Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-61/35 (1961)

M. Puglisi, G. Sacerdoti: STUDIO DEL MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA NEL ROTOTRONE TENUTO ANCHE CONTO DEL CAMPO ELETTRICO ASSOCIATO AL CAMPO MAGNETICO.

Estratto da: L'Elettrotecnica, 48, 415 (1961)

STUDIO DEL MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA NEL ROTOTRONE TENUTO ANCHE CONTO DEL CAMPO ELETTRICO ASSOCIATO AL CAMPO MAGNETICO

MARIO PUGLISI - GIANCARLO SACERDOTI (*)

Nel presente articolo sono ricavate le formule risolutive del moto di una particella carica nel campo del rototrone (1).

La presenza del campo elettrico del quale si è tenuto esplicito conto modifica *sostanzialmente i risultati già ottenuti tenendo conto del solo campo magnetico.*

Appare che qualora la frequenza di rotazione del campo magnetico sia pari alla frequenza di ciclotrone della particella divisa per la radice quadrata di due si ha il confinamento della particella stessa qualunque siano le sue condizioni iniziali.

A prescindere da difficoltà tecniche si può quindi realizzare un dispositivo capace di confinare un plasma non relativistico e così rarefatto da poter trascurare la perturbazione introdotta dalle particelle nel campo guida.

1. - Generalità.

Come è ormai noto la fusione di nuclei leggeri e in particolare di nuclei di idrogeno avviene con liberazione di energia.

Basandosi su questo fatto sono state costruite le « bombe all'idrogeno » nelle quali una certa massa di idrogeno viene fatta reagire per ottenere la fusione sprigionando quasi istantaneamente enormi masse di calore.

Lo sfruttamento ai fini industriali di questa fonte di energia è subordinato alla possibilità di poter controllare e regolare la quantità di materiale che reagisce per poter utilizzare nel modo voluto l'energia che si libera.

A questo scopo da molti annn si è iniziato uno studio per risolvere il problema del controllo di questa reazione. Ciò è stato illustrato nell'articolo di Max Hoyaux e Paul Grans apparso in questa rivista nel marzo del 60.

In generale i metodi seguiti per questo scopo consistono nel cercare di contenere mediante campi elettromagnetici la massa ionizzata (plasma) e portarla a temperatura sufficientemente elevata affinchè l'energia prodotta nella reazione sia superiore a quella che deve essere fornita per mantenere la massa in condizioni di reagire (parecchie decine di milioni di gradi Kelvin).

Lo studio di un contenitore elettromagnetico, si fa solitamente con la seguente procedura.

Fissato il campo (campo guida) si studia il moto, prima di una singola particella; ione o elettrone, e in un secondo tempo si introducono gli effetti delle azioni mutue tra le particelle che sono essenzialmente fenomeni d'urto nucleare (interazioni a brevissima distanza) ed elettromagnetiche. All'aumentare della densità del plasma questi fenomeni influenzano sempre più il comportamento del plasma nel contenitore in esame fino a mutare sostanzialmente le proprietà del contenitore come derivano dallo studio fatto per una sola particella. Attualmente dai risultati esposti nell'ormai ampia letteratura appare che il problema è ancora molto lontano dall'essere risolto e che, anche in vista delle difficoltà matematiche che si presentano quando si tenga conto delle azioni mutue tra le particelle, sia necessario procedere molto per via sperimentale.

Nel presente articolo si affronta il problema del moto di una particella in un particolare dispositivo e viene dimostrato rigorosamente che si può aver azione di contenimento, ma vogliamo sottolineare che questo risultato non permette assolutamente di trarre conclusioni definitive, nè tanto meno rappresenta uno studio completo del contenitore.

1. - Introduzione.

Il rototrone come descritto nell'articolo citato è una macchina complessa concepita per confinare un gas ionizzato. L'elemento focheggiante è costituito da un campo magnetico piano, uniforme e rotante con pulsazione ω *costante.*

Nei calcoli precedentemente svolti non si era tenuto conto del campo elettrico associato.

In questa sede il problema viene affrontato e trattato completamente con gli stessi metodi di calcolo e i risultati che si ottengono portano a conclusioni diverse da quelle già ottenute: mentre senza tener conto del campo elettrico appariva che lo spostamento medio delle particelle avveniva secondo la formula $\dfrac{\omega^2}{\omega'^2} t \cdot v$, tenendo conto del campo elettrico si ottiene che sotto particolari condizioni, si ha una completa azione di confinamento.

