

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-61/56 (25. 10. 61)

L. Mango: EFFETTI DI COERENZA DELLA FOTOPRODUZIONE DI PIONI
CARICHI DA NUCLEI. (Tesi di Laurea).

Estratto dalla: Tesi di Laurea.

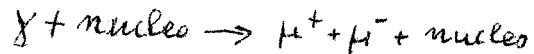
Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.
Servizio Documentazione

Nota interna:n° 97
25 Ottobre 1961.

L. Mango: EFFETTI DI COERENZA NELLA FOTOPRODUZIONE DI PIONI
CARICHI DA NUCLEI (Tesi di laurea)

Premessa

Nel corso dell'esperienza



eseguita su bersagli di Be, C, Al, Sn, Pb, nei Laboratori Nazionali di Frascati (1960), è stata osservata anche la fotoproduzione di pioni carichi, ed è stata misurata l'intensità di pioni di fotoproduzione doppia e singola sotto l'angolo di 30° nel sistema del laboratorio.

Queste misure hanno suggerito di studiare, in questo lavoro, un'interpretazione del fenomeno della fotoproduzione doppia di pioni da nuclei, in termini di produzione coerente di volume e di successive interazioni dei pioni in materia nucleare.

Viene mostrato che questa impostazione introduce nella sezione d'urto di fotoproduzione doppia una forte dipendenza dal modello di densità nucleare del nucleo bersaglio.

I N D I C E

I. Una schematizzazione del processo di fotoproduzione doppia.....	pag. 1
II. Lo scattering coulombiano elastico coerente.....	" 5
III. Distribuzione dei neutroni nei nuclei...	" 7
IV. La fotoproduzione coerente di pioni neutri.....	" 10
V. Fotoproduzione doppia di pioni carichi..	" 12
VI. Modelli di densità nucleare.....	" 14
VII. Modello ottico e calcolo del fattore di attenuazione.....	" 18
VIII. Relazione tra il potenziale ottico e la densità di nucleoni.....	" 24
IX. Sezioni d'urto di assorbimento.....	" 31
X. Calcolo del cammino ottico S.....	" 36
XI. Calcolo classico della probabilità di fuga.....	" 43
XII. Calcolo del fattore di forma.....	" 46
XIII. Fattore di forma nel caso di massima coerenza.....	" 53
XIV. Il metodo statistico di Block.....	" 56
XV. Calcolo della distribuzione statistica del momento trasferito al nucleo.....	" 72
XVI. Critica del procedimento, risultati, conclusioni.....	" 68
Appendice I.....	" 76
Appendice II.....	" 79
Bibliografia.....	" 81

Introduzione

Un fenomeno fisico complesso viene studiato mediante schematizzazioni che permettano di ricondurlo a fenomeni semplici e chiaramente interpretabili, astraendo da tutte le perturbazioni non essenziali, delle quali si potrà tenere conto successivamente e gradualmente.

In questo ordine di idee, quando il fenomeno in esame è la fotoproduzione doppia di pioni, e se ne vuole studiare la sezione d'urto per risalire alle interazioni pione-nucleone, è conveniente considerare il processo nel sistema isolato, costituito dal fotone incidente e dal nucleone bersaglio: questa situazione sperimentale è stata realizzata da Cocconi e collaboratori (1-2-3), facendo avvenire la fotoproduzione in idrogeno. Un'esperienza in idrogeno ha infatti il vantaggio di essere del tutto priva di effetti spuri, perchè i protoni sui quali avviene la fotoproduzione sono nuclei distinti di idrogeno e non interagiscono affatto tra loro; inoltre, a causa della bassa densità del bersaglio, è trascurabile la probabilità che un pione, dopo essere stato prodotto, interagisca con altri protoni.

Proprio a causa della bassa densità del bersaglio, gli eventi di fotoproduzione doppia sono scarsi, e di conseguenza gli errori statistici sulla sezione d'urto elevati, tuttavia la stessa povertà statistica impedisce lo affollamento dei contatori e permette l'uso di tecniche visualizzanti, nel caso particolare di Cocconi camera a diffusione, che rivelano con discreta efficienza e con buona precisione le grandezze cinematiche delle tre particelle dopo la reazione.

Un modo per ridurre gli errori statistici sulle grandezze misurate è quello di studiare la fotoproduzione doppia su bersagli con elevate densità di nuclei e di nucleoni, contando sulla possibilità di saper interpretare

i fenomeni complessi associati o descriverli con sufficiente approssimazione.

Per calcolare la sezione d'urto di fotoproduzione doppia su un nucleo complesso, si dovrebbe scrivere la hamiltoniana del sistema costituito dal fotone, da tutti i nucleoni presenti e dai pioni che compaiono nello stato finale: in realtà si conosce solo la sezione di urto sperimentale di Cocconi; ma ammesso anche di saper scrivere l'hamiltoniana completa, resterebbe sempre il problema di trattare un sistema a molti corpi. Il modo comunemente usato per superare questa difficoltà consiste nel separare l'hamiltoniana in più parti, supponendo di poter trascurare le relative energie di interazione.

In effetti, le energie in gioco nel processo sono molto maggiori delle energie di legame dei nucleoni nel nucleo, è lecito supporre i nucleoni liberi (5), e schematizzare il processo come la fotoproduzione su un nucleo libero. Non è tuttavia possibile prescindere da una particolare interazione tra i nucleoni, quella dovuta al principio di Pauli (6), che dà due sensibili effetti: i nucleoni obbediscono alla statistica di Fermi (10), e in media occupano una sfera dello spazio dei momenti, tra zero e il massimo momento di Fermi; pertanto nel sistema del laboratorio, solidale al baricentro del nucleo, i nucleoni hanno momenti apprezzabilmente diversi da zero, e ogni volta che un nucleone si muove incontro al fotone, l'energia a disposizione nel sistema del baricentro aumenta, con la conseguenza di abbassare la soglia di produzione (7-8-9).

Un altro effetto, che è conseguenza diretta del principio di esclusione, è una riduzione della sezione di urto, in quanto vengono proibiti quei processi che lascerebbero il nucleone in una cella già occupata dello spazio dei momenti.

III.

Inoltre, prima di lasciare il nucleo, il pione interagisce con i nucleoni che incontra sulla sua "traiettoria", in modo elastico e in modo anelastico, con processi che si dovrebbero calcolare impostando un secondo problema a molti corpi: altrimenti, rinunciando a una descrizione dettagliata e rigorosa, ci si può limitare a calcolare un effetto medio per mezzo di un modello. A tale scopo è conveniente l'uso di un modello ottico, che sostituisce all'insieme di nucleoni un potenziale medio complesso, atto a descrivere l'assorbimento, lo sfasamento e lo scattering di diffrazione subiti dai pioni.

Un terzo effetto del nucleo complesso è quello che dà luogo ai processi coerenti, che in questo lavoro sono studiati con particolare interesse: l'indeterminazione sul momento trasferito al nucleone di rinculo (tanto maggiore quanto è maggiore il momento trasferito stesso) è associata a un'indeterminazione sulla posizione del nucleone, cioè sul punto in cui è avvenuta la fotoproduzione. Il fotone ha quindi una probabilità finita di interagire con più di un nucleone, e l'onda pionica prodotta è la risultante di tutte le onde prodotte dallo stesso fotone su tutti i nucleoni interessati (4): queste onde hanno lo stesso numero d'onda e differenze di fase non casuali, bensì correlate dalle rispettive posizioni di produzione, pertanto sono coerenti e interferiscono. La possibilità di interferenza distruttiva determina una riduzione del numero di eventi, mentre l'interferenza costruttiva fa variare, nel modo che vedremo, la dipendenza della sezione d'urto dal numero di massa del bersaglio.

Trattando gli effetti del nucleo nel modo ora accennato, è possibile calcolare la sezione d'urto di fotoproduzione doppia su nuclei complessi e confrontarla con i risultati sperimentali.

IV.

Ma da un'esperienza su nuclei complessi è altresì possibile, una volta nota la sezione d'urto in idrogeno, che interviene nei calcoli in modo essenziale, dedurre interessanti informazioni sulle caratteristiche dei nuclei bersaglio e sulle modalità dell'assorbimento, o, in altre parole, verificare la validità delle ipotesi fatte sui fenomeni di interazione tra i nucleoni, di interferenza tra le onde pioniche coerenti, di assorbimento dei pioni in materia nucleare, e infine sulle distribuzioni di nucleoni nei nuclei.

In un'esperienza su nuclei complessi, questi fenomeni secondari influiscono pesantemente, determinando una sezione d'urto dalla quale si possono ottenere piuttosto informazioni sulla struttura dei nuclei che non sull'interazione pione-nucleone.

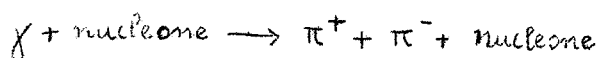
In vista di questi risultati, calcolerò nel corso di questo lavoro la sezione d'urto di fotoproduzione doppia su nuclei complessi.

Nei prossimi capitoli verranno descritti in dettaglio i processi da studiare e i metodi che sono stati accennati solo nelle linee generali; inoltre verrà fatta una breve storia di esperienze precedenti, per mostrare per quale via logica si arrivi a prendere in considerazione proprio il processo di fotoproduzione doppia, al fine di ottenere informazioni sulle reazioni nucleari secondarie.

I. UNA SCHEMATIZZAZIONE DEL PROCESSO DI FOTOPRODUZIONE DOPPIA.

Il processo di fotoproduzione doppia su un nucleo complesso può essere descritto in due fasi successive e indipendenti: la produzione coerente e le interazioni dei pioni col nucleo. In questo capitolo descriverò la produzione in assenza di assorbimento.

La reazione è a tre corpi nello stato finale:



Una prima essenziale semplificazione consiste nel l'ammettere che il processo avvenga in due tempi: il fotone produca elasticamente sul nucleone una particella fittizia con energia totale uguale alla somma delle energie totali dei due pioni e con momento \underline{k} uguale al momento risultante dei momenti dei due pioni; e che successivamente questa particella decada in $\pi^+ + \pi^-$.

In questa ipotesi la prima parte del processo può essere descritta come una reazione elastica a due corpi.

Una ulteriore semplificazione si ottiene simulando questo primo processo con uno scattering elastico, supponendo cioè che la particella fittizia, rappresentante la coppia di pioni non risolva, incida sul nucleone e ne venga diffusa con una ampiezza di scattering uguale alla ampiezza di probabilità di produzione della coppia.

Consideriamo pertanto un processo di scattering elastico coerente in prima approssimazione di Born, nel sistema del baricentro dei tre corpi reali prodotti nello stato finale.

La particella fittizia sia descritta da un'onda piana di momento k , in unità fermi⁻¹, che si propaga in direzione z e interagisce col potenziale $V(\underline{r})$ di una distribuzione continua di nucleoni, contenuta nel-

l'elemento di volume $d\tau$ del nucleo. L'onda diffusa $\psi(\underline{r})$ è un'onda sferica soluzione dell'equazione di Schrödinger, scritta per la particella fittizia nel sistema del baricentro, e pertanto può essere calcolata servendosi della funzione di Green:

$$\psi(\underline{r}) = \int d^3r' \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} V(\underline{r}') e^{ikz}$$

Poichè interessa una soluzione asintotica, con ovvie approssimazioni si può porre la funzione d'onda nella forma:

$$\begin{aligned} \psi(\underline{r}) &= \int d^3r' \frac{e^{ik\left[\underline{r}\left(1-\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r^2}\right)+z\right]}}{r} V(\underline{r}') = \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' V(\underline{r}') e^{i\underline{q}\cdot\underline{r}'} \end{aligned}$$

avendo osservato che $k \frac{\underline{r}}{r} = \underline{k}_{iniziale}$, $\underline{r}' \frac{k}{r} = \underline{k}'_{iniziale}$ (siamo infatti nel sistema del centro di massa); e avendo posto $\underline{k}'_{in} - \underline{k}_{fin} = \underline{q}$, momento trasferito al nucleone nel centro di massa.

Il potenziale $V(\underline{r}')$ è dovuto a tutti i nucleoni contenuti nell'elemento di volume $d\tau$, e poichè la distribuzione dei nucleoni è continua:

$$V(\underline{r}') = \int v(\underline{r}' - \underline{\rho}) n(\underline{\rho}) d^3\rho$$

avendo indicato con $\underline{\rho}$ la coordinata del punto generico di $d\tau$ e con $n(\underline{\rho})$ la densità locale di nucleoni.

Sostituendo questa espressione di $V(\underline{r}')$ e sommando i contributi di tutti gli elementi di volume del nucleo, si ottiene:

$$\psi(\underline{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{i\underline{q}\cdot\underline{r}'} \int v(\underline{r}' - \underline{\rho}) n(\underline{\rho}) d^3\rho$$

invertendo l'ordine di integrazione e introducendo la nuova coordinata $\underline{x} = \underline{r}' - \underline{\rho}$, si ottiene un'onda sferica la cui ampiezza è il prodotto di due integrali:

$$\psi(\underline{x}) = \frac{e^{i k r}}{\kappa} \int d^3 \underline{y} \, n(\underline{y}) e^{i \underline{q} \cdot \underline{y}} \int v(\underline{x}) e^{i \underline{q} \cdot \underline{x}} d^3 x$$

Il primo integrale, $F(\underline{q})$, è il fattore di forma del nucleo, e risulta definito come la trasformata di Fourier, nello spazio dei momenti trasferiti, della densità di nucleoni nel nucleo bersaglio. Il secondo integrale, $f(\underline{q})$, rappresenta il contributo di un solo nucleone.

Come è noto dalla teoria dello scattering da potenziale fisso, la sezione d'urto differenziale è semplicemente il modulo quadro dell'ampiezza dell'onda sferica diffusa; pertanto

$$\left[\frac{d\sigma(\underline{q})}{d\Omega} \right]_A = \left[\frac{d\sigma(\underline{q})}{d\Omega} \right]_H \cdot \frac{|F_A(\underline{q})|^2}{|F_H(\underline{q})|^2} = |f(\underline{q})|_A^2 \cdot |F(\underline{q})|_A^2$$

rappresenta la sezione d'urto relativa alla fotoproduzione di una coppia di pioni con momento risultante diretto nell'angolo solido $d\Omega$, e corrispondente a un momento \underline{q} trasferito al nucleone di rinculo.

Si vede immediatamente che la sezione d'urto relativa all'idrogeno per un nucleo A è data dal rapporto dei quadrati dei fattori di forma del nucleo A e dell'idrogeno.

Una volta noto il fattore di forma dell'idrogeno, da una misura della sezione d'urto relativa per la produzione di una coppia non risolta, si potrebbe ottenere direttamente il fattore di forma del nucleo in esame, e da esso risalire alla distribuzione di nucleoni in quel nucleo.

Prima di proseguire nel calcolo della sezione di urto complessiva della fotoproduzione doppia, conviene premettere alcune importanti osservazioni sul risultato parziale a cui siamo pervenuti e sui problemi fisici che vi si riallacciano.

Una trattazione alla Born come quella descritta all'inizio di questo capitolo, può rappresentare ogni

processo elastico coerente a due corpi, per il quale siano verificate le seguenti condizioni: energie grandi rispetto alle energie di legame dei nucleoni nel nucleo; energie alle quali siano note le sezioni d'urto dei processi successivi di interazione nucleare (assorbimento, scattering multiplo ecc. della particella osservata); potenziali di interazione noti.

In una reazione a due corpi con particelle incidenti di energia ben definita, c'è corrispondenza biunivoca tra momento trasferito e angolo della particella osservata; a grandi angoli e a grandi energie corrispondono alti momenti trasferiti, per osservare i quali è necessario avere a disposizione fasci di particelle incidenti di elevata energia.

I processi con le caratteristiche elencate si prestano alla misura dei fattori di forma dei nuclei e pertanto allo studio delle distribuzioni spaziali di nucleoni, che - sia considerate come informazioni fine a se stesse, sia come base di investigazione della natura delle forze nucleari - sono di indubbio interesse fisico.

Nei capitoli successivi descriverò alcune importanti reazioni di questo tipo.

II. LO SCATTERING COULOMBIANO ELASTICO COERENTE

Ai requisiti elencati alla fine del capitolo precedente soddisfa il processo di scattering coulombiano elastico di elettroni o positroni.

La possibilità di una descrizione dello scattering di elettrone in termini di un potenziale noto, insieme con la disponibilità di fasci intensi e monocromatici di elettroni di elettrosincrotrone o di acceleratore lineare di alta energia, giustifica i numerosi lavori teorici e sperimentali sull'argomento.

Nel 1929 Mott (11) calcolava la sezione d'urto di scattering coulombiano di elettroni su nuclei, risolvendo l'equazione di Dirac dell'elettrone nel potenziale coulombiano dovuto a un nucleo puntiforme, in modo esatto; inoltre calcolava la sezione d'urto della soluzione asintotica dell'equazione di Dirac scritta per un potenziale di forma qualunque, ma convergente più rapidamente di $1/r$.

La formula esatta di Mott si presenta come una serie convergente sotto opportune ipotesi, ed è stata faticosamente sommata, termine a termine, da Bartlett e Watson (12), nel 1940, nel caso dello scattering sul mercurio.

Altri autori hanno ottenuto dalla formula di Mott esatta formule approssimate valide per Z non molto grandi (13), eseguendo sviluppi in serie della formula di Mott.

Dalitz (14) ha preso invece in considerazione la formula di Mott asintotica valida per potenziale diverso dal coulombiano, e l'ha calcolata in seconda approssimazione di Born introducendovi il potenziale di Yukawa.

Nei calcoli citati si considera sempre un poten-

ziale dovuto a una carica puntiforme, pertanto non com
paiono fattori di forma del nucleo.

Per nuclei complessi, Budini e Furlan (15), nel 1959 hanno eseguito calcoli in seconda approssimazione di Born, utilizzando i risultati di Dalitz, ma tenendo conto delle dimensioni finite della distribuzione di carica del nucleo, introducendo cioè il fattore di forma elettromagnetico e considerando i nuclei privi di momento magnetico. I calcoli di sezione d'urto differenziale di questi autori sono stati eseguiti numericamente per potenziali di Yukawa, esponenziale, esponenziale esteso, agenti su elettroni e su positroni.

Nel 1950 Rosenbluth (16) calcolava la sezione di urto di scattering di elettroni in idrogeno tenendo conto della struttura del protone, cioè introducendo i fattori di forma F_1 e F_2 relativi alla distribuzione di carica e a quella di momento magnetico anomalo, ottenendo:

$$\sigma = \sigma_M \left\{ F_1^2 + \frac{q^2}{4M^2} \left[2(F_1 + \mu F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} + \mu^2 F_2^2 \right] \right\}$$

dove σ_M è la sezione d'urto di Mott.

Verso il 1952 furono osservate sperimentalmente deviazioni dei risultati su idrogeno dalle previsioni della teoria del protone puntiforme. Da queste osservazioni seguirono le numerose note esperienze, dovute principalmente a Hofstadter (17-...-24), per osservare la struttura del protone e misurarne i fattori di forma.

Analoghe misure sono state eseguite da molti autori su nuclei diversi dall'idrogeno, e sono state interpretate descrivendo i processi in prima approssimazione di Born, sempre in casi di momento trasferito non troppo elevato e usando un fattore di forma elettromagnetico del protone uguale a 1; dai risultati sono stati ottenuti modelli che descrivono soddisfacentemente le densità di carica dei nuclei.

III. DISTRIBUZIONE DEI NEUTRONI NEI NUCLEI

L. Wilets (25), in una relazione presentata allo International Congress of Nuclear Sizes and Density Distributions del 1958, espone le più recenti teorie sulla distribuzione di neutroni dei nuclei.

Per calcolare la densità di nucleoni in un mezzo nucleare descritto da un modello a particelle indipendenti, si suppone che un nucleone sia soggetto a un potenziale a buca dovuto a tutti gli altri nucleoni, trascurando ogni effetto di correlazione, e si risolve l'equazione delle onde del nucleone nella buca. Integrando il modulo al quadrato della funzione d'onda così ottenuta su tutti i valori dell'impulso tra zero e il massimo valore previsto dalla statistica di Fermi, si ottiene la distribuzione spaziale dei nucleoni. Con questo procedimento Swiatecky (26) ha calcolato la distribuzione dei nucleoni introducendo un potenziale a buca con pareti inclinate, uguale per ogni particella, trascurando cioè il potenziale coulombiano che agisce sui protoni. La densità trovata è simile a quella che si ottiene col metodo statistico di Thomas-Fermi, e che dà un andamento sulla superficie:

$$\rho(x)/\rho_0 = [(\chi_0 - x)/\chi_0]^{3/2}$$

Un procedimento più interessante è dovuto a Berg e Wilets (27-28-29): essi assumono che l'energia del nucleo per unità di volume dipenda dalla densità ρ e dal gradiente della densità (è uno sviluppo della energia in serie di potenze della densità, troncato al primo ordine), e che quindi l'energia del nucleo sia:

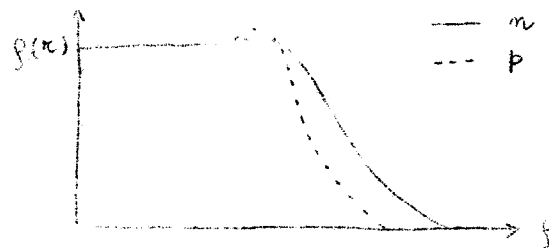
$$E = \int d\tau \left[\rho(\rho) + \frac{\hbar^2}{8M} \frac{(\nabla\rho)^2}{\rho} \right]$$

Inoltre E dev'essere minima con la condizione:

$$\int \rho d\tau = \text{cost}$$

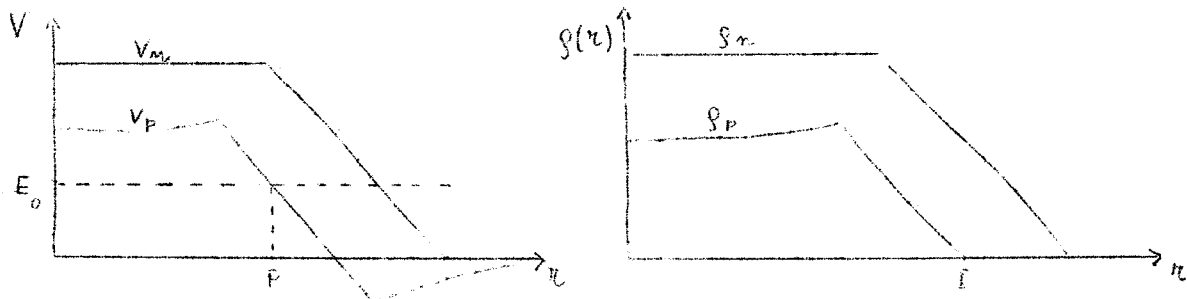
Questo calcolo, valido per $N=Z$ e trascurando gli effetti coulombiani, porta a equazioni differenziali per ρ che possono essere integrate analiticamente.

Estendendo il procedimento al caso $N \neq Z$ e tenendo conto del potenziale coulombiano, Wilets trova equazioni differenziali per la densità dei protoni e per quella di neutroni, le integra numericamente, ottenendo distribuzioni qualitativamente simili, che per $N=Z$ sono del tipo mostrato in figura



Questo indica che i protoni hanno un picco di densità più vicino alla superficie che i neutroni, ma che il raggio di semidensità è maggiore per i neutroni.

Il precedente risultato è in accordo con le seguenti considerazioni di Johnson e Teller (30): i protoni e i neutroni siano soggetti allo stesso potenziale nucleare, ma sui protoni agisca anche il potenziale coulombiano; allora l'andamento dei potenziali è qualitativamente descritto in figura.



I protoni e i neutroni riempiono le rispettive buche fino all'energia massima E_0 , che è la stessa per entrambi se $N=Z$; però la linea E_0 incrocia il potenziale dei protoni prima di quello dei neutroni, quindi i pro

toni sono confinati più all'interno.

Entrambi questi risultati si contrappongono però a una considerazione intuitiva: sembra logico, infatti, che i protoni debbano essere concentrati vicino alla superficie a causa della repulsione coulombiana.

Combinando i due effetti, si dovrebbe trovare, per nuclei a specchio, un raggio della distribuzione dei protoni molto vicino a quello della distribuzione dei neutroni, e in nuclei con N maggiore di Z , raggi dei neutroni poco maggiori di quelli dei protoni.

E' aperto quindi un nuovo problema, che rende necessario eseguire esperienze sulle interazioni coerenti di tipo nucleare, per ottenere i fattori di formadelle distribuzioni complessive di nucleoni.

Le reazioni nucleari più facili da produrre con le attuali macchine acceleratrici sono certamente le fotoproduzioni; per questa via logica si arriva a prendere in esame la fotoproduzione coerente di pioni neutri e la fotoproduzione doppia coerente di pioni carichi. (x)

(x) - Si può notare, per inciso, che la produzione semplice di un pione carico non si presta alla misura dei fattori di forma; infatti il nucleone su cui avviene la fotoproduzione cambia natura e, in linea di principio, può essere perfettamente individuato: ne segue che la produzione è localizzata e non ci sono effetti di coerenza.

IV. LA FOTOPRODUZIONE COERENTE DI PIONI NEUTRI

Al "Cern Symposium" del 1956 Barringer, Meunier e Osborn (31) hanno presentato una relazione su una esperienza di fotoproduzioni di π^0 , eseguita sui bersagli di litio, berillio, carbonio, rame, piombo; i pioni sono stati osservati rivelando i fotoni di decadimento con due telescopi di contatori e viene misurata la distribuzione angolare.

Gli autori si attendono di trovare a parità di angolo intensità di pioni dipendenti soltanto dai numeri di massa delle targhette, e precisamente, se l'assorbimento nel nucleo è così intenso da simulare una produzione solo superficiale, una dipendenza da $A^{2/3}$ corrispondente al caso di produzione totalmente incoerente, e un andamento come $A^{4/3}$ nel caso di produzione coerente. Infatti nel primo caso la sezione d'urto è proporzionale al numero di emettitori, e nel secondo l'onda pionica ha ampiezza data dalla somma delle ampiezze di produzione sui singoli nucleoni interessati, quindi proporzionale ad $A^{2/3}$; la sezione d'urto risulta quindi proporzionale ad $A^{4/3}$ perchè è data dal modulo quadro dell'ampiezza di produzione.

Barringer grafica in funzione dell'angolo nel laboratorio i rapporti tra le intensità di pioni e $A^{4/3}$; le curve per diversi A, anzichè sovrapporsi, sono relativamente vicine solo in prossimità dell'angolo di 0° e si allontanano rapidamente l'una dall'altra al crescere dell'angolo. Questo comportamento è stato interpretato in termini di effetti di assorbimento, notevoli soprattutto per gli elementi pesanti, di sovrapposizione della produzione incoerente in particolare a grandi angoli, e infine di cattiva risoluzione dei contatori, che è considerata la principale causa di errore a 0° .

Schranck e Leiss (32) eseguono la fotoproduzione di π^0 in carbonio, in una zona di energie cinetiche del pione (≤ 40 Mev) nella quale ritengono che l'assorbimento nucleare non sia superiore al 20%. Eseguono misure a vari angoli e confrontano la sezione d'urto totale, normalizzata a quella in idrogeno, con un fattore di forma calcolato con il modello di densità nucleare "hollow exponential", integrato sullo spettro di bremsstrahlung (infatti, se i fotoni non sono monocromatici, non c'è corrispondenza tra angolo e momento trasferito). Entro gli errori sperimentali ottengono un raggio quadratico medio in accordo con quello ottenuto da Fregeau per il carbonio da misure di scattering coulombiano di elettroni.

Gli stessi autori (33) in un lavoro molto recente ripetono la fotoproduzione di π^0 , studiando la distribuzione angolare dei pioni. Confrontano le sezioni d'urto differenziali osservate con quelle teoriche, calcolate in approssimazione di Born, assumendo che la produzione di pioni sia uguale su neutroni e su protoni, e usando per le distribuzioni di nucleoni quelle ottenute dalle esperienze di scattering di elettroni.

Schranck, Penner e Leiss usano γ di bremsstrahlung da 170 Mev, prodotti dal sincrotrone del National Bureau of Standards, su bersagli di C, Al, Cd, Cu, Pb. Assumendo un raggio di semidensità $r=1.07$ fermi $\times A^{1/3}$, per tutte le targhette eccetto l'alluminio che presenta un comportamento anomalo, ottengono rapporti fra le sezioni d'urto osservate e i fattori di forma proporzionali ad $A^{1.85}$. Questa dipendenza mostrerebbe che l'assorbimento nucleare è debole; inoltre è evidente che la produzione è prevalentemente coerente, quasi di volume.

V. FOTTOPRODUZIONE DOPPIA DI PIONI CARICHI

Per definire completamente una reazione a tre corpi nello stato finale, come la fotoproduzione doppia, è necessario conoscere dodici scalari, cioè le masse e le componenti dei momenti delle tre particelle.

Amnesso di riconoscere il processo come una fotoproduzione doppia, sono automaticamente fissate le tre masse e restano nove scalari, dei quali quattro si attengono dai teoremi di conservazione, una volta assegnati o misurati i cinque restanti.

La più generale sezione d'urto differenziale per un processo a tre corpi è dunque una sezione d'urto penta-differenziale, e per misurarlo è necessario misurare per ogni reazione i cinque scalari ad essa relativi, per es. il momento vettoriale di un pione e gli angoli dell'altro, o gli angoli di un pione e i tre scalari del nucleone, ecc.

Nel cap. I è stata definita l'ampiezza della funzione d'onda che rappresenta la coppia di pioni non risolta: questa è anche l'ampiezza di produzione di uno solo dei pioni della coppia, corrispondente a un ben definito momento trasferito al nucleone di rinculo, e avente un momento \underline{k} qualunque purchè compatibile con il momento trasferito, il momento totale e l'energia totale a disposizione .

Nell'esperienza del Gruppo Coppie μ viene misurata semplicemente una intensità di pioni sotto un angolo di 30° nel laboratorio: la sezione d'urto teorica con cui confrontare questo dato è una sezione d'urto differenziale solo negli angoli del pione, che si può ottenere dalla sezione d'urto penta-differenziale integrando su tre qualsiasi variabili superflue.

