

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-61/62 (10.11.61)

M. Conte, A. Turrin: STUDIO PRELIMINARE PER UNA STRUTTURA
"STRONG FOCUSING" PER L'ELETTROSINCROTRONE DI FRASCATI.

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.
Servizio Documentazione

Nota interna: n° 102
10 Novembre 1961

M. Conte e A. Turrin: STUDIO PRELIMINARE PER UNA STRUTTURA 'STRONG FOCUSSING' PER L'ELETTROSINCROTRONE DI FRASCATI.

Nell'eventualità di cambiare tipo di foccheggiamento all'attuale macchina di Frascati, abbiamo preso in esame diverse strutture 'strong focussing' e ci è sembrato opportuno scegliere la struttura simmetrica di Cornell⁽¹⁻²⁾, in vista dei suoi innegabili vantaggi, che verranno mostrati in seguito, e della profonda somiglianza (raggi e sezioni diritte quasi uguali) che esiste tra i due sincrotroni.

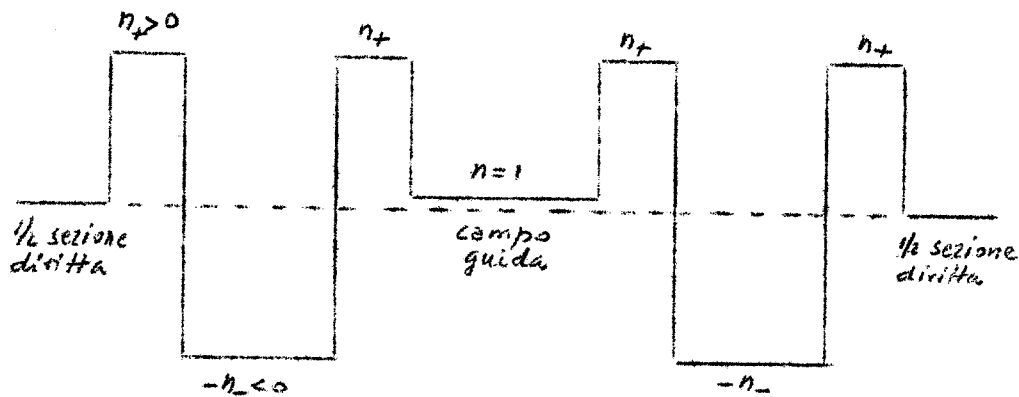
In questa struttura ciascun elemento periodico, corrispondente ad un quadrante, è costituito da settori disposti nel seguente ordine:

- 1/2 sezione diritta (1/2 O);
 - 1 settore a indice di campo positivo (1/2 F);
 - 1 settore a indice negativo lungo 2 volte quello a indice positivo (1/2 D);
 - 1 settore a campo guida di lunghezza pari a quella della sezione diritta (~ 0);
- e poi, in ordine inverso, 1/2F, 1D, 1/2F, 1/2 O.

E' chiaro che questa struttura presenta una simmetria

rispetto al centro del settore a campo guida.

Nello schizzo qui riportato compare l'elemento periodico della struttura da noi scelta:



Nel nostro caso le lunghezze dei settori sono:

1/2 sezione diritta	=	60,3 cm
settore a indice positivo	=	55,6 cm = 0,1545 rad
settore a indice negativo	=	111,2 cm = 0,3090 rad
settore a campo guida	=	120,6 cm = 0,3350 rad

Si ricorda che il raggio dell'elettrosincrotrone di Frascati è di 360 cm.

Le matrici relative alle oscillazioni di betatrone, verticali e radiali, sono ⁽³⁾:

oscillazioni verticali

$$\Delta_z = \Gamma_1^z \Gamma_2^z \Gamma_3^z \Gamma_2^z \gamma_5^z \gamma_7^z \Gamma_2^z \Gamma_3^z \Gamma_2^z \Gamma_1^z = M^z \underline{M}^z \quad (2)$$

con

$$M^z = \Gamma_1^z \Gamma_2^z \Gamma_3^z \Gamma_2^z \gamma_5^z = \begin{vmatrix} u & v \\ w & \tilde{z} \end{vmatrix}$$

$$\underline{M}^z = \gamma_7^z \Gamma_2^z \Gamma_3^z \Gamma_2^z \Gamma_1^z = \begin{vmatrix} \tilde{z} & v \\ w & u \end{vmatrix}$$

per una proprietà delle strutture simmetriche ⁽⁴⁾.