Il campo guida può essere realizzato o con bobine incrociate eccitate sinusoidalmente o con particolari tipi di cavità risonanti.

Va messo in evidenza che le frequenze in gioco sono comprese all'incirca tra 10^5 e 10^7 Hz.

Le particelle sotto l'azione del campo elettromagnetico descrivono traiettorie non semplicemente descrivibili, come è dimostrato dalla complessità delle relazioni analitiche che si ricavano.

In generale percorreranno traiettorie che tendono ad allontanarle indefinitamente dalle posizioni iniziali subendo un processo assimilabile ad una centrifugazione funzione del rapporto e/m e quindi, generalmente parlando, del tipo di particelle.

Nel caso sia soddisfatta la condizione $2 \cdot \omega^2 = \omega'^2$, ove ω' è la pulsazione di ciclotrone della particella, si dimostra che il dispositivo ha la proprietà di contenere per un tempo indefinito la particella in questione.

2. - Descrizione del campo elettromagnetico.

In fig. 1 è riportata la terna di assi di riferimento.

L'asse di rotazione del campo magnetico è l'asse X e il senso di rotazione è quello antiorario.

Il campo magnetico è dato dalle seguenti espressioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = B_0 \cos \omega t \\ B_z + B_0 \operatorname{sen} \omega t. \end{cases}$$

(*) M. Puglisi e G. Sacerdoti, Lab. di Frascati del CNRN.

(1) Vedi articolo di G. Sacerdoti pnbblicato snll' «Elettrotecnica» nel settembre 1960.

Il campo elettrico associato è il seguente [2]:

$$(2)\qquad \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\,\omega B_{0x}\cos\omega t \\ E_z = -\,\omega B_{0x}\sin\omega t. \end{cases}$$

I calcoli che seguono partono dalle premesse ipotesi e vengono svolti per particelle non relativistiche.

3. - L'EQUAZIONE DEL MOTO E LA SUA SOLUZIONE.

L'equazione cui obbedisce la particella si può scrivere vettorialmente come segue:

$$(3)\qquad m\vec{a} = e\vec{V}\wedge\vec{B} + e\vec{E}.$$

L'equazione (3) dà luogo a 3 equazioni scalari: al tempo $t = 0$ queste scritte in forma incrementale valgono:

$$(4)\qquad \left\{ \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = -\,\omega' V_z;\ \frac{\Delta V_y}{\Delta t} = -\,\omega\,\omega';\ \frac{\Delta V_z}{\Delta t} = \omega' V_x \right.$$

dove V_x; V_y; V_z sono le componenti della velocità lungo i 3 assi coordinati e ω' è come si è già detto eguale alla pulsazione di ciclotrone della particella

$$(5)\qquad \omega' = \frac{e\,B}{m}.$$

Le equazioni (4) si possono porre [1, 2, 3] in forma matriciale nel modo seguente:

$$(6)\qquad \underset{[V_1]}{\begin{vmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{vmatrix}} = \underset{[A]}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\omega'\tau \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega'\tau & 0 & 0 \end{vmatrix}} \underset{[V_0]}{\begin{vmatrix} V_{x0} \\ V_{y0} \\ V_{z0} \end{vmatrix}} + \underset{[B]}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\omega\,\omega'\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \underset{[X_0]}{\begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix}}$$

ove è stato posto:

$\tau\ = \Delta t$

$[V_1]$ = matrice velocità riferita al sistema di laboraa ratorio

$[V_0]$ = matrice della velocità iniziale nello stesso sistema

$[X_0]$ = matrice delle coordinate iniziali della particella nello stesso sistema.

Chiameremo adesso con $[V_1']$ la matrice velocità al tempo τ riferita al sistema solidale al campo magnetico. Al tempo τ questo sistema risulta ruotato di un angolo $\omega\tau$.

Si avrà quindi:

$$(7)\qquad [V_1] = [R]\,[V_1] = [W]\,[V_0] + [Q]\,[X_0]$$

dove:

$$[W] = [R]\,[A]; \qquad [Q] = [R]\,[B]$$

e la matrice $[R]$ è data da:

$$[R] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega\tau \\ 0 & -\omega\tau & 1 \end{vmatrix}$$

il che è lecito in quanto τ è infinitesimo.