Dovendo tenere conto anche delle interazioni del pione col nucleo, successive alla fotoproduzione, che dipendono dal momento k e dalla "traiettoria" del pione in materia nucleare, cioè da \underline{k} e da \underline{q} , è necessario modificare la definizione del fattore di forma, assegnando all'onda prodotta sull'elemento di volume individuato da un certo \underline{q} , un fattore di attenuazione $\mathcal{F}(\underline{k}, \underline{q})$, che sarà definito criticamente in seguito.

Con l'introduzione di $\mathcal{F}(\underline{k}, \underline{q})$, l'onda complessiva coerente è espressa da:

$$\psi(\underline{r}) = \frac{e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}}}{\kappa} f(q) \int_{\text{nucleo}} n(\underline{q}) e^{i \underline{q} \cdot \underline{r}} \mathcal{F}(\underline{k}, \underline{q}) d^3 q$$

In analogia con la primitiva definizione del fattore di forma, porrò:

$$F(q, k) = \int n(\underline{q}) e^{i \underline{q} \cdot \underline{r}} \mathcal{F}(\underline{k}, \underline{q}) d^3 q$$

definendo cioè un fattore di forma come trasformata di Fourier del prodotto della densità di nucleoni per il fattore di attenuazione.

Questa modifica della definizione del fattore di forma conserva la dipendenza dal modello di densità, quindi è sperabile che la dipendenza della sezione di urto dai parametri del modello sia tale da permettere un fit sensibile.

Come si vedrà in seguito, la distribuzione di densità interviene anche nel calcolo del fattore di attenuazione; C.D.Zerby (34) scrive che un calcolo di attenuazione per targhette pesanti è così poco sensibile al modello di densità che è conveniente usare densità uniformi.

VI. MODELLI DI DENSITA' NUCLEARE

Nella seguente tabella, tratta da Hofstadter, Annual Review of Nuclear Science, (1957), sono riportati i modelli di densità di carica più soddisfacenti e i relativi parametri, per tutti i nuclei sui quali sono state eseguite esperienze di scattering coulombiano di elettroni:

Nucleo	$n(\rho)$	r.q.m.	R_u	$R_u/A^{1/3}$	c	t
4Be^9	harm.well $\alpha = 2/3$	2.27	2.84	1.37	-	-
6C^9	harm.well $\alpha = 4/3$	2.37	3.04	1.33	-	-
12Mg^{24}	gU	2.98	3.84	1.33	2.93	2.6
14Si^{28}	"	3.04	3.92	1.29	2.95	2.8
16S^{32}	"	3.19	4.12	1.30	3.26	2.6
20Ca^{40}	Fermi	3.52	4.54	1.32	3.64	2.5
23V^{51}	"	3.59	4.63	1.25	3.98	2.2
27Co^{59}	"	3.83	4.94	1.27	4.09	2.5
28Ni^{58}	"	3.93	5.09	1.31	4.28	2.49
38Sr^{88}	gU	4.14	5.34	1.20	4.80	2.3
49In^{115}	Fermi	4.50	5.80	1.19	5.24	2.3
51Sb^{122}	"	4.63	5.97	1.20	5.32	2.5
73Ta^{181}	" +quadrupolo	5.50	~7.80	~1.25	~6.45	~2.8
79Au^{197}	Fermi	5.32	6.87	1.18	6.38	2.32
82Pb^{208}	Hill-Fprd	~5.42	7.0	1.18	~6.5	2.3

dove i simboli indicano:

r.q.m. il raggio quadratico medio della distribuzione di carica; R_u il raggio del modello uniforme equivalente; A il numero di massa; c, t i parametri del modello

di Fermi; $n(\rho)$ la densità di protoni. Tutte le lunghezze sono espresse in unità fermi = 10^{-13} cm.

Il modello alla Fermi, che descrive la maggior parte dei nuclei, è rappresentata da una densità

$$n(\rho) = \frac{n_0}{1 + \exp\left(\frac{\rho - c}{t}\right)}$$

con n_0 costante di normalizzazione; c raggio di semidensità, cioè distanza dal centro del nucleo dei punti in cui la densità vale $0.5 n_0$; $4.4t = t =$ "skin thickness", distanza tra i punti in cui la densità vale rispettivamente $0.9 n_0$ e $0.1 n_0$. t è approssimativamente costante per tutti i nuclei con valore $t = 2.4$ fermi.

Il raggio di semidensità c è descritto da $c = 1.07x A^{1/3}$ fermi, dove A è il numero di massa del nucleo considerato.

In questo e negli altri modelli $n(\rho)$ è una densità di carica $/e$, cioè un numero di protoni per unità di volume; pertanto la costante n_0 di normalizzazione si ottiene imponendo che

$$\int d^3\rho n(\rho) = Z$$

Un modello di Fermi approssimato, descritto da una densità:

$$\begin{cases} n(\rho) = n_0 & 0 \leq \rho \leq c - \frac{t}{2} \\ n(\rho) = n_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{\rho - c}{t} + 2 \left(\frac{\rho - c}{t} \right)^3 \right] & c - \frac{t}{2} \leq \rho \leq c + \frac{t}{2} \\ n(\rho) = 0 & \rho > c + \frac{t}{2} \end{cases}$$

con le stesse definizioni di c e t , che permette di eseguire analiticamente gli integrali che intervengono nei calcoli, è stato usato da Cronin, Cool e Abashian (38-39), per calcolare con un modello ottico le sezioni d'urto di assorbimento e di diffrazione di pioni su nuclei di carbonio e piombo.

Il modello migliore per berillio e carbonio, determinato dai fit di J. Fregeau (36), è il modello

rappresentata dal modello gU.

Per l'alluminio si potrebbero quindi usare, a priori indifferentemente, il modello di Fermi, e il modello "hollow exponential".

Per lo stagno sembrano convenienti sia il modello di Fermi modificato, sia quello di Hill e Ford.

VII. MODELLO OTTICO E CALCOLO DEL FATTORE DI ATTENUAZIONE

Consideriamo il moto di una particella in un mezzo nucleare omogeneo indefinito, rappresentando la particella con un'onda piana che si propaga in direzione z , con vettore di propagazione \underline{k}_0 , schematizzando il mezzo nucleare con un potenziale costante complesso.

Come è noto, un potenziale uniforme agisce su una particella come un indice di rifrazione su un'onda elettromagnetica, cioè altera il numero d'onda, o il momento della particella. La presenza di una parte immaginaria del potenziale, V_{im} , determina attenuazione della ampiezza dell'onda, così come la parte immaginaria di un indice di rifrazione complesso determina assorbimento della radiazione.

A questo risultato si perviene immediatamente risolvendo l'equazione di Schrödinger di una particella in un potenziale uniforme $V_r + iV_i$: se k_0 è il momento della particella in assenza di potenziale, E l'autovalore dell'energia, la soluzione è un'onda piana di momento

$$k_0 \left(1 + \frac{V_r + iV_i}{E} \right)^{1/2}$$

Il rapporto tra i momenti interno ed esterno dà l'"indice di rifrazione" associato al potenziale:

$$n = \left[(E + V_r + iV_i)/E \right]^{1/2}$$

che si può sviluppare in serie di V/E se E è molto maggiore della profondità della buca di potenziale; in approssimazione lineare si ha:

$$n = 1 + \frac{V_r + iV_i}{2E}$$

La parte reale del potenziale introduce quindi un indice di rifrazione reale e un momento

$$k_0 \left(1 + \frac{V_c}{2E} \right) = k_0 + k_1 = \text{Re}(k_{int})$$

e la parte immaginaria un indice di rifrazione immaginario e un momento immaginario $i k_0 \frac{V_c}{2E} = i \frac{K}{2}$.

Se la particella attraversa uno strato di materia nucleare omogeneo di spessore d (40), all'uscita ha subito uno sfasamento $k_1 d$ e una attenuazione $\exp(-\frac{K}{2} d)$, e viene descritta fuori dal mezzo nucleare dall'onda

$$\exp \left(i k_0 z + i k_1 d - \frac{K}{2} d \right)$$

Sostituendo nell'equazione di Schrödinger l'onda

$$e^{i(k_{int} + iK/2)z}$$

si vede che è effettivamente soluzione e che la relazione tra il momento complesso e il potenziale complesso è:

$$\left(k_{int} + i \frac{K}{2} \right)^2 = E + V_r + i V_c$$

Se non è lecita l'approssimazione lineare calcolata precedentemente, si vede che il potenziale reale dà contributo anche allo sfasamento. Ma nei calcoli che eseguirò sarà sufficiente l'approssimazione lineare, entro il 4%.

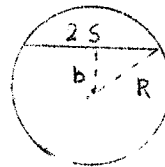
Da queste considerazioni elementari ebbe origine il primo modello ottico dovuto a Fernbach, Serber e Taylor (41), per descrivere le interazioni nucleari di neutroni di bassa energia. Il nome di ottico dato al modello e al potenziale deriva dall'analogia con la trattazione classica della propagazione di onde elettromagnetiche in un mezzo ottico.

Fernbach, Serber e Taylor introducono un indice di rifrazione complesso costante entro il nucleo e uguale a zero fuori, con una discontinuità sulla superficie del nucleo che è supposta netta. Questo equivale ad

assegnare alla particella del nucleo un momento costante complesso $k_0 + k_1 + iK/2$, e fuori del nucleo un momento k_0 , con k_1 legato alla parte reale del potenziale complesso o dell'indice di rifrazione complesso. (Il potenziale è una buca quadrata).

L'onda piana che descrive la particella che si propaga con un parametro d'urto b rispetto al centro del nucleo supposto sferico, attraversa in materia nucleare un percorso:

$$2S(b) = 2\sqrt{R^2 - b^2}$$



Pertanto nel punto z esterno al nucleo, l'onda sarà descritta da

$$e^{i(k_0 z + 2k_1 S) - K S}$$

Poichè l'onda a grande distanza è la sovrapposizione delle onde che hanno tutti i possibili parametri d'urto tra $-R$ e $+R$, la sua espressione sarà:

$$e^{i k_0 z} \int_{-R}^{+R} e^{i(k_1 + i\frac{K}{2}) 2\sqrt{R^2 - b^2}} db$$

Da questo modello semiclassico sono derivati modelli ottici sempre più raffinati. Un primo passo consiste nell'introduzione di nuclei con superficie diffusa; si passa dalla buca quadrata alla buca trapezoidale e quindi a buche con pareti gaussiane, esponenziali..., la cui validità è suggerita dalle esperienze di scattering coulombiano coerente di elettroni.

Con una densità, e quindi potenziale e indice di rifrazione, di forma sfumata, si deve apportare qualche modifica alla definizione del cammino della particella in materia nucleare. Lungo la "traiettoria", k_1 e $K/2$ dipendono dal punto, ma nell'ipotesi di prima approssimazione, che in seguito discuterò, che $V(r) = (V_r + iV_i)$.

$n(\underline{r})$, dove $n(r)$ è la densità di nucleoni, si ha anche $k_1(\underline{r}) = k_1 \times n(r)$ e $K(\underline{r})/2 = K/2 n(r)$.

Allora l'onda di parametro d'urto b si potrà rappresentare come:

$$e^{i k_0 z} = e^{i \int [k_1(\rho) + i \frac{K}{2}] \sqrt{R^2 - b^2} d\rho} = e^{i k_0 z} e^{i (k_1 + i \frac{K}{2}) \int_{2S} n(\rho) \sqrt{R^2 - b^2} d\rho}$$

dove l'integrale è un integrale di linea calcolato lungo la traiettoria $2S$ relativa al parametro d'urto b .

Per semplicità conviene considerare indipendente dal punto il momento complesso e introdurre al posto della lunghezza della traiettoria un "cammino ottico" integrato sulla densità: $\int_S n(\rho) \frac{dS}{d\rho} d\rho$

ed esprimere ancora l'onda uscente nella forma:

$$e^{i k_0 z} = e^{i (k_1 + i \frac{K}{2}) \cdot 2S}$$

Calcoli di scattering di diffrazione di pioni da nuclei sono stati eseguiti con questo procedimento da Cronin, Cool e Abashian, su nuclei di carbonio e piombo, con densità di nucleoni date dal modello approssimato di Fermi.

Clementel (42) ha usato un modello ottico con densità uniforme per calcolare lo scattering di pioni in carbonio, e ha tenuto conto anche del potenziale coulombiano.

Laing e Moorhouse (43) hanno calcolato con un modello ottico le interazioni nucleari di pioni di foto-produzione singola.

Watson e Zeemach (44) introducono un modello ottico, con potenziale proporzionale alla densità, in calcoli relativistici di cinematica dei pioni nei nuclei, e in una interessante appendice calcolano la seconda approssimazione per la dipendenza del potenziale dalla

densità, aggiungendo un termine perturbativo che dipende dalla correlazione spaziale di due nucleoni nel nucleo.

Infine Pevsner e Rainwater (45) eseguono calcoli relativistici, introducendo il potenziale ottico nella equazione di Klein-Gordon, che descrive lo scattering elastico di pioni in alluminio, e si spingono fino alla seconda approssimazione di Born.

Nel caso che i pioni che interagiscono col nucleo non siano un fascio collimato, ma abbiano origine nel nucleo stesso per fotoproduzione e pertanto si propaghino in un angolo solido relativamente ampio, il problema dell'interazione si può riportare a un problema ottico classico con alcuni accorgimenti.

Un pione di fotoproduzione è descritto da un'onda sferica con centro nel punto di produzione e ampiezza data dall'ampiezza di produzione.

Osservare, come nell'esperienza del Gruppo Coppie μ , i pioni emessi sotto un angolo ben definito, significa osservare quella porzione di onda sferica che si propaga nella direzione voluta e assegnarle una definita traiettoria. L'introduzione di una traiettoria, che è essenziale per l'uso del modello ottico, è lecita se l'energia del pione osservato è grande, cioè se la lunghezza d'onda associata è piccola rispetto alle dimensioni del nucleo: questo si verifica senz'altro se si considerano pioni con momento k non inferiore a 1 fermi^{-1} , dato che i raggi quadratici medi dei nuclei esaminati sono sempre maggiori di 2.20 fermi (Berillio).

In queste condizioni assumerò di poter eseguire un calcolo di tipo misto, lavorando su onde o su traiettorie, a seconda del caso.

Verrà assegnato pertanto all'onda sferica, prodotta nel punto \underline{p} del nucleo, un fattore di attenuazione dato da:

$$F(\underline{k}, \underline{p}) = e^{i k_1 S(\underline{p})} e^{-\frac{\kappa}{2} S(\underline{p})}$$

in cui l'integrale di linea è calcolato lungo la traiettoria del pione, tra il punto \underline{p} di produzione e l'infinito, nella direzione che forma l'angolo di 30° con la direzione dei fotoni incidenti, nel sistema del laboratorio. Questo fattore di attenuazione determina l'assorbimento, lo sfasamento reciproco delle onde prodotte in posizioni diverse, e l'uscita dei pioni dal fascio per effetto dello scattering di diffrazione.

Il calcolo dell'integrale esteso a tutto il nucleo, che dà il fattore di forma, determina l'interferenza tra le onde coerenti, che hanno sfasamenti relativi dovuti sia all'indeterminazione del punto di produzione, sia ai diversi cammini percorsi nel nucleo dopo la produzione.

VIII. RELAZIONE TRA IL POTENZIALE OTTICO E LA DENSITA' DI NUCLEONI

A questo punto è necessario spiegare per quale motivo si assuma un potenziale proporzionale alla densità di nucleoni, sia per il potenziale ottico, sia per il potenziale $v(\underline{r} - \underline{q})$ introdotto nel calcolo in approssimazione di Born del processo coerente a due corpi.

Una giustificazione viene fornita in un articolo di Franck, Gammel e Watson (46), e può essere riassunta nel modo seguente.

L'interazione di scattering elastico di un pione con un nucleo è descritta dalla matrice di scattering T che è soluzione dell'equazione integrale:

$$T = V + V \frac{i}{E - H_0 + i\epsilon} T$$

dove V è l'energia di interazione del sistema pione-nucleo, E l'"energy shell" a cui si riferisce T , H_0 l'hamiltoniana del sistema pione-nucleo, ϵ un parametro che sposta la singolarità dall'asse reale a punti complessi, e che viene fatto tendere a zero dopo aver eseguito le integrazioni.

Poichè il nucleo ha una struttura, T rappresenta la matrice di scattering multiplo del pione sui nucleoni del nucleo, e, se il libero cammino medio di assorbimento è abbastanza grande perchè l'energia del pione sia ben definita tra una collisione e l'altra, T si deve poter rappresentare come applicazione successiva delle matrici di scattering relative ai singoli nucleoni.

Indichiamo con T_j la matrice di scattering sul nu-

cleone j -esimo del nucleo, e con T_j^0 la matrice sullo stesso nucleone pensato come libero, che sono soluzioni rispettivamente di:

$$T_j = V_j + V_j \frac{1}{E - H_0 - V_j - i\varepsilon} V_j$$

$$T_j^0 = V_j + V_j \frac{1}{e - h_\pi - h_j - V_j - i\varepsilon} V_j$$

in cui V_j è il potenziale di interazione tra il pione e il nucleone j -esimo, h_π l'hamiltoniana del pione, h_j l'hamiltoniana del nucleone, $H_0 = h_\pi + H_N$, H_N l'hamiltoniana del nucleo, E l'energia totale nell'urto su nucleone legato, ed e l'energia totale dell'urto su nucleone libero.

Ogni volta che la variazione dell'energia del nucleone urtato è piccola, si può porre $E - H_0 \sim e - h_\pi - h_j$ ("approssimazione impulsiva") e quindi $T_j = T_j^0$.

Il potenziale V che opera sulla funzione d'onda del pione è il valore medio dell'operatore di scattering T tra gli stati iniziale e finale del sistema; con simboli ovvi, si ha:

$$V = \langle T \rangle ; \quad V = \sum_{J=1}^A V_J ; \quad V_J = \langle T_J \rangle ; \quad V = \sum_{J=1}^A \langle T_J \rangle$$

L'operazione di media va eseguita sullo stato fondamentale del nucleo, perchè il processo è elastico, e inizialmente il nucleo si considera nello stato fondamentale.

Poichè i nuclei sono tra loro equivalenti, si può scrivere $V = A \langle T_J^0 \rangle$ dove A è il numero di massa del nucleo, e valutare il valor medio di T_J^0 su un nucleone generico, nello stato fondamentale del nucleo.

A questo scopo, siano \underline{p} e \underline{p}' i momenti iniziale

e finale del pione, e \underline{p} e \underline{p}' i corrispondenti momenti del nucleone, espressi nel sistema del laboratorio, (x) solidale al nucleo. In questo sistema, l'operatore t_j^0 è funzione di \underline{p} , \underline{p}' , \underline{P} , \underline{P} , e si ottiene dall'operatore nel sistema del baricentro T_j^0 mediante la trasformazione:

$$t_j^0 = \langle \underline{K}' | T_j^0 | \underline{K} \rangle \cdot \left[\frac{w^2 W^2}{e_i e_f E_i E_f} \right]^{1/2}$$

\underline{K} e \underline{K}' sono i momenti iniziale e finale del pione nel sistema del baricentro dell'urto j-esimo, w e W le energie totali rispettivamente del pione e del nucleone nel centro di massa, e ed E le stesse energie totali nel sistema del laboratorio, gli indici i e f indicano gli stati iniziale e finale.

\underline{K} e \underline{K}' sono dati dalle trasformazioni di Lorentz che si possono approssimare nel modo seguente:

$$\underline{K} = \frac{M c^2 \underline{p} - w \underline{P}}{M c^2 + w} \quad ; \quad \underline{K}' = \frac{M c^2 \underline{p}' - w \underline{P}'}{M c^2 + w}$$

pertanto, a parte il fattore $w W / (e_i e_f E_i E_f)^{1/2}$ che può ritenersi costante, l'espressione di t_j^0 in funzione di T_j^0 e dei momenti nel laboratorio, è

$$t_j^0 = \left\langle \frac{1}{M c^2 + w} [\underline{p}' M c^2 - \underline{P}' w] \middle| T_j^0 \middle| \frac{1}{M c^2 + w} [\underline{p} M c^2 - \underline{P} w] \right\rangle$$

La funzione d'onda del nucleo nello spazio degli impulsi sia $g_N(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_A)$ che dipende dai momenti dei

(x) - E' necessario eseguire il calcolo in un sistema di riferimento particolare e conviene usare il sistema del laboratorio perchè è solidale baricentro del nucleo ed è il sistema in cui si misurano le grandezze cinematiche iniziali e finali del processo.

nucleoni. L'integrale da valutare è:

$$A \int t^0(\underline{p}, \underline{p}', \underline{p}, \underline{p}') \delta(\underline{p} + \underline{p} - \underline{p}' - \underline{p}') g_N^*(\underline{p}', \underline{p}') g_N(\underline{p}, \underline{p}) d^3P d^3P' \pi_j d^3p_j$$
dove si è messa in evidenza la dipendenza essenziale di g_N dai momenti \underline{p} e \underline{p}' del nucleone che interessa, scrivendo separatamente l'elemento di volume degli altri nucleoni.

L'integrazione sui momenti superflui di $g_N g_N^*$ dà 1 perchè g_N è normalizzata. Si ottiene:

$$A \int t(\underline{p}, \underline{p}', \underline{p}, \underline{p}') \delta(\underline{p} + \underline{p} - \underline{p}' - \underline{p}') g_N^*(\underline{p}') g_N(\underline{p}) d^3P d^3P'$$

Trasformiamo la g_N nello spazio delle configurazioni:

$$g_N(\underline{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3z e^{-i \underline{p} \cdot \underline{z}} g_N(z); \quad g_N^*(\underline{p}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3z' e^{i \underline{p}' \cdot \underline{z}'} g_N^*(z')$$

Sostituendo e ponendo $\underline{p}' = \underline{p} + \underline{p} - \underline{p}'$ a causa della funzione delta che esprime la conservazione dell'impulso, si ha:

$$\frac{A}{(2\pi)^3} \int t^0(\underline{p}, \underline{p}', \underline{p}) g_N(z) g_N^*(z') e^{i \underline{p} \cdot (\underline{z}' - \underline{z}) - i(\underline{p}' - \underline{p}) \cdot \underline{z}'} d^3z d^3z' d^3P$$

t_j^0 dipende debolmente da \underline{p} , se l'energia cinetica del nucleone è molto minore dell'energia di quiete, pertanto l'integrazione su P è semplicemente:

$$\int \exp(i \underline{p} \cdot [\underline{z}' - \underline{z}]) d^3P = \delta(\underline{z}' - \underline{z}); \quad t^0(\underline{p}, \underline{p}', \underline{p}) \rightarrow t^0(\underline{p}, \underline{p}')$$

e si ha:

$$A/(2\pi)^3 \int d^3z |g_N(z)|^2 t^0(\underline{p}, \underline{p}') e^{-i(\underline{p} - \underline{p}') \cdot \underline{z}}$$

Per il principio di indeterminazione $|\underline{p}' - \underline{p}| \sim \hbar/R_A$ dove R_A è il raggio del nucleo; allora $|\underline{p}' - \underline{p}| \ll p' \sim p$, e ponendo $\underline{p}' = p$, si ottiene:

$$A/(2\pi)^3 \langle p | t | p \rangle \int d^3z |g_N(z)|^2$$

Questa è l'espressione del potenziale; $|g_N(z)|^2 d^3z$ rappresenta la probabilità di trovare un nucleone nell'elemento di volume d^3z .

Questo suggerisce di scrivere il potenziale nella forma

$V = V_0 n(\underline{r})$, con $V_0 =$ "well depth", dipendente dalla energia del pione, e $n(\underline{r})$ densità di nucleoni.

Ricordando la nota relazione tra il valor medio di t nel sistema del baricentro ^(x) e l'ampiezza di scattering $f(\theta)$:

$$f(\theta) = - (2\pi)^2 \frac{d\rho}{dE} k\rho \langle \underline{p}' | t | \underline{p} \rangle$$

si può esprimere il potenziale V in termini di $f(\theta)$. Negli ultimi passaggi del calcolo precedente $|\underline{p}' - \underline{p}|$ viene considerato molto piccolo, cioè angoli di scattering molto piccoli. Ponendo uguale a zero l'angolo di scattering, si ha una relazione approssimata tra V e l'ampiezza di scattering in avanti. La parte reale del potenziale è legata alla parte reale dell'ampiezza di forward scattering, la parte immaginaria del potenziale alla parte immaginaria di $f(0)$. Ricordando il teorema ottico

$$\text{Im } f(0, p) = \frac{p}{4\pi} \sigma_T(p)$$

si può esprimere V_{im} per mezzo della sezione d'urto totale di tutti i processi che contribuiscono all'uscita del pione dal fascio, cioè la somma delle sezioni d'urto di scattering elastico e anelastico, di assorbimento, di scambio di carica ecc.

Per il potenziale reale si ha un'espressione meno semplice, che si può calcolare per due vie diverse. Poichè V è una funzione analitica, V_{r} si può ottenere da V_{im} applicando le formule di dispersione di Goldber

(x) - Il sistema del baricentro nell'urto pione-nucleo è fisso col nucleo, quindi $\langle T_{c.m.} \rangle = A \langle t^0 \rangle$

ger; oppure si può calcolare l'ampiezza di scattering reale in avanti dalla conoscenza delle fasi di scattering sperimentali: Frank, Gammel e Watson hanno calcolato V_r in quest'ultimo modo, usando le fasi di Anderson (49) e hanno riportato sul grafico di V_r in funzione del momento del pione due punti sperimentali di Lederman (48).

Nei calcoli di questo lavoro userò il potenziale ottico reale di Frank, Gammel, Watson (v. tab. I).

TABELLA I

Potenziale ottico di Frank, Gammel e Watson.

E_{cin}	k_{π}	V_R	N	E_{cin}	k_{π}	V_I	$\lambda_t \frac{Mc}{\hbar}$
58	0.70	-23	1	4	-	1.50	11.2
78	0.82	-30	1	14	0.30	2.39	13.5
101	0.96	-41	1	31	0.45	3.44	12.2
124	1.10	-46	1	54	0.67	5.90	8.00
148	1.25	-39	1	82	0.86	12.81	4.20
173	1.39	-13(-12)	.9	112	1.05	26.30	2.22
198	1.51	+25(+20)	.8	185	1.45	74.50	0.85
223	1.65	+38(+32)	.8	270	1.92	59.30	1.11
249	1.80	+41	.95	315	2.17	44.60	1.49
276	1.91	+47	1				
302	2.07	+49	1				

N rappresenta una correzione da apportare a V_R per tenere conto della distribuzione di impulso dei nucleoni. I valori corretti sono quelli in parentesi.

