ e β ; osserviamo che il primo grafico conferma l'indipendenza da β (per $P^2=0$) e il secondo l'andamento in $(1 + \cos^2 \theta)$.

L'ipotesi di scaling è ben verificata sperimentalmente; se si esamina l'andamento di $s(d\sigma/dx)$ in funzione di x ($s=q^2$) per differenti valori di \sqrt{s} , vediamo che almeno per $x \geq 0.5$, $s(d\sigma/dx)$ è funzione solo di x e non di s , ossia che c'è una curva universale (vedi Fig. 12).

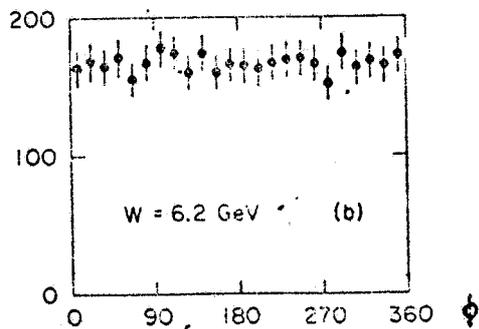


FIG. 10

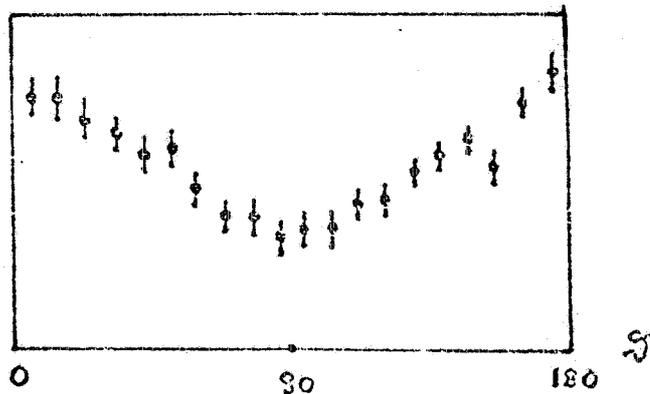


FIG. 11

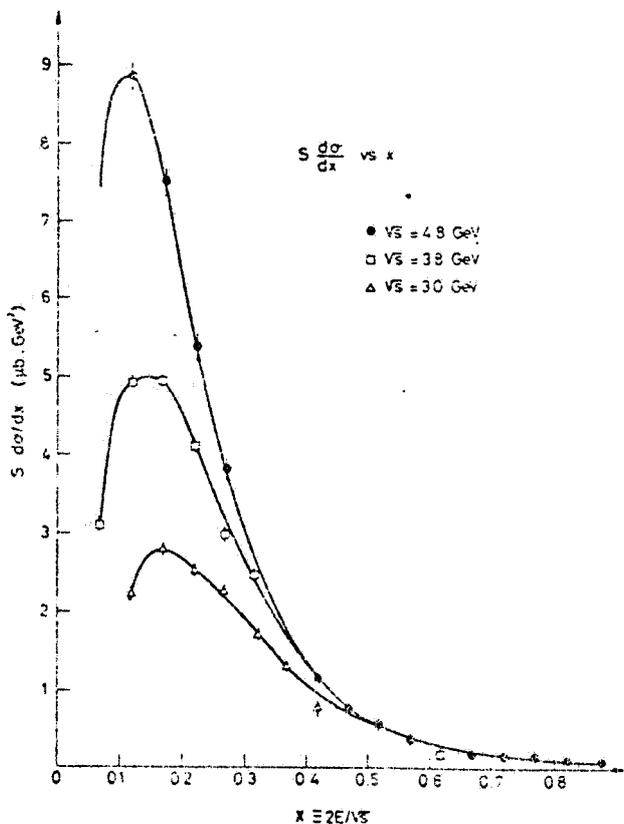


FIG. 12

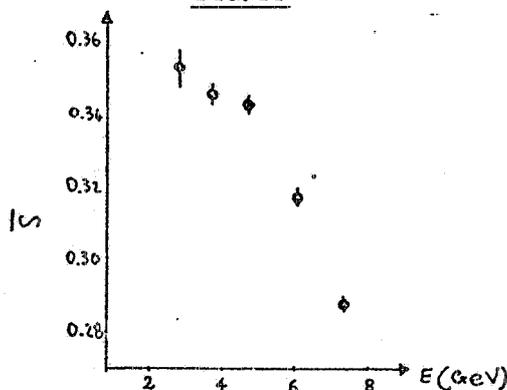


FIG. 13

Un'altra analisi interessante è quella della sfericità⁽²⁶⁾.

La sfericità è definita come

$$S(\Omega) = \frac{\sum_i p_i^2 \perp(\Omega)}{\sum_i p_i^2} \quad (2.43)$$

ed una funzione delle direzioni Ω dello spazio. Se non vi sono direzioni privilegiate lungo le quali avviene la produzione adronica, $S(\Omega)$ è costante e vale $2/3$. Se invece una tale direzione (Jet) esiste, $S(\Omega)$ varierà nell'intervallo $(0, 2/3)$ assumendo il valore minimo lungo la direzione del Jet.

In Fig. 13, è riportata la sfericità media⁽²⁶⁾ in funzione dell'energia nel centro di massa; il diminuire della sfericità media con l'energia è indizio della struttura a jets e dunque del fatto che la materia adronica viene prodotta lungo la direzione definita da una coppia quark-antiquark.

La Fig. 14 mostra l'andamento della sezione d'urto in funzione della rapidità, definita come

$$Y = \frac{1}{2} \ln \frac{E - p_2}{E + p_2} \quad (2.44)$$

L'andamento è analogo a quello che si ottiene nello scattering pp. I dati mostrano che i momenti longitudinali scalano (quelli trasversi hanno un cut-off intorno ai 300 MeV).

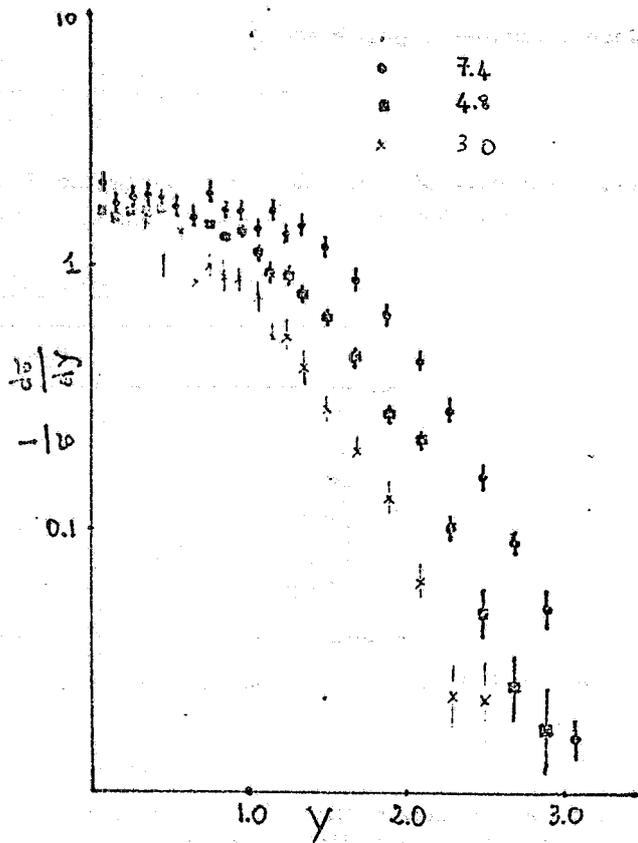


FIG. 14

3. - LE NUOVE PARTICELLE.

La "nuova" fisica dell'urto e^+e^- ha avuto inizio con la scoperta della $J-\psi$ (3100) vista da Ting ed il suo gruppo nel novembre 1974 e dal gruppo SPEAR a Stanford⁽²⁷⁾. La successione storica è la seguente⁽²⁸⁾:

1974 - Novembre	$J-\psi$ (3100)	Ting et al., SPEAR
- Dicembre	ψ' (3700)	SPEAR
1975 - Estate	P_c (3450)	DESY
	Stati χ	SPEAR
	η_c (2800)	DESY
	(4020)	SPEAR
	(4400)	SPEAR
1976 - Maggio	D, D^*	SPEAR
1977 - Primavera	F, F^*	DASP
- Giugno	(3770)	SPEAR

3.1. - La $J-\psi$.