Con lo stesso procedimento si può scrivere:

$$(8)\qquad [X_1'] = [R]\,[X] + [R]\,[\tau]\,[V_0]$$

ove τ è la matrice avente gli elementi diagonali uguali a τ e gli altri eguali a zero.

Dalla (7) e dalla (8) si può scrivere:

$$(9)\qquad [q_1'] = [M]\,[q_0^0]$$

ove $[q_1']$ è la matrice ad una colonna della velocità e delle coordinate della particella al tempo τ mentre $[q_0^0]$ è la matrice ad una colonna della velocità e delle coordinate al tempo $t = 0$. $[M]$ è la matrice (riportata per esteso in appendice) che simbolicamente possiamo scrivere:

$$(10)\qquad [M] = \begin{vmatrix} [W] & [Q] \\ [R]\,[\tau] & [R] \end{vmatrix}$$

Dalla (9) possiamo ottenere la formola generale:

$$(11)\qquad [q_n^n] = [M]^n\,[q_0^0]$$

ove $[q_n^n]$ è la matrice della velocità e delle coordinate al tempo $t = n\tau$ [3].

Per risolvere la (11) si usa il metodo convenzionale di diagonalizzazione della matrice e la (11) si scrive:

$$(12)\qquad [q_n^n] = [m]\,[\lambda]^n\,[m^{-1}]\,[q_0^0]$$

ove:

$[m]$ è la matrice per cui $[m^{-1}]\,[M]\,[m]$ è matrice diagonale;

$[m^{-1}]$ è la matrice inversa di m e $[\lambda]$ è la matrice che ha per elementi diagonali gli autovalori della matrice $[M]$ e gli altri termini nulli.

In Appendice sono riportate le matrici $[m]$ ed $[m^{-1}]$.

Gli autovalori trovati sono i seguenti:

$$\alpha_1 = 1 + i\,\omega\,\tau \qquad \alpha_2 = 1 - i\,\omega\,\tau \qquad \alpha_3 = 1 + i\,\omega\,\tau$$
$$\alpha_4 = 1 - i\,\omega\,\tau \qquad \alpha_5 = 1 + i\,\omega'\,\tau \qquad \alpha_3 = 1 - i\,\omega'\,\tau.$$

Il fatto che due coppie di autovalori siano coincidenti porta degenerazione nella soluzione del problema e obbliga ad usare per risolvere il problema un metodo perturbativo.

Tale metodo si riduce a porre [4]:

$$\lambda_3 = 1 + i\,(\omega + a)\,\tau; \qquad \lambda_4 = 1 - i\,(\omega + a)\,\tau;$$

trovare i coefficienti di $[m^{-1}]$ e passare al limite per a che tende a zero nei coefficienti della matrice

$$(13)\qquad [F] = [m]\,[\lambda]^n\,[m^{-1}]$$

che viene riportata in Appendice.

La matrice $[F]$ rappresenta la soluzione del nostro problema; dall'esame di essa si ricavano tutte le proprietà del dispositivo.

Infatti le $[q_n^n]$ sono i componenti del vettore che rappresenta le coordinate generalizzate (velocità e posizione) nel sistema del laboratorio riferito ad un sistema rotante con il campo magnetico.

Per ottenere velocità e posizioni rispetto al sistema del laboratorio e riferite a questo istante per istante basta moltiplicare la matrice $[q_n^n]$ per una matrice di rotazione esprimibile in sintesi:

$$|C| = \begin{vmatrix} [L] & [O] \\ [O] & [L] \end{vmatrix}$$

ove le $[L]$ sono le matrici di rotazione per un angolo $-\,\omega t$.

---

[2] La E si può considerare nulla almeno nella zona centrale del contenitore se la dimensione del contenitore nella direzione x è inferiore alle due altre dimensioni, che è la nostra ipotesi di lavoro.

[3] Come si ritrova nelle citazioni (2) (3) il procedimento è rigorosamente valido facendo τ a zero e $n\,\tau$ a t.

[4] Questo è lecito perchè gli elementi della matrice m che risultano con questa sostituzione annullano tutte e 36 le equazioni che servono a determinarli a meno di infinitesimi in a di ordine superiore al 1°.

3. - Analisi delle formole risolutive e condizioni di cattura.

