

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-61/63 (21. 11. 61)

G. Sacerdoti: CALCOLO DELL'ACCELTANZA MASSIMA DI UN QUADRU-
POLO ELICOIDALE INFINITAMENTE LUNGO.

Nota interna: n° 103
21 Novembre 1961

G. Sacerdoti: CALCOLO DELL'ACCETTANZA MASSIMA DI UN QUADRUPOLO ELICOIDALE INFINITAMENTE LUNGO.

1) Introduzione

Le proprietà ottiche di un quadrupolo elicoidale di lunghezza infinita sono definite da:

$$\beta^2 = \frac{dB}{dx} \frac{3}{P} (m^{-2})$$

ove: B = campo magnetico in gauss

P = momento della particella in MeV/c

$\frac{dB}{dx}$ = gradiente del campo magnetico in gauss/cm

$k = \frac{\alpha}{L}$ = spiralizzazione in rad/m

$\phi = 2d$ = diametro utile interno del quadrupolo in metri.

L'accettanza massima A di una sorgente posta ad una distanza p dall'ingresso del quadrupolo di dimensione infinitamente estesa e che emetta particelle uniformemente in tutte le direzioni è definita da:

$$A = \frac{N}{I} = \iiint dX_0 dZ_0 dX_0^* dZ_0^* \quad (m^2 \times rad^2) \quad (1)$$

ove:

A = accettanza.

N = numero di particelle trasportate

I = numero di particelle emesse / $m^2 \text{ rad}^2$

I limiti di integrazione si intendono fissati dalla condizione di passaggio delle particelle.

Il massimo diametro che può assumere un quadrupolo è di (vedi fig.1)

$$\phi_{max} = 2d = 2 \frac{B_{max}}{\frac{dB}{dx}} 10^{-2} = \frac{6 B_{max}}{p R^2} \dot{\gamma}^2 10^{-2} \quad (m) \quad (2)$$

da cui si ottiene:

$$d_{max} = 3 \frac{B_{max}}{R} \frac{\dot{\gamma}^2}{K^2} \quad (m) \quad (3)$$

ove

$$\dot{\gamma} = \frac{K}{\beta}$$

Supponiamo che $\frac{K}{\beta} > 1$, cioè che il quadrupolo abbia proprietà focheggianti [1]. In tale caso abbiamo trovato per l'accettanza la formula (4) che possiamo ritenere quasi sempre valida (vedi § 3):

$$A = 1,31 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{\dot{\gamma}^2 - 1}{\dot{\gamma}^2 + 1}} \frac{\dot{\gamma}^4}{K^4} \frac{B_{max}^4}{p^4} \quad (m^2 \text{ rad}^2) \quad (4)$$

Questa formula probabilmente rappresenta un massimo per l'accettanza di qualsiasi canale magnetico rettilineo infinito fatto con quadrupolo anche normale perchè in tale caso a causa delle sezioni diritte tra i vari quadrupoli la situazione peggiora dal punto di vista dell'accettanza. Come si può vedere, l'accettanza non dipende dalla distanza della sorgente dall'inizio del canale.

2) Calcolo dell'accettanza

Le formule che ci forniscono lo scostamento $X(L)$, $Z(L)$ in una sezione generica L del quadrupolo in

funzione delle coordinate iniziali X_0, Z_0, X'_0, Z'_0 , sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 X_L = & X_0 \cos L \sqrt{K^2 + \beta^2} + X'_0 \left[\rho \cos L \sqrt{K^2 + \beta^2} + \frac{\sqrt{K^2 + \beta^2}}{\beta^2} \sin L \sqrt{K^2 + \beta^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{K^2}{\beta^2 \sqrt{K^2 - \beta^2}} \sin L \sqrt{K^2 - \beta^2} \right] + Z_0 \frac{K}{\sqrt{K^2 - \beta^2}} \sin L \sqrt{K^2 - \beta^2} + \\
 & + Z'_0 \left[\rho \frac{K}{\sqrt{K^2 - \beta^2}} \sin \sqrt{K^2 - \beta^2} L + \frac{K}{\beta^2} \cos L \sqrt{K^2 + \beta^2} - \frac{K}{\beta^2} \cos L \sqrt{K^2 + \beta^2} \right]
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 Z_L = & Z_0 \cos L \sqrt{K^2 - \beta^2} + Z'_0 \left[\rho \cos L \sqrt{K^2 - \beta^2} + \frac{K^2}{\beta^2 \sqrt{K^2 + \beta^2}} \sin L \sqrt{K^2 + \beta^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{\sqrt{K^2 - \beta^2}}{\beta^2} \sin L \sqrt{K^2 - \beta^2} \right] - X_0 \frac{K}{\sqrt{K^2 + \beta^2}} \sin L \sqrt{K^2 + \beta^2} + \\
 & + X'_0 \left[-\rho \frac{K}{\sqrt{K^2 + \beta^2}} \sin L \sqrt{K^2 + \beta^2} + \frac{K}{\beta^2} \cos L \sqrt{K^2 + \beta^2} - \frac{K}{\beta^2} \cos L \sqrt{K^2 + \beta^2} \right]
 \end{aligned} \quad (6)$$