La $J-\psi$ fu osservata quasi contemporaneamente a Brookhaven e a Stanford. Ting ottenne un segnale vistoso osservando il processo: $p+Be \rightarrow e^+e^- + X$ a 30 GeV; tralasciamo per brevità di occuparci di questo processo ed analizziamo cosa succede in e^+e^- .

Si è già visto (cfr. (2.7) e (2.10)) che, per una risonanza,

$$\sigma(q^2) = \frac{4\pi^2\alpha^2}{\gamma^2} \frac{m\Gamma}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} = \frac{3\cdot 4\pi}{2} (m\Gamma) e^+e^- \frac{m\Gamma}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2}$$

Al picco la sezione d'urto diviene(*) :

$$\sigma(q^2 = m^2) = \frac{12\pi}{m^2} \frac{(m\Gamma)_{e^+e^-}}{(m\Gamma)_{TOT}}$$

per cui una misura di $\sigma(m^2)$ dà il B. R. leptonic: $B. R._{lep} = \Gamma_{e^+e^-} / \Gamma_{TOT}$ e, mediante una misura di $\Gamma_{e^+e^-}$, la larghezza totale Γ_{TOT} . I parametri della $J-\psi$ sono dati in Tabella II.

TABELLA II

J- ψ	
m	3.095 \pm 0.004 GeV
$\Gamma_e = \Gamma_\mu$	4.8 \pm 0.6 KeV
Γ_H	59 \pm 14 KeV
Γ_e / Γ_H	0.069 \pm 0.009
Γ	69 \pm 15 KeV
Γ_H / Γ	0.86 \pm 0.02
Γ_μ / Γ_e	1.00 \pm 0.05

L'eccezionalità della $J-\psi$ è la sua larghezza

$$\Gamma_{TOT} = 69 \pm 15 \text{ KeV}$$

Se la paragoniamo a quella di un altro mesone vettoriale di massa sui 2 GeV (ad esempio il ρ' (1600) che ha $\Gamma \simeq 300 \div 400 \text{ MeV}$) otteniamo

$$\Gamma_{J-\psi} / \Gamma_{\rho'} \simeq 2 \cdot 10^{-4}$$

un risultato a prima vista sbalorditivo, tale da far supporre, che in un primo momento, che la $J-\psi$ non fosse un adrone, ma il bosone intermedio neutro Z_0 .

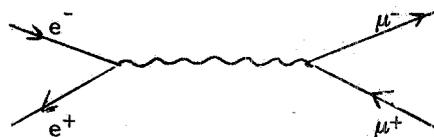
In un secondo tempo si spiegò la soppressione del decadimento della $J-\psi$ in adroni normali supponendo che essa fosse uno stato legato $c\bar{c}$ (c è il quark "charm"). La piccolezza di Γ risiederebbe nella regola di Zweig che sopprime grafici del seguente tipo



in maniera analoga alla soppressione del decadimento $\varphi \rightarrow \rho\pi$.

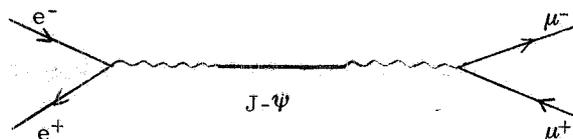
Oggi questa spiegazione è accettata, ma la nostra comprensione del fenomeno resta lontana dall'essere soddisfacente (in particolare la soppressione è più importante in un fattore 10 nell'ampiezza di quanto non prevede la regola di Zweig).

I numeri quantici $J^{PC} = 1^{--}$ della $J-\psi$ furono poi stabiliti senza ambiguità dall'osservazione di una interferenza tra l'ampiezza relativa al decadimento



(*) Ciò corrisponde ad una misura ideale. Vedi nota (57).

e quella relativa a:



Si ottiene infatti per la sezione d'urto nei due casi (— con interferenza, - - - - - senza interferenza)⁽¹⁶⁾(v. Fig. 15)

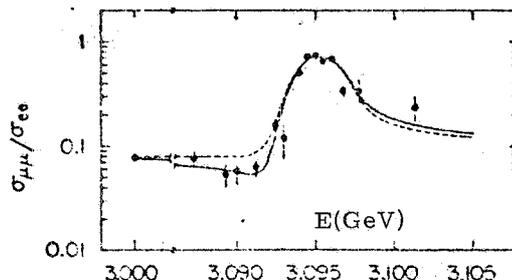
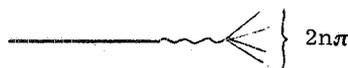


FIG. 15

La G-parity per la $J-\psi$ è $G=-1$ come si deduce dal fatto che la $J-\psi$ decade preferibilmente in un numero dispari di pioni. La produzione, in taluni casi di un numero pari di pioni costituisce solo apparentemente una violazione, giacché i decadimenti in $2n$ pioni provengono da grafici come questo⁽³⁰⁾



La $J-\psi$ è inoltre un singoletto di spin isotopico⁽³¹⁾. Difatti, essendo $G=C(-1)^I$, si ha che I è pari e, d'altro canto, essendo il decadimento $J-\psi \rightarrow pp$ forte, dovrà essere $I \leq 1$ per cui $I=0$.

3. 2. - La ψ' .

Una decina di giorni dopo la scoperta della $J-\psi$, il gruppo SPEAR annunciò la scoperta di un'altra particella, la ψ' , di caratteristiche molto simili⁽²⁹⁾(v. Tabella III)

TABELLA III

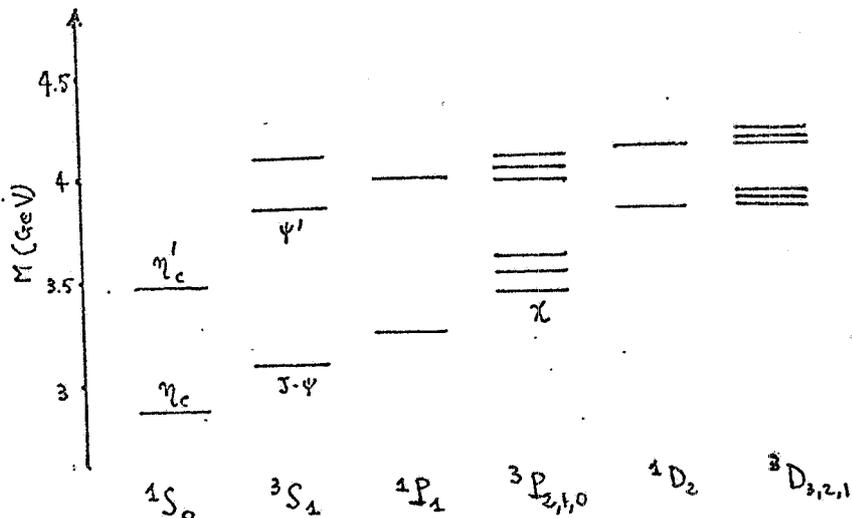
ψ'	
m	3.684 ± 0.005 GeV
$\Gamma_e = \Gamma_\mu$	2.1 ± 0.3 KeV
Γ_H	220 ± 56 KeV
Γ	228 ± 56 KeV
Γ_H / Γ	0.981 ± 0.003
Γ_μ / Γ_e	0.89 ± 0.16

I numeri quantici $J^{PC}=1^{--}$ vengono stabiliti come per la $J-\psi$. $G=-1$ segue dal decadimento $\psi' \rightarrow J-\psi + 2\pi$ (B. R. $\approx 50\%$); mentre l'assegnazione $I=0$ per lo spin isotopico deriva dal fatto che sperimentalmente risulta

$$\frac{\Gamma(\psi' \rightarrow J-\psi + \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(\psi' \rightarrow J-\psi + \pi^0 \pi^0)} \approx 2$$

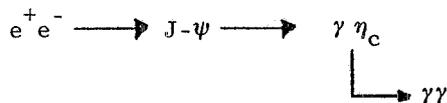
3.3. - Lo spettro del charmonio.