Negli elementi della matrice $[F]$ vi sono coefficienti sinusoidali e coefficienti nei quali il tempo « t » compare anche come fattore moltiplicativo. Questo fatto è conseguenza diretta della degenerazione già vista: se il termine b_{21}, che compare nella matrice $[B]$ (vedi formola (6)) che rappresenta il contributo del campo elettrico al moto della particella, venisse leggermente modificato, non si avrebbe degenerazione e nella $[F]$ comparirebbero solo termini sinusoidali.

Gli elementi nei quali compaiono termini con « t » a fattore sono F_{52}; F_{53}; F_{63}; F_{54}, F_{64}; F_{62} e questi sono tutti del tipo

$$(14) \qquad t \times \frac{1}{2} \times \frac{\omega'^2 - 2\,\omega^2}{\omega^2 - \omega'^2} \times \text{funzione sinusoidale}$$

quindi essendo questi coefficienti mediamente crescenti con il tempo non si ha azione di contenimento, pur rimanendo limitate le velocità delle particelle stesse, poichè la particella si allontana dalla posizione iniziale nel piano xy, se inizialmente è diversa da zero o X o V_y o V_z.

Se invece vanno a zero i 6 termini citati, gli elementi di $[F]$ diventano puramente sinusoidali e quindi la particella oscilla in velocità e posizione intorno ai valori iniziali.

Si dimostra così che il rototrone, nelle ipotesi fatte, è una vera e propria *bottiglia magnetica*.

I termini in questione vanno a zero quando è soddisfatta la « relazione di rototrone »

$$(15) \qquad \omega'^2 = 2\,\omega^2$$

in forma esplicita la (15) diventa:

$$f = \frac{e\,B}{2\sqrt{2}\,\pi\,m}$$

in cui « f » è la frequenza di rotazione del campo.

Sotto la condizione (15) la matrice $[F]$ si semplifica nella matrice $[F']$ (riportata in Appendice).

Dagli elementi della matrice $[F']$ si possono ricavare direttamente le dimensioni del contenitore attraverso il calcolo delle traiettorie.

Questo calcolo si presenta laborioso, anche se concettualmente facile, e non riteniamo questa la sede ove riportare grafici e tabelle in quanto queste sono direttamente legate al tipo di esperimento che ci si propone di fare.

Però allo scopo di dare una indicazione volutamente approssimata degli ingombri di un contenitore di questo tipo possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$V_{max} \approx 3{,}5\,V_0 + 3{,}5\,\omega\,X_0$$

$$R_{max} \approx 6\,\frac{V_0}{\omega} + 2{,}5\,X_0$$

ove V_{max} rappresenta circa l'estremo superiore della velocità entro il contenitore in funzione del modulo della velocità iniziale.

R_{max} rappresenta l'ordine di grandezza del massimo spostamento della posizione iniziale della particella.

Allo scopo di avere una idea delle presumibili dimensioni del contenitore in esame se si considerano particelle di deuterio con velocità di circa 10^6 m/sec (corrispondenti a circa 10^4 eV) in un campo magnetico pari a 0,05 Weber/m^2 e con spostamenti assiali pari a $\sim$ 0,4 m si trova:

$$R_{max} \approx 4{,}5 \text{ metri}; \qquad V_{max} \approx 6{,}10^{3} \text{ m/sec.}$$

Conclusioni.

Nell'articolo già citato e pubblicato su questa rivista « Fissioni domani e fusione dopodomani » come già abbiamo detto sono ampiamente illustrati i metodi fino ad ora seguiti per ottenere la reazione di fusione controllata; attualmente nessun metodo ha permesso di veder quale sia la via giusta da seguire per risolvere il problema.

Si deve rilevare che in questo campo si è sperimentato molto, anche con basi teoriche insufficienti date le gravi difficoltà matematiche che si incontrano ed il gran numero di parametri che occorre prendere in considerazione per schematizzare in maniera aderente alla realtà i complessi fenomeni.

Il contributo che riteniamo di aver portato con la trattazione precedente è quello di aver dimostrato rigorosamente che nelle premesse ipotesi una sola particella può essere contenuta per un tempo indefinito dal campo magnetico rotante descritto, ma è ben lungi dall'aver risolto il problema del contenimento dei plasmi. (vedi nota).

Lo studio fatto può essere però una base di partenza per ulteriori studi sui contenitori basati su questo principio.

Per esempio al campo rotante già descritto si può sovrapporre un campo magnetico costante allo scopo di contenere anche particelle di massa diversa da quelle per la quale vale la relazione di rotatrone; questo campo può avere le linee di forza rettilinee o toroidali ed in questo senso sono in corso alcune calcolazioni.