Da cui si ottiene facilmente (x)

$$\begin{aligned}
 X_{\max} = & \sqrt{\left(X_0 + \rho X'_0 - \frac{K}{\beta^2} Z'_0 \right)^2 + X'_0{}^2 \frac{K^2 + \beta^2}{\beta^4} +} \\
 & + \sqrt{Z_0{}^2 \frac{K^2}{\beta^4} + \left(\frac{\rho K}{\sqrt{K^2 - \beta^2}} Z'_0 + \frac{Z_0 K}{\sqrt{K^2 - \beta^2}} - \frac{X'_0 K^2}{\beta^2 \sqrt{K^2 - \beta^2}} \right)^2}
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 Z_{\max} = & \sqrt{\left(Z_0 + \rho Z'_0 - X'_0 \frac{K}{\beta^2} \right)^2 + Z_0{}^2 \frac{K^2 - \beta^2}{\beta^4} +} \\
 & + \sqrt{X'_0{}^2 \frac{K^2}{\beta^4} + \left(-\frac{X_0 K}{\sqrt{K^2 + \beta^2}} - X'_0 \frac{\rho K}{\sqrt{K^2 + \beta^2}} + \frac{Z_0 K^2}{\beta^2 \sqrt{K^2 + \beta^2}} \right)^2}
 \end{aligned} \quad (8)$$

(x) - Sommando le radici positive della somma dei quadrati dei seni e coseni in $\sqrt{K^2 + \beta^2}$ e della somma dei quadrati dei seni e coseni in $\sqrt{K^2 - \beta^2}$.

X_{\max} Z_{\max} rappresentano gli scostamenti massimi del fascio di condizioni iniziali pari a X_0 Z_0 X'_0 Z'_0 .

Per la (3) dovrà risultare:

$$X_L = \sqrt{(x_0 + g x_0 + j^2 z_0)^2 + x_0^2 (j^4 + j^2)} + \sqrt{j^4 x_0^2 + \left(z_0 \frac{1}{\sqrt{1-j^2}} + \frac{g z_0}{\sqrt{1-j^2}} - \frac{x_0 j^2}{\sqrt{1-j^2}} \right)^2} \leq \frac{3B_{\max}}{P} \frac{j^2}{K^2} 10^{-2} \quad (9)$$

$$Z_L = \sqrt{(z_0 + g z_0 - j^2 x_0)^2 + z_0^2 (j^4 - j^2)} + \sqrt{j^4 x_0^2 + \frac{x_0}{\sqrt{1+j^2}} + \frac{x_0' g}{\sqrt{1+j^2}} - \frac{z_0 j^2}{\sqrt{1+j^2}}} \leq \frac{3B_{\max}}{P} \frac{j^2}{K^2} 10^{-2} \quad (10)$$

ove si è posto:

$$x_0 = x_0 / K$$

$$z_0 = z_0' / K$$

$$g = p K$$

L'accettazione sarà ovviamente data da:

$$A = K^2 \left(\frac{3B_{\max}}{P} \frac{j^2}{K^2} 10^{-2} \right)^4 A^* \quad (11)$$

ove A^* è il volume, nello spazio X x_0 z_0 z'_0 comune ai domini limitati dall'equazioni

$$x_L(x_0, x_0, z_0, z'_0) \leq 1 \quad (12)$$

$$z_L(x_0, x_0, z_0, z'_0) \leq 1 \quad (13)$$

Si può vedere che la trasformazione rappresentata da M trasforma la x_0, x_0, z_0, z'_0 in a, b, c, d tali che per la (12) dovranno soddisfare la relazione