Se la $J-\psi$ è uno stato $c\bar{c}$ ci si aspetta il seguente spettro. (Vedi Fig. 16)



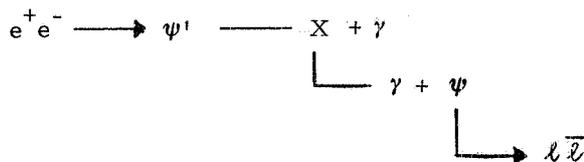
dove si è adottata la notazione spettroscopica $^{21+1}L_J$.

Il primo ed il secondo degli stati 3S_1 sono la $J-\psi$ e la $J-\psi'$ già esaminate; il primo degli stati 1S_0 è da identificarsi probabilmente con la η_c . Questa particella, di massa 2.83 ± 0.03 GeV e $\Gamma \leq 100$ MeV è stata recentemente vista a DORIS⁽³²⁾ nel decadimento



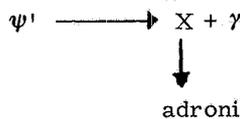
Il decadimento in $\gamma\gamma$ indica che $C=+1$ e $J \neq 1$. L'interpretazione più popolare è che si tratti dello stato 0^{-+} .

In maniera analoga il picco a 3.454 ± 7 GeV visto nel decadimento



dove $l\bar{l}$ è una coppia di leptoni, può essere identificato con il secondo stato 1S_0 : η_c' , con gli stessi numeri quantici 0^{-+} di η_c .

Una grossa difficoltà per i due stati 2.83 e 3.45 risiede nello spiegare perchè non si vede il decadimento



La questione è tutt'oggi aperta⁽³³⁾

Poichè si prevedono degli stati di onda P tra la $J-\psi$ e la $J-\psi'$, questi devono poter essere raggiunti dalla ψ' con emissione di un fotone monocromatico. In effetti si osservano i decadimenti a cascata

A SLAC, difatti, il gruppo SLAC-LBL ha osservato eventi di questo tipo:

$$e^+ e^- \longrightarrow e^+ \mu^+ + X.$$

I dati sperimentali:

- ogni traccia leptonica ha impulso maggiore di 650 MeV/c;
- l'angolo di coplanarità è maggiore di 20°;
- esiste una soglia sui 3.8 GeV ;
- la distribuzione degli impulsi esclude un decadimento a due corpi;
- non più del 40% degli eventi $e\mu$ può contenere qualche adrone non rivelato ,

inducono a ritenere che sia presente un leptone pesante L^\pm , di massa $m = 1.9 \pm 0.1$ GeV, e che il processo avvenga nel modo seguente

$$e^+ e^- \longrightarrow L^+ L^- \begin{cases} \longrightarrow \nu_L \mu^- \nu_\mu \\ \longrightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_L \end{cases}$$

I dati del gruppo SLAC-LBL sono costituiti da 190 eventi $e\mu$ con un fondo di 46 eventi. 23 eventi $e\mu$ (con un fondo di 2) sono stati anche visti a DORIS; i primi risultati di questo gruppo concernenti il processo

$$e^+ e^- \longrightarrow \ell + \text{"1 carico"} \quad (3.5)$$

così come quelli degli altri gruppi che hanno trovato eventi del tipo (3.5) sono consistenti con l'ipotesi del leptone pesante⁽³⁸⁾.

4. - INTERPRETAZIONI TEORICHE DELL'URTO e^+e^- .

La fisica del cono di luce^(39,40) rappresenta l'approccio teorico più generale all'urto e^+e^- ; per la sua generalità il suo campo d'applicazione è quindi limitato. Le sue diramazioni teoriche principali sono il modello a partoni^(24,41) e le sue teorie di campo asintoticamente libere⁽⁴²⁾, mentre un approccio differente e più realistico è quello dei modelli basati sulla "Vector Meson Dominance"^(40,43). Una teoria basata su un punto di vista completamente diverso è infine la "Geometrodinamica"⁽⁴⁴⁾.

4.1. - Fisica del cono di luce.

La sezione d'urto totalmente inclusiva per l'urto e^+e^- data dalla (2.31):

$$\sigma_{TOT}(e^+e^- \longrightarrow \text{adroni}) = \frac{8\pi^2 a^2}{q^2} \pi(q^2) \quad (2.31)$$

dove

$$(-g_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu) \pi(q^2) = \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | J_\mu(x) J_\nu(0) | 0 \rangle \quad (4.1)$$

Il cono di luce, $x^2=0$, è fisicamente rilevante giacchè è solo per $x^2=0$, che il rapporto R (cfr. (2.26)) tende ad un valore costante. Difatti se si vuole che $R \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \text{cost.}$, dovrà essere $\pi(q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \text{cost.}$ (cfr. (2.31) e (1.3)). Ora per grandi q^2 l'integrale a secondo membro del (4.1) oscilla a meno che non sia $|x| \sim 1/|q|$ ossia $x^2=0$.

Se in effetti si sviluppa il prodotto delle due correnti sul cono di luce e si guardi al termine più singolare, dall'invarianza di scala a corte distanze, risulta che il comportamento asintotico di $\pi(q^2)$ è

$$\pi(q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \text{cost.} \quad (4.2)$$

Questa predizione della fisica del cono di luce si basa sulla completezza del sistema degli adronici

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1 \quad (4.3)$$

e poichè la (4.3) può essere utilizzata solo nel caso di sezioni d'urto inclusive appare chiaramente la limitatezza della teoria.

Le diramazioni della fisica del cono di luce, modelli a partoni e libertà asintotica, nascono dalla dimostrazione di Gell-Mann (1962) che un modello di teoria di campo libera descrive il comportamento di un prodotto di correnti sul cono di luce. Se allora si assume che, a corte distanze, la teoria dei campi che intervengono nel processo diventi libera, allora (cfr. (2.25))

$$R = \sum_{\text{fermioni}} Q_J^2 + \frac{1}{4} \sum_{\text{bosoni}} Q_J^2 \quad (4.4)$$

4.2. - Modelli a partoni.

Nei modelli a partoni si assume che gli adroni siano costituiti da componenti elementari e puntiformi, i quark-partoni. Quest'idea di base rende conto di alcune caratteristiche sperimentali dell'urto e^+e^- (così come del deep inelastic scattering); ad esempio la struttura a jet degli stati finali (cfr. paragrafo 2.4) viene fuori naturalmente dall'ipotesi che la produzione adronica avvenga mediante la produzione di una coppia di partoni che a loro volta decadono in adroni (vedi Fig. 17)

FIG. 17



D'altro canto la natura fermionica dei partoni è ben stabilita oltre che dall'andamento in $(1+\cos^2\theta)$ della sezione d'urto (vedi Fig. 11) anche dal fatto che per partoni di spin 0 la relazione di Callan-Gross (2.41) non viene riprodotta. Ciò porta quindi ad identificare i partoni con i quarks. Ma è noto che i quarks portano numero barionico frazionario e dunque i fasci adronici prodotti dal meccanismo di Fig. 17 avrebbero tale proprietà.