Le singole matrici che compaiono nelle (2) sono:

$$\Gamma_1^z = \begin{vmatrix} 1 & 0,1675 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_2^z = \begin{vmatrix} \cos 0,1545\sqrt{n_+} & (1/\sqrt{n_+})\text{sen } 0,1545\sqrt{n_+} \\ -\sqrt{n_+}\text{sen } 0,1545 & \cos 0,1545\sqrt{n_+} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_3^z = \begin{vmatrix} \text{Ch } 0,3090\sqrt{n_-} & (1/\sqrt{n_-})\text{Sh } 0,3090\sqrt{n_-} \\ \sqrt{n_-}\text{Sh } 0,3090\sqrt{n_-} & \text{Ch } 0,3090\sqrt{n_-} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_5^z = \begin{vmatrix} \cos 0,3350 & \text{sen } 0,3350 \\ -\text{sen } 0,3350 & \cos 0,3350 \end{vmatrix}$$

oscillazioni radiali

$$\Delta_r = \Gamma_1^r \Gamma_2^r \Gamma_3^r \Gamma_2^r \Gamma_1^r \Gamma_1^r \Gamma_2^r \Gamma_3^r \Gamma_2^r \Gamma_1^r = M^r M^r$$

dove

$$M^r = \Gamma_1^r \Gamma_2^r \Gamma_3^r \Gamma_2^r \Gamma_1^r$$

e dove:

$$\Gamma_1^r = \begin{vmatrix} 1 & 0,1675 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_2^r = \begin{vmatrix} \text{Ch } 0,1545\sqrt{n_+-1} & (1/\sqrt{n_+-1})\text{Sh } 0,1545\sqrt{n_+-1} \\ \sqrt{n_+-1}\text{Sh } 0,1545\sqrt{n_+-1} & \text{Ch } 0,1545\sqrt{n_+-1} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_3^r = \begin{vmatrix} \cos 0,3090\sqrt{1+n_-} & (1/\sqrt{1+n_-})\text{sen } 0,3090\sqrt{1+n_-} \\ -\sqrt{1+n_-}\text{sen } 0,3090\sqrt{1+n_-} & \cos 0,3090\sqrt{1+n_-} \end{vmatrix}$$

Entrambe le matrici Δ_z e Δ_r sono del tipo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & A \end{vmatrix}$$

Mediante la calcolatrice IBM 650 sono state esplorate varie zone del piano (n_+, n_-) al fine di trovare le regioni in cui $|A| < 1$, cioè le zone di stabilità⁽³⁾.

In fig. 1 sono riportati i risultati di queste esplorazioni. Le strisce che vi compaiono, contrassegnate da un valore di A, indicano le zone del piano (n_+, n_-) entro cui A assume certamente quel valore. È chiaro che quando più è piccolo il passo di esplorazione Δn_+ , Δn_- , tanto più questa striscia è stretta. Si intende $A_z = 1/2 \text{Tr} \Delta_z = \cos \mu_z$ e $A_r = 1/2 \text{Tr} \Delta_r = \cos \mu_r$.

Trovate queste regioni, passiamo a considerare i numeri di oscillazioni ν per giro, sia radiali che verticali, in funzione di n_+ ed n_- . Essi sono:

$\nu = (N/2\pi)\mu = (2/\pi)\mu$; dove N è il numero di elementi periodici e μ si ricava nel seguente modo:

segno di A	segno di B	μ
+	+	$\arccos A $
+	-	$2\pi - \arccos A $
-	+	$\pi - \arccos A $
-	-	$\pi + \arccos A $

In fig. 2 compaiono i numeri di oscillazioni per giro e diverse loro combinazioni. Anche qui la striscia sta ad indicare zone entro cui $\nu_z, \nu_r, 2\nu_z, 2\nu_r, \nu_z + \nu_r$ assumono certamente il valore indicato.