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \leq 1 \quad (14)$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & g & 0 & -j^2 \\ 0 & \sqrt{j^4 + j^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j^2 \\ 0 & -\frac{j^2}{\sqrt{1-j^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-j^2}} & \frac{g}{\sqrt{1-j^2}} \end{vmatrix} \quad (15)$$

La trasformazione N riduce la (13) in una relazione uguale alla (14)

$$N = \begin{vmatrix} 0 & -j^2 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{j^4 - j^2} \\ 0 & j^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+j^2}} & \frac{g}{\sqrt{1+j^2}} & 0 & \frac{-j^2}{\sqrt{1+j^2}} \end{vmatrix} \quad (16)$$

Il volume V^{**} delimitato dalla (14) nello spazio a, b, c, d, è pari a (vedi app.1):

$$V^{**} = \pi^2/6 = 1,64 \quad (17)$$

Per cui i volumi delimitati dalla (12) e (13) effettivamente risultano pari a

$$V_x^* = V^{**}/D_M = A_x^* \quad (18)$$

$$V_z^* = V^{**}/D_N = A_z^* \quad (19)$$

ove D_N e D_M sono i valori dei determinanti delle matrici N ed M. E' facile controllare che V_x^* è sempre minore di V_z^* . Infatti è:

$$D_M = \frac{j^4 \sqrt{j^2+1}}{\sqrt{j^2-1}} \quad (20)$$

$$D_N = \frac{j^4 \sqrt{j^2-1}}{\sqrt{j^2+1}} \quad (21)$$

I valori di A_x^* ed A_z^* sono, come si vede, indipendenti dal valore di g cioè dalla distanza dell'oggetto dal canale magnateco (vedi fig.2).

Il volume dato dalla (18) non sarà sempre contenuto entro il volume dato dalla (19) e questo dipenderà dai coefficienti delle matrici (15) e (16). Possiamo però notare che le intersezioni con gli assi coordinati delle superfici delimitate dalla (9) sono di dimensioni inferiori

ri a quelle delimitate dalla (10) (vedi app.2)

Anche se come abbiamo detto non risultasse vero per ogni γ ed ogni g , assumiamo per semplicità di soluzione che sia:

$$V^* = \frac{1,64}{g^4} \sqrt{\frac{g^2-1}{g^2+1}} \quad (22)$$

ove

V^* = volume comune al due domini. In questa ipotesi otteniamo:

$$A = 1,33 \times 10^{-6} \frac{B_{max}^4 \gamma^4}{P^4 K^2} \sqrt{\frac{g^2-1}{g^2+1}} \quad (23)$$

A è espressa in $m^2 \times rad^2$ se:

B_{max} in gauss

P in MeV/c

K in rad/m

$$\gamma = k/\beta$$

$$\beta \text{ in } m^{-1} = \sqrt{\frac{3}{\rho} \frac{dB}{dx}}$$

dB/dx in gauss/cm

In fig. 3 è riportato il grafico di A fissati B_{max} , P, K cioè l'accettanza al variare di γ cioè del gradiente del campo magnetico.

3) Discussioni della validità e del significato delle formule ottenute.

Come abbiamo detto può essere che il volume comune ai domini delimitati dalla (9) e dalla (10) non coincida col volume definito della (9). Verosimilmente si può fare l'ipotesi che per valori di g compresi entro certi limiti ciò si avverifichi. In tal caso la formula (23) viene ad assumere il significato di "massimo volume" accettato

Se δ tende ad 1 l'accettanza si annulla: questo concorda con quanto già si è trovato nella teoria generale dei quadrupoli elicoidali.

La formula (23) ci dice che l'accettanza è proporzionale alla quarta potenza del massimo campo magnetico ottenibile. E' interessante vedere come, fissate le caratteristiche del quadrupolo, vari la accettanza al variare del momento. Per ottenere questo, scriviamo la (4) nella forma seguente:

$$A = 1,66 \times 10^{-8} \frac{B_{max}^4}{\left(\frac{dB}{dx}\right)^4} \frac{K^2}{x^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad (24)$$

$$\text{ove } x = \frac{PK^2}{\frac{dB}{dx}}$$

L'andamento di A in funzione di x è riportato in fig.4.