Poichè non è stato visto alcun sistema adronico con i numeri quantici dei quarks il semplice meccanismo di Fig. 17 non è adeguato a descrivere gli esperimenti, ma è necessaria qualche interazione nello stato finale; in altri termini nel calcolare

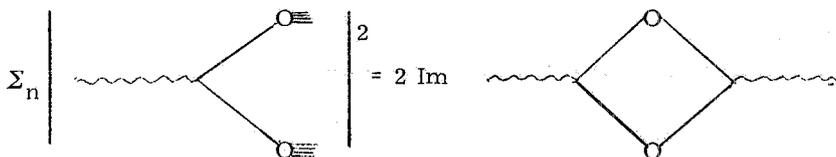


FIG. 18

occorre tener conto di diagrammi del tipo

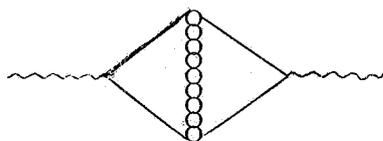


FIG. 19

Landshoff, Polkinghorne e Short⁽⁴⁵⁾ hanno provato che in una teoria di campo dei partoni il contributo del diagramma di Fig. 19 svanisce asintoticamente. L'approccio usuale è quindi che un contributo dal diagramma di Fig. 19 è necessario per risolvere il problema dei numeri quantici frazionari

nari, ma è piccolo a sufficienza per non influire sul calcolo delle funzioni di struttura $F_1(x)$ e $F_2(x)$. La questione è comunque lungi dall'essere posta in maniera soddisfacente ed è necessario ipotizzare un meccanismo che confini i partoni per spiegare il paradosso dei quarks.

Questo al rapporto R, i modelli a partoni ne forniscono il valore semplicemente contando i quarks: per il modello di Gell-Mann e Zweig (tre quarks n, p, λ) $R=2/3$, per il modello di Gell-Mann e Zweig con charm $R=10/9$, per il modello di Gell-Mann e Zweig con il colore $R=2$ e per il modello con charm e colore $R=10/3$.

4.3. - Libertà asintotica.

Una diramazione teorica più raffinata nella fisica del cono di luce è costituita dalle teorie asintoticamente libere. Queste sono le uniche teorie di campo che riproducono abbastanza fedelmente il Bjorken scaling; la violazione dello scaling è infatti solo logaritmica. Poichè le uniche teorie di campo asintoticamente libere sono le teorie di gauge non abeliane⁽⁴⁶⁾ si è portati naturalmente ad introdurre una teoria di fermioni fondamentali (i quarks) invariante sotto il gruppo SU(3) di colore, i cui campi di Yang-Mills (i gluoni) generano le forze delle interazioni forti.

Il termine "asintoticamente libere" per queste teorie deriva dal fatto che esse divengono libere a corte distanze (grande q^2), nel senso che la costante d'accoppiamento dei quarks ai gluoni si annulla.

Per la precisione, la costante d'accoppiamento rinormalizzata g dipende dal punto $p^2 = \mu^2$ in cui viene effettuata la sottrazione nel procedimento di rinormalizzazione. Se si scalano tutti gli impulsi di un fattore λ , si ottiene una nuova costante d'accoppiamento $g(\lambda)$ che lascia tutte le quantità fisiche invariate.

Le equazioni che regolano la dipendenza delle funzioni di Green da μ e da g sono le equazioni di Callan-Symanzik⁽⁴⁷⁾ che nella deep euclidean region coincidono con le equazioni del gruppo di rinormalizzazione⁽⁴⁸⁾; nel caso più semplice di una teoria $g \phi^4$ esse sono del tipo

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \eta\gamma(g) \right\} \Gamma^{(n)}(p_1 \dots p_n, g) = 0 \quad (4.5)$$

ove $\Gamma^{(n)}$ è la funzione di Green a n vertici e $\beta(g)$ e $\gamma(g)$ sono calcolabili perturbativamente.

La soluzione della (4.5) è ben nota⁽⁴⁸⁾; in particolare il comportamento a grandi q^2 di $\Gamma^{(n)}$ è controllato dal comportamento per grandi t di $g(t)$ dove

$$\frac{d g(t)}{d t} = \beta(g(t)) \quad g(0) = g \quad t = \ln \lambda \quad (4.6)$$

Le teorie asintoticamente libere sono quelle per cui

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \quad (4.7)$$

e perchè ciò avvenga dovrà essere $\beta(0)=0$ e inoltre $\beta(g) < 0$ in un intorno di $g=0$. Nelle teorie di gauge non abeliane succede che

$$\beta(g) = b g^3 + o(g^5) \quad (4.8)$$

e $b < 0$ se non intervengono troppi fermioni⁽⁴⁹⁾.

Per quanto detto nel paragrafo 4.1 le teorie asintoticamente libere danno per il rapporto R il valore canonico (4.4) a meno di deviazioni logaritmiche, e, dunque, riproducono le predizioni dei modelli a partoni in un ambito teorico più rigoroso. Il loro limite di fondo resta però il fatto che i costituenti elementari della materia adronica secondo queste teorie, quarks e gluoni, non sono mai stati visti. Il meccanismo del confinamento di queste particelle deve essere imposto "dall'esterno" e non trova, all'interno delle teorie, giustificazione alcuna.

L'introduzione infatti di forti singolarità nella regione delle grandi distanze non può in nessun modo essere controllata dalla teoria che permette sviluppi perturbativi del tipo (4.8) solo a piccole distanze.

4.4. Modelli VMD.

Questi modelli ^(40,43) costituiscono una descrizione realistica dell'urto e^+e^- e della fisica del "deep inelastic scattering". Si assume che i quarks siano permanentemente legati da un potenziale armonico e che ne siano visibili solo le risonanze. Si assume inoltre che le risonanze giacciono su traiettorie di Regge con uno spettro dato da

$$m_n^2 = m_0^2 (1 + 2n) \quad (4.9)$$

La richiesta di scaling per $\sigma_{TOT}(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})$ conduce alla relazione

$$f_n = f_0 \frac{m_n}{m_0} \quad (4.10)$$

per l'accoppiamento dell' n -esima risonanza al fotone (em_n^2/f_n); nel caso ideale di risonanze strette. Più realisticamente, si ha ancora $\Gamma_n = \Gamma_0 m_n/m_0$.

Questi modelli permettono di calcolare molti aspetti della fisica e^+e^- , in particolare (nel caso $SU(3)$)

$$R \rightarrow \frac{8\pi^2}{f_0^2} \approx 2.5, \quad (4.11)$$

molto vicino all'osservazione sperimentale. Le eq. (4.9-10) costituiscono una descrizione troppo fenomenologica della realtà. Più in generale è stato introdotto il concetto di dualità⁽⁴³⁾ tra gli stati adronici che mediano la sezione d'urto la produzione di una coppia di partoni. Ciò conduce ad es. a collegare i vari tipi di risonanze

$$\left(\frac{m\Gamma^{ee}}{\Delta m^2}\right)_\rho : \left(\frac{m\Gamma^{ee}}{\Delta m^2}\right)_\omega : \left(\frac{m\Gamma^{ee}}{\Delta m^2}\right)_\varphi : \left(\frac{m\Gamma^{e\bar{e}}}{\Delta m^2}\right)_{J,\psi} = 9 : 1 : 2 : 8, \quad (4.12)$$

dove Δm_i^2 è la distanza tra due risonanze vicine del tipo $-i$. Inoltre il valore asintotico R è dato dalla media locale delle singole risonanze

$$R = \sum_i \langle R_i \rangle = \sum_i \frac{g\pi}{\alpha^2} \frac{m_i \Gamma_i^{e\bar{e}}}{\Delta m_i^2} \quad (4.12b)$$

Le eq. (4.12) sono in buon accordo con i dati sperimentali.

4.5. - Geometrodinamica.

La Geometrodinamica è un approccio totalmente non convenzionale alla fisica della materia adronica. Non è questo il luogo per descriverne in dettaglio le idee fondamentali e gli sviluppi matematici; basta solo ricordare che l'idea che ne è all'origine è quella di attribuire ai quarks il semplice significato di "coordinate adroniche" e di ridurre i complessi aspetti dinamici degli adroni a sequenze di una struttura "geometrica" particolarmente semplice. Il lettore che voglia saperne di più può consultare i lavori della nota⁽⁴⁴⁾.

