

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-61/30 (8. 6. 61)

R. Evangelisti, G. Sacerdoti: APPROFONDIMENTO DELLO STUDIO  
DEL SISTEMA DI ACCUMULAZIONE AD OTTO PROPOSTO NELLA  
NOTA INTERNA N. 73.

Nota interna: n° 81  
7 Giugno 1961.

In tale nota si approfondisce lo studio del sistema di accumulazione ad otto proposto nella nota interna n° 73 (R. Evangelisti e G. Sacerdoti: Alcune proprietà di un anello di accumulazione ad otto), ricavandone altre proprietà ed eseguendo i calcoli per un diverso sistema di cavità a radiofrequenza: i risultati negativi ottenuti sono in perfetto accordo con quanto trovato nella NI 73.

1. - Variazione del tempo di rivoluzione provocata da due perturbazioni ad azimut diversi

Abbiamo dapprima dimostrata la validità generale di quanto asserito a pag. 4 della NI 73 e cioè che se una qualche causa di perturbazione provoca una deviazione della particella dall'orbita stabile, la variazione percentuale  $\Delta t/T_0$  del tempo di rivoluzione rispetto al periodo delle particelle sincrone è legata alla entità della causa perturbante da una costante il cui valore è rigorosamente indipendente dall'azimut. Nella NI 73 era stata dimostrata tale variazione per le sezioni contraddistinte in fig. 1 con  $S_1, S_2, S_3, S_4$ : nella presente abbiamo supposto invece che agiscano contemporaneamente sulla orbita due cause perturbanti, dovute a due campi magnetici  $B_1$  e  $B_2$  agenti su due lunghezze  $l_1$  e  $l_2$ , ed abbiamo dimostrato che:

a) la variazione  $(\Delta t/T_0)_1$  dovuta alla perturbazione  $B_1 l_1$  e la variazione  $(\Delta t/T_0)_2$  provocata da  $B_2 l_2$  sono legate a  $B_1 l_1$  e  $B_2 l_2$  rispettivamente dalla stessa costante (invarianza azimutale)

b) la variazione complessiva risulta esattamente

$$\left(\frac{\Delta t}{T_0}\right)_{\text{tot}} = \left(\frac{\Delta t}{T_0}\right)_1 + \left(\frac{\Delta t}{T_0}\right)_2 \quad (1)$$

I calcoli eseguiti sono riportati per esteso in appendice 1.

## 2. - Studio dell'effetto di una oscillazione dell'energia della particella lungo l'azimut.

Si è poi studiata la influenza che sulla variazione percentuale del tempo di rivoluzione ha il fatto che la particella subisca, per una causa qualsivoglia, un certo decremento di energia

$$\Delta E = \frac{a^2 E_0^*}{R_0} \Delta \gamma \quad (2)$$

Nella sezione  $S_2$  ed un incremento uguale in corrispondenza della sezione  $S_{\gamma_0}$  (v. fig. 1):  $E_0^*$  è la energia corrispondente alla traiettoria fondamentale (v. NI 73, pag. 3). Dai calcoli, riportati in appendice 2, è risultato come tutto questo comporti semplicemente una variazione del tempo di rivoluzione direttamente proporzionale all'angolo  $\gamma_0$  ed espressa da

$$\Delta t = \gamma_0 \frac{\Delta E}{E_0^*} \frac{R_0}{a^3 c} \quad (3)$$

Il risultato così ottenuto può facilmente estendersi al caso in cui la oscillazione di energia abbia luogo fra due reazioni generiche, di azimut  $\theta$  e  $\theta + \gamma_0$ : infatti, per il principio della sovrapposizione degli effetti valido nell'ambito della teoria lineare adottata, possiamo considerare la perturbazione fra  $S_\theta$  ed  $S_{\theta+\gamma_0}$  come differenza di due perturbazioni, una fra  $S_2$  ed  $S_\theta$  ed una fra  $S_2$  ed  $S_{\theta+\gamma_0}$ : la variazione del tempo di rivoluzione dovuta alle due perturbazioni è data allora da

$$\frac{R_0}{a^2} \frac{\Delta E}{E_0^*} [(\theta + \gamma_0 - \pi) - (\theta - \pi)] = \frac{R_0}{a^2} \frac{\Delta E}{E_0^*} \gamma_0 = \Delta t \quad (4)$$

Deduciamo quindi che se in una generica sezione  $S_\theta$  una particella acquista una certa energia  $\Delta E$  e perde questa energia in una sezione  $S_{\theta+\gamma_0}$ , l'allungamento della traiettoria è dato da  $c \cdot \Delta t$ , con  $\Delta t$  espresso dalla (4): notiamo però che  $\gamma_0$ , per la caratteristica precipua di acromatismo che l'intero sistema possiede, va inteso positivo nel magnete foccheggiante orizzontalmente e negativo nell'altro.