La A(x) è massima per

$$x_0 = 1,28$$

ovvero quando

$$P_0 = 3,84 \frac{dB}{dx} \frac{1}{K^2} \quad (25)$$

Inoltre la variazione percentuale di momento per cui l'accettanza si mantiene maggiore ^{della metà} dell'accettanza massima è data dalla relazione:

$$\frac{\Delta P}{P_0} / 100 = 114$$

Il valore di A in tale caso si può scrivere:

$$A_{max} = \frac{0,35 \times 10^{-8} K^2 B_{max}^4}{\left(\frac{dB}{dx}\right)^4} = 1,36 \times 10^{-8} \frac{B_{max}^4}{P_0 \left(\frac{dB}{dx}\right)^3} = 75,6 \times 10^{-8} \frac{B_{max}^4}{K^6 P_0^4} \quad (26)$$

Come si vede nella (26) l'accettanza massima per un certo momento è inversamente proporzionale a K^6 .

Passiamo ora ad esaminare un'altra grandezza caratteristica del canale magnetico: la brillantezza Br.

La brillantezza può essere definita da:

$$Br = A/4 d_{max}^2$$

La brillantezza è proporzionale quindi al numero di particelle per unità di area. In formula, facendo uso della (23) e della (3) si ottiene:

$$Br = 0.41 \times 10^{-4} \frac{k^2 B_{max}^2}{\left(\frac{dB}{dx}\right)^2 \cdot x^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad (27)$$

Si avrà la massima brillantezza per $x = x_0$, per cui si ha anche la massima accettazione del quadrupolo. Sostituendo ad x il valore x_0 si ottiene la relazione:

$$Br = 8.6 \times 10^{-6} \frac{k^2 B_{max}^2}{\left(\frac{dB}{dx}\right)^2}$$

La brillantezza è quindi proporzionale al quadrato di B_{max} .

Le formule trovate permettono al progettista una facile orientazione sulle caratteristiche da adottare per il canale magnetico. Infatti le formule (4), (25), (27), ci permettono con calcoli elementari, fissati P_0 , Br ed A , di definire completamente il quadrupolo.

Appendice I

Calcolo del volume V^{**} .

Il volume delimitato dalla superficie:

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{z^2+t^2} = 1$$

sarà

$$V^{**} = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}}^{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}} dt \int_{-\sqrt{(1-\sqrt{x^2+y^2})^2-t^2}}^{\sqrt{(1-\sqrt{x^2+y^2})^2-t^2}} dz =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{+1} \left[2x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} (\sqrt{1-x^2})^3 - x^2 \log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Appendice II

Confronto fra le limitazioni di X_0 , X'_0 , Z_0 , Z'_0 , dovute alla $x_L < d$ $z_L < d$

Nella tabella I si riportano i valori dei limiti di X_0 , X'_0 , Z_0 , Z'_0 , quali si ottengono dalle condizioni $z_L \leq d$ $x_L \leq d$ ponendo gli altri tre valori iniziali uguali a zero. E' facile così verificare che la condizione (3) ($x_L < d$) è più restrittiva di quella $z_L < d$ anche per le coordinate oltre che per il volume.

Bibliografia

- (1) - G. Sacerdoti: Proprietà ottiche di un quadrupolo magnetico elicoidale.

"L'elettrotecnica" n° 5 vol. XLVII (1960)

TABELLA I

	per	dalla condizione
$X_0 \text{ max} = d$	$X_0' = Z_0 = Z_0' = 0$	$x_L \leq d$
$X_0 \text{ max} = d(1+j^{-2})$	$X_0' = Z_0 = Z_0' = 0$	$z_L \leq d$
$Z_0 \text{ max} = d(1-j^{-2})$	$X_0 = X_0' = Z_0' = 0$	$x_L \leq d$
$Z_0 \text{ max} = d$	$X_0 = X_0' = Z_0' = 0$	$z_L < d$
$X_0' \text{ max} = \frac{d}{\sqrt{g^2 + j^4 + j^2 + \frac{j^4}{j^2-1}}}$	$X_0 = Z_0 = Z_0' = 0$	$x_L < d$
$X_0' \text{ max} = \frac{d}{\sqrt{j^4 + \frac{g^2}{1-j^{-2}} + j^2}}$	$X_0 = Z_0 = Z_0' = 0$	$z_L < d$
$Z_0' \text{ max} = \frac{d}{j^2 + \sqrt{j^4 + \frac{g^2}{1-j^{-2}}}}$	$X_0 = Z_0 = X_0' = 0$	$x_L < d$
$Z_0' \text{ max} = \frac{d}{\sqrt{g^2 + j^4 + j^2 + \frac{j^4}{j^2+1}}}$	$X_0 = Z_0 = X_0' = 0$	$z_L < d$