Sia il campo magnetico rotante, campo guida principale, che il campo aggiunto, possono essere uniformi o no.

Dai primi calcoli fatti appare che la possibilità di introdurre delle disuniformità nel campo rotante possa facilitare l'azione di contenimento quando si tratti il caso di più particelle.

Un altro aspetto interessante del dispositivo proposto è quello che riguarda il problema della separazione degli isotopi. Se infatti nel campo del rotatrone vengono introdotti isotopi dello stesso elemento si avrà una azione assimilabile ad una centrifugazione elettromagnetica per tutte le particelle per le quali non è verificata la relazione di rotratone e contenimento per le particelle della massa voluta.

Tutte le particelle in realtà a causa della pressione termodinamica dovranno prima o poi andare a depositarsi sulle pareti fredde del contenitore; quelle per le quali la velocità di fuga è praticamente ridotta a zero si andranno a distribuire isotropicamente su tutte le pareti del recipiente mentre le altre, per le quali non è verificata la relazione di rotazione, si muoveranno preferibilmente in altre direzioni separandosi più o meno nettamente dalle altre secondo il rapporto tra le velocità di diffusione e di fuga.

Manoscritto pervenuto il 3 giugno 1960.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Sacerdoti: *Studio delle proprietà ottiche di un quadrupolo elicoidale.* - « L'Elettrotecnica », Maggio 1960.
[2] G. Sacerdoti: *Un nuovo tipo di contenitore magnetico « Il rototrone »* « L'Elettrotecnica », Settembre 1960.
[3] N. Margenau and G. M. Murphy: *The matematics of Phisics and Chemistry.* - D. Van Nostrand Company, inc., 1956.

APPENDICE

Nelle pagine seguenti sono riportate le matrici (17) (18) (19) (20) già citate nel testo.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\omega'\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega\tau & -\omega\,\omega'\tau & 0 & 0 \\ \omega'\tau & -\omega\tau & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & \omega^2\tau & 0 & 1 & \omega\tau \\ 0 & -\omega^2\tau & \tau & 0 & -\omega\tau & 1 \end{vmatrix} \qquad (16)$$

$$
|m| = \begin{vmatrix}
0 & 0 & +2a\omega \\
0 & 0 & 2a\omega\left(\dfrac{\omega'}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega'}\right) \\
0 & 0 & -2ia\dfrac{\omega^2}{\omega'} \\
0 & 0 & -2ia \\
i\omega\left[\dfrac{2\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right] & -i\omega\left(\dfrac{2\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right) & i\omega\left(\dfrac{2\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right)+iq_1a \\
\omega'-\dfrac{2\omega^2}{\omega'} & \omega'-\dfrac{2\omega^2}{\omega'} & \omega'-\dfrac{2\omega^2}{\omega'}+q_2a
\end{vmatrix}
$$

$$
|m^{-1}| = \left|\begin{array}{c|c|c|}
A & B & C \\
A & B & -C \\
0 & \dfrac{1}{4a\omega\left(\dfrac{\omega_1}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega'}\right)} & \dfrac{}{4a\omega'\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)} \\
0 & \dfrac{1}{4a\omega\left(\dfrac{\omega'}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega'}\right)} & -\dfrac{i}{4a\omega'\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)} \\
\dfrac{1}{2(\omega'^2-\omega^2)} & -\dfrac{1}{2(\omega'^2-\omega^2)\left(\dfrac{\omega'}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega'}\right)} & -\dfrac{i}{2(\omega'^2-\omega^2)\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)} \\
\dfrac{1}{2(\omega'^2-\omega^2)} & -\dfrac{1}{2(\omega'^2-\omega)\left(\dfrac{\omega'}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega'}\right)} & -\dfrac{i}{2\omega'^2-\omega^2)\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)}
\end{array}\right.
$$

ove: $A = \dfrac{\omega'}{2(\omega'^2-\omega^2)\left(\omega'-2\dfrac{\omega^2}{\omega'}\right)}$; $\quad B = -\dfrac{1}{4a\omega\left(\dfrac{\omega'}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega'}\right)} -$

$$
C = \frac{-i}{4\omega' a\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)} + \frac{i}{2\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)(\omega'^2-\omega^2)\left(2\dfrac{\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right)} -
$$