In fig. 2 compare pure quello che noi riteniamo il punto di lavoro migliore: $n_+ = 15,6$ ed $n_- = 17$. Esso sta pressochè al centro del diamante di stabilità delimitato dalle linee di risonanza $\nu_z = 1, \nu_z = 1,5, \nu_r = 2$ e $\nu_r = 2,5$.

Dimostriamo ora che, nel caso della instabilità per le oscillazioni radiali, non si può mai avere $A \leq -1$. Per questa dimostrazione ci serviamo del fatto che quando $|A| \geq 1$ i segni di B e C sono uguali, e di una semplice considerazione sulla struttura. Infatti, come avevamo già visto (3), $\Delta_r = M^R R^R$, cioè le oscillazioni radiali 'vedono' il quadrante diviso in due ottanti, ciascuno dei quali è simmetrico. Allora si ha:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} m & n \\ p & m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & n \\ p & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m^2 + np & 2mn \\ 2mp & m^2 + np \end{vmatrix}$$

Come abbiamo ora detto, tutte le volte che $|m^2 + np| \geq 1$, i segni di n e di p debbono essere uguali; ne segue che: $A = m^2 + np \geq 0$. Quindi fuori della regione di stabilità è sempre $A_r > 1$.

La prima proprietà da noi usata per questa dimostrazione, cioè l'uguaglianza dei segni di B e C fuori della regione di stabilità, è del tutto generale. Invece l'altra proprietà, quasi-ottanti simmetrici, è caratteristica della struttura simmetrica da noi scelta ed è valida solo per le oscillazioni radiali.

Perciò quanto ora dimostrato non è ovviamente valido per le oscillazioni verticali relative alla nostra struttura, nè per oscillazioni di entrambi i tipi relative a strutture diverse da quella che abbiamo scelto.

Questo fatto risulta chiaramente in fig. 1; si può infatti notare una vasta zona centrale in cui A_r si avvicina molto a -1 senza raggiungerlo mai, mentre A_z diverge passando attraverso i valori +1 e -1.

Questa proprietà della struttura simmetrica è molto importante, perchè allarga considerevolmente la regione di stabilità relativa alle oscillazioni radiali.

È noto che la regione di stabilità, cioè quella zona del piano (n_+, n_-) in cui $|A_z|$ e $|A_r| < 1$, è solcata da 'linee proibite' dovute agli errori di allineamento⁽³⁾. Queste linee corrispondono ai seguenti valori di μ_z e μ_r :
 $\mu_z, \mu_r = h (2\pi/N)$ con $h = 0, 1, 2, 3, \dots$ e con $N =$ numero di elementi periodici = 4.

A questi valori di μ_z o μ_r corrispondono i seguenti valori dei loro coseni: $\cos\mu_z, \cos\mu_r = 0, \pm 1$.

Ma in precedenza avevamo definito con $\nu_{z,r} = (N/2\pi)\mu_{z,r}$ i numeri di oscillazioni verticali e radiali per giro.

Perciò $\nu_{z,r} = h$.

Possiamo concludere, pertanto, che alle 'linee proibite' dovute agli errori di allineamento corrispondono le linee $\nu_{z,r} =$ intero; cioè le linee di risonanza⁽⁵⁾ più critiche, quelle per cui si hanno vere e proprie oscillazioni forzate e, di conseguenza l'orbita della particella si allontana indefinitamente dal centro della ciambella.

Ovviamente a $\cos\mu_{z,r} = \pm 1$ non deve corrispondere alcuna linea di risonanza perchè, quando la particella diverge, il numero di oscillazioni per giro perde significato.