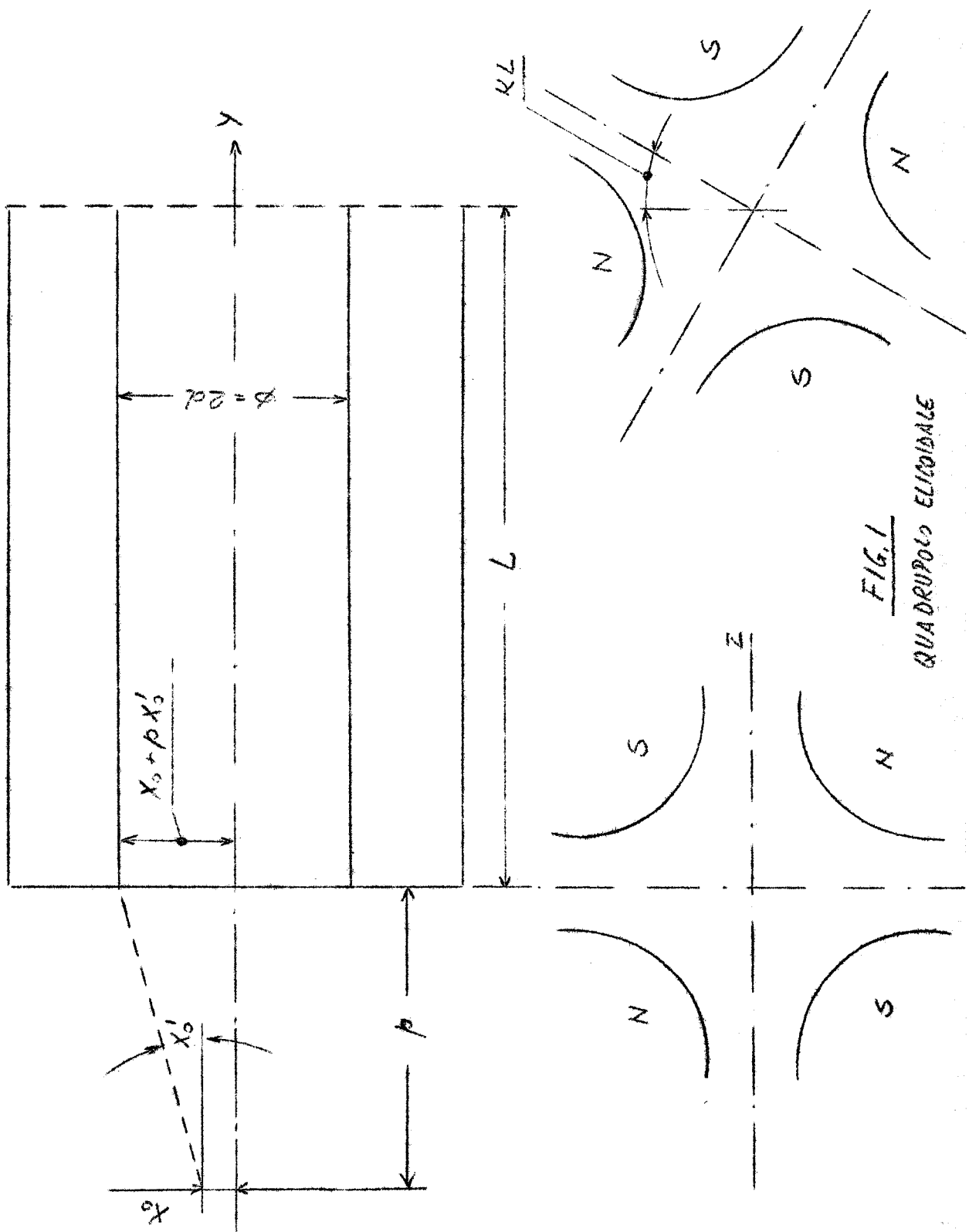


FIG. 1
 QUADRUPOLO ELLIPSOIDALE