I potenziali e le energie sono in MeV. Il l.c.m. tota-

le λ_t è definito come $\lambda_t^{-1} = \lambda_{scatt}^{-1} + \lambda_{abs}^{-1}$

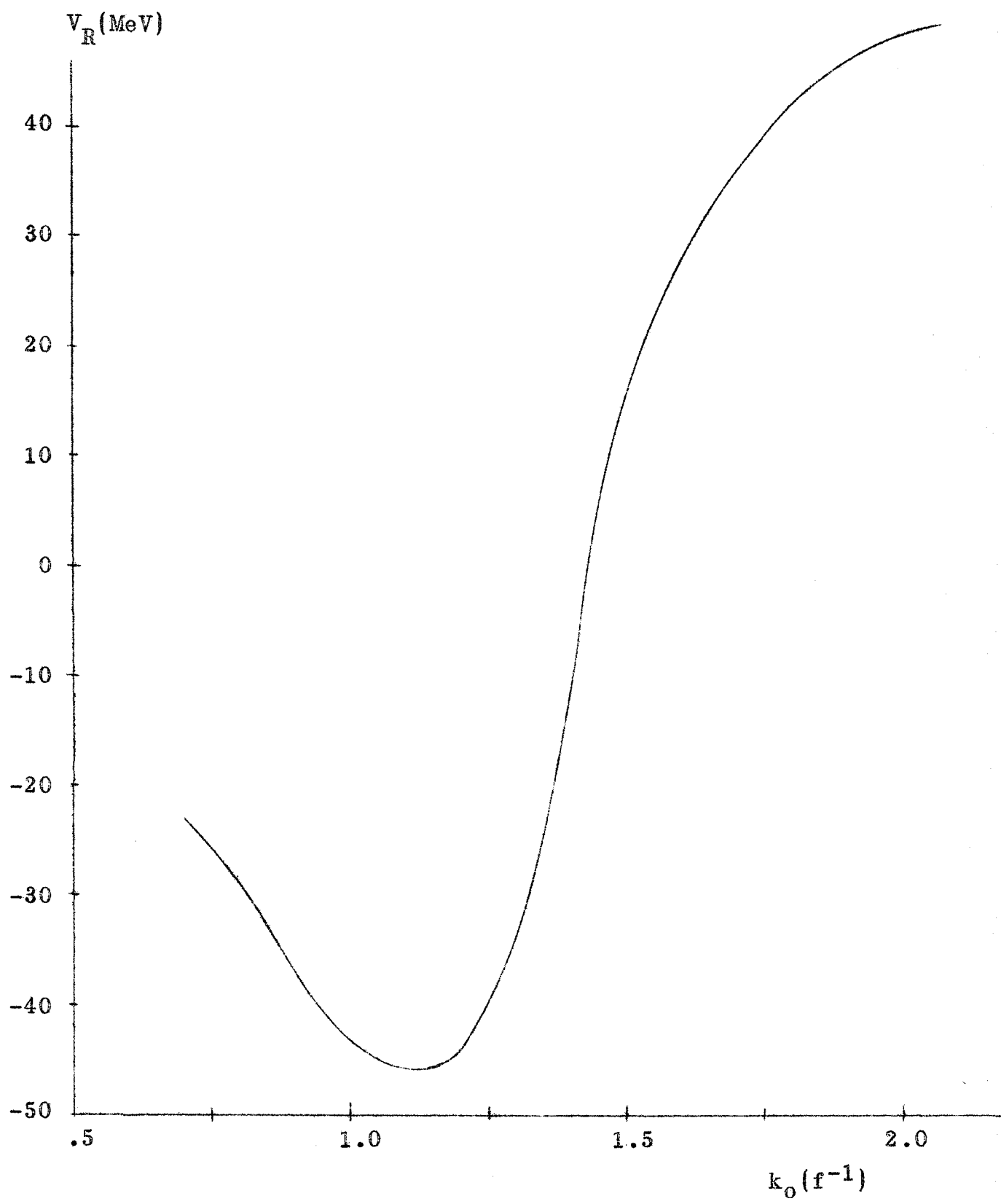


FIG. 1 - POTENZIALE OTTICO REALE

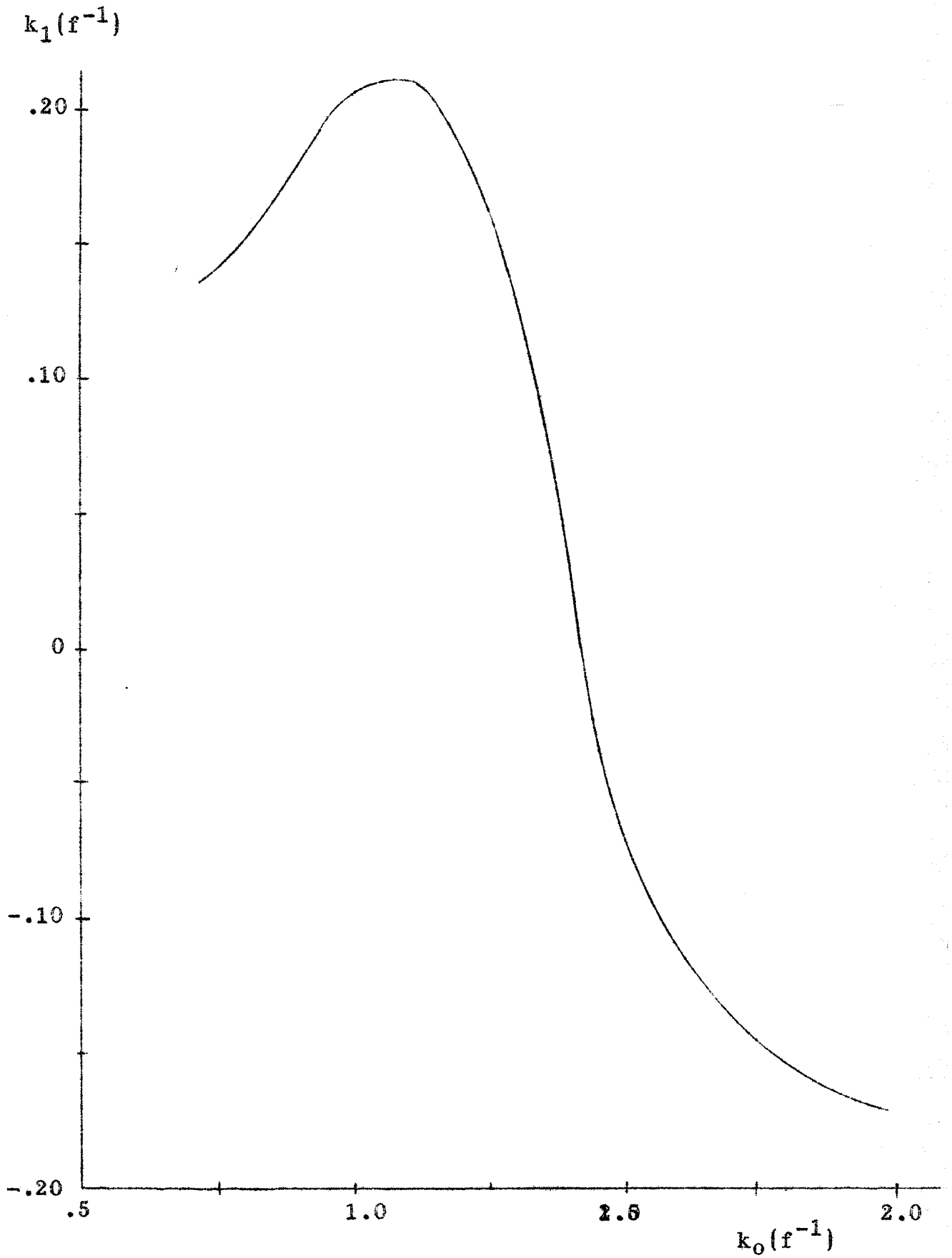


FIG. 2 - MOMENTO ASSOCIATO AL POTENZIALE
OTTICO REALE

IX. SEZIONI D'URTO DI ASSORBIMENTO

Per calcolare la parte immaginaria dell'indice di rifrazione, è necessario conoscere in funzione dell'energia le sezioni d'urto di interazione pione-nucleone.

In due articoli di Metropolis et al. (47), apparsi sul vol. 110 della Physical Review, è presentata una accurata sintesi delle conoscenze sulle sezioni d'urto pione-nucleone, ed è indicata la bibliografia fondamentale sull'argomento.

Il lavoro di Metropolis descrive un calcolo eseguito col metodo di Montecarlo sulle cascate nucleari, con energie cinetiche del primario in due intervalli, al di sotto e al di sopra di 380 Mev.

Nella zona di energie inferiori a 380 Mev, sono presi in esame solo urti elastici con un nucleone per primario, escludendo lo scambio di carica e la produzione di pioni. Nella zona delle alte energie vengono considerati anche questi processi, e inoltre le cascate con un pione per primario. In questo secondo gruppo di calcoli vengono introdotti nella macchina calcolatrice come dati di ingresso le sezioni d'urto di tutti i processi che coinvolgono pioni. Seguendo le notazioni di Metropolis, indicherò con

σ_{el} le sez. d'urto elastiche dei processi $\left\{ \begin{array}{l} \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \\ \pi^- + n \rightarrow \pi^- + n \end{array} \right.$

σ_{el}' le sez. d'urto elastiche dei processi $\left\{ \begin{array}{l} \pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n \\ \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p \end{array} \right.$

$\sigma_{i,abs}$ le sez. d'urto di assorbimento di un pione nelle reazioni $\left\{ \begin{array}{l} \pi^+ + n + \text{nucleone} \rightarrow p + \text{nucleone} \\ \pi^- + p + \text{nucleone} \rightarrow n + \text{nucleone} \end{array} \right.$

I valori di queste sezioni d'urto sono riportati nella tabella II e successivamente graficati. (Fig. 3)

Le sezioni d'urto usate da Metropolis sono tratte dai seguenti fondamentali lavori, anteriori al 1958:

- 1) un articolo teorico di Brueckner, Serber e Watson(39), sull'interpretazione del processo di assorbimento nucleare di un pione come processo inverso della produzione nucleare. Per il principio del bilancio dettagliato le due sezioni d'urto devono essere uguali; i processi di assorbimento pertanto coinvolgono due nucleoni, dei quali uno almeno deve avere proiezione dello spin isotopico opposta a quella del pione; i processi di assorbimento possibili sono dunque gli inversi delle seguenti quattro reazioni di produzione nucleare:

$$\left\{ \begin{array}{l} n + p \rightarrow \pi^+ + n + n \\ n + p \rightarrow \pi^- + p + p \\ n + n \rightarrow \pi^- + p + n \\ p + p \rightarrow \pi^+ + p + n \end{array} \right.$$

Le sezioni d'urto dei quattro processi saranno uguali tra loro per motivi di simmetria di carica, e sarà sufficiente calcolarne una sola. La sezione d'urto di assorbimento di un pione su un nucleo A si deve poter esprimere per mezzo di quella su deuterio (reazione $\pi^- + D \rightarrow n + n$) tenendo conto di fattori che dipendono dal numero atomico Z e dall'energia liberata nell'assorbimento (differenza delle energie di legame del nuovo nucleone in deuterio e e nel nucleo A e processi proibiti dal principio di Pauli). Nota, quindi, la sezione d'urto di produzione

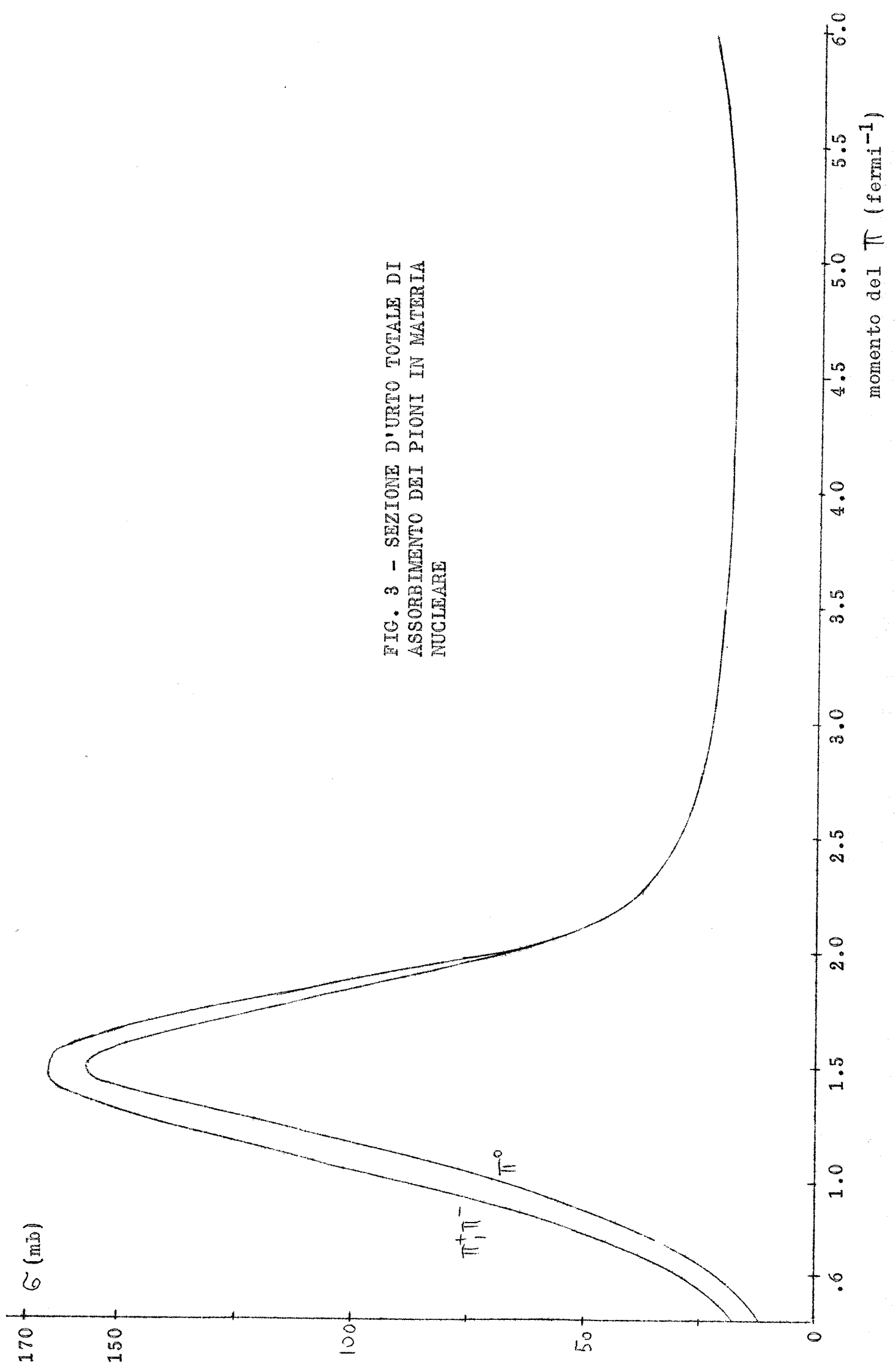


FIG. 3 - SEZIONE D'URTO TOTALE DI ASSORBIMENTO DEI PIONI IN MATERIA NUCLEARE

TABELLA II

Sezioni d'urto di assorbimento da Metropolis.

$E_{\text{cin}\pi}$ (MeV)	k_{π} (f^{-1})	σ_{ijabs}	σ_{ii} (mb)	σ_{ij}	$\sigma_{\text{tot}\pi^+}$	$\sigma_{\text{tot}\pi^0}$	k_{π} (MeV/c)
49	0.64	20	16	15	35	25	127
85	0.87	32	50	21	67	51	174
128	1.15	45	114	43	124	102	228
184	1.48	36	200	66	166	158	292
250	1.84	18	110	44	95	86	362
350	2.27	0	51	23	37	37	468
540	3.37	0	20	22	21	21	665
1300	7.20	0	30	30	30	30	1430

σ_{ijabs} è corretto per tenere conto delle altre reazioni anelastiche e dello scambio di carica.

In un nucleo con Z protoni e $(A-Z)$ neutroni, la sezione d'urto elastica media è:

$$\pi^+ : \frac{\sigma_{ii}Z + \sigma_{ij}(A-Z)}{A} \quad \pi^- : \frac{\sigma_{ij}Z + \sigma_{ii}(A-Z)}{A};$$

per un pione di cui non si individua la carica, userò

una sezione elastica media:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_{ii}Z + \sigma_{ij}(A-Z) + \sigma_{ij}Z + \sigma_{ii}(A-Z)}{A} = \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{ij}}{2}$$

e una sezione d'urto totale media:

$$\frac{\sigma_{ii} + \sigma_{ij}}{2} + \sigma_{ijabs}.$$

Per un π^0 si sceglie

$$\sigma_{abs\pi^0} = \frac{1}{2} \sigma_{ijabs} ; \quad \sigma_{elast.\pi^0} = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} + \sigma_{ij}).$$

- ne nucleare in deuterio, è possibile calcolare la sezione d'urto di assorbimento su nucleo qualsiasi.
- 2) Misure delle fasi di scattering di pioni, eseguite da Anderson e collaboratori (49).
 - 3) Calcoli di dispersione, per determinare le ampiezze di scattering reali da quelle immaginarie, eseguiti indipendentemente da Sternheimer (50) e da Frank, Gammel e Watson (46).
 - 4) Misure di sezione d'urto totale di pioni in idrogeno, eseguite da Cool, Piccioni e Clark (51) nel 1956 e dagli stessi autori negli anni precedenti, per energie dei pioni entro vasti limiti, fino a 1.9BeV; i risultati sono elaborati applicando formule di dispersione e sono riportati grafici in funzione dell'energia della parte reale e della parte immaginaria dell'ampiezza in avanti.

Dopo il 1958 segnalo un solo lavoro interessante sulle interazioni nucleari dei pioni, dovuto a Cronin, Cool e Abashian (38), i quali calcolano le interazioni con nuclei, usando un modello ottico e densità nucleare alla Fermi modificata.

Nella tabella III sono riportati in funzione dell'energia cinetica in Mev o del momento in fermi⁻¹ del pione i valori di k_1 e di $K/2$ che intervengono nei calcoli del modello ottico. n_0 rappresenta la costante di normalizzazione della densità nucleare, che dipende dal modello, e che si ottiene imponendo che l'integrale della densità a tutto il nucleo dia il numero totale di nucleoni, cioè il numero di massa: sono anche riportati i valori di n_0 per i diversi modelli.

TABELLA III.

Momenti associati al potenziale ottico.

k_π	$E_{\text{cin } \pi}$	V_R	k_1	$K/2 \times 10^4$
0.7	60	-23	-0.135	$n_0 22.5$
0.8	75	-28.5	-0.152	" 29
0.9	90	-36.5	-0.183	" 37
1.0	105	-43	-0.205	" 47
1.1	120	-46	-0.211	" 56
1.2	140	-43	-0.185	" 67
1.3	160	-33.5	-0.136	" 77
1.4	175	-10	-0.040	" 82
1.5	195	+16	+0.061	" 82
1.6	215	+27.5	+0.102	" 76
1.7	230	+35	+0.129	" 68
1.8	250	+41	+0.147	" 55
1.9	270	+46.5	+0.163	" 42
2.0	290	+48.5	+0.164	" 32

$$K/2 = k_0 V_I / 2E_{\text{cin}} = A \sigma_t / 2V_A = n_0 \sigma_t / 2$$

$$V_I = \frac{\kappa v_\pi}{2 \lambda_t} = \frac{\kappa v_\pi}{2 V_A} A \sigma_t$$

$$n_0 = \begin{cases} .176 & \text{Pb mod. Hill-Ford} & \kappa_1 = 6.5 \\ .145 & \text{Pb} & \text{unif.} & R = 7.0 \\ .102 & \text{C} & \text{"} & \text{"} \\ .216 & \text{Be} & \text{"} & \text{coll. exp.} & R = 3.04 \\ .167 & \text{C} & \text{"} & \text{"} \\ .184 & \text{Pb} & \text{"} & \text{Fermi modulato} & t = 2.4, c = 6.5 \end{cases}$$

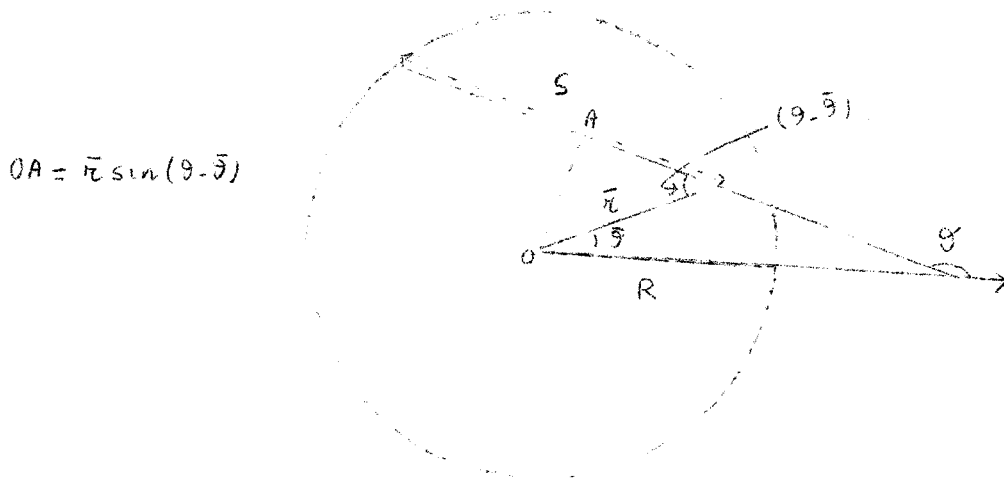
Momenti in fermi⁻³, energie e potenziali in MeV, sezioni d'urto in mb.

X. CALCOLO DEL "CAMMINO OTTICO" S

Per eseguire l'integrale di linea della densità nucleare lungo una prefissata traiettoria, conviene esprimere l'ascissa curvilinea s per mezzo della variabile r , distanza del punto generico della traiettoria dal centro del nucleo. Come si vede dalla figura, che rappresenta il caso della densità uniforme

$$S(\bar{r}, [\vartheta - \bar{\vartheta}]) = \sqrt{R^2 - \bar{r}^2 \sin^2(\vartheta - \bar{\vartheta})} - \bar{r} \cos(\vartheta - \bar{\vartheta})$$

avendo indicato con $\bar{r}, \bar{\vartheta}$ le coordinate polari del punto di produzione del pione e con ϑ l'angolo tra la direzione di emissione e l'asse polare, scelto parallelo al fascio di fotoni incidenti.



Differenziando si ottiene:

$$dS = \frac{r \, dr}{(R^2 - r^2 \sin^2(\vartheta - \bar{\vartheta}))^{1/2}}$$

I limiti di integrazione sono ora \bar{r} e ∞ .

Con queste notazioni si è in grado di calcolare S soltanto per angoli $|\vartheta - \bar{\vartheta}| \leq 90^\circ$

Per angoli maggiori si calcola S con la relazione

$$S(\bar{r}, \vartheta - \bar{\vartheta}) = 2S(\bar{r} \sin(\vartheta - \bar{\vartheta}), \frac{\pi}{2}) - S(\bar{r}, \pi - (\vartheta - \bar{\vartheta}))$$

che segue da un esame immediato della figura e da considerazioni di simmetria. Eseguiamo ora gli integrali di linea

$$S(\bar{\kappa}, \vartheta - \bar{\vartheta}) = \int_{\bar{\kappa}}^{\infty} \frac{n(\kappa) \cdot \kappa \, d\kappa}{(\kappa^2 - \bar{\kappa}^2 \sin^2(\vartheta - \bar{\vartheta}))^{1/2}}$$

per alcuni modelli particolari di densità.

Modello uniforme:

indicando con R il raggio del nucleo, S è evidentemente dato da

$$S(\bar{\kappa}, \vartheta - \bar{\vartheta}) = \left[R^2 - \bar{\kappa}^2 \sin^2(\vartheta - \bar{\vartheta}) \right]^{1/2} - \bar{\kappa} \cos(\vartheta - \bar{\vartheta})$$

La funzione S è graficata in fig. 5 nel caso $r = 3.04$ fermi (Carbonio)

Modello Fermi modificato:

è l'unico modello oltre l'uniforme, che dà per S un risultato esprimibile mediante trascendenti elementari. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\kappa}}^{\infty} \frac{n(\rho) \rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} = \quad \text{con } \kappa^2 = \bar{\kappa}^2 \sin^2(\vartheta - \bar{\vartheta}) \\ & = \int_{\frac{c-t}{2}}^{c-\frac{t}{2}} \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} + \int_{\frac{c-t}{2}}^{c+t/2} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{\rho-c}{t} + 2 \left(\frac{\rho-c}{t} \right)^3 \right] \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} = \\ & = \sqrt{\rho^2 - \kappa^2} \Big|_{\bar{\kappa}}^{c-\frac{t}{2}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3c}{2t} - \frac{2c^3}{t^3} \right) \sqrt{\rho^2 - \kappa^2} \Big|_{\frac{c-t}{2}}^{c+\frac{t}{2}} + \frac{2}{t^3} \int_{\frac{c-t}{2}}^{c+\frac{t}{2}} \frac{\rho^4 \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} + \\ & - \frac{6c}{t^3} \int_{\frac{c-t}{2}}^{c+t/2} \frac{\rho^3 \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} + \left(\frac{6c^2}{t^3} - \frac{3}{2t} \right) \int_{\frac{c-t}{2}}^{c+t/2} \frac{\rho^2 \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} \end{aligned}$$

CARBONIO
DENSITA' NUCLEARI NORMALIZZATE :

$$\frac{\text{num. di nucleoni}}{10^{-39} \text{ cm}^3}$$

- 1 : modello uniforme
- 2 : modello di Fregeau

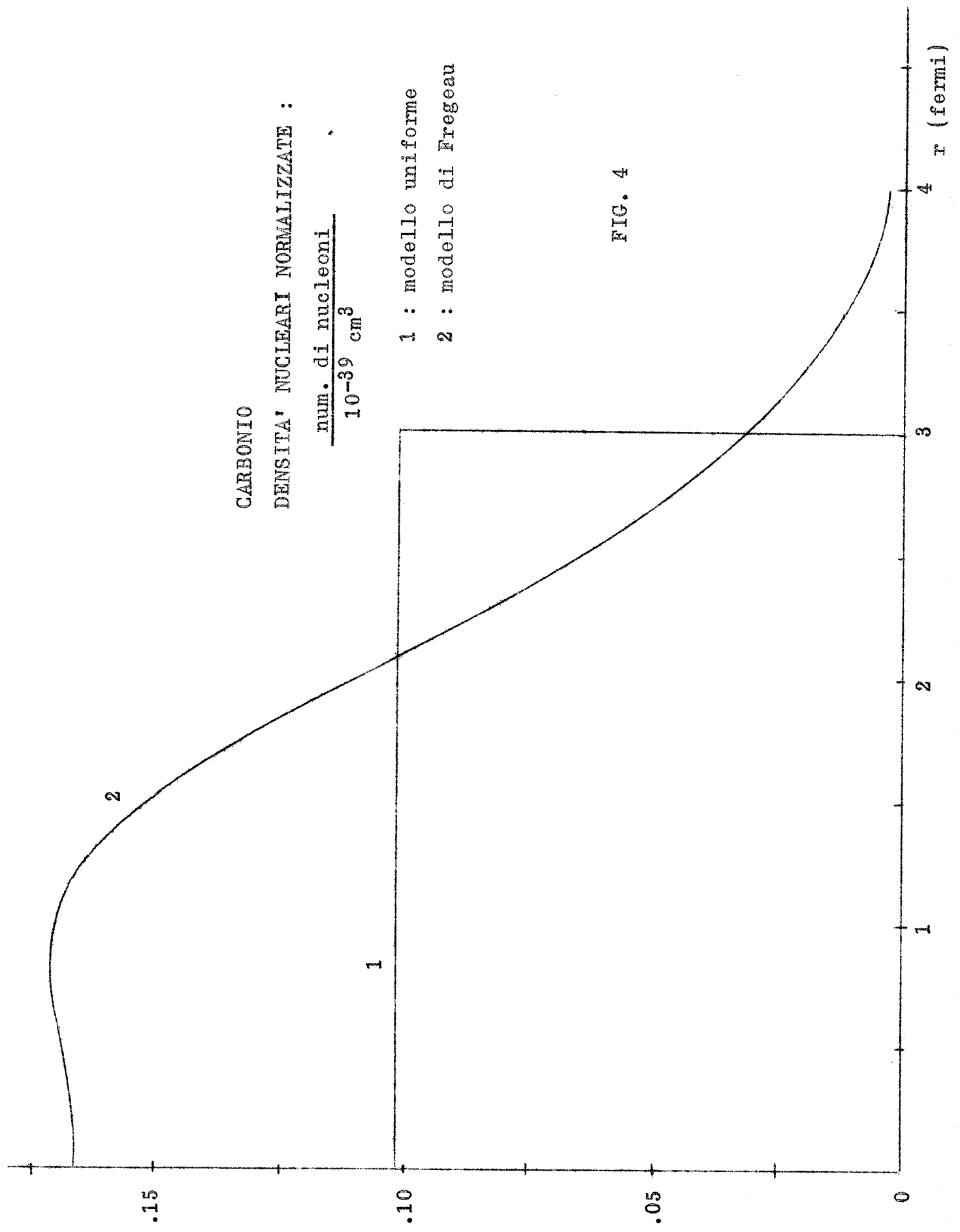


FIG. 4

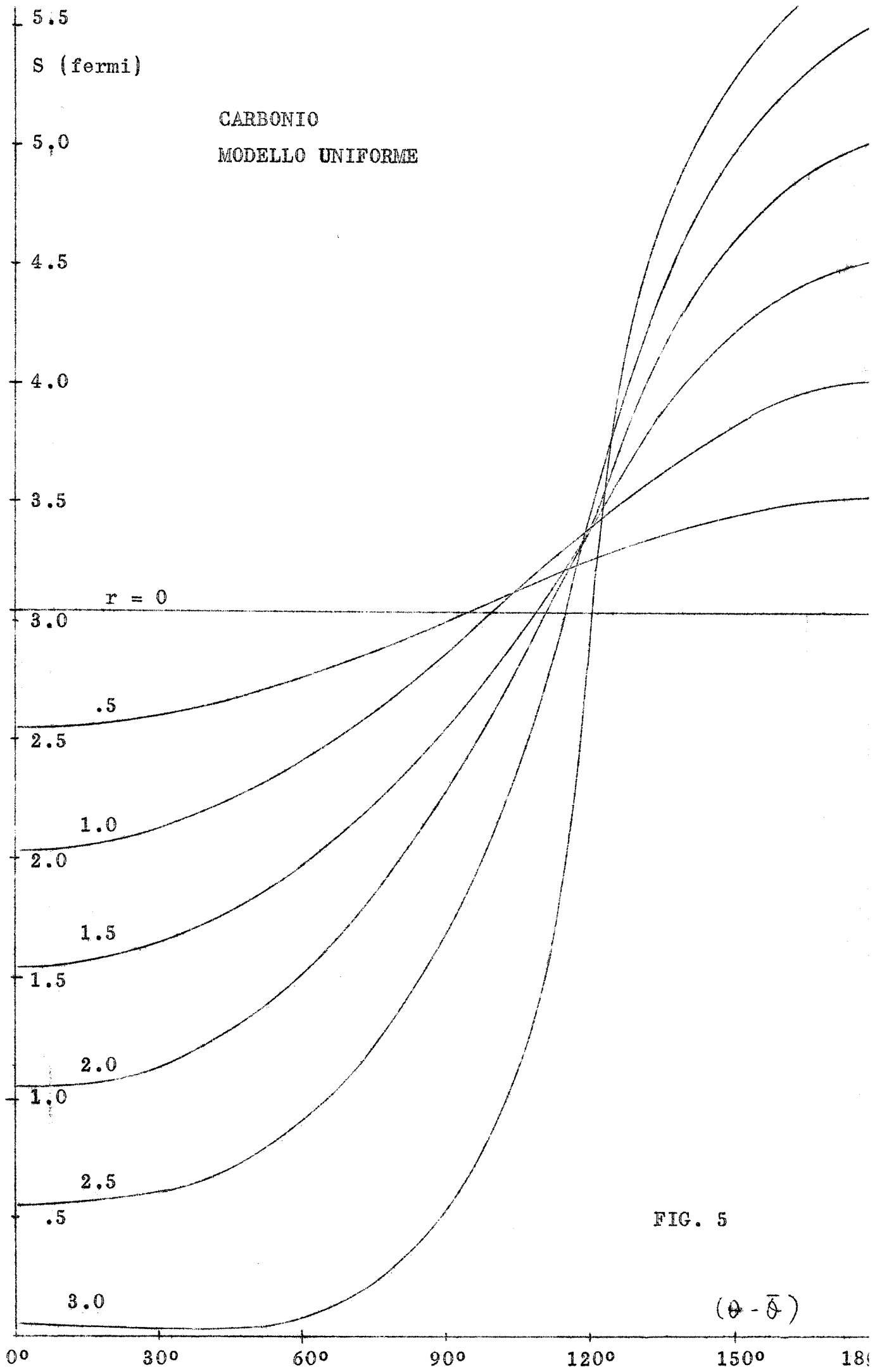


FIG. 5

$(\theta - \bar{\theta})$

Eseguendo gli integrali $\int \rho^v d\rho$ per parti, e l'integrale $\int \sqrt{\rho^2 - k^2} d\rho$ a cui questi si riducono con la sostituzione $\rho/k = \cosh u$ si ottiene:

$$\int \frac{m(\rho) \rho d\rho}{\bar{\kappa} \sqrt{\rho^2 - k^2}} = \sqrt{\rho^2 - k^2} \left|_{\bar{\kappa}}^{c - \frac{t}{2}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3c}{2t} - \frac{2c^3}{t^3} \right) \sqrt{\rho^2 - k^2} \right|_{c - \frac{t}{2}}^{c + \frac{t}{2}} +$$

$$- \left(\frac{3}{2t} - \frac{6c^2}{t^3} \right) \rho \sqrt{\rho^2 - k^2} \left|_{c - \frac{t}{2}}^{c + \frac{t}{2}} - \frac{6c}{t^3} \rho^2 \sqrt{\rho^2 - k^2} \left|_{c - \frac{t}{2}}^{c + \frac{t}{2}} + \frac{2}{t^3} \rho^3 \sqrt{\rho^2 - k^2} \right|_{c - \frac{t}{2}}^{c + \frac{t}{2}} +$$

$$+ \frac{4c}{t^3} (\rho^2 - k^2)^{3/2} \left|_{c - \frac{t}{2}}^{c + \frac{t}{2}} - \frac{3}{2t^3} \rho (\rho^2 - k^2)^{3/2} \left|_{c - \frac{t}{2}}^{c + \frac{t}{2}} + \right.$$

$$\left. - \frac{k^2}{2} \left(-\frac{3}{2t} + \frac{6c^2}{t^3} + \frac{3}{2} \frac{k^2}{t^3} \right) \left(\frac{1}{2} \sinh 2u - u \right) \right|_{\cosh^{-1} \frac{2c-t}{2k}}^{\cosh^{-1} \frac{2c+t}{2k}}$$