Tutte queste argomentazioni sarebbero esaurienti se la particolare struttura da noi scelta non fosse responsabile dei due fatti già presi in esame:

- 1) le oscillazioni radiali non possono divergere attraverso il valore $A_r = \cos\mu_r = -1$;
- 2) è lecito considerare la macchina come costituita da 8 ottanti: ipotesi abbastanza giustificata per le oscillazioni radiali, un pò meno per quelle verticali.

Nel primo caso si ha che il numero di oscillazioni per giro rimane definito per $A_r = \cos \mu_r - 1$, per quanto si stia sulla linea di risonanza $\nu_r = 2$.

Nel secondo caso i valori di $\mu_{z,r}$ per cui si hanno 'linee proibite' sono: $0, \pi/4, \pi/2, (3/4)\pi, \pi, (5/4)\pi, (3/2)\pi, (7/4)\pi, 2\pi, \dots$ da cui $\cos \mu_{z,r} = 0, \pm\sqrt{2}/2, \pm 1$.

Per i valori $\cos \mu_z = 0, \pm 1$ e $\cos \mu_r = 0, +1$ si ricade nel caso già esaminato della macchina costituita da 4 quadranti. Le nuove linee proibite $\pm\sqrt{2}/2$ corrispondono invece alle $\nu_{z,r}$ semi-interi; cioè a quelle risonanze dovute agli errori sui gradienti di campo (5)

A titolo di chiarezza riportiamo lo schema di corrispondenza tra 'linee proibite' e linee di risonanza:

$\cos \mu_z$	μ_z	ν_z
0	$\pi/2$	1
$-\sqrt{2}/2$	$(3/4)\pi$	3/2
$\cos \mu_r$	μ_r	ν_r
0	$\pi/2$	1
$-\sqrt{2}/2$	$(3/4)\pi$	3/2
-1	π	2
$-\sqrt{2}/2$	$(5/4)\pi$	5/2
0	$(3/2)\pi$	3
$+\sqrt{2}/2$	$(7/4)\pi$	7/2

Questa corrispondenza risulta pure evidente dal confronto delle fig.1 e fig.2.

Con le risonanze di accoppiamento $\nu_z + \nu_r = \text{intero}$ (abbiamo lecitamente (1) (5) trascurato le risonanze $\nu_z \cdot \nu_r = \text{intero}$) si è esaurito l'esame degli effetti lineari.

Esistono infatti delle risonanze non lineari che si verificano tutte le volte che $a\nu_z + b\nu_r = \text{intero}$ con a e b interi (5).

Vediamo subito che per $a + b = 1$ ($a = 1, b = 0$ e $a = 0, b = 1$) si ritrovano le risonanze lineari intere; per $a + b = 2$ ($a = 2, b = 0$ e $a = 0, b = 2$) le risonanze lineari semi-interi; per $a + b = 2$ ($a = 1, b = 1$) le risonanze lineari di accoppiamento.

Perciò le prime nuove linee di risonanza si hanno per effetti del terzo ordine ($a + b = 3$), cioè per $3\nu_z = \text{intero}$, $3\nu_r = \text{intero}$, $\nu_z + 2\nu_r = \text{intero}$, $2\nu_z + \nu_r = \text{intero}$.

In questo studio preliminare non è nostra intenzione indagare sulle risonanze non lineari; comunque, a prima vista, è chiaro che il diamante di stabilità da noi scelto è solcato almeno dalle nuove linee di risonanza: $3\nu_z = 4$ e $3\nu_r = 7$, cioè $\nu_z = 4/3$ e $\nu_r = 7/3$. Infatti in questo diamante ν_z varia da 1 a $3/2$ e ν_r da 2 a $5/2$.

A questo proposito facciamo osservare che nel progetto dell'elettrosincrotrone di Cornell non si tiene conto delle risonanze non lineari. Infatti il diamante di stabilità da loro scelto, assai simile al nostro come da fig.3, è definito soltanto dalle linee di risonanza lineare $\nu_z = 1$, $\nu_z = 1,5$ e $\nu_r = 2$, $\nu_r = 2,5$ (1) (2).