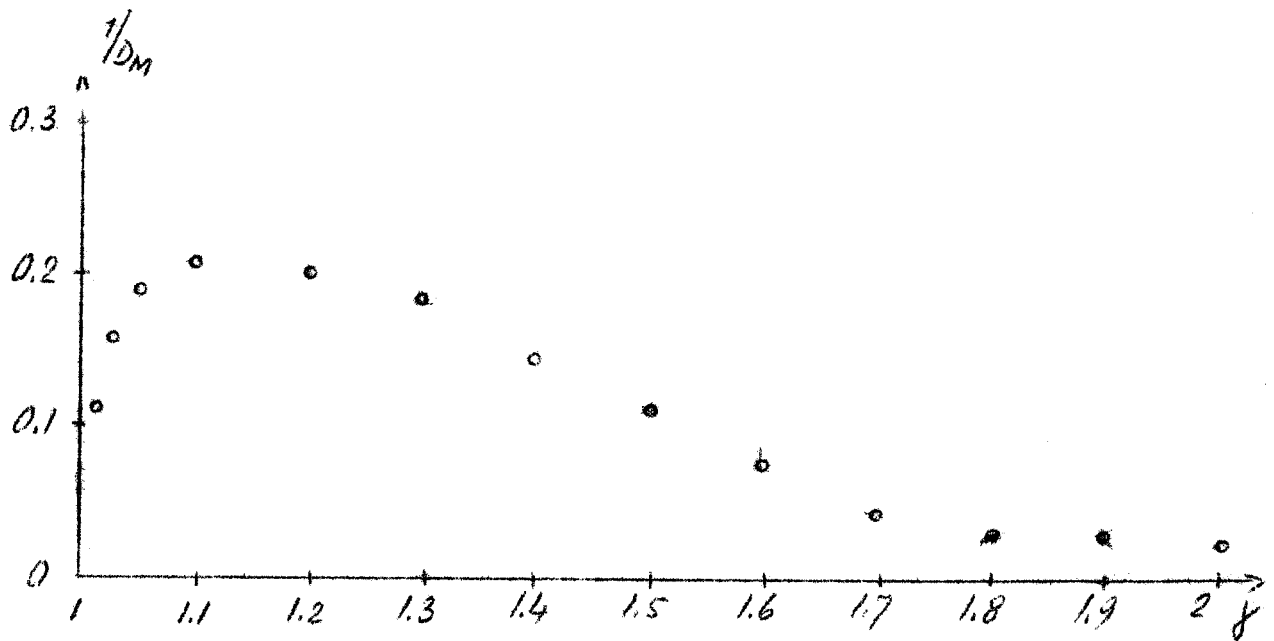


FIG. 2a - ANDAMENTO DI $1/D_M$ IN FUNZIONE DI γ .