Ponendo $a = c - \frac{t}{2}$; $b = c + \frac{t}{2}$:

$$S_{\bar{\kappa} \leq a} = -\bar{\kappa} |\cos(\theta - \bar{\theta})| + \sqrt{a^2 - k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{b+a}{b-a} + \frac{(b+a)^3}{4(b-a)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{3a}{2(b-a)} - \frac{3a(b+a)^2}{4(b-a)^3} + \frac{3a^2(b+a)}{(b-a)^3} - \frac{a^3}{4(b-a)^3} \right) +$$

$$+ (a^2 - k^2)^{3/2} \left\{ \frac{3a}{16(b-a)^3} - \frac{b+a}{2(b-a)^3} \right\} + \sqrt{b^2 - k^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{b+a}{b-a} + \right.$$

$$\left. - \frac{(b+a)^3}{4(b-a)^3} - \frac{3b}{2(b-a)} + \frac{3b(b+a)^2}{4(b-a)^3} - \frac{3b^2(b+a)}{(b-a)^3} + \frac{b^3}{4(b-a)^3} \right\} +$$

$$+ (b^2 - k^2)^{3/2} \left\{ \frac{b+a}{2(b-a)^3} - \frac{3b}{16(b-a)^3} \right\} - \frac{k^2}{2} \left(-\frac{3}{4(b-a)} + \frac{3}{4} \frac{(b+a)^2}{(b-a)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{3k^2}{16(b-a)^3} \right) \cdot \left\{ \frac{b}{k^2} \sqrt{b^2 - k^2} - \frac{a}{k^2} \sqrt{a^2 - k^2} + \log \frac{a + \sqrt{a^2 - k^2}}{b + \sqrt{b^2 - k^2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
S_{\bar{r} \geq a} = & \bar{r} |\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})| \cdot \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{b+a}{b-a} + \frac{(b+a)^3}{4(b-a)^3} + \frac{3\bar{r}}{2(b-a)} + \right. \\
& - \frac{3\bar{r}(b+a)^2}{4(b-a)^3} + \frac{3\bar{r}^2(b+a)}{(b-a)^3} - \frac{\bar{r}^3}{4(b-a)^3} \left. \right\} + \bar{r}^3 |\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})|^3 \cdot \left\{ \frac{3\bar{r}}{16(b-a)^3} + \right. \\
& - \frac{b+a}{2(b-a)^3} \left. \right\} + \sqrt{b^2 - k^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{b+a}{b-a} - \frac{(b+a)^3}{4(b-a)^3} - \frac{3b}{2(b-a)} + \right. \\
& + \frac{3b(b+a)^2}{4(b-a)^3} - \frac{3b^2(b+a)}{(b-a)^3} + \frac{b^3}{4(b-a)^3} \left. \right\} + (b^2 - k^2)^{3/2} \cdot \left\{ \frac{b+a}{2(b-a)^3} + \right. \\
& - \frac{3b}{16(b-a)^3} \left. \right\} - \frac{k^2}{2} \left(-\frac{3}{4(b-a)} + \frac{3(b+a)^2}{4(b-a)^3} + \frac{3k^2}{16(b-a)^3} \right) \cdot \left\{ \frac{b}{k^2} \sqrt{b^2 - k^2} + \right. \\
& - \frac{\bar{r}^2}{k^2} |\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})| + \log \frac{\bar{r} + \bar{r} |\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})|}{b + \sqrt{b^2 - k^2}} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Le espressioni così ottenute sono valide per

$$0^\circ \leq |\vartheta - \bar{\vartheta}| \leq 90^\circ ; \quad \bar{r} > 0.$$

Modello "hollow exponential", valido per berillio e carbonio: si ottiene la seguente espressione di S valida per angoli minori di 90° , in termini di integrali di Gauss incompleti; nella tab. IV sono calcolati i valori numerici di S per particolari valori di \bar{r} e $(\vartheta - \bar{\vartheta})$, con i quali sono stati costruiti i grafici acclusi (fig. 6-7

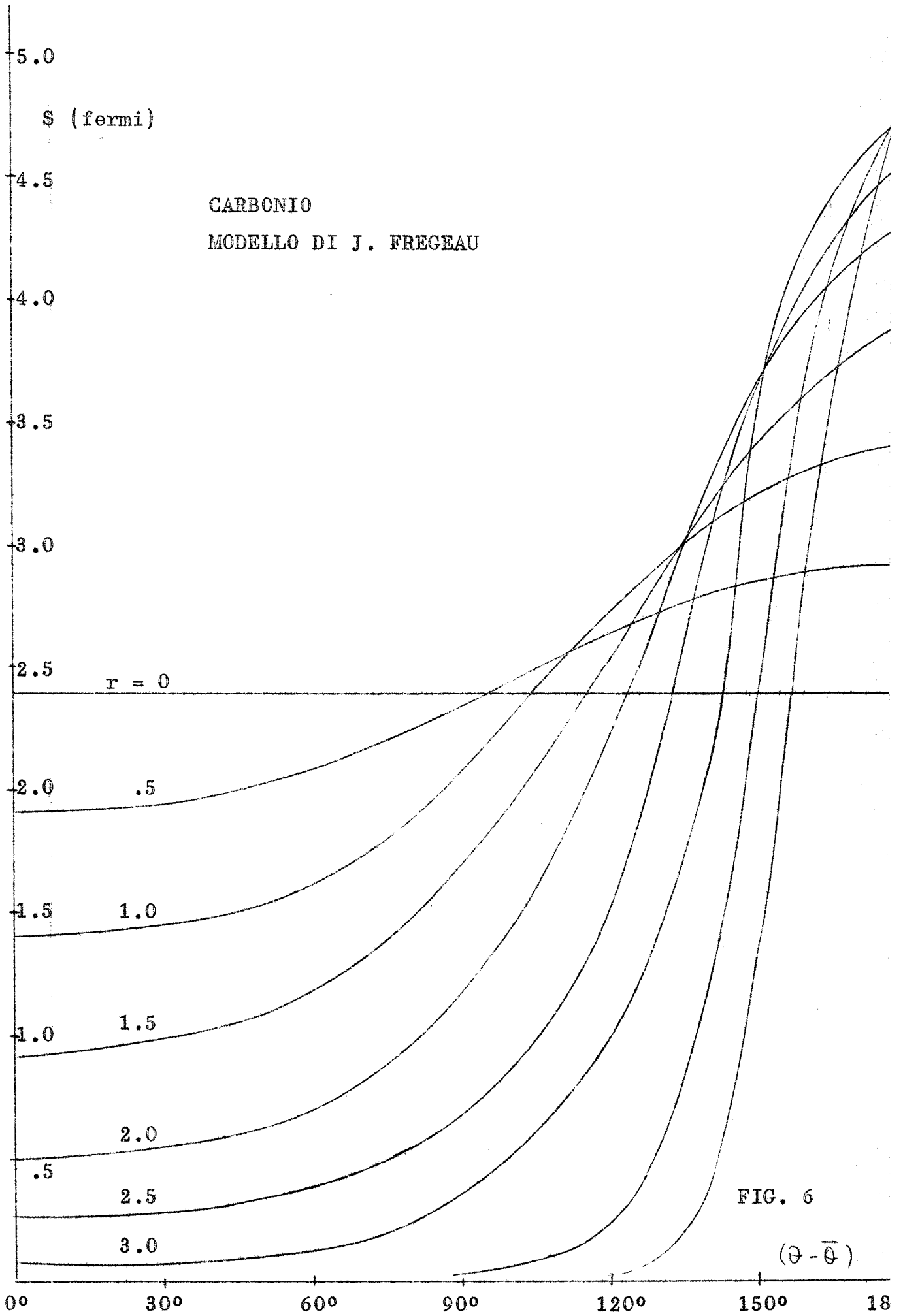


FIG. 6

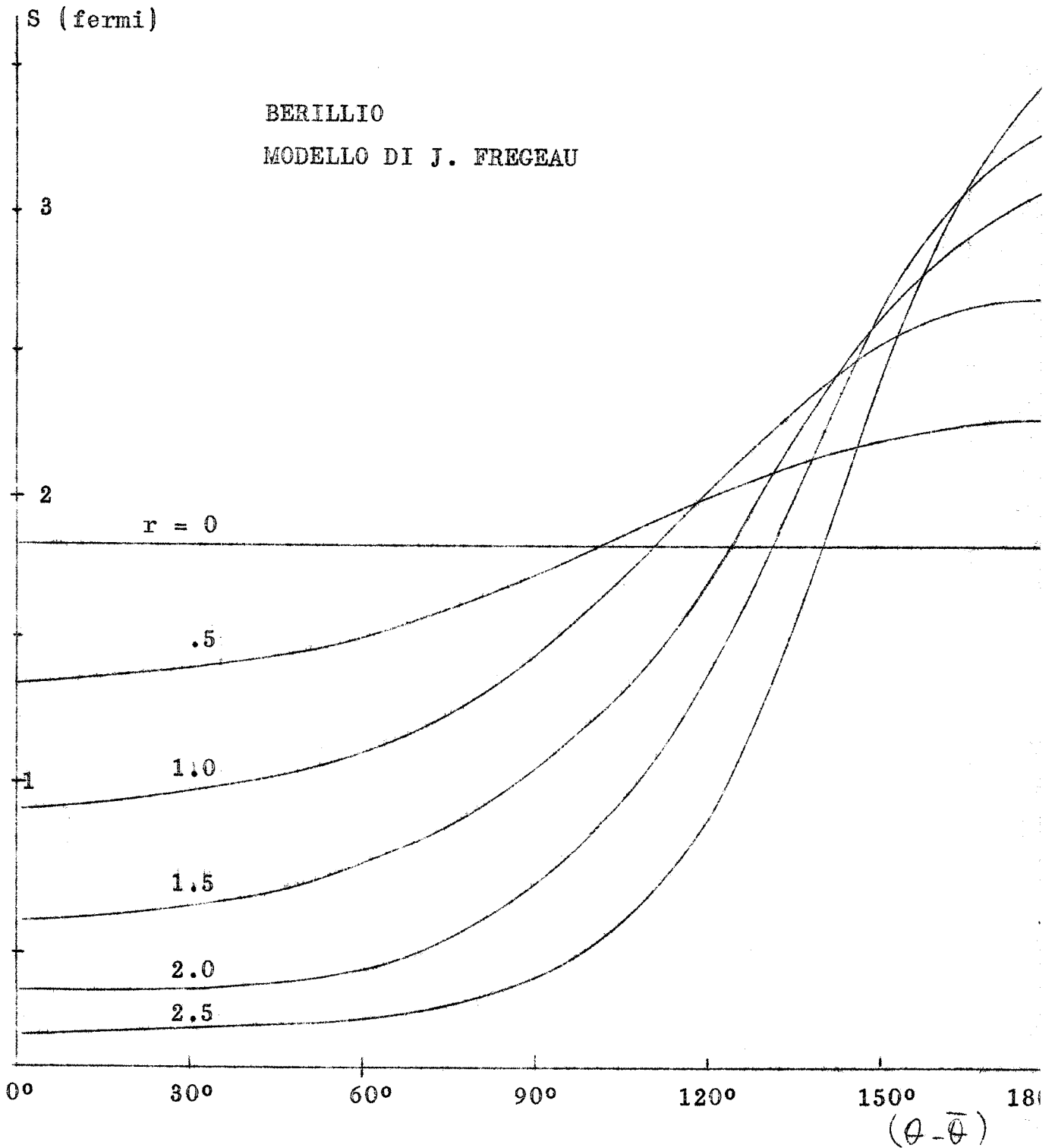


FIG. 7

$$S = \int_{\bar{\pi}}^{\infty} \left(1 + \alpha \frac{\pi^2}{a^2}\right) e^{-\pi^2/a^2} \frac{\pi d\pi}{\sqrt{\pi^2 - \kappa^2}} =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \bar{\pi} |\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})| e^{-\bar{\pi}^2/a^2} + \left(a + \frac{a\alpha}{2} + \frac{\kappa^2 \alpha}{a}\right) e^{-\kappa^2/a^2} \int_{\frac{\bar{\pi} |\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})|}{a}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

Sostituendo i valori dei parametri nucleari a e α si ottiene:

$$Be: \frac{1}{3} \bar{\pi} |\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})| e^{-\left(\frac{\bar{\pi}}{1,55}\right)^2} + \left(\frac{4 \cdot 1,55}{3} + \frac{2}{3} \frac{\bar{\pi}^2 \sin^2(\vartheta - \bar{\vartheta})}{1,55}\right) e^{-\left(\frac{\bar{\pi} \sin(\vartheta - \bar{\vartheta})}{1,55}\right)^2} \int_{\frac{\bar{\pi} \cos(\vartheta - \bar{\vartheta})}{1,55}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$C: \frac{2}{3} \bar{\pi} |\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})| e^{-\left(\frac{\bar{\pi}}{1,63}\right)^2} + \left(\frac{5 \cdot 1,63}{3} + \frac{4}{3} \frac{\bar{\pi}^2 \sin^2(\vartheta - \bar{\vartheta})}{1,63}\right) e^{-\left(\frac{\bar{\pi} \sin(\vartheta - \bar{\vartheta})}{1,63}\right)^2} \int_{\frac{\bar{\pi} |\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})|}{1,63}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

Modello di Hill e Ford: la S del piombo è data dai seguenti integrali, con $r_1 = 6.5$:

$$r_1 \left\{ \int_{\bar{\pi}/r_1}^1 \left(1 + \frac{1}{2} e^{10(x-1)}\right) \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\kappa}{r_1}\right)^2}} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-10(x-1)} x dx}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\kappa}{r_1}\right)^2}} \right\} \text{ per } \bar{\pi} \leq r_1$$

$$\frac{r_1}{2} \int_{\bar{\pi}/r_1}^{\infty} \frac{e^{-10(x-1)} x dx}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\kappa}{r_1}\right)^2}} \text{ per } \bar{\pi} \geq r_1$$

TABELLA IVCammini ottici S (\bar{r} , (ϑ - $\bar{\vartheta}$))

BERILLIO

$\bar{r} \backslash \vartheta$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0.5	1.33	1.39	1.49	1.72	2.00	2.20	2.27
1.0	0.89	0.94	1.09	1.44	2.00	2.55	2.70
1.5	0.51	0.55	0.70	1.05	1.70	2.85	3.10
2.0	0.27	0.27	0.32	0.64	1.38	2.63	3.30
2.5	0.12	0.13	0.15	0.31	0.85	2.37	3.50

CARBONIO

0.5	1.89	1.95	2.07	2.33	2.63	2.85	2.90
1.0	1.39	1.46	1.69	2.09	2.70	3.20	3.40
1.5	0.91	0.99	1.18	1.68	2.50	3.40	3.90
2.0	0.51	0.54	0.70	1.16	2.20	3.65	4.30
2.5	0.26	0.27	0.39	0.65	1.50	3.32	4.55

PIOMBO

0.65	5.85	5.90	6.20	6.50	6.80	7.08	7.15
1.95	4.55	4.75	5.25	6.15	7.20	8.00	8.45
3.25	3.25	3.45	4.22	5.52	7.47	9.03	9.75
4.55	1.95	2.15	2.92	4.55	7.10	9.90	11.05
5.85	0.70	0.70	1.30	2.50	6.20	10.70	12.35
7.15	0.12	0.13	0.20	0.42	3.25	10.40	12.90

L'integrale non può essere calcolato analiticamente, eccetto che per particolari valori di \bar{r} e $(\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta})$, ed è stato valutato numericamente con formule di quadratura di Simpson, ottenendo i risultati riportati in tab. IV e successivamente graficati (fig. 9-10).

E' da notare che nella S del modello Hill-Ford il raggio di semidensità r_1 compare solo come costante moltiplicativa. I punti \bar{r} della tabella corrispondono a $0.1r_1, 0.3r_1, \dots, 1.1r_1$.

Per i punti con $|\bar{\vartheta}-\bar{\vartheta}| > 90^\circ$ è stato usato il solito artificio.

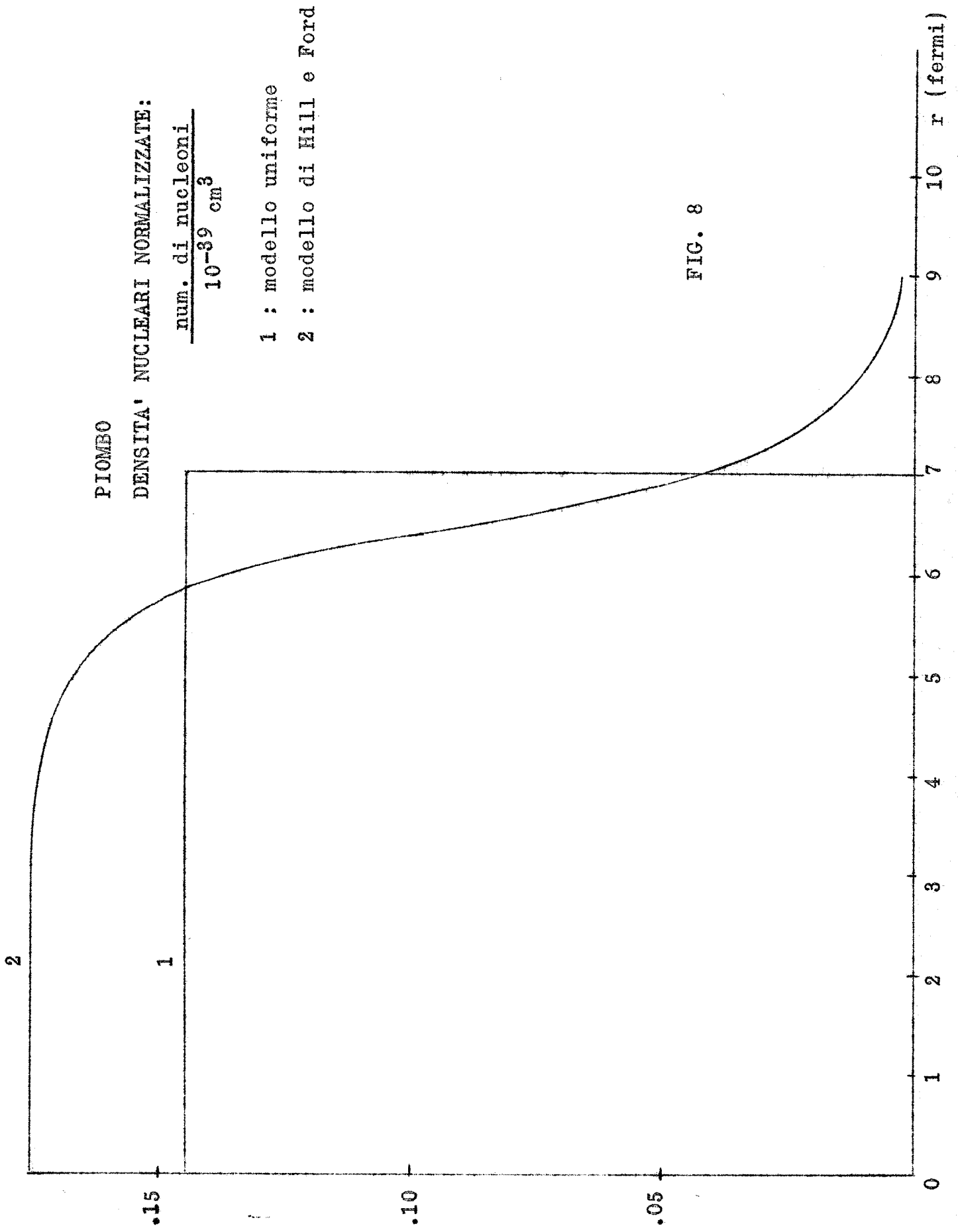


FIG. 8

PIOMBO
MODELLO HILL-FORD

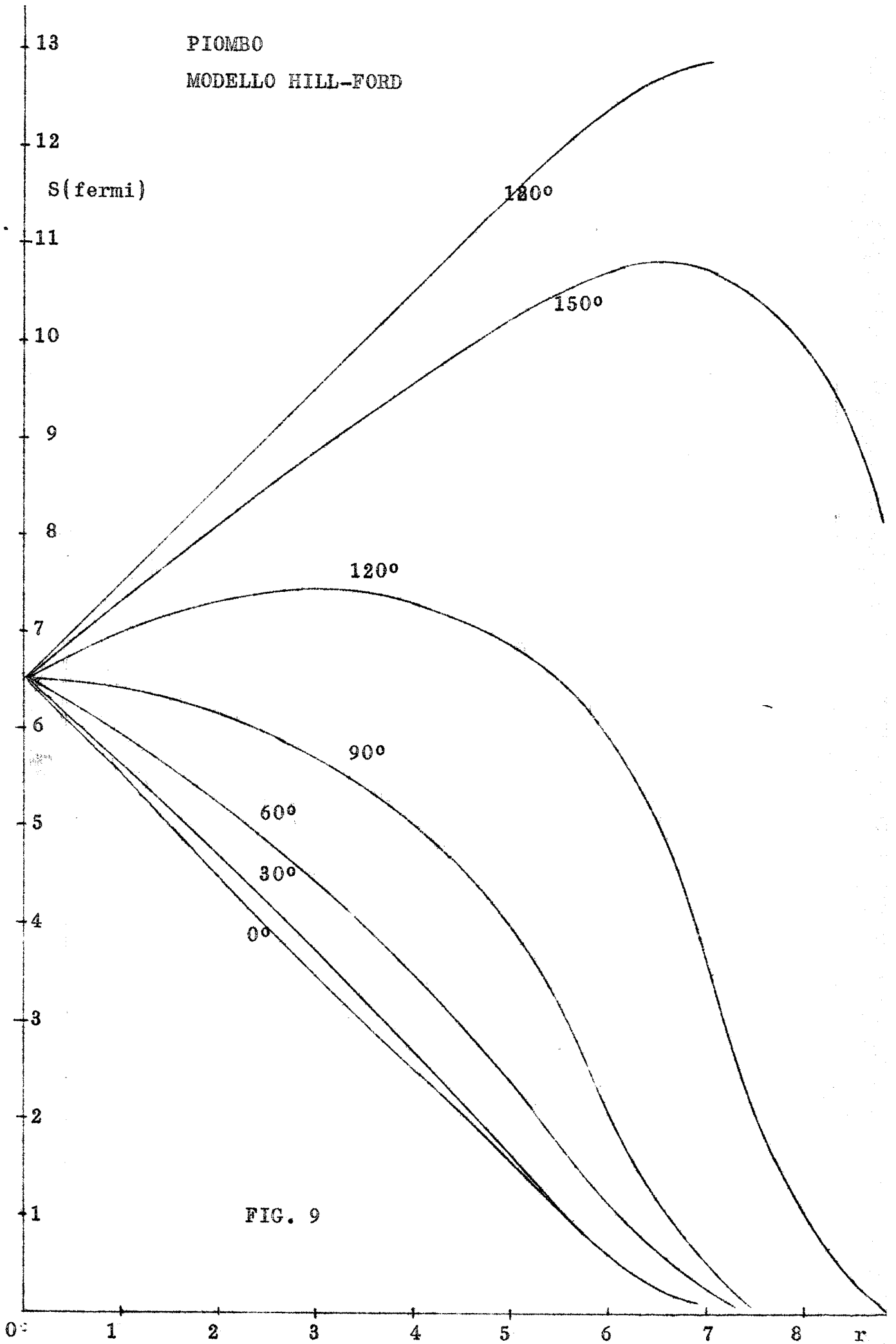


FIG. 9

PIOMBO
MODELLO HILL-FORD

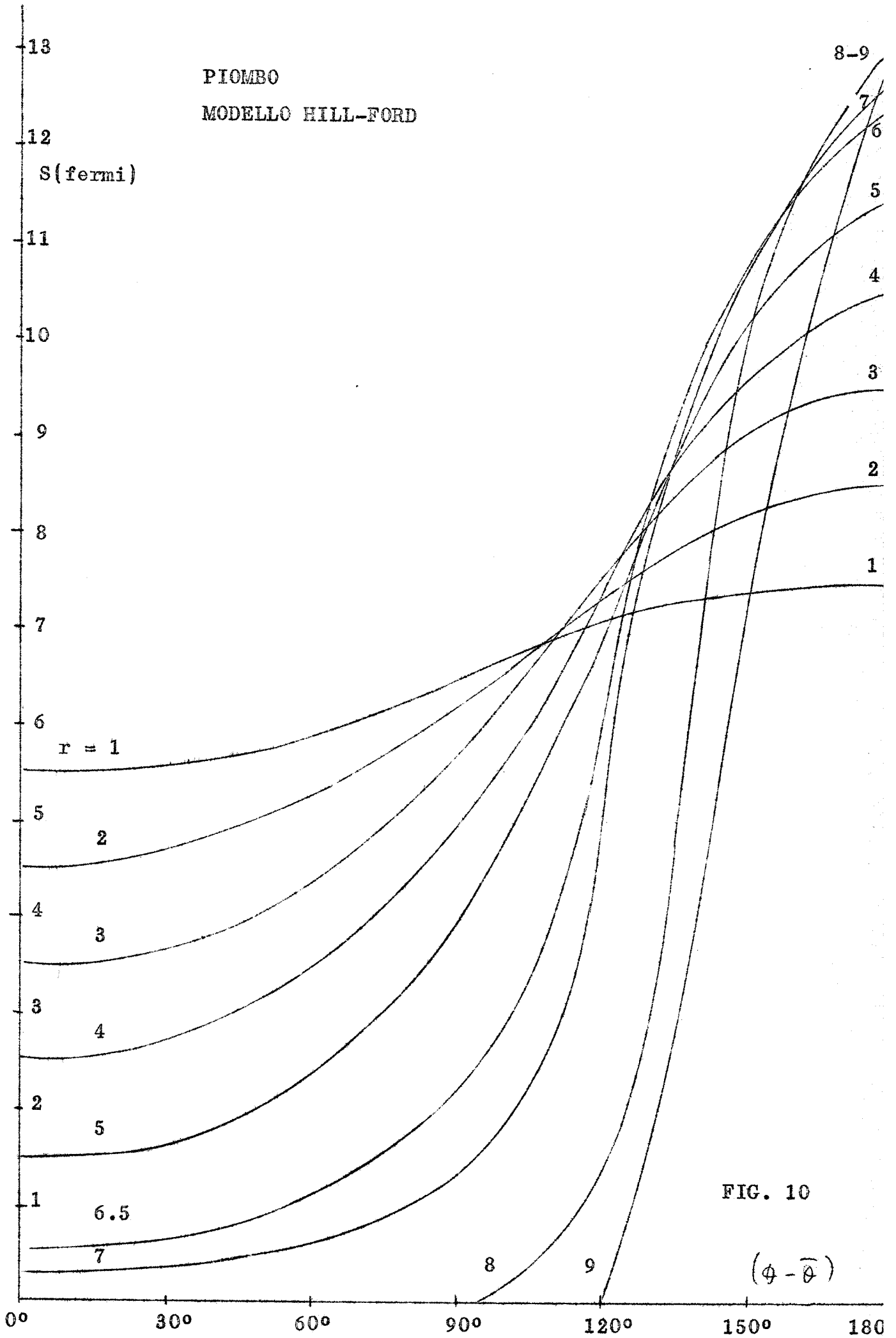


FIG. 10

$$(\phi - \bar{\phi})$$

XI. CALCOLO CLASSICO DELLA PROBABILITA' DI FUGA

Vogliamo ora mostrare come l'uso del modello ottico, per descrivere le sole interazioni nucleari che determinano l'assorbimento di un pione, sia equivalente a trattare in modo classico la propagazione rettilinea di pioni in un mezzo nucleare caratterizzato da una sezione d'urto di assorbimento.

Queste considerazioni, di carattere puramente statistico, permetteranno di dare una interpretazione elementare e immediata di S e di verificarne qualitativamente l'andamento in funzione delle coordinate del punto di produzione e della direzione di emissione.