Lo spettro di massa dei sistemi mesonici ($q\bar{q}$) è dato in geometrodinamica dalla semplice equazione

$$M_{nl} = \sqrt{\vec{k}_{nl}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{k}_{nl}^2 + m_2^2} - \omega_{nl} \quad (4.13)$$

dove l è il momento angolare orbitale e n il numero quantico radiale; inoltre

$$\vec{k}_{nl}^2 = \frac{\beta_{nl}^2}{R_{snl}^2} \quad (4.14)$$

dove β_{nl} è la posizione dell' n -esimo zero della funzione sferica di Bessel $J_l(z)$ e il raggio spaziale dello stato R_{snl} è dato da

$$R_{snl}^2 = R_0^2 \beta_{nl}^2 \quad (R_0^2 = 4 \text{ GeV}^{-2}) \quad (4.15)$$

infine

$$\omega_{nl} = \frac{\pi}{R_{tnl}} \quad (4.16)$$

dove

$$R_{\text{tnl}}^2 = R_o^2 \beta_{\text{nl}} - c \quad (c=3 \text{ GeV}^{-2})$$

La predizione dei vari stati coinvolgenti almeno un quark con charm, di massa $m_c=1.86 \text{ GeV}$, è presentata nella Tabella VI, dove si è posto $m_\rho=100 \text{ MeV}$, $m_\lambda=460 \text{ MeV}$.

TABELLA VI

n	0	1	2	3	4	5	Particle type
1	1.93	2.39	2.71	2.97	3.20	3.40	D
	2.03	2.48	2.79	3.04	3.27	3.46	F
	3.10	3.47	3.72	3.93	4.11	4.28	
2	2.83	3.12	3.36	3.57	3.76	3.94	D
	2.90	3.18	3.42	3.63	3.82	3.99	F
	3.82	4.04	4.24	4.41	4.57	4.72	
3	3.41	3.64	3.84	4.04	4.21	4.37	D
	3.47	3.70	3.90	4.09	4.26	4.42	F
	4.28	4.48	4.65	4.81	4.95	5.09	
4	3.88	4.08	4.27	4.44	4.60	4.75	D
	3.94	4.14	4.32	4.48	4.64	4.79	F
	4.67	4.85	5.00	5.15	5.29	5.42	
5	4.29	4.47	4.64	4.80	4.85	5.09	D
	4.34	4.52	4.68	4.84	4.99	5.13	F
	5.02	5.18	5.33	5.47	5.60	5.72	
6	4.66	4.83	4.98	5.13	5.27		D
	4.70	4.87	5.02	5.17	5.31		F
	5.34	5.49	5.63	5.76	5.89		

Le predizioni geometrodinamiche attinenti alla fisica e^+e^- sono le seguenti:

- Per quanto riguarda la costanti di accoppiamento corrente elettromagnetica - mesoni vettoriali (vedi formula (2.2)), si ottiene:

$$\gamma_\rho : \gamma_\omega : \gamma_\rho \approx 1 : 3 : -\frac{3}{\sqrt{2}} \quad (4.17)$$

in ottimo accordo con i dati sperimentali.

- Il valore sintotico del rapporto R (vedi (2.26)) è dato da

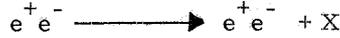
$$R \longrightarrow \frac{12}{\pi} \sum_i Q_i^2 \quad (4.18)$$

dove Q_i sono le cariche dei quarks. Questo valore è molto vicino all'osservazione sperimentale.

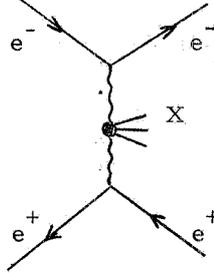
- La larghezza leptonica della $J-\psi$ risulta essere ancora in ottimo accordo con gli esperimenti.
- Infine la struttura a jet, mostrata chiaramente dagli esperimenti, è naturalmente spiegata dalla particolare struttura dello spettro e dell'interazione che provoca il decadimento degli stati di massa più elevata. Ad alta energia si producono non più stati mesonici singoli, ma stati coerenti di mesoni di diverso momento angolare che si organizzano in strutture tubolari (Firesausages), il cui risultato è di popolare coi propri prodotti di decadimento solo una piccola zona dello spazio delle fasi attorno all'asse della "salsiccia di fuoco".

5. - L'URTO $\gamma\gamma$.

Processi del tipo



sono dominati, almeno per piccoli angoli di scattering, dal grafico



in cui avviene un urto fotone-fotone.

La prima osservazione sperimentale di processi di questo tipo fu del gruppo di Novosibirsk⁽⁵⁰⁾. A Frascati⁽⁵¹⁾ furono osservati 34 eventi del tipo $e^+e^- \longrightarrow e^+e^- \mu^+\mu^-$ e 61 eventi del tipo $e^+e^- \longrightarrow e^+e^- e^+e^-$. A parte un fondo, il grosso di questi eventi avviene mediante un urto $\gamma\gamma$.

L'osservazione di questi processi ha riportato in auge un metodo di approssimazione dovuto a Weizsäcker e Williams⁽⁵²⁾; per studiare i processi a due fotoni applicheremo tale metodo a ciascuno dei fasci di elettroni e positroni.

5. 1. - Processi a due fotoni.

Il metodo dei fotoni equivalenti (cfr. Appendice II) consiste essenzialmente nel decomporre il campo elettromagnetico creato da un elettrone (o positrone) relativistico in presenza di una corrente in uno spettro equivalente di fotoni⁽⁵³⁾.

Nel caso di un elettrone in interazione con una corrente $J_\mu(k)$ la probabilità dello scattering dello elettrone da parte della corrente è data da

$$dW = W_\gamma(k) \frac{2\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{E}{m} - \frac{1}{2} \right) \frac{dk}{k} \quad (5.1)$$

dove $W_\gamma(k)$ è la probabilità di assorbimento di un fotone reale non polarizzato.

Ne segue, per la sezione d'urto totale

$$\sigma = \int P(k) dk \sigma_\gamma(k) \quad (5.2)$$

dove

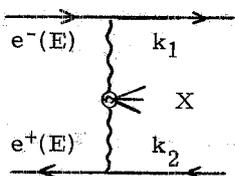
$$P(k) dk = \frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln \left(\frac{E}{m} \right) - \frac{1}{2} \right] \frac{dk}{k} \quad (5.3)$$

il che appunto mostra come la sezione d'urto per scattering anelastico di un elettrone da una corrente è uguale alla sezione d'urto di un fascio incoerente di fotoni con distribuzione di energia data dalla (5.3).

La (5.3) può essere generalizzata⁽⁵⁴⁾ al caso in cui non sussista la condizione $k \ll E$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} P(k) dk &= \frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln \frac{E}{m} - \frac{1}{2} \right] \frac{E^2 + (E - k)^2}{2E^2} \frac{dk}{k} = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \left[\ln \frac{E}{m} - \frac{1}{2} \right] \frac{dk}{k} \left[1 - \frac{k}{E} + \frac{k^2}{2E^2} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nel caso di processi a due fotoni si può applicare l'approssimazione precedente ad entrambi i fasci e^+e^- :



Dalle formule precedenti si ottiene

$$d\sigma_{ee \rightarrow eeX} \approx \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 \ln^2 \frac{E}{m} \int \frac{dk_1}{k_1} \frac{dk_2}{k_2} \frac{E^2 + (E-k_1)^2}{2E^2} \frac{E^2 + (E-k_2)^2}{2E^2} d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow X}(s) \quad (5.5)$$

dove $s=4k_1k_2$.

Si può provare⁽⁵⁵⁾ che l'espressione precedente si riduce a

$$\frac{d}{ds} \approx d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow X}(s) \left[\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{4E^2}{m^2} \right]^2 \frac{1}{4s} f\left(\frac{s}{4E^2}\right) \quad (5.6)$$

dove la funzione $f(x)$ è data da

$$f(x) = - (2+x)^2 \ln x - 2(1-x)(3+x) \quad (5.7)$$

e dove s varia nell'intervallo $[s_0, 4E^2]$

Nel caso che $X=e^+e^-$ ovvero $\mu^+\mu^-$ la sezione d'urto totale ha un andamento del tipo

$$\sigma_{TOT} \sim \frac{\alpha^4}{\pi} \ln^2 \frac{2E}{m} \ln \frac{4E^2}{s_0} \quad (5.8)$$

il che mostra come i processi $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \mu^+\mu^-$ ed $e^+e^- \rightarrow e^+e^- e^+e^-$ pur essendo del IV ordine in α crescono come $\ln^3 E$, per cui, ad alte energie, possono essere predominanti. Il grafico della Fig. 20 è desunto dai risultati di Frascati.