$$
D = \frac{i}{4a\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)} - \frac{i\omega^2}{2\omega'\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)(\omega'^2-\omega^2)\left(2\dfrac{\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right)} +
$$

$$
\begin{array}{ccc|}
+2a\omega & \omega'^2-\omega^2 & \omega' -\omega^2 \\[2ex]
2a\omega\left(\dfrac{\omega'}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega'}\right) & 0 & 0 \\[2ex]
2ia\dfrac{\omega^2}{\omega'} & -i(\omega'^2-\omega^2) & +i(\omega'^2-\omega^2) \\[2ex]
2ia & -i\dfrac{\omega'^2-\omega^2}{\omega'} & +i\dfrac{\omega'^2-\omega^2}{\omega'} \\[2ex]
-i\omega\left(\dfrac{2\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right)-iq_1a & +i\omega & -i\omega \\[2ex]
\omega'-\dfrac{2\omega^2}{\omega'}+q_2a & -\omega' & -\omega'
\end{array}
\qquad (17)
$$

ove $q_1=\left(4\dfrac{\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right)$; $q_2=-4\dfrac{\omega}{\omega'}$

$$
\left|\begin{array}{c|c|c}
D & -\dfrac{i}{2\omega\left(2\dfrac{\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right)} & \dfrac{1}{2\left(\omega'-2\dfrac{\omega^2}{\omega'}\right)} \\[3ex]
-D & \dfrac{i}{2\omega\left(2\dfrac{\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right)} & \dfrac{1}{2\left(\omega'-2\dfrac{\omega^2}{\omega'}\right)} \\[3ex]
-\dfrac{i}{4a\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)} & 0 & 0 \\[3ex]
\dfrac{i}{4a\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)} & 0 & 0 \\[3ex]
\dfrac{i\omega^2}{2\omega'(\omega'^2-\omega^2)\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)} & 0 & 0 \\[3ex]
-\dfrac{i\omega^2}{2\omega'(\omega'^2-\omega^2)\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)} & 0 & 0
\end{array}\right|
\qquad (18)
$$

$$
-\frac{\omega'}{2(\omega'^2-\omega^2)\left(\dfrac{\omega'}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega'}\right)\left(\omega'-2\dfrac{\omega^2}{\omega'}\right)}-\frac{q_2}{4\omega\left(\dfrac{\omega'}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega'}\right)\left(\omega'-2\dfrac{\omega^2}{\omega'}\right)};
$$

$$
-\frac{q_1 i}{4\omega\omega'\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)\left(2\dfrac{\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right)};
$$

$$
+\frac{iq_1}{4\omega\left(\dfrac{\omega^2}{\omega'^2}-1\right)\left(2\dfrac{\omega}{\omega'}-\dfrac{\omega'}{\omega}\right)}.
$$

$$
|F| = \left|\begin{array}{ccc}
\cos\omega' t & \dfrac{\omega'\omega\cos\omega t - \omega'\omega\cos\omega' t}{\omega'^2 - \omega^2} & \dfrac{\omega'\omega\sin\omega t - \omega'^2\sin\omega' t}{\omega'^2 - \omega^2} \\[2ex]
0 & \cos\omega t & \sin\omega t \\[2ex]
\sin\omega' t & \dfrac{\omega^2\sin\omega t - \omega\,\omega'\sin\omega' t}{\omega'^2 - \omega^2} & \dfrac{\omega'^2\cos\omega' t - \omega^2\cos\omega t}{\omega'^2 - \omega^2} \\[2ex]
\dfrac{\sin\omega' t}{\omega'} & \dfrac{\omega'\sin\omega t - \omega\sin\omega' t}{\omega'^2 - \omega^2} & \dfrac{\omega'\cos\omega' t - \omega'\cos\omega t}{\omega'^2 - \omega^2} \\[2ex]
\dfrac{\omega'\sin\omega t - \omega\sin\omega' t}{\omega'^2 - \omega^2} & A & B \\[2ex]
\dfrac{\omega'\cos\omega t - \omega'\cos\omega' t}{\omega'^2 - \omega^2} & D & E
\end{array}\right|
$$

$$
\text{ove: } A = -t\,\frac{(2\,\omega^2 - \omega'^2)\cos\omega t}{2\,(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{\omega'^2\sin\omega t}{2\,\omega\,(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{\omega^2\omega'\sin\omega' t - \omega\,\omega'^2\sin\omega t}{(\omega'^2 - \omega^2)^2};
$$