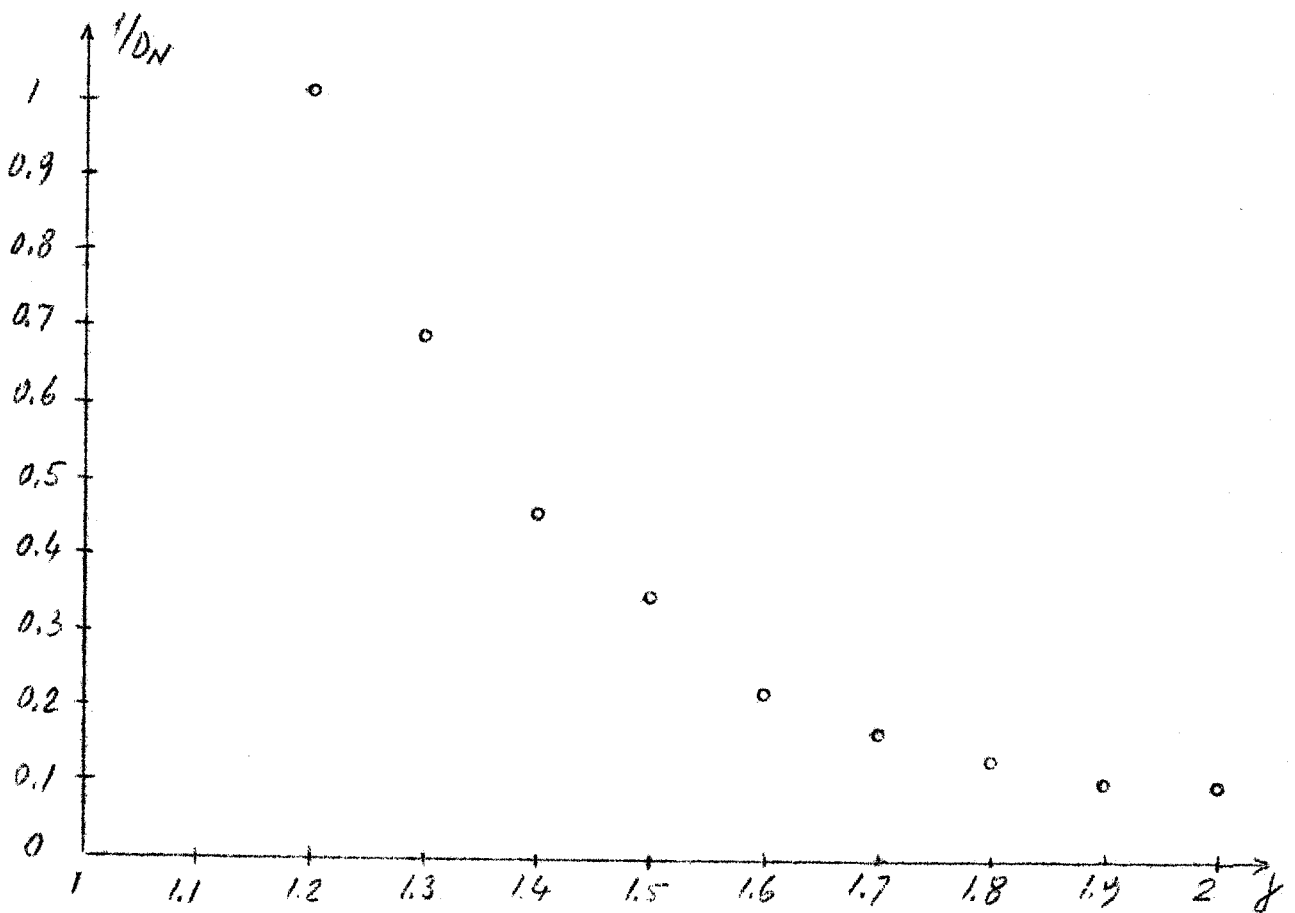


FIG. 2b - ANDAMENTO DI $1/D_N$ IN FUNZIONE DI γ .