Sia σ la sezione d'urto di assorbimento del pione su un nucleone, $n(r)$ la densità di nucleoni nel mezzo. La probabilità che un pione sopravviva per un tratto x di traiettoria e sia quindi assorbito tra x e $x+dx$ è proporzionale al numero di nucleoni contenuti nel volumetto $\sigma \cdot dx$:

$$dP(x) = [1 - P(x)] \sigma n(x) dx$$

$$d \log (1 - P(x)) = - \sigma n(x) dx$$

$1 - P(x)$ rappresenta la probabilità che il pione sopravviva fino a x ; la probabilità di fuga dal nucleo sarà pertanto $[1 - P(\infty)]$ e si ottiene integrando tra il punto di produzione, nel quale la probabilità di fuga vale 1, e l'infinito:

$$P_{fuga} = e^{-\sigma \int_0^{\infty} n(x) dx}$$

L'integrazione definita pone ovviamente uguale a 1

la costante di normalizzazione di questa probabilità.

Questa espressione della probabilità di fuga è identica all'espressione del fattore di attenuazione calcolato col modello ottico, nel caso di $V_r = 0$; l'integrale che compare a esponente è proprio S , a parte la costante n_0 .

S è dunque proporzionale al numero di nucleoni che il pione incontra prima di lasciare il nucleo. E' allora immediato constatare che S dev'essere indipendente dalla direzione dell'asse polare, ma dipendere solo dalla differenza degli angoli e da \bar{r} ; che $S(0, (\vartheta - \bar{\vartheta}))$ deve essere indipendente da $(\vartheta - \bar{\vartheta})$ per motivi di simmetria, avendo supposto il nucleo sferico; che per lo stesso punto di produzione il minimo numero di nucleoni si incontra sulla traiettoria in avanti ($\vartheta - \bar{\vartheta} = 0^\circ$), cioè la $S(\bar{r}, 0^\circ)$ deve stare al di sotto di tutte le altre curve; che, per angolo costante minore di 90° , al crescere di \bar{r} il numero di nucleoni incontrati diminuisce, mentre per angoli maggiori di 90° aumenta fino a un massimo e poi decresce, perchè a grandi \bar{r} il nucleo è visto dal pione sotto angoli solidi sempre più piccoli; infine per emissione all'indietro ($\vartheta - \bar{\vartheta} = 180^\circ$) S deve crescere fino a un valore asintotico, che corrisponde al numero di nucleoni lungo una traiettoria diametrale tra $+\infty$ e $-\infty$.

Questi caratteri qualitativi si riscontrano infatti sulle curve S per tutti i modelli usati.

La dipendenza di S da \bar{r} e da $(\vartheta - \bar{\vartheta})$ tuttavia non è semplice, e spesso non è neppure esprimibile analiticamente. Sono stati fatti tentativi per trovare una funzione di \bar{r} e $\cos(\vartheta - \bar{\vartheta})$ in grado di approssimare la S

del modello di Hill e Ford al 10%, e si è ottenuto, come vedremo più avanti, una funzione di secondo grado in $\cos(\vartheta_{\bar{r}})$, con coefficienti dipendenti da \bar{r} in modo ancora più complesso.

XII. CALCOLO DEL FATTORE DI FORMA

Abbiamo adesso tutti gli elementi per proseguire il calcolo del fattore di forma.

L'integrale da eseguire è l'integrale esteso al volume del nucleo:

$$\int_0^{\infty} \rho^2 n(\rho) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} S(\rho, \vartheta)$$

Specifichiamo un particolare riferimento per eseguire immediatamente l'integrazione su φ , scegliendo lo asse polare per il centro del nucleo, diretto come il momento \mathbf{k} del pione nel centro di massa, e il piano $\varphi=0$ parallelo al piano dei vettori \mathbf{k} e \mathbf{q} .

Sia α l'angolo polare di \mathbf{q} , ϑ e φ gli angoli polari di ρ ; ϑ è l'angolo precedentemente chiamato $(\vartheta - \bar{\vartheta})$.

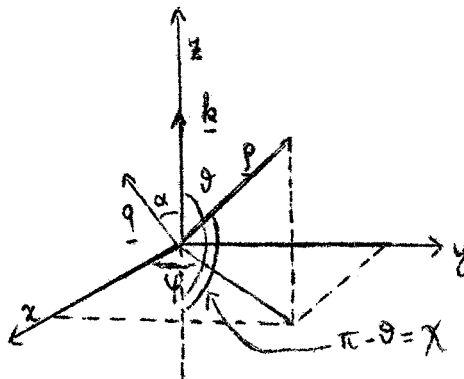
Con queste notazioni, il prodotto scalare $\mathbf{q} \cdot \underline{\rho}$ si riduce a

$$\underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\rho} = q\rho \sin\alpha \sin\vartheta \cos\varphi + q\rho \cos\alpha \cos\vartheta$$

La variabile φ è contenuta solo nel termine $q\rho \sin\alpha \sin\vartheta \cos\varphi$ allora l'integrale su φ dà immediatamente:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i q\rho \sin\alpha \sin\vartheta \cos\varphi} = 2\pi J_0(q\rho \sin\alpha \sin\vartheta)$$

dove J_0 è una funzione di Bessel di primo tipo di ordine zero.



Per eseguire ora l'integrale su ϑ , si deve specificare la dipendenza da ϑ di S . Si è tentato di rappresentare S come una funzione di secondo grado in $\cos \vartheta$, nel caso del modello di Hill e Ford, per il piombo, nella forma

$$a(r) \cos^2 \vartheta + b(r) \cos \vartheta + c(r) \quad (\text{Fig. 11})$$

Questa rappresentazione è soddisfacente per r minore o uguale del raggio di semidensità, con coefficienti a , b , c graficati in funzione di r ; mentre per valori di r più grandi di 6.5 fermi dà errori non inferiori al 20%.

La dipendenza di S da $\cos \vartheta$ è sostanzialmente la stessa nel caso del modello di densità uniforme, come si può vedere da un esame qualitativo dei grafici acclusi.

In questa approssimazione l'integrale su ϑ assume la forma

$$\int_0^{\pi} J_0(Q \sin \vartheta) e^{P_2(\cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta$$

dove $P_2(\cos \vartheta)$ rappresenta un polinomio di secondo grado a coefficienti complessi in $\cos \vartheta$, che indicheremo con $A(r) \cos^2 \vartheta + B(r) \cos \vartheta + C(r)$, e Q indica il prodotto $q \vartheta \sin \alpha$. $B(r)$ comprende anche il termine $i q \vartheta \cos \alpha$.

Ho affrontato questo integrale per tre vie diverse, ma nessuna ha permesso il calcolo completo; riassumo brevemente i metodi usati e i risultati:

1) Sostituire a J_0 la sua definizione per serie:

$$J_0(Q \sin \vartheta) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{Q^{2s} (\sin \vartheta)^{2s}}{2^{2s} (s!)^2}$$

Si ottiene:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s Q^{2s}}{2^{2s} (s!)^2} \int_0^{\pi} (\sin \vartheta)^{2s} e^{P_2(\cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta =$$

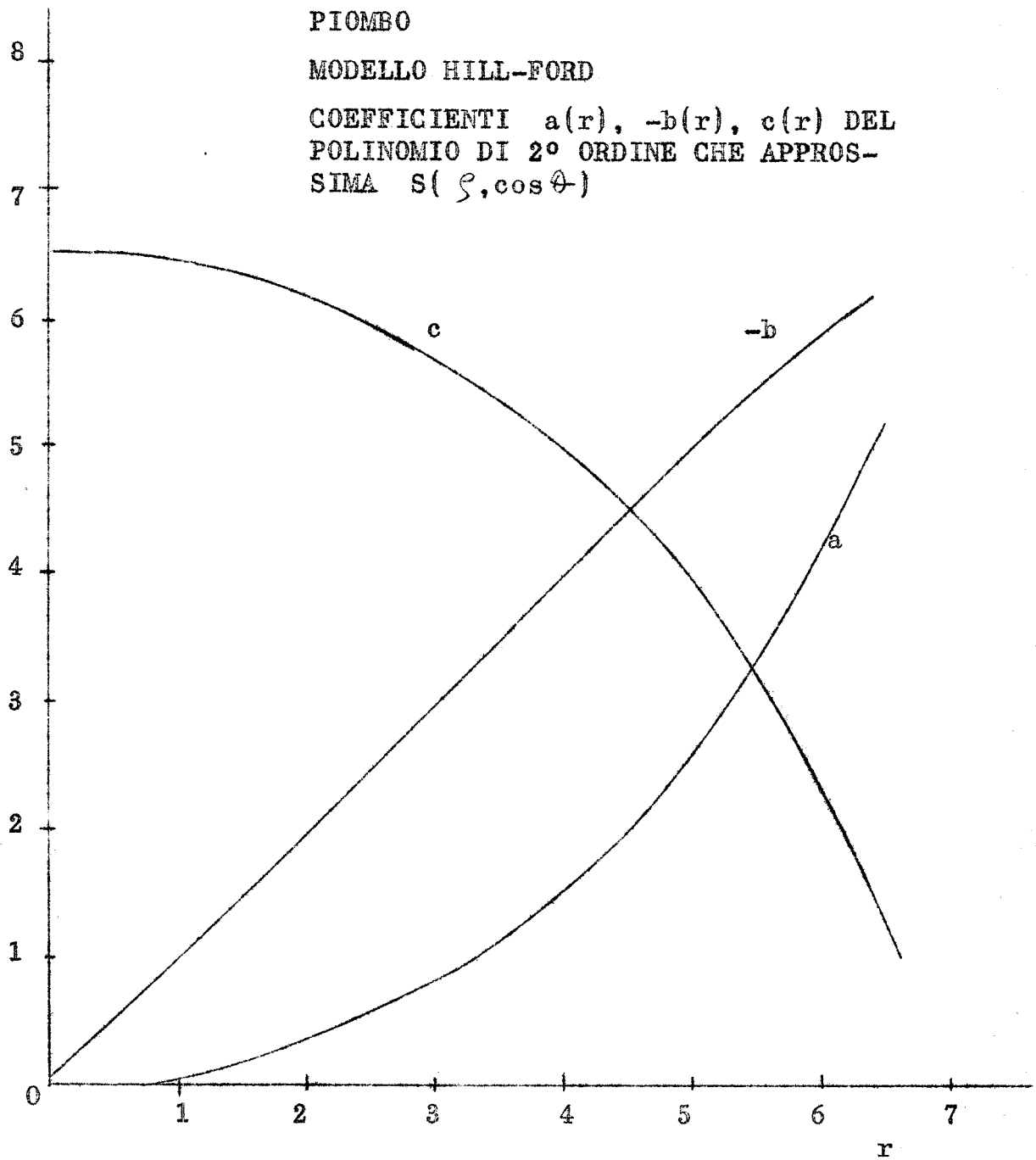


FIG. 11

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2^{2s}} \left(\frac{Q^s}{s!}\right)^2 \int_{-1}^1 (1-\cos^2\vartheta)^s e^{P_2(\cos\vartheta)} d\cos\vartheta = \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2^{2s}} \left(\frac{Q^s}{s!}\right)^2 \sum_{n=0}^s (-1)^n \binom{s}{n} \int_{-1}^1 x^{2n} e^{P_2(x)} dx
\end{aligned}$$

Posto:

$$\mathcal{J}(2r) = \int_{-1}^1 e^{P_2(x)} x^{2r} dx = \int_{-1}^1 e^{Ax^2+Bx+C} x^{2r} dx$$

si può cercare una formula ricorrente per $\mathcal{J}(2r)$.

Con integrazioni per parti si ottiene:

$$\mathcal{J}(2r) = \frac{x^{2r-1}}{2A} e^{P_2(x)} \Big|_{-1}^1 - \frac{2r-1}{2A} \mathcal{J}(2r-2) - \frac{B}{2A} \mathcal{J}(2r-1)$$

Questa formula permette di ricondurre il calcolo di $\mathcal{J}(2r)$ a quello di $\mathcal{J}(0)$ e $\mathcal{J}(1)$, che non sono calcolabili analiticamente, ma sono molto più semplici degli integrali di partenza. Tuttavia non è stato possibile trovare una soluzione conveniente di questa formula di iterazione da inserire nella \sum_n .

2) $\mathcal{J}(2r)$ si può esprimere in termini di integrali incompleti di Fresnel, usando la relazione:

$$\int (x-\alpha)^n e^{-k^2(x-\beta)^2} dx = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{(\beta-\alpha)^{n-\nu}}{k^{\nu+1}} \int y^{\nu} e^{-y^2} dy, \text{ con } y = k(x-\beta)$$

Con le posizioni

$$2r = n \quad ; \quad \alpha = 0 \quad ; \quad -k^2 = A \quad ; \quad \beta = -\frac{B}{2A}$$

il primo membro si riduce a $\mathcal{J}(2r)$ a meno della costante moltiplicativa $\exp\left[\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right]$.

Il problema consiste ora nel calcolare $\int y^{\nu} e^{-y^2} dy$

con ν qualsiasi; con successive integrazioni per par-

ti, si ottiene:

$$\nu \text{ pari : } \int y^\nu e^{-y^2} dy = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \left\{ \int e^{-y^2} dy - \frac{1}{2} y^{\nu-1} e^{-y^2} \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{\nu/2-1} \frac{y^{-2k}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-k\right)} \right.$$

$$\nu \text{ dispari : } \int y^\nu e^{-y^2} dy = -\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \frac{e^{-y^2}}{2} y^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\nu/2} \frac{y^{-2k}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-k\right)}$$

Quindi

$$y(2\nu) = e^{\frac{4AC-B^2}{4A^2}} \sum_{\nu=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\nu} \left(\frac{-B}{2A}\right)^{m \cdot \nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \cdot \left\{ \frac{1+(-1)^\nu}{2} \left[\int e^{-y^2} dy + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} e^{-y^2} y^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\nu/2} \frac{y^{-2k}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-k\right)} \right] - \frac{1-(-1)^\nu}{2} \frac{e^{-y^2}}{2} y^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\nu/2} \frac{y^{-2k}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-k\right)} \right\}$$

Questa espressione è tuttavia troppo complicata e non semplifica in alcun modo il problema.

3) Un metodo più elegante consiste nel lasciare invariata l'espressione della funzione di Bessel e sviluppare in serie sia l'esponenziale sia il suo argomento:

$$e^{B_2(\cos \vartheta)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[P_2(\cos \vartheta)]^m}{m!}; \quad [P_2(\cos \vartheta)]^m = e^c \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} (B \cos \vartheta)^{m-\nu} \\ \cdot (A \cos^2 \vartheta)^\nu = e^c \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} A^\nu B^{m-\nu} \cos \vartheta^{m+\nu}$$

Sostituendo nell'integrale su ϑ si ottiene:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} \left(\frac{A}{B}\right)^\nu \int_{-1}^1 J_0(Q \sin \vartheta) (\cos \vartheta)^{m+\nu} d \cos \vartheta = \\ = e^c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} \left(\frac{A}{B}\right)^\nu \left\{ \int_0^{\pi/2} J_0(Q \sin \vartheta) \cos \vartheta^{m+\nu} \sin \vartheta d \vartheta + \right. \\ \left. + \int_{\pi/2}^{\pi} J_0(Q \sin \vartheta) \cos \vartheta^{m+\nu} \sin \vartheta d \vartheta \right\}$$

Nel secondo integrale si può eseguire il cambiamento di variabile $\chi = \pi - \vartheta$ da cui segue:

$$\sin \chi = \sin \vartheta; \quad \cos \chi = -\cos \vartheta; \quad d\chi = -d\vartheta; \quad \frac{\pi}{2} \geq \chi \geq 0 \quad \text{per} \quad \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi.$$

Pertanto:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta^{m+r} J_0(Q \sin \vartheta) d\vartheta = (-1)^{m+r} \int_0^{\pi/2} \sin \chi J_0(Q \sin \chi) \cos \chi^{m+r} d\chi.$$

E' noto l'integrale:

$$\int_0^{\pi/2} J_\nu(z \sin \vartheta) \sin \vartheta^{\nu+1} \cos \vartheta^{2\mu+1} d\vartheta = 2^\mu \frac{\Gamma(\mu+1)}{z^{\mu+1}} J_{\mu+\nu+1}(z);$$

ponendo $\nu=0$; $2\mu+1 = m+r$; $z = Q$, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} J_\nu(Q \sin \vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta^{m+r} d\vartheta = \\ & = \left[1 + (-1)^{m+r} \right] 2^{\frac{m+r-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+r+1}{2}\right)}{Q^{\frac{m+r+1}{2}}} J_{\frac{m+r+1}{2}}(Q); \end{aligned}$$

e sostituendo:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} J_0(Q \sin \vartheta) e^{P_2(\cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta = \\ & = e^c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \left(\frac{A}{B}\right)^r 2^{\frac{m+r-1}{2}} \left[1 + (-1)^{m+r} \right]. \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+r+1}{2}\right)}{Q^{\frac{m+r+1}{2}}} \cdot J_{\frac{m+r+1}{2}}(Q)$$

Questa formula è particolarmente interessante per chè l'integrazione su ϑ è stata effettivamente eseguita senza alcuna approssimazione, ma le somme indicate, per quanto a prima vista relativamente semplici, non si possono eseguire in alcun modo.

Eventuali approssimazioni asintotiche, per particolari valori dei parametri contenuti, sono di interesse discutibile, proprio a causa del gran numero di parametri: ammesso anche di poter esprimere in forma semplice l'andamento per grandi valori di Q , o per r tendente a zero ecc., resterebbe sempre la notevole difficoltà di raccordare le varie espressioni asintotiche, cioè raccordare delle ipersuperficie, nelle variabili r, q, k, α . Inoltre la funzione da integrare su ϑ , cioè la $J_0(Q \sin \vartheta)$ e $P_2(\cos \vartheta) \sin \vartheta$, è oscillante per la presenza sia della funzione di Bessel, sia della parte immaginaria di P_2 , e per definire completamente una funzione oscillante non è sufficiente conoscere l'andamento asintotico.

Nonostante ciò, un tentativo di approssimazione è stato fatto, nel caso di grandi valori di Q , cioè grandi valori contemporaneamente di r e q , e angoli α lontani da zero a 180° . Per grandi Q , è lecito sostituire alla $J_{\frac{m+n+1}{2}}$ la sua forma asintotica:

$$J_{\frac{m+n+1}{2}}(Q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{Q}} \sin\left(Q - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m+n+1}{2}\right)$$

Questa sostituzione, insieme all'uso della seguente definizione della funzione Γ :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-y} y^z dy$$

rende possibile un calcolo completo, che è riportato in appendice; il risultato, tuttavia ha una espressione ana

litica talmente complicata: che non si riesce a vedere qualitativamente l'andamento di tale funzione, e tanto meno si può pensare di raccorderla con altre funzioni.

Si deve quindi concludere che è necessario integrare numericamente, e, a causa del gran numero di parametri, che non è possibile eseguire questi calcoli con una calcolatrice da tavolo, ma che è necessario usare una calcolatrice elettronica. Tuttavia, il calcolo del fattore di forma è stato eseguito numericamente e manualmente in un caso particolarissimo; modello di Hill e Ford per il piombo e momento trasferito $q = 0$. I risultati sono riportati nel prossimo capitolo. In via del tutto teorica il $|F(q)|^2$ calcolato per $q = 0$ dovrebbe servire come dato di confronto per i risultati da ottenere con il calcolatore elettronico. In realtà il caso $q = 0$ ha una probabilità statistica diversa da zero solo per reazioni con energie del fotone estremamente elevate, maggiori di quelle ottenibili con l'elettrosincrotrone di Frascati: questo sarà chiaro una volta descritto il metodo usato in questo lavoro per calcolare la $|f(q)|^2$. Di conseguenza i risultati numerici del prossimo capitolo attualmente non possono essere utilizzati, salvo che per trarre conclusioni semiquantitative sul fenomeno della fotoproduzione doppia coerente e per studiare l'andamento delle funzioni che compaiono negli integrali.

XIII. FATTORE DI FORMA NEL CASO DI MASSIMA COERENZA

Nel caso di momento trasferito $\underline{q} = 0$, - ed è un caso particolarmente interessante dal punto di vista degli effetti di coerenza - l'integrale da eseguire per calcolare il fattore di forma si riduce a:

$$F(q, k) = 2\pi \int_0^{\infty} n(r) r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta e^{i(k_1 + i\frac{k}{2}) S(r, \vartheta)}$$

Nel caso del piombo, con modello di densità di Hill e Ford,

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} e^{10\left(\frac{r}{6.5} - 1\right)} \right), \quad n(r) = n_0 \frac{e^{-10\left(\frac{r}{6.5} - 1\right)}}{2}$$

e $S(r, \vartheta)$ è quella graficata in fig. 9 e 10.

Sono state eseguite integrazioni numeriche su ϑ a $r = \text{cost.}$, $k = \text{cost.}$, usando la formula di Cavalieri-Simpson con intervalli di 15° ; per k sono stati usati i valori: 0.6; 1.0; 1.25; 1.50; 1.75; 2.0 fermi⁻¹, e i corrispondenti valori di k_1 e $K/2$ sono stati tratti dalla tabella di pag. 35.

I punti a $r = \text{cost.}$ della parte reale e della parte immaginaria dell'integrale su r sono stati graficati in funzione di r , a $k = \text{cost.}$ e sono stati estrapolati alcuni punti; quindi sono state graficate le funzioni $\text{Re } n(r) r^2$ e $\text{Im } n(r) r^2$, parte reale e parte immaginaria dell'integrale su ϑ .

Queste funzioni presentano un massimo pronunciato in corrispondenza di 6 - 6.5 fermi, per il motivo seguente: l'intensità di pioni più elevata deve corrispondere a produzione sulla skin del nucleo, dove la densità nucleare è ancora abbastanza elevata da determi

nare una fotoproduzione intensa ed è sufficientemente bassa da ridurre notevolmente l'assorbimento rispetto al valore che assume all'interno del nucleo.

Le curve graficate non contengono la costante $2\pi n_0$, della quale si terrà conto successivamente; n_0 è invece conglobata in $K/2$.

Le integrazioni su r sono state eseguite in parte con dei Simpson e in parte con metodo grafico. I risultati $\text{Re}(k)$; $\text{Im}(k)$; $\text{Re}^2(k)$; $\text{Im}^2(k)$ (rispettivamente parte reale e immaginaria della F , e loro quadrati), sono graficati e il loro andamento appare soddisfacente: si ha infatti un minimo di intensità coerente in corrispondenza alla prima risonanza pione-nucleone, cioè intorno a $k \approx 1.25 \text{ fermi}^{-1}$. E' in questa zona, infatti, che l'assorbimento è massimo.

La parte immaginaria dell'ampiezza è molto minore della parte reale, pertanto l'andamento di $\text{Re}^2 + \text{Im}^2$ non è dissimile qualitativamente dall'andamento di $\text{Re}^2(k)$ (Fig 12-13).

Per ottenere il fattore di forma si deve moltiplicare $\text{Re}^2 + \text{Im}^2$ per $4\pi^2 n_0^2$. Con questa normalizzazione si assume un evento di fotoproduzione doppia con un pione di dato k a 30° e un momento trasferito q su ogni nucleone del nucleo. Naturalmente, per ottenere una sezione d'urto pentadifferenziale effettiva, è necessario tener conto del fattore $|f(q)|^2$ calcolato per $q = 0$.

Dall'esame delle curve di integrazione parziale, si deduce la necessità di eseguire, con calcolatrice elettronica, le integrazioni numeriche con molti punti, per la presenza del massimo e, nel caso di $q \neq 0$, della funzione J_0 di Bessel oscillante. Per l'integrazione

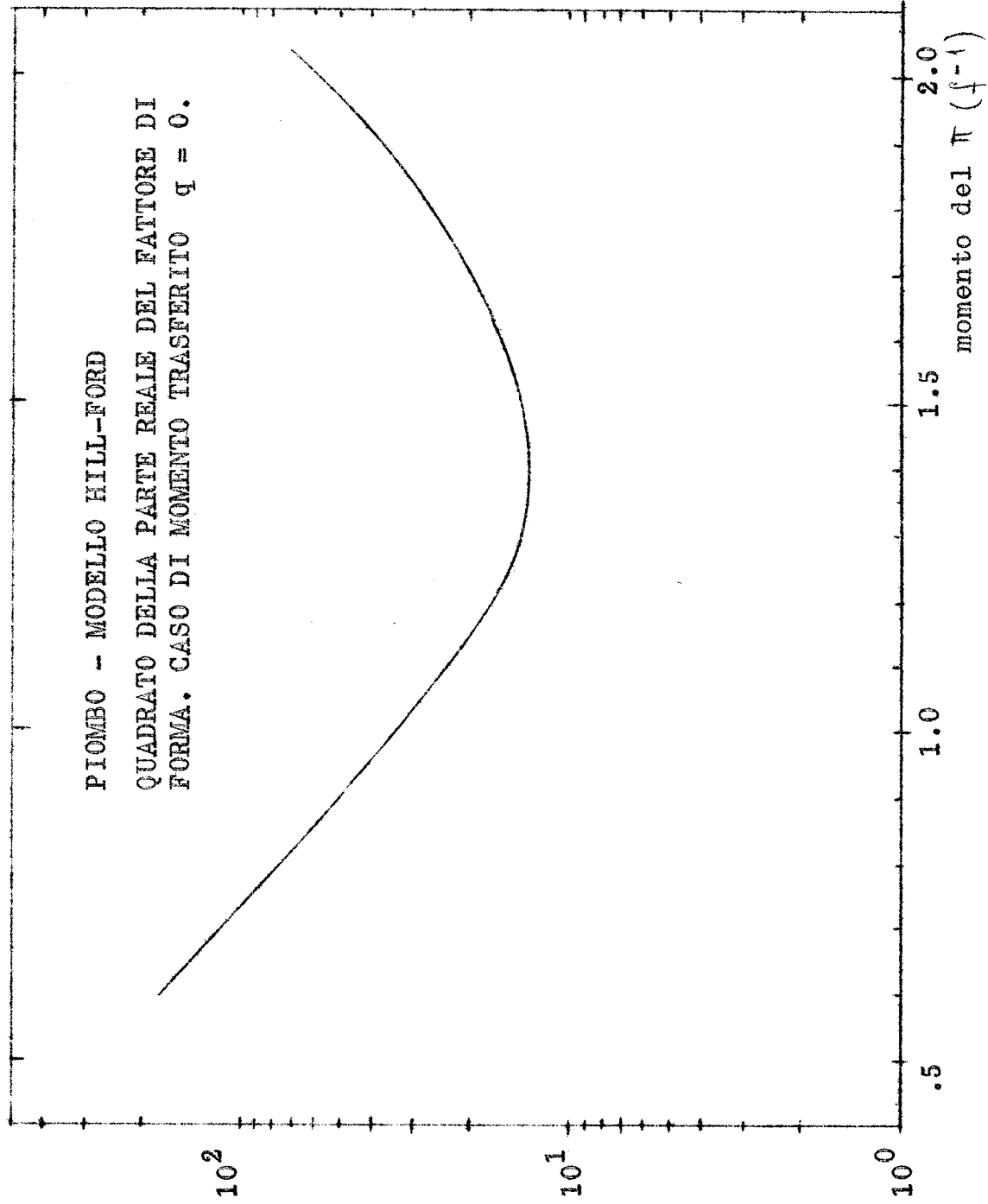


FIG. 12

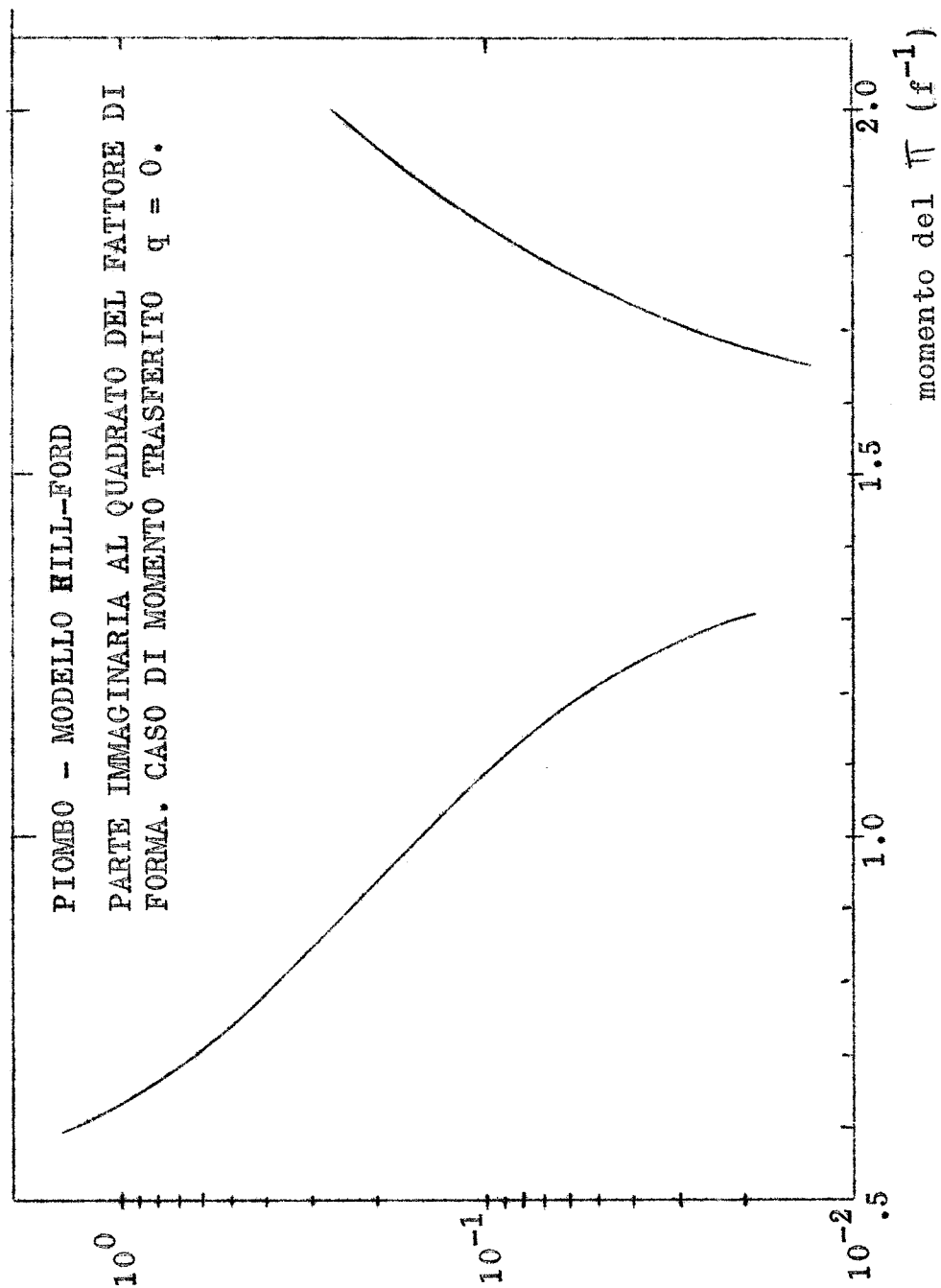


FIG. 13

numerica su f sono stati necessari 15-20 intervalli di Simpson, in questo caso semplificato.