Ad ogni modo in una fase successiva del nostro progetto esamineremo l'effetto di queste risonanze non lineari, ed esploreremo più in dettaglio il diamante di stabilità da noi prescelto.

Concludiamo valutando approssimativamente l'accet-
tanza in ampiezza ed energia per il punto di lavoro $n_+ = 15,6$,
 $n_- = 17$.

Con facili considerazioni sulla soluzione dell'equa-
zione del moto della particella si ha che le semi-ampiez-
ze massime delle oscillazioni verticali e radiali sono ri-
spettivamente ⁽⁵⁾.

$$Z = \sqrt{z^2 + \frac{R^2 z'^2}{v_z^2}} \quad e \quad X = \sqrt{x^2 + \frac{R^2 x'^2}{v_r^2}} \quad (5)$$

Applichiamo ora queste formule all'iniezione con i
seguenti dati numerici puramente indicativi:

$$v_z = 1,27$$

$$v_r = 2,24$$

$$R = 360 \text{ cm}$$

$$z' = x' = 5 \cdot 10^{-3} \text{ rad (con 10 MeV di iniezione)}$$

$$z = 0,25 \text{ cm (con 10 MeV di iniezione)}$$

$$x = 2 \text{ cm}$$

si ha:

$$Z = 1,44 \text{ cm e } X = 2,15 \text{ cm.}$$

Per l'accettanza in energia basta tenere presente ⁽⁵⁾
che $\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta r}{r}$ con $\alpha =$ 'momentum compaction factor'.

Quando il sincrotrone è costituito da elementi perio-
dici tutti dello stesso raggio e separati da sezioni dirit-
te, come nel nostro caso, si può assumere, con buona appros-
siamzione, che $\alpha = v_r^{-2}$.

Perciò: $\frac{\Delta p}{p} = v_r^2 \frac{\Delta r}{r}$ se prendiamo $\Delta r = 2 \text{ cm}$ si ha:

$$\frac{\Delta p}{p} \approx 3\% .$$

Da quanto ora visto risultano evidenti i seguenti vantaggi rispetto all'attuale struttura 'weak focussing' con iniezione a 2,5 MeV:

- 1) l'accettanza in ampiezza passa dagli attuali 5,7cm x 12cm ai 3cm x 4,3cm ora trovati: ne segue una notevole riduzione nelle dimensioni richieste per la zona utile del campo magnetico.
- 2) l'accettanza in energia aumenta dal presente $\frac{0.8\%}{V}$ (calcolato solo in base a considerazioni ottiche) al 3% ora visto.

Inoltre l'iniezione con un linac da 10 MeV presenta notevoli vantaggi, rispetto a quella con un Van de Graaff da 2,5 MeV, anche con l'attuale struttura 'weak focussing'. A maggior ragione questi vantaggi sussisteranno per una struttura 'strong focussing', date le sue migliori caratteristiche generali ora elencate.

Questi vantaggi sono essenzialmente:

- 1) possibilità di abolire la RF₁ con conseguente eliminazione del programma di frequenza e dell'effetto di accoppiamento tra le due cavità;
- 2) possibilità di eliminare o di ridurre il numero delle 'correcting coils'.

Inoltre la ricerca dai giri può essere fatta a campo costante, il filamento del linac dura più a lungo di quello del Van de Graaff, il cambiamento di energia del sincrotrone diventa più semplice.

Un vantaggio molto grande che può derivare dall'uso della struttura 'strong focussing' è la possibilità di poter aumentare il campo magnetico massimo, e quindi l'energia massima degli elettroni accelerati; ciò è una diretta conseguenza del fatto che la zona utile di campo magnetico

richiesta è in questo caso più piccola.

Un calcolo preliminare di massima indica che con la struttura proposta si potrà raggiungere una energia massima dell'ordine di 1400 MeV.