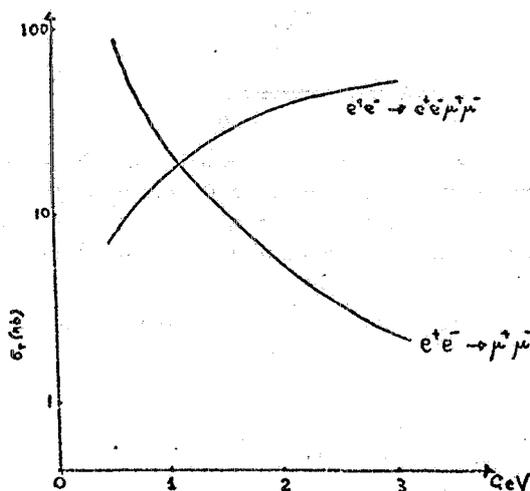
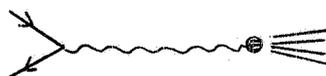


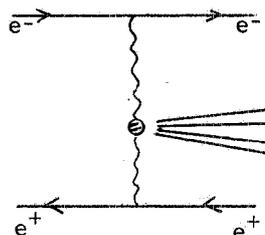
FIG. 20

5. 2. - Stati finali adronici.

In relazione al caso di stati finali contenenti adroni, è rilevante studiare il ruolo relativo e la possibilità di discriminazione dei processi ad un fotone



da quelli a due fotoni



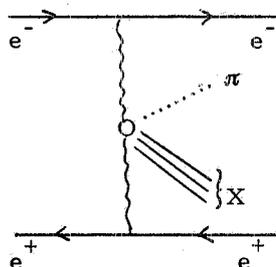
Una tale analisi è stata svolta da Gatto e Preparata⁽⁵⁶⁾; senza entrare in dettagli riportiamo qui alcuni suoi risultati.

5. 2. 1. - Sezione d'urto inclusiva ad una particella.

Consideriamo la sezione d'urto

$$e^+ e^- \longrightarrow e^+ e^- + \pi + X$$

Il contributo a due fotoni proviene dal grafico



L'analisi si basa sulle seguenti ipotesi: a) Feynman scaling per la sezione d'urto del processo $\gamma\gamma \longrightarrow \pi + X$; b) per il corrispondente processo ad un fotone: scaling, la funzione di scala longitudinale vien posta uguale a zero, andamento $\bar{F}_{\pi}(\eta) = 6 \eta^{-3}(1-\eta)^2$ per la funzione di scala ($\eta = p_L/E$ dove p_L è la componente longitudinale dell'impulso del pione rispetto alla direzione dell'elettrone incidente).

Il risultato è che, per $\eta = 0.01, 0.1, 0.5$ la sezione d'urto inclusiva ad una particella per il processo a due fotoni è dominata da quella del processo ad un fotone purchè si ponga un ragionevole cut-off sui momenti trasversi. Per $q^2 < 70 \text{ (GeV)}^2$ è sufficiente che sia $p_T^2 < 0.5 \text{ (GeV)}^2$, per $100 \text{ (GeV)}^2 < q^2 < 900 \text{ (GeV)}^2$ che sia $p_T^2 < 1.5 \text{ (GeV)}^2$.

Ad alte energie quindi ci si aspetta che i processi a due fotoni non inducono un fondo elevato purchè ci sia un opportuno cut-off sul p_T del pione rivelato.

5. 2. 2. - Effetti a due fotoni nell'annichilazione e⁺e⁻ in adroni nelle regioni delle basse energie e delle risonanze.

In queste regioni una stima per

$$\frac{N_F^+ - N_B^-}{N_F^+ + N_B^+}$$

dà $\approx 1\%$. Qui N_F^+ è il numero di π^+ diffusi in avanti (rispetto alla direzione dell'elettrone incidente), N_B^+ il numero di π^+ diffusi all'indietro.

5. 2. 3. - Effetti a due fotoni nell'annichilazione e⁺e⁻ in adroni nella regione diffrattiva ad alta energia.

Per $s \approx 10$ (GeV)² si trova un numero molto piccolo per il rapporto $\sigma_{2\gamma} / \sigma_{\mu^+\mu^-}$:

$$\frac{\sigma_{2\gamma}}{\sigma_{\mu^+\mu^-}} \approx 1.5 \times 10^{-4}$$

5. 2. 4. - Asimmetrie provenienti dall'interferenza di processi ad uno e a due fotoni per grandi s.

L'ordine di grandezza per l'asimmetria nella sezione d'urto inclusiva ad una particella proveniente dall'interferenza tra processi ad uno e a due fotoni:

$$\left| \frac{N_F^P - N_B^P}{N_F^P + N_B^P} \right|$$

è dell'1%. Tale effetto è ancora più basso per angoli rispetto alla direzione dell'elettrone incidente sensibilmente diversi da zero; infatti l'asimmetria è concentrata principalmente nella suddetta direzione.

APPENDICE I

La sezione d'urto si calcola a partire dalla formula

$$d\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \sum_{\vec{s}} \sum_{\vec{s}} |M|^2 \frac{d^3 q_f}{2E_f (2\pi)^3} \quad (A1)$$

Se le due particelle iniziali hanno $m=0$, nel sistema del centro di massa il fattore di flusso vale

$$\frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} = \frac{1}{2}$$

M è l'elemento di matrice del processo che si considera e $\sum_{\vec{s}} \sum_{\vec{s}}$ indica una somma sugli spin delle particelle finali ed una media sugli spin delle particelle iniziali. E_1 ed E_2 sono le energie delle particelle iniziali ed E_f quelle delle particelle finali.

Nel calcolare $|M|^2$ occorre tener presente che, per elettroni e positroni

$$\sum_{\text{spin}} v(k) \bar{v}(k) = \not{k} - m \quad \sum_{\text{spin}} u(k) \bar{u}(k) = \not{k} + m \quad (A2)$$

e per i fotoni

$$\sum_{\text{spin}} \epsilon^\mu \epsilon^{\mu'} = -g^{\mu\mu'} \quad (\text{A3})$$

Inoltre risultano utili le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \text{Tr } \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\lambda &= 4(g^{\alpha\beta} g^{\delta\lambda} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\lambda} + g^{\alpha\lambda} g^{\beta\delta}) \\ \text{Tr } \gamma^\alpha \gamma^\beta &= 4 g^{\alpha\beta} \quad \text{Tr } \gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_{2n+1}} = 0 \quad \text{Tr } \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\lambda = 4i \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ \text{Tr } \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta &= 0 \end{aligned}$$

Nel caso di due particelle nello stato finale, usando la cinematica del paragrafo 1. 1, si ha per lo spazio delle fasi

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 q_1}{2E_{q_1}} \frac{d^3 q_2}{2E_{q_2}} \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) &= \int \frac{d^3 q_1}{4E^2} \delta(2E - 2q_1^0) = \\ &= \int \frac{|\vec{q}_1|^2}{8E^2} d|\vec{q}_1| d\Omega \delta(E - q_1^0) = \frac{1}{8} d\Omega = \frac{\pi}{4} \text{sen } \theta d\theta \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Se, invece, le due particelle hanno massa m si ha

$$\int \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) \frac{d^3 q_1}{2E_{q_1}} \frac{d^3 q_2}{2E_{q_2}} = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2} \text{sen } \theta d\theta \quad (\text{A4}')$$

Nel caso di una particella nello stato finale, di energia $\omega = m_1$, si ha per lo spazio delle fasi

$$\int \frac{d^3 q}{2\omega} \delta^{(4)}(q - k_1 - k_2) = \delta_+(q^2 - m_1^2) \quad (\text{A5})$$