XIV. IL METODO STATISTICO DI BLOCK

E' necessario ora esaminare il problema della sezione d'urto di fotoproduzione doppia, da un punto di vista più critico.

Nel capitolo I è stata calcolata la probabilità che un fotone di energia ben determinata produca su un nucleone una coppia di pioni carichi, con momento risultante q , lasciando momento uguale e opposto al nucleone, e si è detto che questa è anche la probabilità di osservare uno solo dei pioni della coppia con un momento qualunque purchè compatibile con i teoremi di conservazione. Va ora notato che se si vuole osservare uno dei due pioni a 30° nel laboratorio con un momento definito - nel nostro caso $300 \text{ MeV}/c$ - interessa la sezione d'urto differenziale rispetto ai parametri del osservato. Pertanto è necessario calcolare la probabilità che uno dei due pioni sia emesso a 30° e abbia un momento di $300 \text{ MeV}/c$ nel sistema del laboratorio.

Fino a questo punto mi sono occupata esclusivamente del calcolo del fattore di forma in presenza di assorbimento, supponendo di conoscere, o di essere in grado di calcolare l'altro fattore che compare nella sezione d'urto pentadifferenziale, e che ho sempre indicato come $|f(q)|^2$, esplicitando la sola dipendenza dal momento trasferito: è evidente ora che questo fattore deve dipendere anche dal momento k del pione osservato, e che esso rappresenta la sezione d'urto differenziale su nucleone libero

Attualmente l'unica fonte di sezioni d'urto di fotoproduzione doppia in idrogeno, come già è stato detto,

sono i lavori sperimentali di Cocconi in camera a diffusione, i cui risultati desidero riassumere e discutere, allo scopo di decidere se è possibile trarne informazioni sufficienti per il calcolo in corso.

Il fascio di fotoni usato da Cocconi è un fascio di bremsstrahlung indurito dall'interazione con una targhetta di idruro di litio, allo scopo di assorbire il fondo di elettroni presenti, che affollerebbero la camera rendendo praticamente impossibile l'osservazione degli eventi di fotoproduzione doppia: lo spettro dei fotoni pertanto non è ben noto.

I dati differenziali di Cocconi sono riuniti in una serie di istogrammi, rappresentanti le misure eseguite su 127 eventi di fotoproduzione doppia con energie del fotone tra 500 e 700 MeV, del tipo:
 numero di eventi in funzione del momento nel c.m. della particella osservata;
 numero di eventi in funzione del coseno dell'angolo di emissione nel sistema del c.m., per il π^+ , per il π^- e per il protone.

Sono dati anche alcuni grafici di sezioni d'urto differenziali nell'angolo nel sistema del laboratorio, per momenti della particella compresi in intervalli di 100 e di 200 MeV/c, ed energie del fotone tra 500 e 700 MeV, o tra 700 e 1000 MeV.

E' data inoltre, in forma di istogramma, la distribuzione sperimentale di energia cinetica del protone nel sistema del laboratorio, con intervalli di energia cinetica di 20 MeV, e infine una sezione d'urto totale di fotoproduzione doppia in funzione dell'energia del fotone, come istogramma con intervalli di inergia di

100 MeV.

I risultati differenziali di Cocconi non sono direttamente utilizzabili per il mio calcolo per numerosi motivi: per prima cosa non sono sufficientemente differenziali, dato che devo usare sezioni d'urto dipendenti da due momenti e da due angoli, in secondo luogo sono risultati già integrati sullo spettro dei fotoni, infine la statistica è troppo povera.

L'unico risultato utile agli effetti del mio calcolo è la conoscenza della sezione d'urto totale in funzione dell'energia del fotone, utile tuttavia soltanto per eseguire le normalizzazioni della sezione d'urto pentadifferenziale, che è necessario calcolare per altra via. Tale sezione d'urto totale, che indicherò d'ora in avanti come $\sigma_T(P)$, comprende però sia la fotoproduzione elastica ordinaria, sia quella relativa agli eventi con spin-flip, e non c'è alcun modo di separare queste due parti, che influiscono in modo certamente dipendente dall'energia del fotone.

Per questo, l'uso nei calcoli della sezione d'urto totale di Cocconi introduce un errore che non si sa oggi valutare. Esso si combina sia con le approssimazioni fatte schematizzando con il modello ottico le interazioni del pione nel nucleo, sia con quelle inerenti al calcolo puramente statistico della sezione d'urto penta-differenziale, che sto per descrivere.

L'ipotesi statistica consiste nell'ammettere che la sezione d'urto differenziale di una reazione sia proporzionale al prodotto della sezione d'urto totale per il volume accessibile dello spazio dei momenti delle particelle presenti: cioè in una reazione a N corpi finali,

nel sistema del baricentro, chiamando \underline{k}_i i momenti, ω_i le energie totali delle particelle, E l'energia totale a disposizione, la sezione d'urto completamente differenziale si considera proporzionale a:

$$\sigma_T \int d^3\underline{k}_1 \dots d^3\underline{k}_N \delta(E - \omega_1 - \dots - \omega_N) \delta(\underline{k}_1 + \dots + \underline{k}_N)$$

dove l'integrale è eseguito su quattro variabili cinematiche determinate dalle quattro condizioni di conservazione espresse dalle funzioni di Dirac.

Per ottenere una sezione d'urto parzialmente differenziale, è necessario integrare la forma precedente sulle variabili superflue.

Calcoli statistici di questo tipo sono stati eseguiti da Block (53), e in parte riportati in un articolo di Franzinetti e Morpurgo (52), nel caso in cui la reazione considerata sia un decadimento di un primario in più corpi (2, 3, 4, 5 corpi calcolati da Block).

Questo procedimento statistico equivale a tralasciare possibili interazioni nello stato finale delle particelle prodotte.

Il tipo di distribuzione così ottenuta sarà pertanto il più possibile isotropa, in quanto soddisfa alle sole condizioni di conservazione dell'energia totale e del momento, senza includere alcun effetto di correlazione angolare associato con possibili interazioni delle particelle prodotte.

A conferma della plausibilità del calcolo statistico si può constatare sui risultati di Cocconi che entro i limiti (piuttosto poveri) di quell'esperienza, non vi sono effetti rilevanti di correlazione.

D'altra parte non c'è via di scelta, e pertanto

ammettiamo l'ipotesi statistica anche nel caso della fotoproduzione doppia di pioni.

Per un decadimento in tre corpi Block riporta solamente il risultato finale delle integrazioni su otto delle nove variabili cinematiche, risultato che dà la distribuzione statistica del modulo del momento di una sola delle tre particelle.

Questa distribuzione è insufficiente per il mio calcolo, per il quale è necessario conoscere il risultato delle integrazioni sulle tre variabili del pione che non si osserva o sull'angolo φ del nucleone, risultato che sarà una funzione del momento trasferito q , dell'angolo θ del nucleone, del momento vettoriale del pione osservato. E' quindi necessario calcolare, a partire dalla

$$(1) \quad d^3k_1 d^3k_2 d^3q \delta(\text{energia}) \cdot \delta(\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{q})$$

le integrazioni sulle variabili superflue $k_2, \vartheta_2, \varphi_2, \varphi_p$. Ma prima di iniziare questo calcolo bisogna decidere quali sono effettivamente le particelle che prendono parte alla reazione.

La fotoproduzione può avvenire su uno solo, ben definito, nucleone del nucleo, su un gruppo di nucleoni, sull'intero nucleo, in corrispondenza al caso di produzione incoerente, parzialmente coerente, completamente coerente. Al caso completamente coerente corrisponde come fattore di forma l'integrale:

$$\int e^{iq \cdot r} e^{i(k'_1 + i \frac{k}{2}) \cdot r} n(r) \rho^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

esteso al volume del nucleo.

In tutti i calcoli precedenti ho usato solo questo fattore di forma, che corrisponde alla distribuzione

dei nucleoni nello stato fondamentale. Cioè, il nucleo rincula come un tutto unico con momento trasferito q . Sul significato di questo risultato, ovviamente parziale, tornerò tra breve; eseguirò ora il calcolo della distribuzione statistica imponendo che le tre particelle dello stato finale siano i due pioni e il nucleo, al quale assegnerò massa infinita, come è certamente lecito, con la conseguenza di poter trascurare l'energia cinetica del nucleo e di far coincidere il sistema del laboratorio con quello del baricentro della reazione (in effetti la velocità del baricentro è $\sim c/A$).

XV. CALCOLO DELLA DISTRIBUZIONE STATISTICA DEL MOMENTO
TRASFERITO AL NUCLEO

Per integrare la 1) è sufficiente applicare la proprietà:

$$\int_a^b g(x) \delta(x-x_0) dx = g(x_0) \quad \text{per } a \leq x_0 \leq b.$$

Indicherò con \underline{k}_1 , \underline{k}_2 , \underline{k}_N , rispettivamente i momenti del pione osservato, del secondo pione e del nucleo nel sistema del centro di massa, e rispettivamente con ϑ_1, φ_1 ; ϑ_2, φ_2 ; ϑ_N, φ_N gli angoli corrispondenti.

Scegliendo l'asse polare nella direzione di \underline{k}_1 e proiettando la funzione delta vettoriale, si ottiene:

$$\delta(P - \omega_1 - \omega_2) \cdot \delta(k_1 + k_2 \cos \vartheta_2 + k_N \cos \vartheta_N) \cdot \delta(k_2 \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2 + k_N \sin \vartheta_N \sin \varphi_N) \cdot \delta(k_2 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2 + k_N \sin \vartheta_N \cos \varphi_N)$$

L'elemento differenziale è

$$k_2^2 dk_2 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2 k_N^2 dk_N \sin \vartheta_N d\vartheta_N d\varphi_N.$$

L'integrazione su k_2 dà:

$$k_2^{*2} \delta(k_1 + k_2^* \cos \vartheta_2 + k_N \cos \vartheta_N) \cdot \delta(k_2^* \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2 + k_N \sin \vartheta_N \sin \varphi_N) \cdot \delta(k_2^* \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2 + k_N \sin \vartheta_N \cos \varphi_N) \cdot \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2 k_N^2 dk_N \cdot \sin \vartheta_N d\vartheta_N d\varphi_N.$$

dove $k_2^* = [P^2 + k_1^2 - 2P\omega_1]^{1/2}$

Integrando su φ_2 , si ottiene

$$k_2^{*2} \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 k_N^2 \sin \vartheta_N d\vartheta_N dk_N d\varphi_N \cdot \delta(k_1 + k_2^* \cos \vartheta_2 + k_N \cos \vartheta_N) \cdot \delta[(k_2^{*2} \sin^2 \vartheta_2 - k_N^2 \sin^2 \vartheta_N \cos^2 \varphi_N)^{1/2} + k_N \sin \vartheta_N \sin \varphi_N]$$

Integrando su ϑ_2 si ottiene

$$k_2^* k_N^3 \sin^2 \vartheta_N d\vartheta_N dk_N d\varphi_N \delta[(k_2^{*2} - k_N^2 \sin^2 \vartheta_N)^{1/2} + k_1 + k_N \cos \vartheta_N].$$

Occorre ora trasformare questa distribuzione differenziale dal sistema di baricentro al sistema del laboratorio.

Il sistema del laboratorio è definito dalla relazione di conservazione dell'impulso $\underline{P} = \underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_L$

dove \underline{k}_L rappresenta il momento finale del nucleo nel laboratorio.

Poichè inizialmente nel sistema del laboratorio il nucleo è fermo, si avrà $\underline{q} = \underline{k}_L$, dove \underline{q} è il momento trasferito che compare nell'espressione del fattore di forma.

Confrontando le relazioni di conservazione dell'impulso nel sistema di baricentro e nel sistema del laboratorio, si ha:

$$\underline{k}_N = \underline{k}_L - \underline{P} = \underline{q} - \underline{P}$$

ovvero

$$\begin{aligned} k_N \cos \vartheta_N &= q_z - P_z \\ k_N \sin \vartheta_N \cos \varphi_N &= q_x - P_x \\ k_N \sin \vartheta_N \sin \varphi_N &= q_y - P_y \end{aligned} \quad (2)$$

Il determinante Jacobiano della trasformazione (2) è dato, come si riconosce facilmente, da

$$J = \begin{vmatrix} \frac{k_{Nz}}{k_N} & \frac{k_{Ny}}{k_N} & \frac{k_{Nx}}{k_N} \\ \frac{k_{Nz} k_{Nx}}{k_N^2 \sqrt{k_{Nx}^2 + k_{Ny}^2}} & \frac{k_{Nz} k_{Ny}}{k_N^2 \sqrt{k_{Nx}^2 + k_{Ny}^2}} & -\frac{(k_{Nx}^2 + k_{Ny}^2)^{1/2}}{k_N^2} \\ -\frac{k_{Ny}}{k_{Nx}^2 + k_{Ny}^2} & \frac{k_{Nx}}{k_{Nx}^2 + k_{Ny}^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{[(q_x - P_x)^2 + (q_y - P_y)^2]^{-1/2}}{k_N}$$

Pertanto la distribuzione statistica differenziale nel sistema del laboratorio, sarà, a meno di una costante di normalizzazione:

$$\text{cost. } J \cdot k_2^* k_N^3 \sin^2 \vartheta_N d^3 q \delta \left[(k_2^{*2} - k_N^2 \sin^2 \vartheta_N)^{1/2} + k_1 + k_N \cos \vartheta_N \right]$$

Usando le (2), si può esprimere la distribuzione statistica per mezzo della variabile q , ottenendo:

$$\text{cost. } k_2^* [(q_x - P_x)^2 + (q_y - P_y)^2]^{1/2} \delta \left[k_1 + q_z - P_z + (k_2^{*2} - (q_x - P_x)^2 - (q_y - P_y)^2)^{1/2} \right] d^3 q$$

Passando nel sistema del laboratorio a coordinate polari con asse polare diretta come \underline{k}_1 , si ottiene:

$$\text{cost. } [P^2 + k_1^2 - 2Pk_1]^{1/2} \cdot [q^2 \sin^2 \alpha + P^2 \sin^2 \vartheta_p - 2Pq \sin \alpha \sin \vartheta_p \cos(\varphi_p - \varphi_q)]^{1/2}$$

$$\cdot \delta \left[k_1 + q \cos \alpha - P \cos \vartheta_p + \left\{ P^2 + k_1^2 - 2P\omega_1 - q^2 \sin^2 \alpha - P^2 \sin^2 \vartheta_p + 2Pq \sin \alpha \sin \vartheta_p \cos (\varphi_p - \varphi_q) \right\}^{1/2} \right] \cdot q^2 dq d\cos \alpha d\varphi_q.$$

Ricordiamo ora che nel calcolo del fattore di forma si è scelto il piano $\varphi = 0$ coincidente con il piano dei vettori \underline{k}_1 e \underline{q} : pertanto conviene porre anche qui $\varphi_q = 0$.

L'integrazione su φ_p , a causa della funzione delta, dà

$$q^2 \cdot \cos \alpha \left[P^2 + k_1^2 - 2P\omega_1 \right]^{1/2} \left[P^2 + k_1^2 - 2P\omega_1 - (k_1 + q \cos \alpha - P \cos \vartheta_p)^2 \right]^{1/2} dq d\cos \alpha$$

Ora si può integrare su tutti i possibili piani che contengono \underline{k}_1 e \underline{q} , e poichè l'integrando è indipendente da φ_q si ottiene un fattore 2π .

Pertanto possiamo esprimere la sezione d'urto pentadifferenziale su nucleone libero nella forma

$$\frac{d^5 \sigma}{dE_1 d\Omega d\alpha} = \sigma_T(P) \cdot \cos \alpha \cdot 2\pi \sin \alpha \cdot q^2 \cdot \left[P^2 + k_1^2 - 2P\omega_1 \right]^{1/2} \cdot \left[P^2 + k_1^2 - 2P\omega_1 - (k_1 + q \cos \alpha - P \cos \vartheta_p)^2 \right]^{1/2} = \sigma_T(P) \cdot \chi(q, \alpha | P, k_1)$$

e la sezione d'urto pentadifferenziale per fotoproduzione coerente su nucleo nella forma:

$$|F(q, \alpha | k_1)|^2 \cdot \chi(q, \alpha | P, k_1) \cdot \sigma_T(P)$$

Si tratta ora di determinare la costante di normalizzazione della funzione χ : questo si può fare in un sistema di riferimento arbitrario e sceglieremo per semplicità il sistema del centro di massa.

Nel sistema di centro di massa la $\delta(\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_N)$ impone che i tre momenti siano coplanari: sceglieremo l'asse polare parallela a \underline{k}_1 e come piano $\varphi = 0$ il piano dei tre momenti. L'integrando risulta indipendente dai tre angoli φ e dall'angolo ϑ_1 : l'integrazione su queste variabili dà $2(2\pi)^3$.

Usiamo ora le funzioni delta per integrare su k_2 , ϑ_2 e ϑ_N .

Con il procedimento già visto si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_T(P) &= 16 \pi^3 \cdot \text{cost} \cdot \sigma_T(P) \cdot \int k_2^{*2} \cdot \delta(k_2^* \sin \vartheta_2 + k_N \sin \vartheta_N) \cdot \\ &\cdot \delta(k_1 + k_2^* \cos \vartheta_2 + k_N \cos \vartheta_N) \cdot k_1^2 dk_1 k_N^2 dk_N d\cos \vartheta_N d\cos \vartheta_2 = \\ &= -16 \pi^3 \text{cost} \sigma_T(P) \int k_2^* k_N^3 \sin^2 \vartheta_N k_1^2 \delta[k_1 + k_N \cos \vartheta_N + \\ &+ (k_2^{*2} - k_N^2 \sin^2 \vartheta_N)^{1/2}] \cdot dk_1 dk_N d\vartheta_N = \\ &= -16 \pi^3 \text{cost} \sigma_T(P) \int k_N^3 k_2^* k_1^2 \sin^2 \vartheta_N^* dk_1 dk_N d\vartheta_N = \\ &(\text{con } \cos \vartheta_N^* = (k_2^{*2} - k_N^2 - k_1^2) / 2 k_1 k_N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -4 \pi^3 \text{cost} \sigma_T(P) \int k_1^2 k_N [P^2 + k_1^2 - 2 P \cos \vartheta_1]^{1/2} \left\{ 4 k_1^2 k_N^2 - \right. \\ &\left. - (k_N^2 - P^2 - 2 P \cos \vartheta_1)^2 \right\} dk_1 dk_N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pertanto: } \text{cost}^{-1} &= -4 \pi^3 \int k_1^2 k_N dk_1 dk_N \cdot [P^2 + k_1^2 - 2 P \cos \vartheta_1]^{1/2} \cdot \\ &\cdot \left\{ 4 k_1^2 k_N^2 - (k_N^2 - P^2 - 2 P \cos \vartheta_1)^2 \right\} \end{aligned}$$

L'integrazione su q va fatta tra gli estremi:

$$q_{\min}^{\max} = |k_1 \pm k_2^*|$$

mentre per k_1 l'intervallo permesso dalla conservazione della energia è $0 - \sqrt{P^2 - 2 P m}$.

L'integrazione su q dà

$$\begin{aligned} \text{cost}^{-1} &= -4 \pi^3 \int_0^{\sqrt{P^2 - 2 P m}} [P^2 + k_1^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}]^{1/2} \cdot \left\{ \frac{[k_1 + \sqrt{k_1^2 + P^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}}]^2}{2 [P^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}]^2} + \right. \\ &+ \frac{[k_1 + \sqrt{P^2 + k_1^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}}]^4}{8 [P^2 + 2 k_1^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}]^2} + \frac{1}{6} [k_1^2 + \sqrt{P^2 + k_1^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}}]^6 + \\ &\left. - \frac{[k_1 - \sqrt{k_1^2 + P^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}}]^2}{2 [P^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}]^2} - \frac{[k_1 - \sqrt{P^2 + k_1^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}}]^4}{8 [P^2 - 2 P \sqrt{k_1^2 + m^2}]^2} + \right. \end{aligned}$$

°/.

$$- \frac{1}{6} \left[k_1 + \sqrt{P^2 + k_1^2 - 2P\sqrt{k_1^2 + m^2}} \right]^6 \cdot k_1^2 dk_1.$$

L'integrazione su k_1 è stata eseguita numericamente per diverse energie del fotone e i risultati sono i seguenti:

P (MeV)	cost. ⁻¹
500	4.390 10 ³
600	3.654 10 ⁴
700	9.633 "
800	3.115 10 ⁵
900	9.976 "

I calcoli della distribuzione statistica, dei fattori di forma, e delle integrazioni successive sulle variabili cinematiche non osservate, sono stati eseguiti numericamente, programmandoli in linguaggio Fortran; i risultati sono tabulati, graficati e discussi nel capitolo seguente e lo schema a blocchi è riportato in appendice.

TABELLA V

FATTORI DI FORMA DEL CARBONIO

Cos α	$ F ^2_{n.u.}$	$ F ^2_u$	$ F ^2_{n.u.}$	$ F ^2_u$
	$q = .25 f^{-1}$		$q = .50 f^{-1}$	
1.0	4.674 10^5	1.149 10^6	3.035 10^5	8.267 10^5
0.9	4.606 "	1.137 "	2.908 "	7.903 "
0.8	4.542 "	1.127 "	2.792 "	7.586 "
0.7	4.481 "	1.118 "	2.687 "	7.312 "
0.6	4.425 "	1.110 "	2.593 "	7.080 "
0.5	4.371 "	1.104 "	2.508 "	6.888 "
0.4	4.321 "	1.099 "	2.432 "	6.734 "
0.3	4.275 "	1.095 "	2.365 "	6.617 "
0.2	4.232 "	1.092 "	2.307 "	6.536 "
0.1	4.192 "	1.091 "	2.257 "	6.490 "
0.	4.155 "	1.090 "	2.214 "	6.479 "
-0.1	4.122 "	1.091 "	2.179 "	6.502 "
-0.2	4.091 "	1.094 "	2.152 "	6.559 "
-0.3	4.064 "	1.097 "	2.132 "	6.651 "
-0.4	4.040 "	1.102 "	2.119 "	6.779 "
-0.5	4.020 "	1.108 "	2.114 "	6.942 "
-0.6	4.002 "	1.115 "	2.116 "	7.143 "
-0.7	3.988 "	1.123 "	2.126 "	7.383 "
-0.8	3.976 "	1.133 "	---	---
-0.9	3.968 "	1.144 "	---	---
-1.0	3.963 "	1.156 "	---	---

Cos α	$ F ^2_{n.u.}$	$ F ^2_u$	$ F ^2_{n.u.}$	$ F ^2_u$
	$q = .75 f^{-1}$		$q = 1.0 f^{-1}$	
1.0	1.265 10^5	4.638 10^5	2.502 10^4	1.895 10^5
0.9	1.152 "	4.119 "	2.010 "	1.444 "
0.8	1.054 "	3.681 "	1.622 "	1.090 "
0.7	9.696 10^4	3.315 "	1.324 "	8.190 10^4

Tabella V (continuazione)

Cos α	$ F _{n.u.}^2$	$ F _{u.}^2$	$ F _{n.u.}^2$	$ F _{u.}^2$
0.6	8.974 10^4	3.016 10^5	1.099 10^4	6.167 10^4
0.5	8.361 "	2.775 "	9.322 10^3	4.696 "
0.4	7.845 "	2.587 "	8.120 "	3.657 "
0.3	7.417 "	2.447 "	7.280 "	2.951 "
0.2	7.069 "	2.351 "	6.724 "	2.504 "
0.1	6.793 "	2.297 "	6.392 "	2.262 "
0.	6.583 "	2.283 "	6.241 "	2.195 "
-0.1	6.437 "	2.307 "	6.244 "	2.294 "
-0.2	6.351 "	2.371 "	6.388 "	2.571 "
-0.3	6.326 "	2.476 "	---	---
-0.4	6.362 "	2.625 "	---	---

Cos α	$q = 1.50 f^{-1}$		$q = 1.75 f^{-1}$	
	$ F _{n.u.}^2$	$ F _{u.}^2$	$ F _{n.u.}^2$	$ F _{u.}^2$
1.0	5.398 10^3	3.969 10^3	7.221 10^3	2.089 10^3
0.9	6.438 "	1.094 "	7.660 "	5.796 "
0.8	7.361 "	4.300 "	7.932 "	1.371 10^4
0.7	8.021 "	1.263 10^4	7.907 "	2.518 "
0.6	8.349 "	2.401 "	7.574 "	3.817 "
0.5	8.352 "	3.628 "	6.906 "	5.051 "
0.4	8.096 "	4.770 "	6.096 "	6.074 "
0.3	7.677 "	5.711 "	5.248 "	6.826 "
0.2	7.194 "	6.393 "	4.474 "	7.315 "
0.1	6.732 "	6.790 "	3.849 "	7.575 "
0.	6.351 "	6.898 "	3.414 "	7.639 "
-0.1	6.083 "	6.717 "	3.180 "	7.521 "
-0.2	5.928 "	6.255 "	3.139 "	7.210 "

Cos α	$q = 2.0 f^{-1}$		$q = 2.25 f^{-1}$	
	$ F _{n.u.}^2$	$ F _{u.}^2$	$ F _{n.u.}^2$	$ F _{u.}^2$
1.0	3.348 10^3	5.204 10^3	5.614 10^2	4.150 10^3
0.9	3.382 "	5.488 "	5.477 "	1.023 "

Tabella V (continuazione)

Cos α	$ F ^2_{n.u.}$	$ F ^2_u.$	$ F ^2_{n.u.}$	$ F ^2_u.$
0.8	$3.327 \cdot 10^3$	$9.387 \cdot 10^3$	$4.974 \cdot 10^2$	$1.184 \cdot 10^3$
0.7	3.109 "	$1.586 \cdot 10^4$	4.000 "	2.553 "
0.6	2.720 "	2.318 "	2.691 "	4.416 "
0.5	2.213 "	2.950 "	1.395 "	5.766 "
0.4	1.679 "	3.380 "	$4.824 \cdot 10^1$	6.106 "
0.3	1.201 "	3.609 "	1.279 "	5.656 "
0.2	$8.300 \cdot 10^2$	3.694 "	2.414 "	4.936 "
0.1	5.804 "	3.707 "	5.597 "	4.368 "
0.	4.428 "	3.701 "	8.093 "	4.159 "
-0.1	4.014 "	3.691 "	8.377 "	4.364 "
		$q = 2.50 f^{-1}$	$q = 2.75 f^{-1}$	
1.0	$4.406 \cdot 10^2$	$1.860 \cdot 10^3$	$8.488 \cdot 10^2$	$6.705 \cdot 10^2$
0.9	4.048 "	$3.676 \cdot 10^2$	7.790 "	$2.876 \cdot 10^3$
0.8	3.593 "	$1.115 \cdot 10^3$	7.156 "	6.078 "
0.7	3.156 "	$7.722 \cdot 10^2$	6.602 "	5.818 "
0.6	2.930 "	4.753 "	6.257 "	5.151 "
0.5	3.057 "	5.324 "	6.151 "	5.640 "
0.4	3.524 "	9.259 "	6.150 "	7.563 "
0.3	4.147 "	$1.718 \cdot 10^3$	6.042 "	$1.066 \cdot 10^4$
0.2	4.667 "	2.787 "	5.688 "	1.412 "
0.1	4.881 "	3.714 "	5.102 "	1.679 "
0.	4.711 "	4.038 "	4.408 "	1.770 "
-0.1	4.188 "	3.586 "	3.730 "	1.651 "
		$q = 3.0 f^{-1}$	$q = 1.25 f^{-1}$	
1.0	$6.303 \cdot 10^2$	$4.089 \cdot 10^2$	$4.598 \cdot 10^2$	$4.742 \cdot 10^4$
0.9	5.752 "	$3.619 \cdot 10^3$	3.994 "	2.464 "
0.8	5.309 "	7.555 "	6.521 "	1.041 "

Tabella V (continuazione)

$\text{Cos } \alpha$	$ F ^2_{\text{n.u.}}$	$ F ^2_{\text{u.}}$	$ F ^2_{\text{n.u.}}$	$ F ^2_{\text{u.}}$
0.7	4.873 10^2	7.092 10^3	1.069 10^3	3.332 10^3
0.6	4.506 "	6.100 "	1.533 "	1.514 "
0.5	4.223 "	6.579 "	1.965 "	3.034 "
0.4	3.932 "	8.782 "	2.324 "	6.231 "
0.3	3.524 "	1.227 10^4	2.599 "	9.817 "
0.2	2.978 "	1.602 "	2.798 "	1.287 10^4
0.1	2.389 "	1.882 "	2.935 "	1.482 "
0.	1.885 "	1.976 "	3.027 "	1.536 "
-0.1	1.544 "	1.857 "	3.086 "	1.441 "
-0.2	---	---	3.111 "	1.213 "

XVI. CRITICA DEL PROCEDIMENTO, RISULTATI E CONCLUSIONI

Prima di descrivere i risultati, è bene premettere alcune considerazioni sull'impostazione data al calcolo e sulla sua interpretazione fisica.

Ho introdotto alcune schematizzazioni che equivalgono ad aver costruito un particolare modello del fenomeno della fotoproduzione doppia coerente, modello che sembra plausibile, ma che non è affatto detto che corrisponda alla realtà fisica.