Bibliografia

- (1) - R. Wilson - Cornell University Report (December 1956)
- (2) - E. Malamud and A. Silverman - Nuclear Instruments and Methods 4, 67 (1959)
- (3) - E. Persico - Lezioni sulle macchine acceleratrici (1959) Cap.VI.
- (4) - A. Turrin - Rapporto n° T 14 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1954)
- (5) - G. Green and E. Courant - Handbuch der Physik (1959) Vol.XLIV, p.218

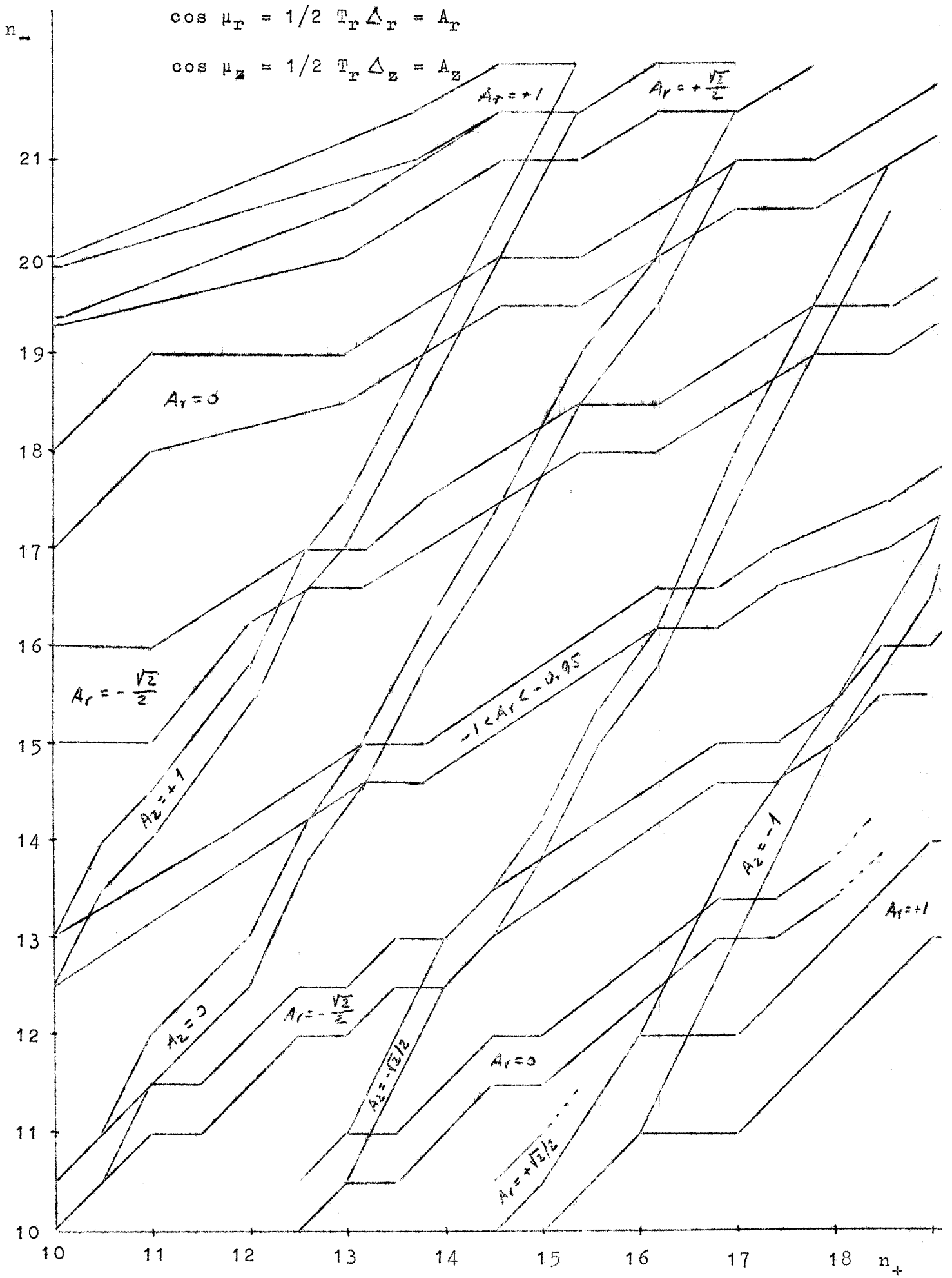


FIG 1

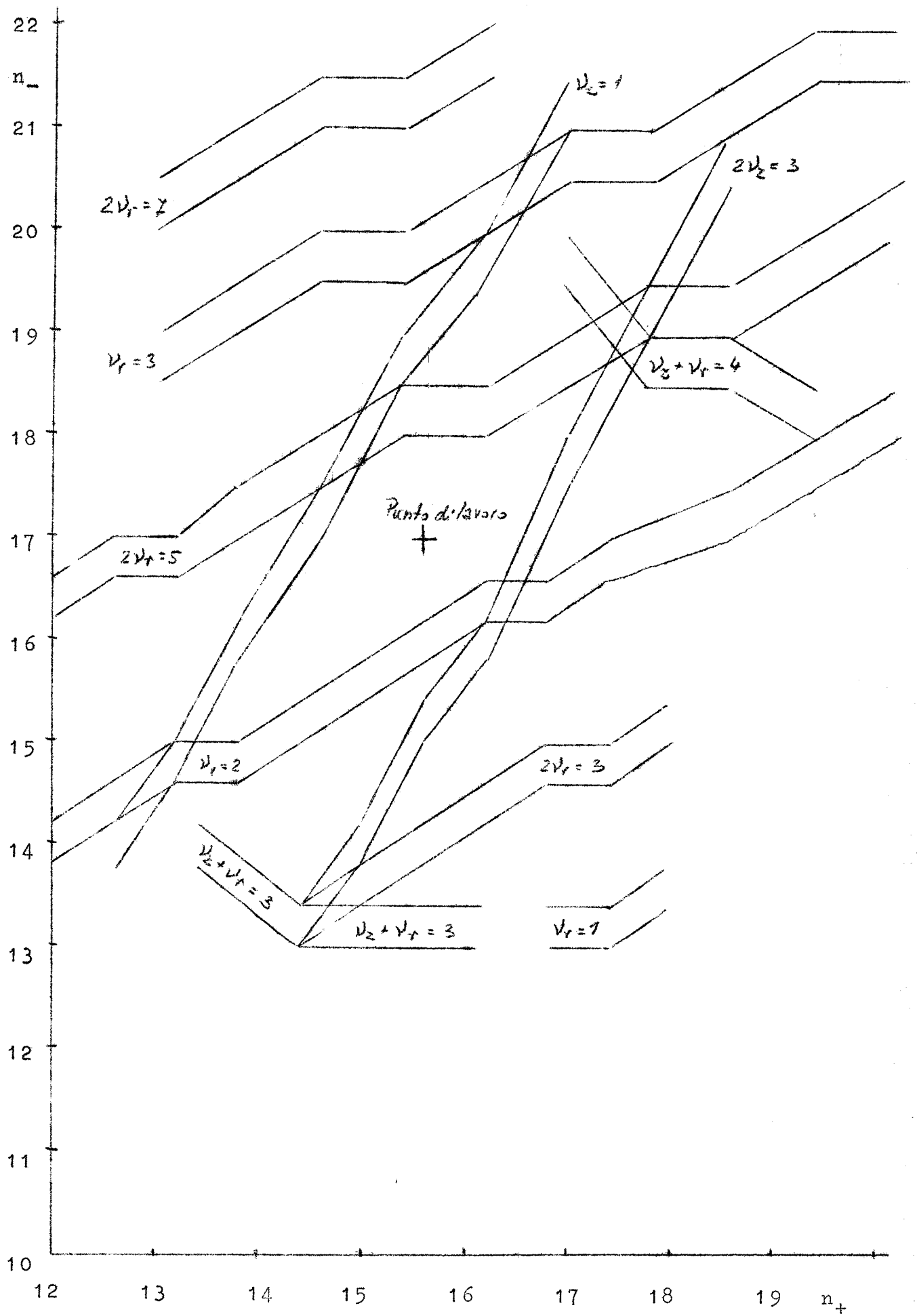


FIG. 2

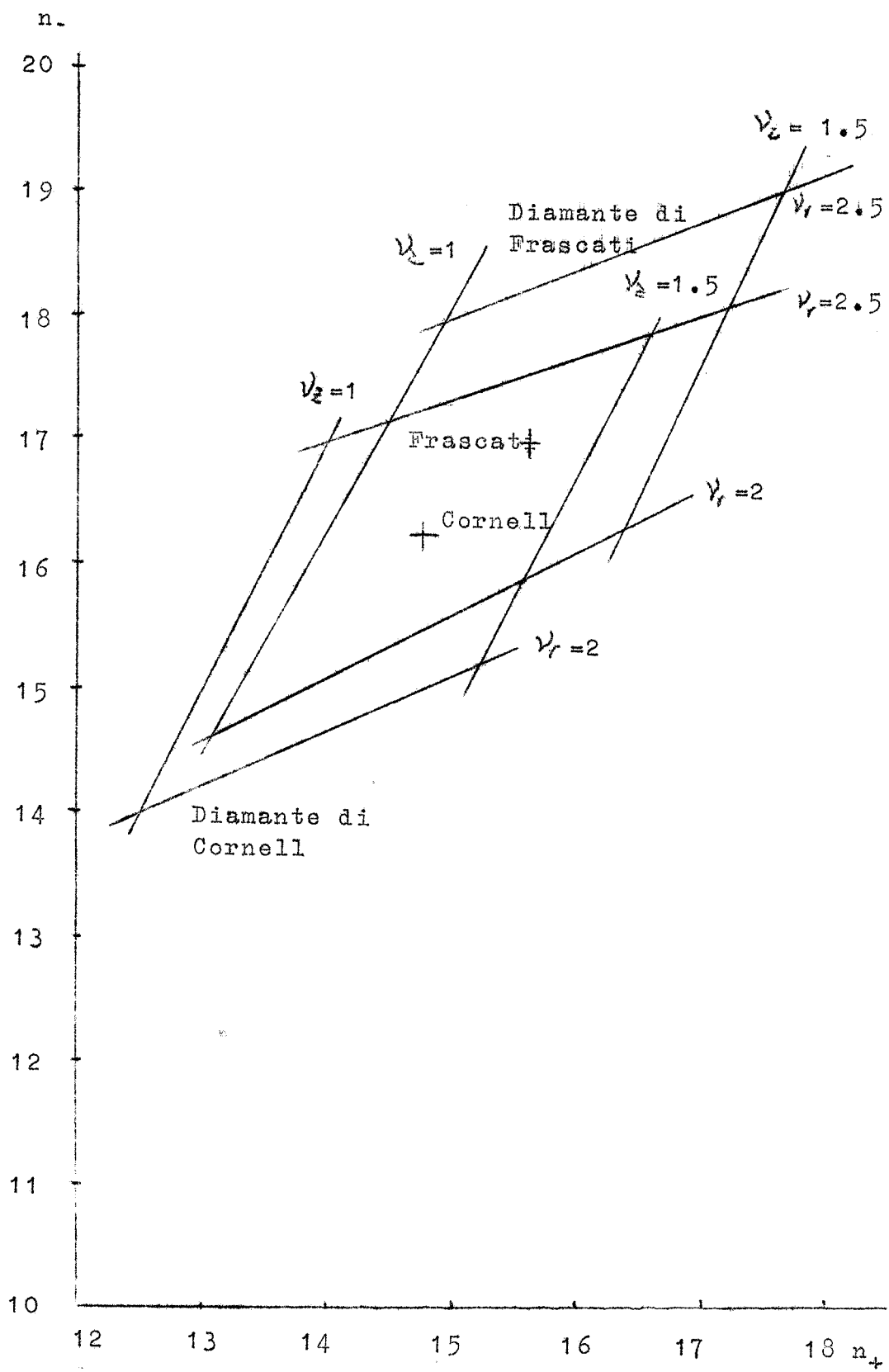


FIG. 3