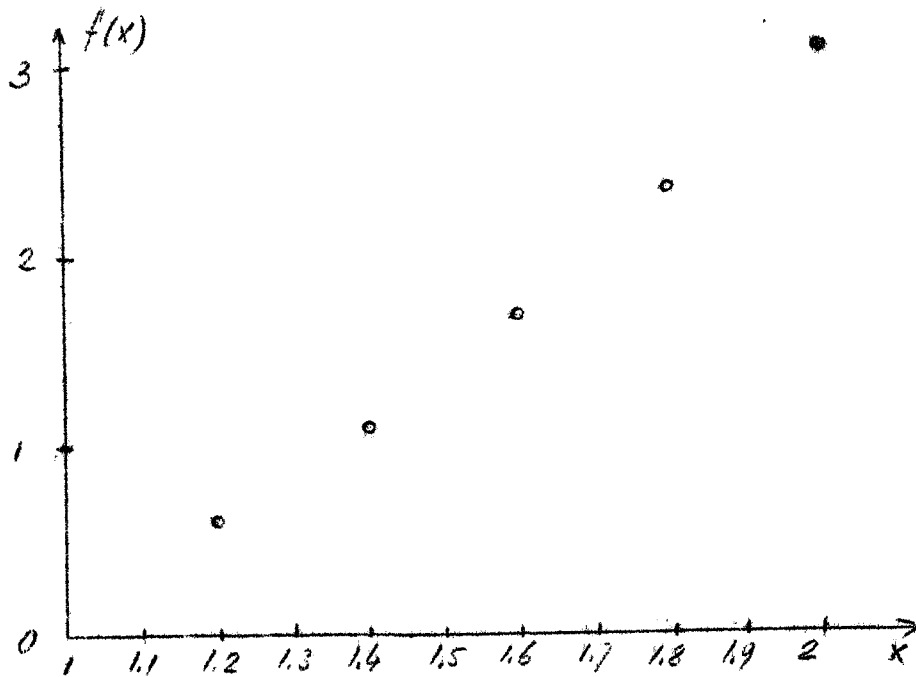


FIG. 3 - GRAFICO DI $x^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

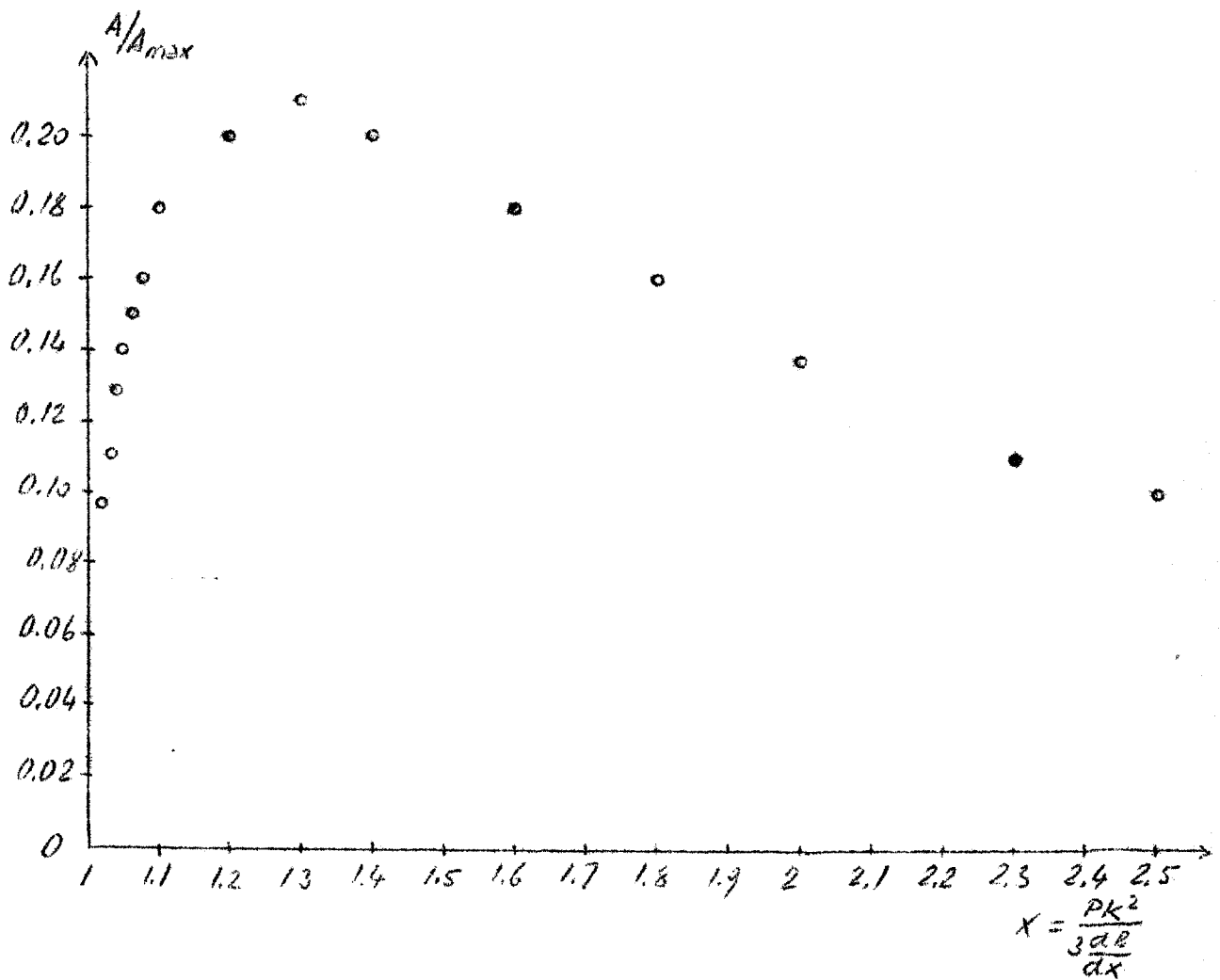


FIG. 4 - ANDAMENTO DELL'ACCETTAZZA IN FUNZIONE DEL MOMENTO P.

$$x = \frac{Pk^2}{3 \frac{dB}{dx}}$$