Per una mesone vettoriale in luogo della (A3) occorre scrivere

$$\sum_{\text{spin}} \epsilon^\mu(q) \epsilon^\nu(q) = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \quad (\text{A6})$$

per cui, ad esempio, se $\langle V_i | J_\mu^{e.m.}(0) | 0 \rangle$ è l'elemento di matrice della formula (2. 2) si ha

$$\sum_{\text{spin}} \langle V_i | J_\mu^{e.m.}(0) | 0 \rangle \langle V_i | J_\nu^{e.m.}(0) | 0^* \rangle = \left(\frac{m_i^2}{2\gamma_i}\right)^2 \sum_{\text{spin}} \epsilon^\mu \epsilon^\nu = \frac{m_i^2}{4\gamma_i^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \quad (\text{A7})$$

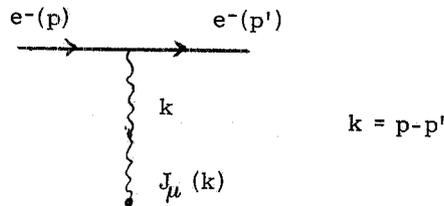
L'espressione generale per la probabilità di decadimento di una particella di impulso $q^\mu = m_1, 0, 0, 0$ in due particelle di impulso $k_1 = (E, 0, 0, E)$, $k_2 = (E, 0, 0, -E)$ è data da

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_1} \sum_s \sum_s |M|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - k_1 - k_2) \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2E} \quad (\text{A8})$$

APPENDICE II: Il metodo dei fotoni equivalenti.

Come si è visto nel paragrafo 5.1 il metodo dei fotoni equivalenti consiste nel decomporre il campo elettromagnetico di una elettrone relativistico in presenza di una corrente in uno spettro equivalente di fotoni.

Per la precisione consideriamo



La probabilità dello scattering dell'elettrone da parte della corrente $J_\mu(k)$ è data da

$$dW = \frac{1}{2E} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} \left| \frac{e \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) J^\mu(k)}{k^2} \right|^2 \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3 2E'}$$

dove $E(E')$ è l'energia dell'elettrone entrante (uscente).

Ci porremo nella seguente approssimazione:

- (1) $E, E' \gg m$, cioè gli elettroni siano relativistici
- (2) $k^2 = (p-p')^2$ è piccolo. Poiché la probabilità dipende da $1/k^4$ è solo questa la regione in cui la probabilità è grande
- (3) $E \simeq E'$, ossia $E \gg \Delta E$ se $\Delta E = E - E' = k^0$

Se θ è l'angolo tra i vettori \vec{p}, \vec{p}' segue dalla condizione (1) che

$$k^2 = (p - p')^2 = 2m^2 - 2EE' (1 - v v' \cos \theta)$$

dove $v(v')$ è la velocità dell'elettrone entrante (uscente).

Dalla condizione (2) segue che θ deve essere piccolo, per cui, posto

$$\cos \theta \simeq 1 - \theta^2 \quad v \simeq 1 - m^2/2E^2$$

si ha

$$k^2 \simeq -EE' \left[\theta^2 + \left(\frac{m \Delta E}{EE'} \right)^2 \right]$$

D'altro canto la condizione di invarianza de gauge

$$k_\mu J^\mu(k) = 0$$

fornisce

$$p_\mu J^\mu = p'_\mu J^\mu$$

per cui

$$\sum_{\text{spin}} \left| \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) J^\mu(k) \right|^2 = 4 \left[p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu + \frac{k^2}{2} g_{\mu\nu} \right] J^\mu J^{\nu+} \simeq 8 \left| p'_\mu J^\mu \right|^2$$

dove si è fatto uso delle approssimazioni (2) e (3).

Per valutare esplicitamente $p_\mu J^\mu$, osserviamo che, se k_L e J_L (\vec{k}_T e \vec{J}_T) sono componenti parallele (perpendicolari) alla direzione di \vec{p} , risulta

$$k_\mu J^\mu = 0, \quad \Delta E J^0 = k_L J_L + \vec{k}_T \cdot \vec{J}_T, \quad p_\mu J^\mu = \frac{E}{\Delta E} \left[\vec{k}_T \cdot \vec{J}_T + J_L (k_L - \Delta E) \right] \simeq \frac{E}{\Delta E} \left| \vec{k}_T \right| \left| \vec{J}_T \right| \cos \varphi$$

dove φ è l'angolo tra \vec{k}_T e \vec{J}_T e dove si è posto $k_L - \Delta E \approx 0$ giacchè risulta

$$k_L - \Delta E = \left| \vec{p} \right| - \left| \vec{p}' \right| \cos \theta - \Delta E \approx \frac{1}{2} \theta^2 E'$$

$$\left| \vec{k}_T \right| = \left| \vec{p}'_T \right| = \left| \vec{p}' \right| \sin \theta \approx E' \theta$$

per cui

$$\frac{k_L - E}{\left| \vec{k}_T \right|} \approx \frac{\theta}{2} \ll 1$$

ne segue che, essendo

$$d^3 \vec{p}' \approx E'^2 dE' d\cos\theta d\varphi$$

risulta

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{k^4} \frac{E^2}{\Delta E^2} dE' d\cos\theta \left| \vec{k}_T \right|^2 \left| \vec{J}_T \right|^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{k^4} \frac{E^2}{\Delta E^2} dE' d\cos\theta (-J_\mu J^\mu) E'^2 \theta^2 \end{aligned}$$

giacchè $J_0 \approx J_L$.

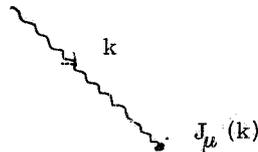
Ossia

$$dW \approx \left(-\frac{1}{4\Delta E} J_\mu J^\mu \right) \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\theta^3 d\theta}{\left[v^2 + (m\Delta E/EE')^2 \right]^2} \frac{d\Delta E}{\Delta E}$$

Posto $k = \Delta E$, ed effettuando l'integrazione angolare su $\theta E \left[0, \Delta E/E \right]$ (deve infatti essere $\theta \approx \frac{m\Delta E}{EE'} \ll \frac{\Delta E}{E}$ perchè k^2 sia piccolo) risulta

$$dW = \left(-\frac{1}{4k} J^\mu J_\mu \right) \frac{2\alpha}{\pi} \frac{dk}{k} \left(\ln \frac{E}{m} - \frac{1}{2} \right)$$

Ma $-1/4k J^\mu J_\mu$ è la probabilità dell'assorbimento di un fotone reale non polarizzato. Difatti tale probabilità si ottiene considerando il grafico



sicchè

$$W_\gamma = \frac{1}{2k} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} \left| \varepsilon_\mu J_\mu \right|^2 = \frac{1}{4k} (J_1^2 + J_2^2) = -\frac{1}{4k} J_\mu J^\mu$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che, essendo $k^\mu J_\mu = 0$ si ha pure $J_3 = J_0$. Concludendo

$$dW = W_\gamma(k) \frac{2\alpha}{\pi} \left(\ln E/m - 1/2 \right) \frac{dk}{k}$$

che è appunto la (5.1).

NOTE E BIBLIOGRAFIA.