A parte l'uso dell'approssimazione al primo ordine di Born, per descrivere la coerenza, e del modello ottico, per descrivere le interazioni dei pioni, ho usato il modello statistico per calcolare la distribuzione dei momenti trasferiti e la sezione d'urto totale su nucleone libero, che contiene la parte con spin-flip, per eseguire la integrazione sulla bremsstrahlung.

Il modello statistico stabilisce una relazione tra le grandezze cinematiche delle tre particelle nello stato finale, con le sole condizioni di conservazione dell'energia e dell'impulso: condizioni ovviamente valide, ma che non sono le sole che intervengono nel fenomeno. Un'interazione tra i due pioni della coppia, che è stata tralasciata, fa certamente variare la distribuzione delle grandezze cinematiche residue; di conseguenza non si può pensare di ottenere da calcoli di questo tipo, per esempio, una distribuzione angolare di pioni.

Confrontare invece due risultati completamente differenziali, corrispondenti a due modelli di densità dello stesso nucleo e agli stessi valori numerici delle variabili cinematiche, è certamente lecito, perchè le correlazioni

trascurate intervengono come costanti moltiplicative uguali nei due casi.

In secondo luogo, ho studiato il caso della coerenza completa, in cui cioè il nucleo rincula tutto intero, ed è nello stato fondamentale prima e dopo la fotoproduzione. Questa ipotesi porta ad assumere un fattore di forma che è il valor medio sullo stato fondamentale del nucleo di

$$\exp \left[i(q \cdot p) + i(k' + i\frac{k}{2}) S(p, \vartheta) \right].$$

Infatti $|\langle 0 | \rho \rangle|^2$, cioè il modulo quadro della proiezione dello stato fondamentale nello spazio delle configurazioni, rappresenta proprio la densità statica di nucleoni nel nucleo, precedentemente indicata come $n(r)$.

Per prendere in considerazione tutti i possibili stati finali del nucleo, e quindi anche le reazioni incoerenti e parzialmente coerenti, il fattore di forma esatto è dato dalla somma su tutti gli stati finali $|\alpha\rangle$ del nucleo:

$$\sum_{\alpha} \left| \langle 0 | e^{i q \cdot p} e^{i(k' + i\frac{k}{2}) S} | \alpha \rangle \right|^2$$

La somma può essere immediatamente separata in una parte elastica coerente che è il consueto fattore di forma, e in una parte incoerente:

$$\left| \langle 0 | e^{i q \cdot p} e^{i(k' + i\frac{k}{2}) S} | 0 \rangle \right|^2 + \sum_{\alpha \neq 0} \left| \langle 0 | e^{i q \cdot p} e^{i(k' + i\frac{k}{2}) S} | \alpha \rangle \right|^2$$

Se si suppone trascurabile l'assorbimento, il fattore di forma anelastico si ottiene da quello elastico ricordando che gli stati del nucleo costituiscono un sistema completo ortonormale e osservando che $e^{i q \cdot p}$ ha modulo 1:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle 0 | 0 \rangle = \langle 0 | e^{i q \cdot p} e^{-i q \cdot p} | 0 \rangle = \sum_{\alpha} \langle 0 | e^{i q \cdot p} | \alpha \rangle \langle \alpha | e^{-i q \cdot p} | 0 \rangle = \\ &= \sum_{\alpha} \left| \langle 0 | e^{i q \cdot p} | \alpha \rangle \right|^2 = \left| \langle 0 | e^{i q \cdot p} | 0 \rangle \right|^2 + \sum_{\alpha \neq 0} \left| \langle 0 | e^{i q \cdot p} | \alpha \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

Dovendo tener conto dell'assorbimento, che nel mio caso costituisce l'effetto nucleare predominante, non è possibile ottenere nel semplice modo descritto l'espressione del fattore di forma anelastico, poichè il fattore di assorbimento non ha modulo 1. Questo significa che poichè non si è in grado di conoscere quale è la frazione coerente del fenomeno, non si può dire quale frazione della sezione d'urto reale sia stata calcolata.

Infine, anche se fisicamente avvenisse solo fotoproduzione completamente coerente, i risultati finali della integrazione sullo spettro dei fotoni non sarebbero esatti, perchè attualmente non si conosce la parte non spin-flip della sezione d'urto su nucleone libero.

Per questi motivi il calcolo è di interesse quantitativo se se ne guardano i risultati parziali, cioè i fattori di forma, dipendenti dall'energia del fotone e dal momento trasferito: in essi infatti non intervengono ancora nè la distribuzione statistica dei momenti trasferiti nè la sezione d'urto totale.

Pertanto l'esame dei fattori di forma per due diversi modelli di densità permette di valutare l'entità dell'effetto della superficie del nucleo.

I risultati delle integrazioni successive assicurano invece che l'effetto del modello di densità non si attenua nel corso delle integrazioni sul momento trasferito e sullo spettro di bremsstrahlung, ammettendo la sola correlazione statistica e usando sezioni d'urto su nucleone libero, i cui ordini di grandezza sono plausibili; pertanto probabilmente l'effetto del modello di densità si conserva anche introducendo le vere correlazioni e le sezioni d'urto reali. Le due sezioni d'urto $\frac{d^2\sigma}{dk_1 d\Omega_1}$ trovate per i due

diversi modelli possono anche essere usati per valutare l'ordine di grandezza della sezione d'urto reale.

Fatte queste premesse, passo a esaminare i risultati parziali e finali per la fotoproduzione doppia in carbonio, riportati nelle tab. V e VI: sono stati usati il modello di densità uniforme con raggio di 3.04 fermi e il modello hollow exponential con $\alpha = 4/3$, $a = 1.63$ fermi.

Nella tab. V sono riportati i valori dei fattori di forma in funzione di $\cos \alpha$, nell'intervallo di angoli permessi dalla distribuzione statistica, per valori costanti del momento trasferito. In questi numeri non è contenuto un fattore moltiplicativo costante, uguale a $4.88 \cdot 10^{-5}$, che deriva dall'esecuzione numerica degli integrali con la formula di Simpson, fattore del quale si è invece tenuto conto nei risultati successivi.

I fattori di forma $|F|^2$, per la loro definizione, rappresentano il quadrato del numero di nucleoni sui quali avviene il processo coerente: la verifica - immediata - che i fattori di forma calcolati non superano mai A^2 (= 144 per il carbonio), può essere considerata un controllo della correttezza del calcolo.

In tab. VI sono riportati gli integrali $f_1(P, q) = \int \chi(P, q, \alpha) |F|^2 d\cos \alpha$ in funzione di q , con $P = \text{cost}$; infine gli integrali $f_2(P) = \int f_1(P, q) dq = \int dq \int d\cos \alpha |F|^2 \chi(P, q, \alpha)$. Le funzioni f_1 e f_2 sono graficate nelle figg. 15-20.

Il confronto dei fattori di forma dei due modelli mostra differenze quantitative estremamente notevoli, a volte di un ordine di grandezza. Tali differenze si mantengono dopo le integrazioni su α e su q .

L'effetto è da attribuirsi essenzialmente alla superficie del nucleo, come può essere visto qualitativamente esaminando il grafico n° 4 delle due densità normalizzate del carbonio

e osservando che le funzioni da integrare su Ω hanno in comune la funzione di Bessel e differiscono nei termini che contengono la S: la parte di sfasamento si limita a spostare gli zeri ed è estremamente poco sensibile a variazioni di k' di alcuni ordini di grandezza; il termine di assorbimento è invece molto diverso: per es. per la produzione al centro del nucleo, l'esponenziale è rispettivamente $e^{-2.65}$, $e^{-3.3}$ per il modello uniforme e per il modello non uniforme.

La differenza tra i due modelli è dunque prevedibile: quello che non si poteva valutare a priori e che ha richiesto la conferma dei calcoli è che l'effetto della superficie nella fotoproduzione coerente sia così vistoso e soprattutto non si attenui con le successive integrazioni.

TABELLA VI

FUNZIONI $f_1(q, P) = \int \chi(q, \alpha) \cdot |F|^2 d\cos\alpha$
 $f_2(P) = \int f_1(q, P) dq$

q	P = 500 MeV		P = 600 MeV	
	f _{1n.u.}	f _{1u.}	f _{1n.u.}	f _{1u.}
0.25	6.30 10 ⁻⁶	1.55 10 ⁻⁵	2.90 10 ⁻⁵	7.33 10 ⁻⁵
0.50	8.01 10 ⁻⁵	2.18 10 ⁻⁴	8.08 "	2.23 10 ⁻⁴
0.75	9.34 "	3.22 "	7.17 "	2.46 "
1.00	2.49 "	1.53 "	1.85 "	1.12 "
1.25	4.60 10 ⁻⁶	2.14 10 ⁻⁵	4.07 10 ⁻⁶	2.88 10 ⁻⁵
1.50	2.56 10 ⁻⁵	1.25 10 ⁻⁴	2.76 10 ⁻⁵	1.15 10 ⁻⁴
1.75	2.13 10 ⁻⁵	2.07 "	3.32 "	2.14 "
2.00	6.25 10 ⁻⁶	1.45 "	1.43 "	1.59 "
2.25	2.55 10 ⁻⁷	2.84 10 ⁻⁵	1.75 10 ⁻⁶	3.28 10 ⁻⁵
2.50	2.32 10 ⁻⁶	1.19 "	3.41 "	1.31 "
2.75	3.71 "	8.05 "	5.96 "	9.22 "
3.00	2.06 "	1.03 10 ⁻⁴	4.00 "	1.34 10 ⁻⁴
	P = 700 MeV		P = 800 MeV	
0.25	3.19 10 ⁻⁵	8.21 10 ⁻⁵	1.98 10 ⁻⁵	5.17 10 ⁻⁵
0.50	7.33 "	2.04 10 ⁻⁴	4.13 "	1.16 10 ⁻⁴
0.75	5.99 "	2.06 "	3.21 "	1.11 "
1.00	1.48 "	8.82 "	7.70 10 ⁻⁶	4.51 10 ⁻⁵
1.25	3.52 10 ⁻⁶	2.44 10 ⁻⁵	1.91 "	1.30 "
1.50	2.25 10 ⁻⁵	9.87 "	1.17 10 ⁻⁵	5.32 "
1.75	2.71 "	1.74 10 ⁻⁴	1.41 "	9.57 "
2.00	1.23 "	1.29 "	4.41 10 ⁻⁶	7.05 "
2.25	1.75 10 ⁻⁶	2.73 10 ⁻⁵	9.42 10 ⁻⁷	1.45 "
2.50	3.28 "	1.18 "	1.78 10 ⁻⁶	6.61 10 ⁻⁶
2.75	6.64 "	8.37 "	3.60 "	4.43 10 ⁻⁵
3.00	5.07 "	1.33 10 ⁻⁴	2.85 "	7.12 1"

Tabella VI (continuazione)

P = 900 MeV

q	$f_{1n.u.}$	$f_{1u.}$
0.25	$9.99 \cdot 10^{-6}$	$2.61 \cdot 10^{-5}$
0.50	$2.07 \cdot 10^{-5}$	2.91 "
0.75	1.53 "	5.34 "
1.00	$3.56 \cdot 10^{-6}$	2.07 "
1.25	$9.20 \cdot 10^{-7}$	$6.13 \cdot 10^{-6}$
1.50	$5.49 \cdot 10^{-6}$	$2.59 \cdot 10^{-5}$
1.75	6.54 "	4.57 "
2.00	2.95 "	3.31 "
2.25	$4.41 \cdot 10^{-7}$	$6.84 \cdot 10^{-6}$
2.50	8.49 "	3.24 "
2.75	$1.72 \cdot 10^{-6}$	$2.20 \cdot 10^{-5}$
3.00	1.36 "	3.51 "

P(MeV)	$f_{1n.u.}$	$f_{2u.}$	$\frac{\sigma(P)}{P} f_{2n.u.}$	$\frac{\sigma(P)}{P} f_{2u.}$
500	$6.6 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-2}$
600	7.1 "	3.4 "	1.97 "	$9.5 \cdot 10^{-3}$
700	6.4 "	3.2 "	1.26 "	6.3 "
800	3.5 "	1.65 "	$4.3 \cdot 10^{-4}$	2.0 "
900	1.8 "	$8.05 \cdot 10^{-5}$	2.3 "	1.04 "

$$\int_{500}^{900} f_2(P)_{n.u.} \cdot \frac{\sigma(P)}{P} dP = 2.43 \cdot 10^{-3} \mu\text{barn/sterad}$$

$$\int_{500}^{900} f_2(P)_{u.} \cdot \frac{\sigma(P)}{P} dP = 1.17 \cdot 10^{-2} \mu\text{b/sterad}$$

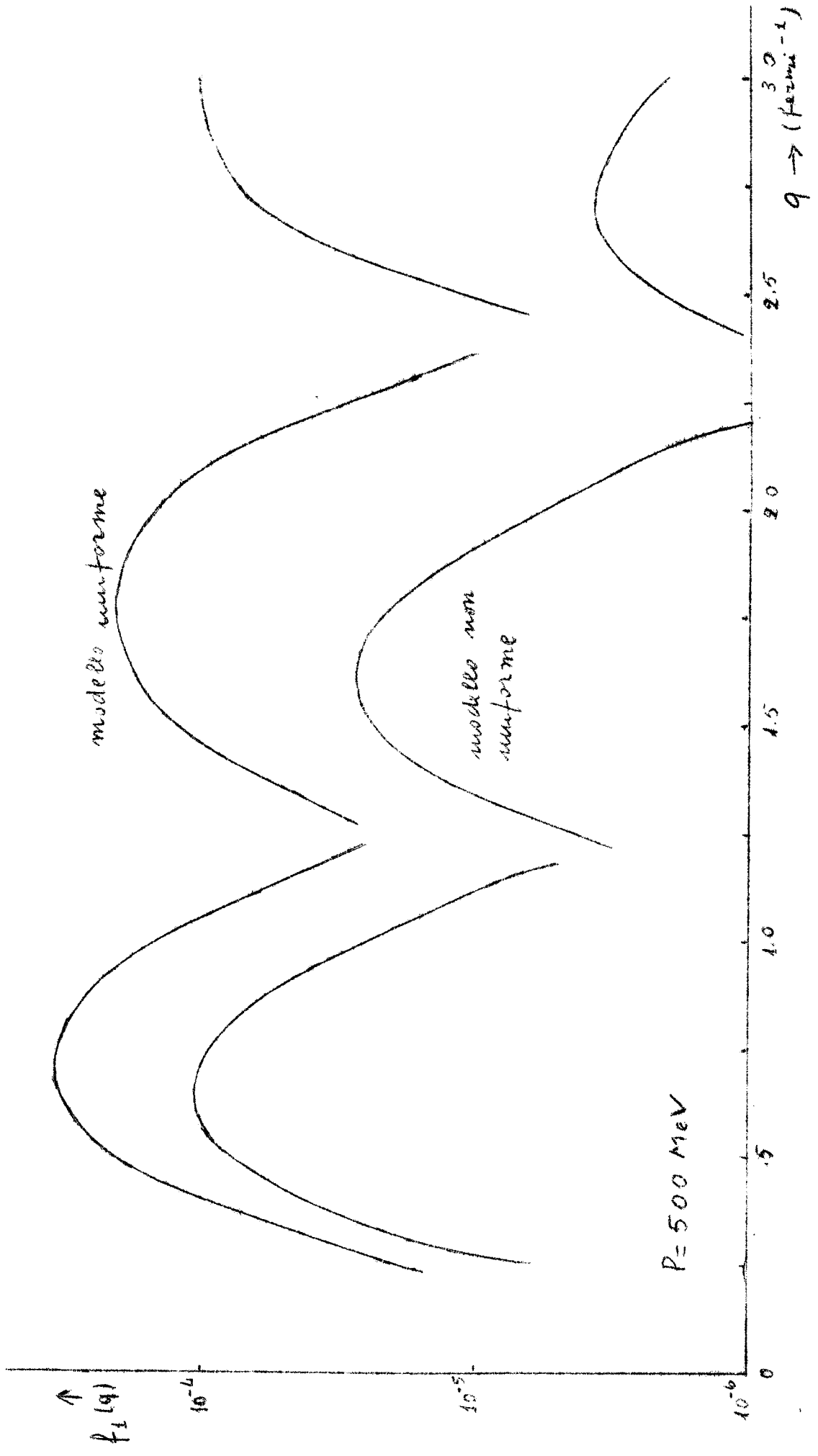
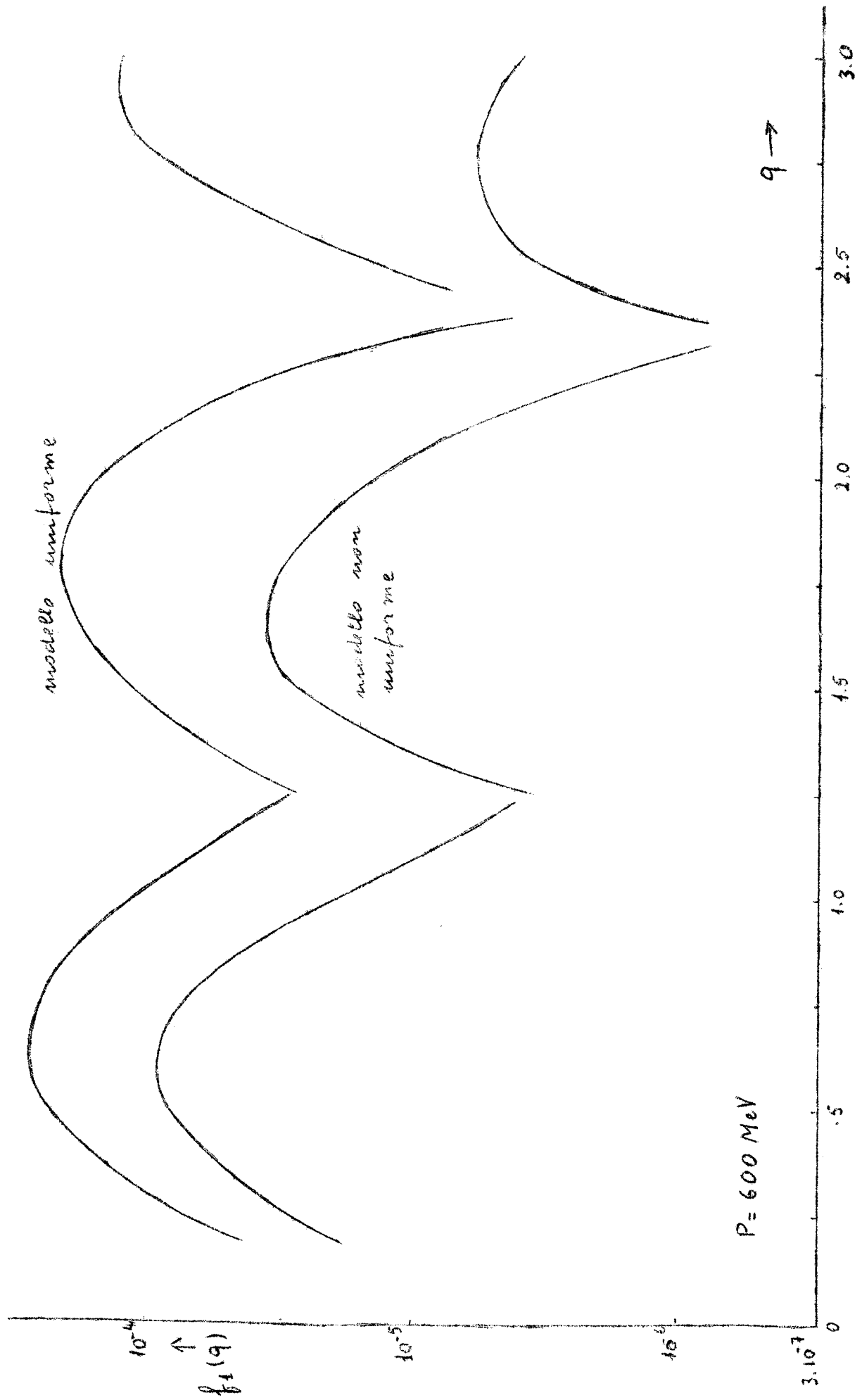
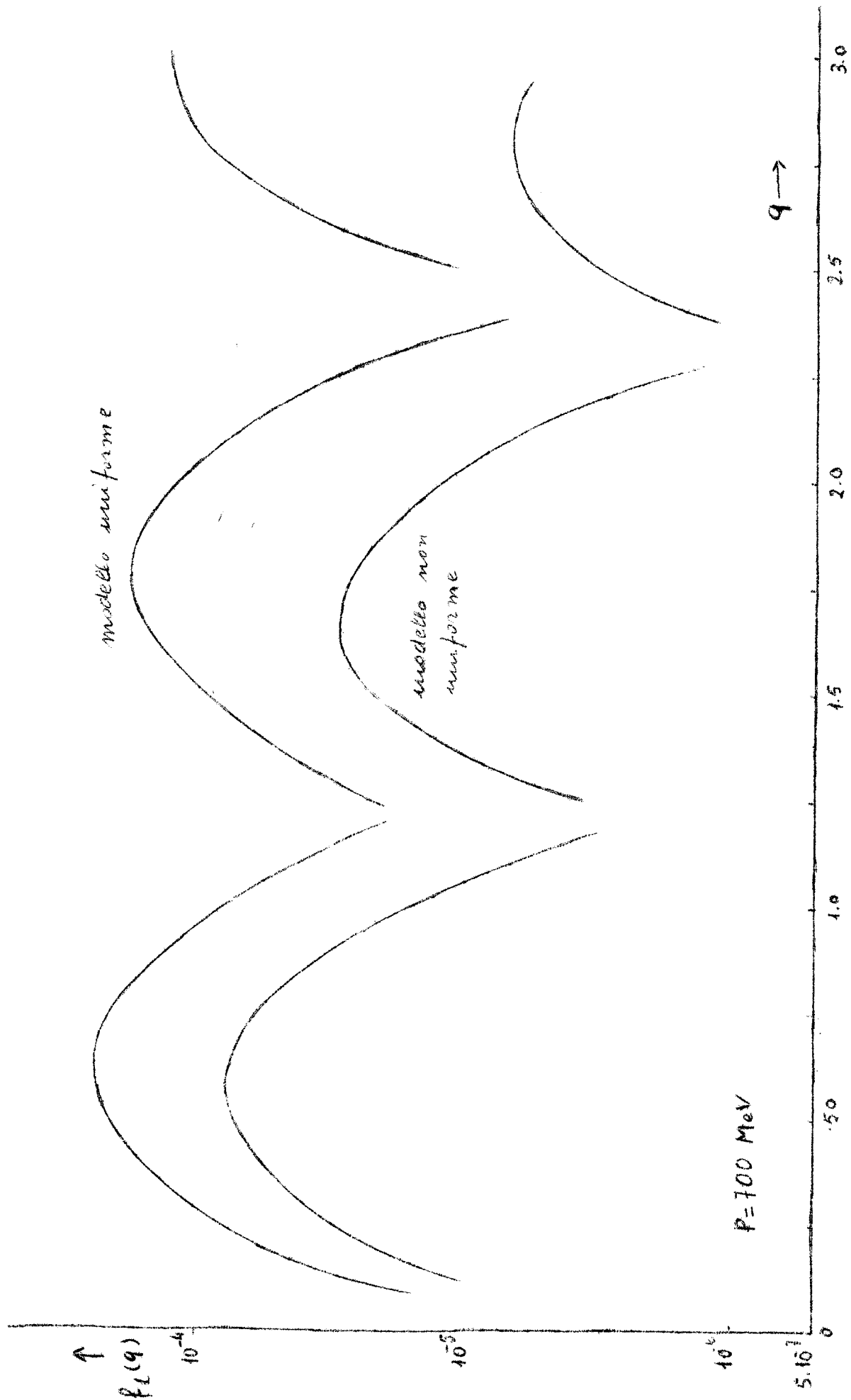