$$
C = t\,\frac{(2\,\omega^2 - \omega'^2)\,\omega'\sin\omega t}{2\,(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{\omega'\omega^3(\cos\omega' t - \cos\omega t)}{(\omega'^2 - \omega^2)^2};
$$

$$
E = -t\,\frac{2\,\omega^2 - \omega'^2}{2\,(\omega'^2 - \omega^2)}\cos\omega t + \frac{\omega'^3\sin\omega' t - \omega'^2\omega\sin\omega t}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} - \frac{\omega'^2\sin\omega t}{2\,\omega\,(\omega'^2 - \omega^2)};
$$

$$
F^*| = \left|\begin{array}{ccc}
\cos\sqrt{2}\,\omega t & \sqrt{2}\cos\omega t - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,\omega t & \sqrt{2}\sin\omega t - 2\sin\sqrt{2}\,\omega t \\[2ex]
0 & \cos\omega t & \sin\omega t \\[2ex]
\sin\sqrt{2}\,\omega t & \sin\omega t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,\omega t & 2\cos\sqrt{2}\,\omega t - \cos\omega t \\[2ex]
\dfrac{\sin\sqrt{2}\,\omega}{\sqrt{2}\,\omega} & \dfrac{\sqrt{2}\sin\omega t - \sin\sqrt{2}\,\omega t}{\omega} & \dfrac{\sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,\omega t - \sqrt{2}\cos\omega t}{\omega} \\[2ex]
\dfrac{\sqrt{2}\sin\omega t - \sin\sqrt{2}\,\omega t}{\omega} & +\dfrac{\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,\omega t - \sin\omega t}{\omega} & \dfrac{2\cos\omega t - 2\cos\sqrt{2}\,\omega t}{\omega} \\[2ex]
\dfrac{\sqrt{2}\cos\omega t - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,\omega t}{\omega} & \dfrac{2\cos\sqrt{2}\,\omega t - 2\cos\omega t}{\omega} & \dfrac{2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,\omega t - (\sqrt{2} + 2)\sin\omega t}{\omega}
\end{array}\right|
$$

$\dfrac{\omega^2 \omega' \sin \omega' t - \omega \omega'^2 \sin \omega t}{\omega'^2 - \omega^2}$	0	0
$\omega' \sin \omega t$	0	0
$\dfrac{\omega' \omega^2 \cos \omega t - \omega' \omega^2 \cos \omega' t}{\omega'^2 - \omega^2}$	0	0
$\dfrac{\omega'^2 \cos \omega t - \omega^2 \cos \omega' t}{\omega'^2 - \omega^2}$	0	0
C	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
F	$-\sin \omega t$	$\cos \omega t$

(19)

$$B = -t \frac{(2\omega^2 - \omega'^2) \sin \omega t}{2(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{\omega \omega'^2 \cos \omega t - \omega \omega'^2 \cos \omega' t}{(\omega'^2 - \omega^2)^2};$$

$$D = t \frac{(2\omega^2 - \omega'^2) \sin \omega t}{2(\omega'^2 - \omega^2)} + \omega'^2 \frac{\omega \cos \omega' t - \cos \omega t}{(\omega'^2 - \omega^2)^2};$$

$$F = t \frac{(2\omega^2 - \omega'^2)\, \omega' \cos \omega t}{2(\omega'^2 - \omega^2)} - \frac{\omega'^3 \sin \omega t}{2\omega(\omega'^2 - \omega^2)} + \frac{\omega^3 \omega' \sin \omega t - \omega^2 \omega'^2 \sin \omega' t}{(\omega'^2 - \omega^2)^2}.$$

$(\sqrt{2} \sin \sqrt{2}\, \omega t - 2 \sin \omega t)\, \omega$	0	0
$\sqrt{2}\, \omega \sin \omega t$	0	0
$(\sqrt{2} \cos \omega t - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}\, \omega t)\, \omega$	0	0
$2 \cos \omega t - \cos \sqrt{2}\, \omega t$	0	0
$\sqrt{2} \cos \sqrt{2}\, \omega t - \sqrt{2} \cos \omega t$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$-2 \sin \sqrt{2}\, \omega t$	$-\sin \omega t$	$\cos \omega t$

(20)

Estratto da « L'Elettrotecnica », n. 6 *bis*, vol. XLVIII - 1961 Ind. Grafiche Ital. Stucchi - Via Marcona, 50 - Milano - 1961