- (1) H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. A154, 195 (1935).
- (2) L'estensione della formula per la sezione d'urto di altri processi al caso di polarizzazione parziale dei fasci si può trovare ad esempio in Y. S. Tsai, Phys. Rev. D12, 3533 (1975).
- (3) A. A. Sokolov and I. M. Ternov, Soc. Phys. -Doklady 8, 1203 (1964).
- (4) Questi fenomeni vengono esaminati, ad esempio, da V. N. Baier, Proc. Int. Sch. Phys. "Enrico Fermi" (1971), p. 1.
- (5) R. Hofstadter, in Proc. 1975 Int. Symp. Lepton Interactions High Energies, Stanford.
- (6) Cfr. ad esempio il modello di Weinberg e Salam: S. Weinberg, Phys. Rev. Letters 19, 264 (1967); A. Salam, Elementary Particles Theory (Stockholm, 1968).
- (7) Nel modello di Weinberg e Salam si ha $e_W^2 = (G_F/\sqrt{2})(m_Z^2/2)$, $a = 4 \sin^2 \theta_W - 1$, $b = -1$.
- (8) Cfr. il paragrafo (3. 1).
- (9) Una rassegna di recenti risultati sperimentali è in: J. Perez Y Jorba, New results at Orsay on the electromagnetic form factor of the pion (preprint July, 1977).
- (10) Sull'andamento del tipo (2. 18) delle sezioni d'urto si basava prima della scoperta della $J-\psi$ la estrapolazione che le interazioni dovessero spegnersi ad alte energie.
- (11) $F_1(0)=1$ in unità di carica elettrica dell'elettrone e $F_2(0)=k$ (momento magnetico anomalo) in unità $e/2m$.
- (12) F. J. Ernest, R. G. Sachs and K. C. Wali, Phys. Rev. 126, 2256 (1962).
- (13) M. Gourdin, Phys. Rep. 11C, 29 (1974).
- (14) A titolo di esempio, nel canale $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ la sezione d'urto totale va come $(q^2)^{-2.8}$ per energie nel centro di massa maggiori di 2 GeV.
- (15) Il valore di R misurato da ADONE fu 2. 5.
- (16) R. F. Schwitters and K. Strauch, Ann. Rev. Nucl. Sci. 26, 89 (1976).
- (17) M. Grilli et al., Nuovo Cimento A13, 593 (1973); F. Ceradini et al., Phys. Letters B42, 501 (1972); F. Ceradini et al., Phys. Letters B47, 80 (1973).
- (18) A Litke et al., Phys. Rev. Letters 30, 1189 (1973); G. Tarnopolsky et al., Phys. Rev. Letters 32, 432 (1974).
- (19) J. E. Augustin et al. Phys. Rev. Letters 34, 764 (1975).
- (20) J. Whitmore, Phys. Rep. 10C, 273 (1975).
- (21) S. D. Drell and J. D. Walecka, Ann. Phys. 28, 18 (1964).
- (22) J. D. Bjorken, Phys. Rev. 179, 1547 (1969).
- (23) C. G. Callan and D. J. Gross, Phys. Rev. Letters, 22, 156 (1969).
- (24) R. P. Feynman, Photon-Hadron Interactions (Benjamin, 1972).
- (25) R. F. Schwitters in (5).
- (26) G. Hanson et al., Phys. Rev. Letters 35, 1609 (1975).
- (27) J. E. Augustin et al., Phys. Rev. Letters 33, 1406 (1974); J. J. Aubert et al., Phys. Rev. Letters 33, 1404 (1974); G. S. Abrams et al., Phys. Rev. Letters 33, 1453 (1974).
- (28) Dal gruppo di Lederman è stato recentemente trovato un segnale vistoso attestante l'esistenza di una nuova particella (Y) di massa $M=9.5$ GeV, $\Gamma=1.2$ GeV la cui spiegazione in termini di quarks è che si tratti di uno stato legato $b\bar{b}$ o $t\bar{t}$, dove b ("bottom") e t ("top") sono due nuovi quarks di massa sui 5 GeV.
- (29) I valori sperimentali sono quelli di SPEAR.
- (30) B. Jean-Marie et al., Phys. Rev. Letters 36, 291 (1976).
- (31) W. Braunschweig et al., Phys. Letters B57, 297 (1975).
- (32) W. Braunschweig et al., Phys. Letters B67, 243 (1977).
- (33) Harari ad esempio propone una identificazione differente per lo stato $X(3, 45)$: che si tratti cioè di uno stato 1D_2 ; altre interpretazioni sono state avanzate, ma, per vari motivi, non sono molto convincenti.
- (34) SLAC PUB 1959 (1977).
- (35) S. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D2, 1285 (1970).
- (36) Risultato comunicato nella Conferenza Internazionale di Budapest (1977).
- (37) Per una rassegna critica sul leptone pesante sfc. A. Zichichi in Intern. School of Subnuclear Physics, XV course (Erice 1977); i primi dati pubblicati da SLAC sul leptone pesante sono in: M. L. Perl et al.; Phys. Rev. Letters 35, 1489 (1975); M. L. Perl et al., Phys. Letters B63, 117 (1976).

- (38) B. Wiik in Intern. School of Subnuclear Physics, XV course (Erice 1977); M. Cavalli-Sforza et al., Phys. Rev. Letters 36, 588 (1976); G. J. Feldman et al., Phys. Rev. Letters 36, 766 (1976).
- (39) Una rassegna sulla fisica del cono di luce si può trovare in G. Preparata, Proc. Intern. Symp. on Electron and Proton Interactions at High Energies, Bonn (1973) p. 467.
- (40) Una rassegna delle interpretazioni teoriche dell'urto e^+e^- è ad esempio in G. Preparata, Proc. EPS Intern. Conf. (Palermo, 1975).
- (41) Cfr. ad esempio P. V. Landshoff and J. C. Polkinghorne, Phys. Rep. 5C, 1 (1972).
- (42) cfr. ad esempio D. Gross, Proc. London Conf. (1974) p. III. 65.
- (43) L'estensione della primitiva idea di Sakurai all'interazione di una corrente con grande q^2 con la materia adronica è di A. Bramon, E. Etim and M. Greco, Phys. Letters B41, 507 (1972). Per una rassegna delle applicazioni del concetto di dualità alle correnti vedi ad es. M. Greco, Proc. Intern. School of Subnuclear Physics, XII Course Erice (1974).
- (44) L'approccio geometrodinamico è stato proposto in G. Preparata and N. S. Craigie, Nuclear Phys. B102, 478 (1976). Le predizioni relative alla fisica degli stati con charm e dell'urto e^+e^- si trovano in G. Preparata, Geometrodynamics for quarks and hadrons: the Mesonic States, CERN preprint TH. 2271 (1977). Il concetto della "Firesaue" è discusso in G. Preparata, Proc. 8th Intern. Symp. on Multiparticle Dynamics, Kaysersberg (France) 1977 (CERN pr. TH. 2311).
- (45) P. V. Landshoff, J. C. Polkinghorne and R. D. Short, Nuclear Phys. B28, 255 (1971).
- (46) S. Coleman and D. J. Gross, Phys. Rev. Letters 31, 851 (1973).
- (47) C. G. Callan, Phys. Rev. D2, 1541 (1970); K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 18, 227 (1970).
- (48) Cfr. ad esempio S. Coleman, Proc. Intern. School of Subnuclear Physics, IX course (Erice, 1971).
- (49) D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. D8, 3633 (1973).
- (50) V. E. Balakin et al., Phys. Letters B34, 663 (1971).
- (51) G. Barbiellini et al., Phys. Rev. Letters 32, 385 (1974).
- (52) C. Q. Weizsäcker and E. J. Williams, Zeits. Phys. 88, 612 (1934).
- (53) B. Brodsky, T. Kinoshita and H. Terazawa, Phys. Rev. Letters 25, 972 (1970); B. Lautrup, in Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies Cargèse 1975 -(Plenum, 1976).
- (54) P. Kessler, Nuovo Cimento 18, 809 (1960).
- (55) S. Brodsky, in Proc. of 1971 Symp. on Electron and Photon Interactions (Ithaca, 1971).
- (56) R. Gatto and G. Preparata, Riv. Nuovo Cimento 4, 445 (1974).
- (57) Quanto detto si riferisce ad una situazione ideale con risoluzione infinita, ed in assenza di effetti radiativi. In realtà, nel caso di risonanze molto strette, quali ad es. la $J-\psi$ e la ψ' , per cui $\Gamma \ll \sigma$, dove σ è la dispersione di macchina, l'estrazione delle quantità di interesse fisico $\Gamma_{e\bar{e}}$, Γ_{had} e Γ_{tot} dalla sezione d'urto osservata $\bar{\sigma}$ (m^2), è un po' più laboriosa. Per una discussione dettagliata degli effetti radiativi e di quelle derivanti dalla risoluzione finita della macchina, vedi M. Greco G. Pancheri-Srivastava and Y. Srivastava, Phys. Letters, 56B, 367 (1975) and Nucl. Phys. B101, 234 (1975).