FIG. 14





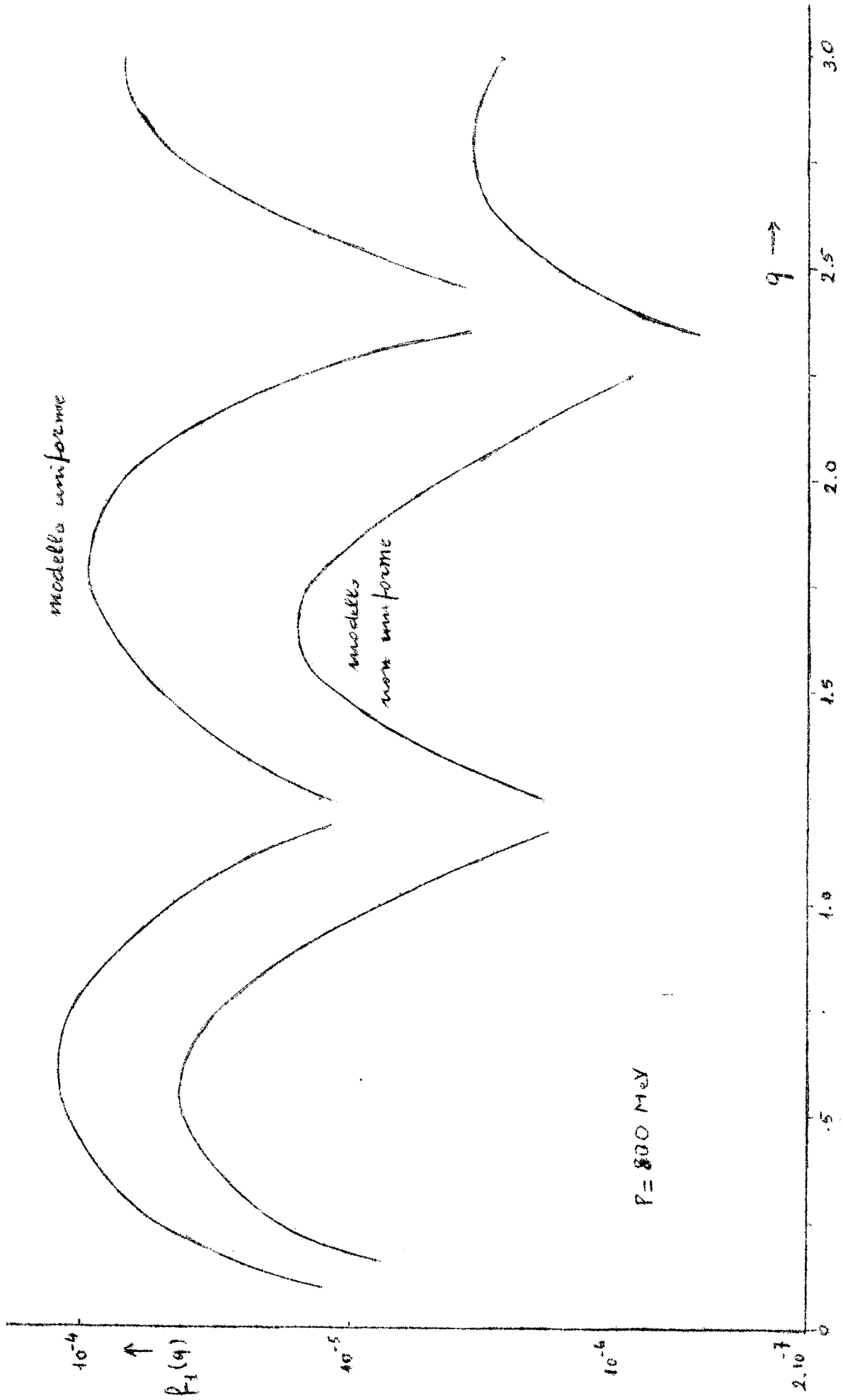


FIG. 17

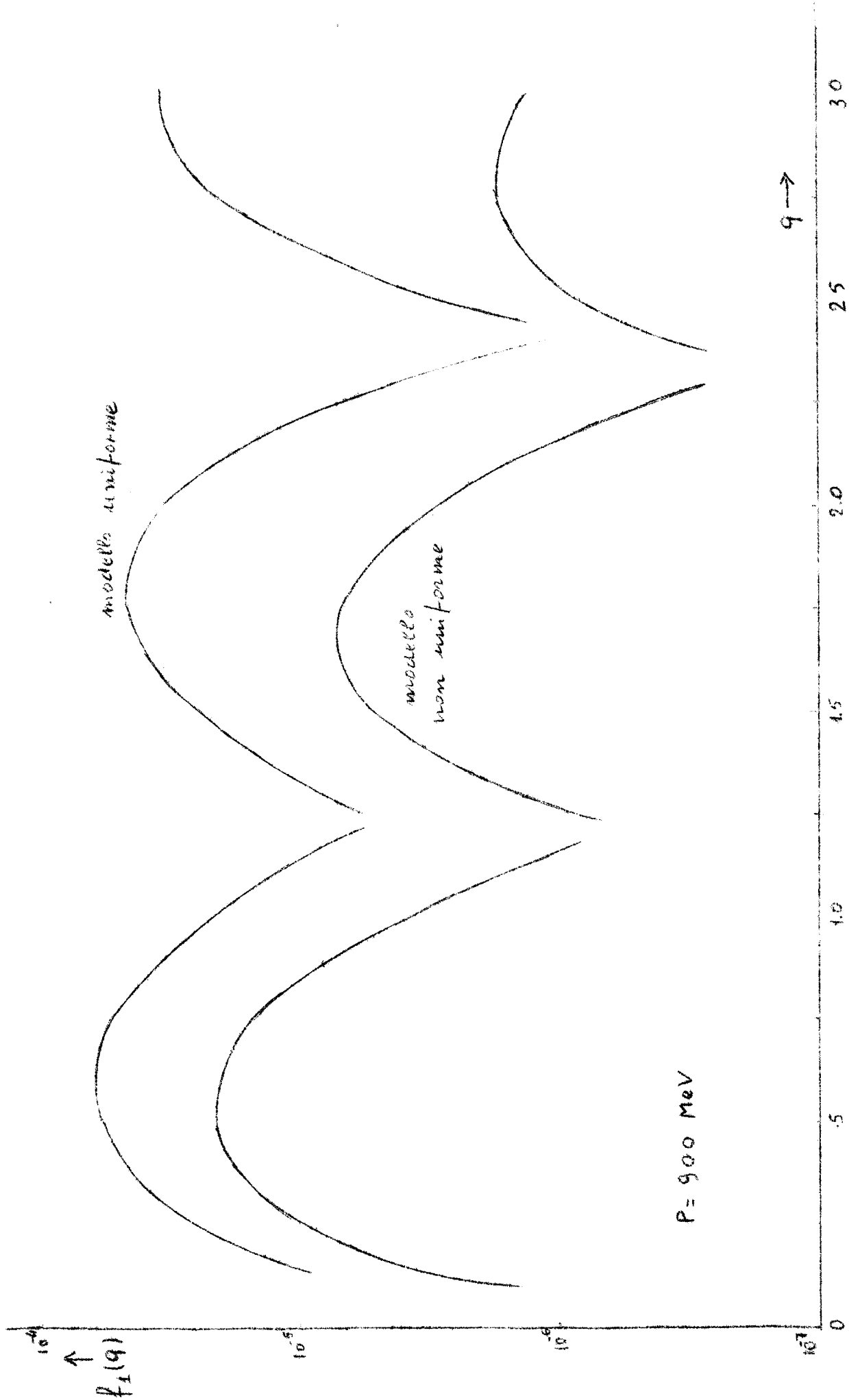


FIG. 18

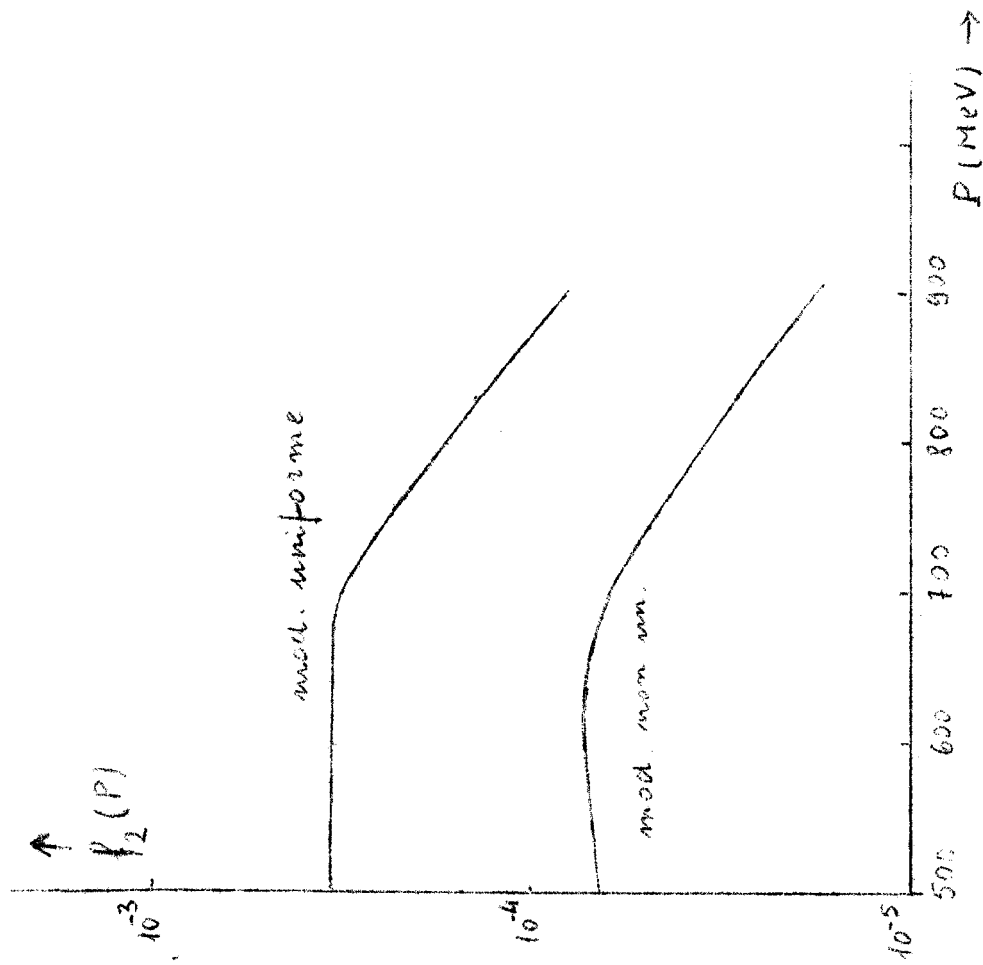
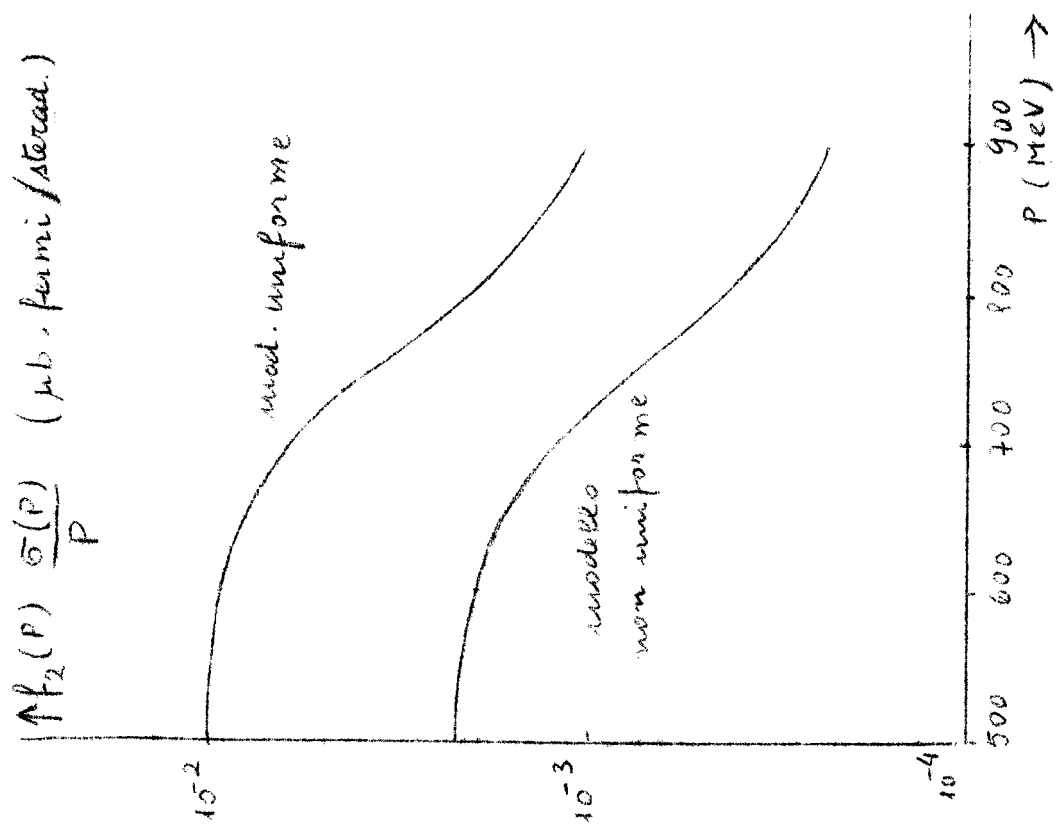


FIG. 19

APPENDICE I. - Integrazioni su \mathcal{V} usando la formula asintotica della funzione di Bessel e l'approssimazione $S = A(r) + B(r)\cos \mathcal{V} + C(r)\cos^2 \mathcal{V}$.

Riscrivo la formula di pag. 50:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} b^{m-\nu} c^{\nu} \frac{2^{\frac{m+\nu-1}{2}}}{Q^{\frac{m+\nu+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{m+\nu+1}{2}\right) \cdot \left[1 + (-1)^{m+\nu}\right] J_{\frac{m+\nu+1}{2}}(Q)$$

Eseguendo le sostituzioni:

$$J_{\frac{m+\nu+1}{2}}(Q) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi Q}} \sin\left(Q - \frac{\pi}{2} \frac{m+\nu+1}{2}\right);$$

$$\sin\left(Q - \frac{\pi}{2} \frac{m+\nu+1}{2}\right) = \frac{e^{iQ} e^{-i\frac{\pi}{2} \frac{m+\nu+1}{2}} - e^{-iQ} e^{i\frac{\pi}{2} \frac{m+\nu+1}{2}}}{2i};$$

$$\Gamma\left(\frac{m+\nu-1}{2} + 1\right) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{m+\nu-1}{2}} dy,$$

si possono eseguire le somme.

Separando la parte reale e la parte immaginaria dei coefficienti, dopo alcune semplificazioni il calcolo si riduce ad eseguire integrali del tipo:

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha z^2 + \beta z} \frac{\cos(\gamma z^2 + \delta z)}{\sin(\gamma z^2 + \delta z)} dz$$

per i quali esistono formule di integrazione definita.

Sommando le varie parti, si ottiene, per l'integrale su \mathcal{V} , un'espressione notevolmente complicata: ne trascrivo, a parte alcune costanti moltiplicative, la parte reale; la parte immaginaria ha una forma molto simile che differisce da quella della parte reale solamente per alcuni segni negli argomenti.

$$\text{Re} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1 - \frac{2}{Q} k' c(p) + \frac{4}{Q^2} \left(\frac{k}{2}\right)^2 [c(p)]^2}} \cdot \exp \left[\frac{\rho^2 \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \rho^2 (q \cos \alpha - k')^2}{4Q \left(1 - \frac{2}{Q} k' c(p) + \frac{4}{Q^2} \left(\frac{k}{2}\right)^2 c^2(p)\right)^{1/2}} \right]$$

$$\cdot \cos \left\{ \text{artg} \frac{-\frac{4}{Q} \frac{k}{2} c(p)}{\frac{\rho}{2\sqrt{Q}} (q \cos \alpha - k' - \frac{k}{2})} - 2 \text{artg} \frac{q \cos \alpha - k' + \frac{k}{2}}{q \cos \alpha - k' - \frac{k}{2}} \right\}$$

$$\cdot \left[\cos \left\{ \text{artg} \frac{q \cos \alpha - k' + \frac{k}{2}}{q \cos \alpha - k' - \frac{k}{2}} + \frac{\rho^2 \left(\left(\frac{k}{2}\right)^2 + (q \cos \alpha - k')^2\right)}{4Q \left(1 - \frac{2}{Q} k' c(p) + \frac{4}{Q^2} \left(\frac{k}{2}\right)^2 c^2(p)\right)^{1/2}} \right\} \right]$$

$$\cdot \cos \left[\text{artg} \frac{-\frac{4}{Q} \frac{k}{2} c(p)}{\frac{\rho}{\sqrt{Q} \cdot 2} (q \cos \alpha - k' - \frac{k}{2})} - 2 \text{artg} \frac{q \cos \alpha - k' + \frac{k}{2}}{q \cos \alpha - k' - \frac{k}{2}} \right] + Q \Bigg\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \left\{ \dots + Q \right\} \Bigg] + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1 + \frac{2}{Q} k' C(p) + \frac{4}{Q^2} \left(\frac{k}{2}\right)^2 C^2(p)}} \cdot \\
& \cdot \exp \left[\frac{p^2 \left(\left(\frac{k}{2}\right)^2 + (q \cos \alpha - k')^2\right)}{4Q \left(1 + \frac{2}{Q} k' C(p) + \frac{4}{Q^2} \left(\frac{k}{2}\right)^2 C^2(p)\right)^{1/2}} \cdot \cos \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\frac{4}{Q} \frac{k}{2} C(p)}{\frac{p}{2\sqrt{Q}} (k + q \cos \alpha - k')} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \operatorname{arctg} \frac{q \cos \alpha - k' - \frac{k}{2}}{q \cos \alpha - k' + \frac{k}{2}} \right\} \right] \cdot \left[\cos \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\frac{4}{Q} \frac{k}{2} C(p)}{\frac{p}{2\sqrt{Q}} (q \cos \alpha - k' + \frac{k}{2})} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{p^2 \left(\left(\frac{k}{2}\right)^2 + (q \cos \alpha - k')^2\right)}{4Q \left(1 + \frac{2}{Q} k' C(p) + \frac{4}{Q^2} \left(\frac{k}{2}\right)^2 C^2(p)\right)^{1/2}} \cdot \cos \left[\operatorname{arctg} \frac{\frac{4}{Q} \frac{k}{2} C(p)}{\frac{p}{2\sqrt{Q}} (q \cos \alpha - k' + \frac{k}{2})} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \operatorname{arctg} \frac{q \cos \alpha - k' - \frac{k}{2}}{q \cos \alpha - k' + \frac{k}{2}} \right] - Q \right\} + \sin \left\{ \dots - Q \right\} \Bigg]
\end{aligned}$$

dove, ricordando le precedenti notazioni,

$$Q = q p \sin \alpha$$

$C(p)$, polinomio del 3° ordine in p (Fig 11).

APPENDICE II.

I calcoli numerici di questo lavoro sono stati eseguiti in parte con il 1620 IBM dei Laboratori di Frascati, in parte con il 7090 IBM del C.C.R. Euratom di Ispra.

Con il 1620 sono state eseguite operazioni preliminari per testare le singole parti del programma, valutare il tempo di macchina necessario per l'esecuzione completa, tabulare le funzioni da integrare, nei casi in cui oscillano di più, scegliere il numero di intervalli necessari per eseguire con sufficiente approssimazione le integrazioni numeriche.

Il calcolo completo è risultato troppo vasto per una macchina 1620, che ha una memoria di sole 2000 parole. E' infatti necessario tabulare le funzioni con un numero di punti molto elevato, almeno 201 per l'integrazione su ϑ e 51 per l'integrazione su φ .

Nel caso del carbonio è stato calcolato con il 1620 il fattore di forma in corrispondenza a $P = 900$ MeV, e $q \sin \alpha = 2.816$ questo è infatti il caso in cui il numero degli zeri della funzione $J_0(q \varphi \sin \alpha \sin \vartheta)$ è massimo.

Il tempo di macchina è stato dell'ordine delle 15 ore per ogni integrazione su ϑ . Per eseguire questo integrale si è dovuto spezzare il programma in quattro parti distinte, trasferendo i risultati parziali da un programma al successivo mediante perforazione su nastro: circa il 40% del tempo è stato impiegato per la perforazione.

Sul 7090 è stato eseguito il calcolo completo, programmato in linguaggio Fortran, e descritto

dagli schemi a blocchi allegati.

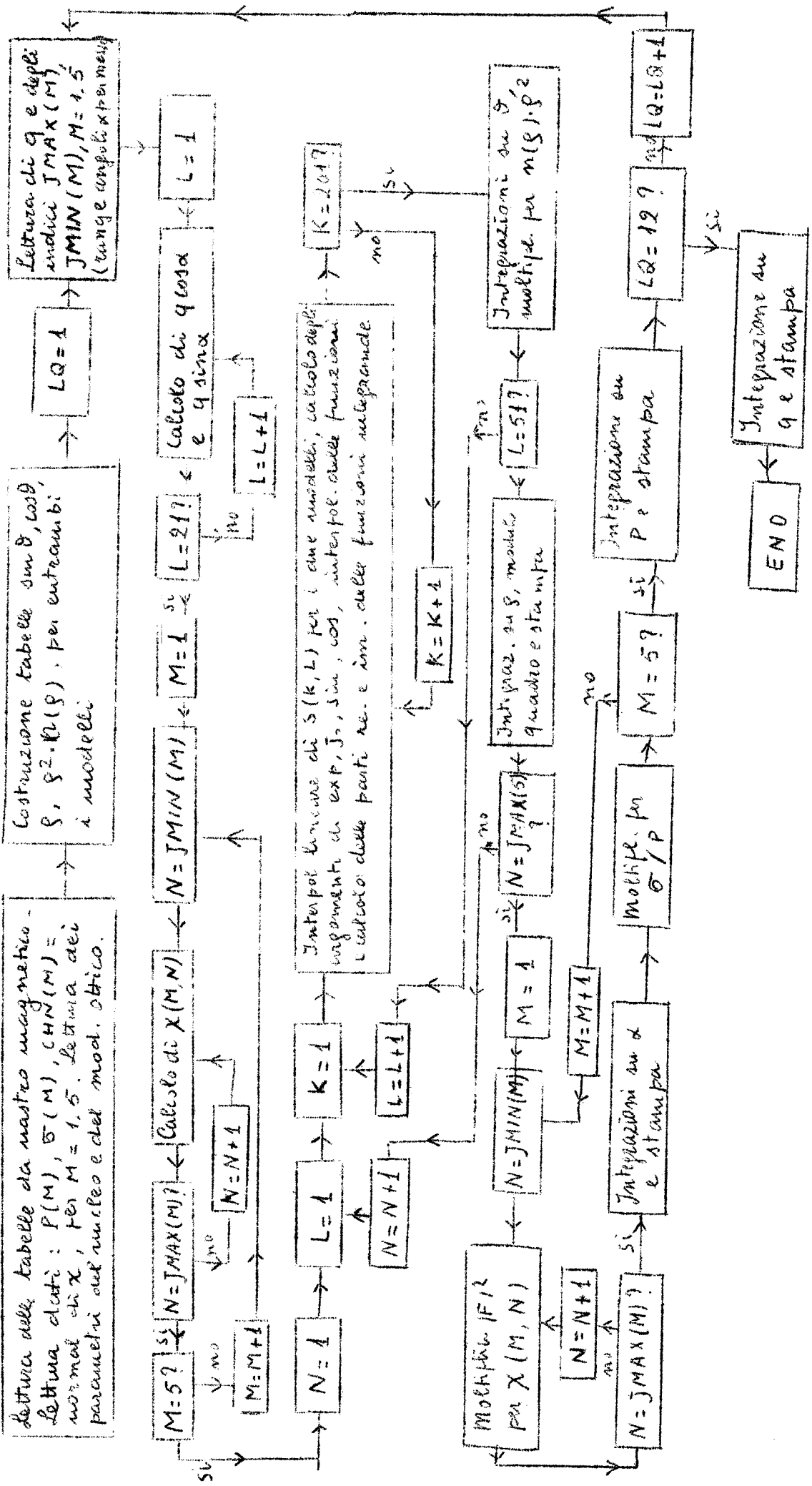
Su questa macchina non esistono praticamente problemi di capacità di memoria (30.000 parole), e questo ha permesso di ottimizzare il programma e rendere minimo il tempo necessario all'esecuzione, con l'accorgimento di ridurre il più possibile il numero di operazioni del ciclo più interno del calcolo, cioè l'esecuzione degli integrali su \mathcal{V} .

Per far ciò, anziché calcolare in ogni ciclo le funzioni S, gli esponenziali, le funzioni di Bessel, le funzioni circolari, invocando continuamente le relative subroutines, queste funzioni sono state precedentemente tabulate con passo molto fitto (1/100 dell'argomento) e memorizzate, cosicché nell'interno del ciclo si compiono solo operazioni di ricerca tabellare ed interpolazione lineare, che sono eseguite prevalentemente in virgola fissa, e pertanto sono molto rapide.

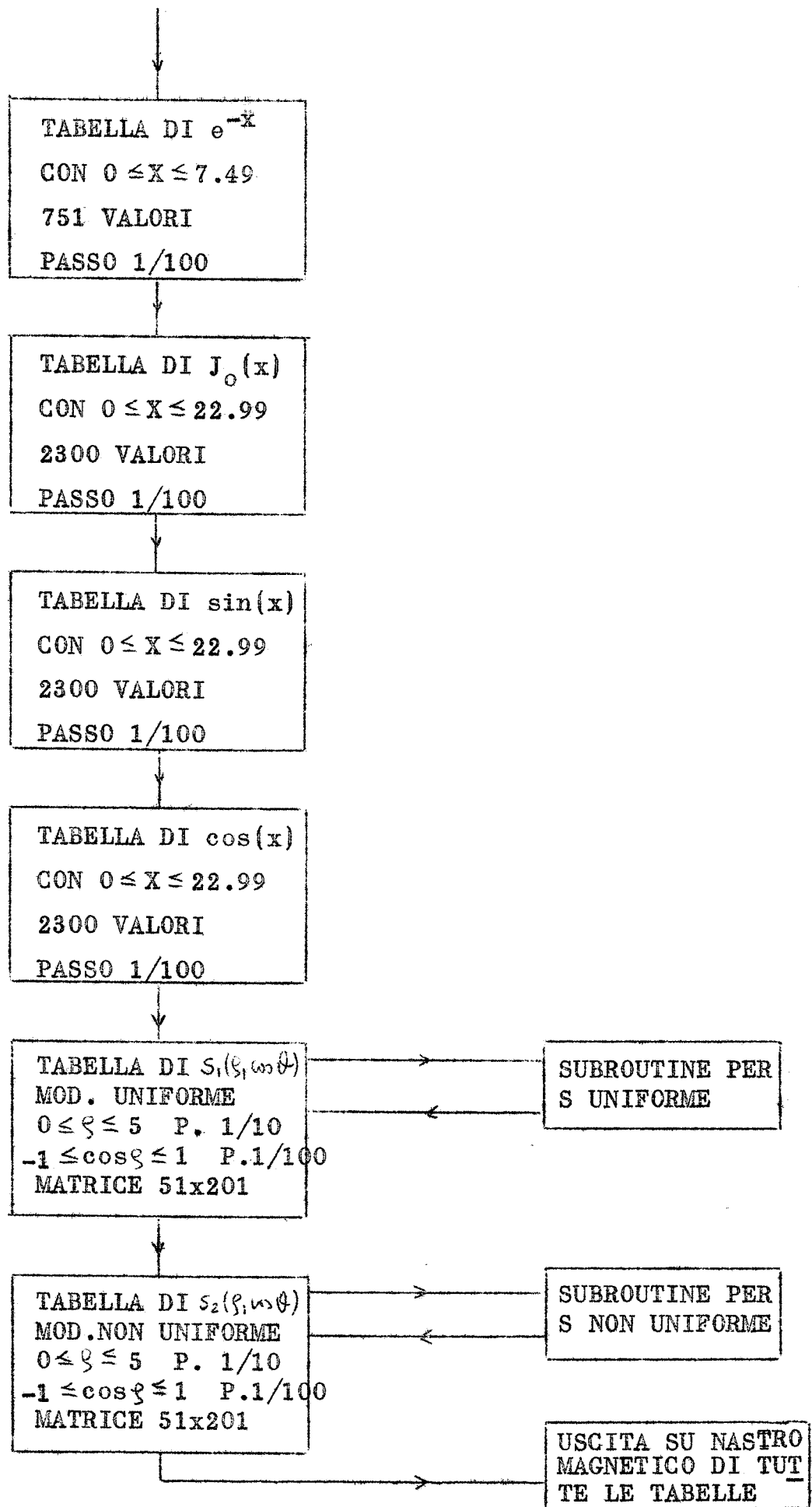
Con questi accorgimenti, il calcolo completo di due modelli, usando 201 intervalli su \mathcal{V} , 51 su ρ , 11 su q , 5 su P , richiede 22' di tempo.

Sono stati stampati i risultati intermedi delle integrazioni, e questo ha permesso di constatare che con 11 intervalli su q non si ottiene una precisione sufficiente: per questo motivo nei risultati riportati nel cap.XVI ho usato anche punti interpolati.

Il programma del calcolo si presta per qualunque modello e qualunque nucleo, pur di sostituire le subroutines che calcolano le funzioni S.



SCHEMA A BLOCCHI DEL CALCOLO DEGLI INTEGRALI.



SCHEMA A BLOCCHI PER LA COSTRUZIONE
DELLE TABELLE

Bibliografia

- 1) Sellen, Cocconi, Cocconi, Hart: Cross section for double and triple mesons production in Hydrogen by photons with energies up to 1 Bev. P.R. 110, 779, 1958
- 2) Sellen, Cocconi, Cocconi, Hart: Multiple mesons production by photons in Hydrogen P.R. 113, 1323, 1959
- 3) Chasan, Cocconi, Cocconi, Sheetman, White: Multiple mesons production by photons in Hydrogen. P.R. 119, 811, 1960
- 4) Chew, Wick: The impulse approximation - P.R. 85, 636, 1952
- 5) Serber: Nuclear reaction at High-energies - P.R. 72, 1114, 1947
- 6) R.E. Marshak: Mesons physics - Mc Graw-Hill New York 1952
- 7) Mc Millan, Teller: P.R. 72, 1, 1947
- 8) Ter Haar: Creation of mesons by High-energy particles Science 108, 57, 1948
- 9) Barkas: P.R. 75, 1109, 1949
- 10) Bethe: Rev. Mod. Phys. 9, 85, 1937 - 53 A(modello del gas di Fermi)
- 11) Mott: Proc. Roy. Soc. A 124, 426, 1929
" " " A 135, 429, 1932
- 12) Bartlett, Watson: Proc. Amer. Acad. Arts and Science 74, 53, 1940
- 13) W. Mc Kinley, H. Feshbach: The coulomb scattering of relativistic electrons by Nuclei P.R. 74, 1759, 1948
- 14) R.H. Dalitz: Sull'approssimazione di Born di ordine più elevato nello scattering di potenziale - Proc. Roy. Soc. A 208, 509, 1951
- 15) Budini, Furlan: Scattering elastico di elettroni e positroni da parte di nuclei estesi - N.C. XIII n° 4, 790, 1959
- 16) Rosenbluth: P.R. 79, 615, 1950

- 17) Chambers, Hofstadter: Structure of the proton - P.R. 103, 1454, 1956.
- 18) R. Hofstadter: Nuclear and neutron scattering of high-energy electrons - Ann. Rev. Nucl. Sc. 7, 232, 1957
- 19) R. Hofstadter: Electron scattering and nuclear structure - Rev. Mod. Phys. 28, 214, 1956
- 20) Hofstadter, Bumiller, Yearian: Electromagnetic structure of the proton and the neutron - Rev. Mod. Phys. 30, 482, 1958
- 21) Bumiller, Croissiaux, Hofstadter: Electron scattering from the proton - Phys. Rev. Lett. 5, 261, 1960
- 22) Hofstadter, Bumiller, Croisseaux: High-energy electron scattering - Splitting of the proton form factors and diffraction in the proton - Phys. Rev. Lett. 5, 263, 1960
- 23) L.N. Hand: Electron-proton scattering at 900 MeV and 135° - Phys. Rev. Lett. 5, 168, 1960
- 24) J.M. Cassels: Electron-proton scattering in the GeV range - Stanford University - Giugno 1960
- 25) L. Wilets: Theories of the nuclear surface - Rev. Mod. Phys. 30, 542, 1958
- 26) Swiatecky: The effect of a potential Gradient on the Density of a degenerate Fermi gas - Proc. Phys. Soc. London A 68, 285, 1955; e anche A 63, 1208, 1950
- 27) R.A. Berg, L. Wilets: Nuclear surface effects - Phys. Rev. 101, 201, 1956
- 28) L. Wilets: Phys. Rev. 101, 1805, 1956 - Theory of the nuclear surface.
- 29) M. Rotenberg: Phys. Rev. 100, 439, 1954.
- 30) Johnson, Teller: Phys. Rev. 93, 357, 1954 - Proton distribution in heavy nuclei.

- 31) Barringer, Meunier, Osborn: π^0 photoproduction from complex nuclei - CERN Symposium 1956, vol. 2, 282
- 32) Schanck, Leiss: Nuclear matter distribution from coherent neutral pions production - Rev. Mod. Phys. 30, 456, 1958
- 33) Schranck, Penner, Leiss: Low-energy photoproduction of neutral mesons from complex nuclei - Nuovo Cim. 16, 759, 1960
- 34) C.D. Zarby: Electromagnetic production of pions pair - Oak Ridge National Lab. - Neutron physics Division - 3033 - 17 gennaio 1961
- 35) Hill, Ford: Ann. Rev. Nucl. Sc. 5, 25, 1956
- 36) J. Fregeau: Phys. Rev. 104, 225, 1956 - Elastic and inelastic scattering of 187 MeV electron from carbon 12
- 37) R.H. Helm: Inelastic and elastic scattering of 187 MeV electron from selected even-even nuclei - Phys. Rev. 104, 1466, 1956
- 38) Cronin, Cool, Abashian: Cross section of nuclei for high-energy pions - Phys. Rev. 107, 1121, 1957
- 39) Bruckner, Serber, Watson: The interaction of π -meson with nuclear matter - Phys. Rev. 84, 258, 1951
- 40) J. Hamilton: The theory of the elementary particles - Clarendon Press - Oxford 1959
- 41) Fernbach, Serber, Taylor: The scattering of high-energy neutrons by nuclei - Phys. Rev. 75, 1325, 1949
- 42) Clementel: Interazioni dei mesoni π con la materia nucleare - Nuovo Cim. 9, 369, 1952
- 43) Laing, Moorhouse: Photoproduction of pions at complex nuclei - Proc. Phys. Soc. A 70, 629, 1957.
- 44) Watson, Zemach: The kinematics of mesons interactions within nuclei - Nuovo Cim. 10, 452, 1958

- 45) Pevsner, Rainwater: Phase shift calculation for elastic scattering of pions on Aluminium - Phys. Rev. 100, 1431, 1955.
- 46) Frank, Gammel, Watson: Optical model for pion-nucleus scattering - Phys. Rev. 101, 891, 1956
- 47) Metropolis, Biving, Storm, Miller, Friedlander, Turkevich: Phys. Rev. 110, 204, 1958 - Montecarlo Calculation on Intranuclear Cascades; - II High-energy studies and Pion Processes.
- 48) J.O. Kessler - L.M. Lederman: Interaction of negative pions in carbon and lead - Phys. Rev. 94, 689, 1954
- 49) H.L. Anderson, and al.: Causality in the pion-proton scattering - Phys. Rev. 100, 339, 1955
- 50) R.M. Sternheimer: Total cross section for scattering and absorption of pions by nuclei - Phys. Rev. 101, 384, 1956
- 51) R. Cool, and al.: Pion proton total cross section from 0.45 to 1.9 BeV - Phys. Rev. 103, 1082, 1956
- 52) G. Franzinetti, G. Morpurgo: An introduction to the physics of the new particles - Suppl. Nuovo Cim. 6, serie X, 469, 1957
- 53) M.M. Block: Phase-space integrals for multiparticle systems - Phys. Rev. 101, 796, 1956.