## 3. - Azione di una cavità a parallelepipedo sul moto delle particelle.

La cavità è disposta lungo la traiettoria come in fig. 2: la unica azione che il campo elettrico ed il campo magnetico prodotti esercitano sulla particella consiste nel fatto che essi provocano una deviazione della traiettoria, senza che nell'attraversamento le particelle acquistino o perdono energia, poichè il campo elettrico è normale alla direzione del moto.

Nel piano mediano del risuonatore i campi hanno le seguenti espressioni:

$$E_x = E_M \cos \frac{\pi x}{d} \cos(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

$$B_z = \frac{E_M}{c} \frac{\lambda}{\lambda_{c0}} \sin \frac{\pi x}{d} \sin(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

ove essendo i due lati della cavità uguali valgono le relazioni

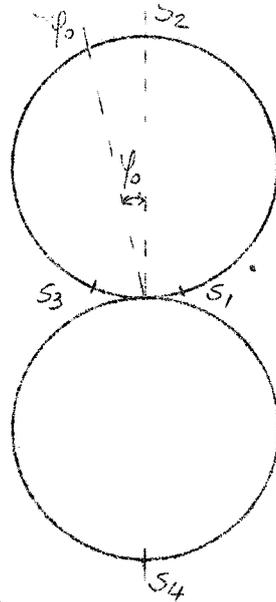


FIG. 1

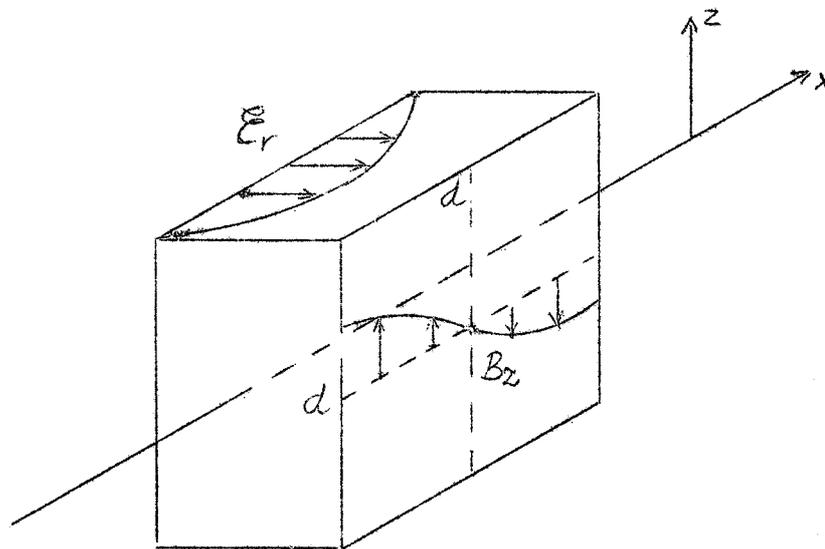


FIG. 2

$$\frac{1}{\lambda_{co}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \omega = \frac{c 2\pi}{d\sqrt{2}}; \quad t = \frac{x}{c}; \quad \lambda_{co} = 2d \quad (7)$$

L'azione deviatrice esercitata dal campo elettrico sulla particella è espressa dalla formula (8), a meno della carica

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \mathcal{E}_r dx = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \mathcal{E}_M \cos \alpha \cos \frac{\pi x}{d} \cos \frac{\pi \sqrt{2}}{d} x dx \quad (8)$$

Sviluppando e risolvendo l'integrale, si ottiene

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \mathcal{E}_r dx = \mathcal{E}_M \cos \alpha \left\{ \frac{d}{\pi(1-\sqrt{2})} \operatorname{sen} \frac{\pi(1-\sqrt{2})}{2} + \frac{d}{\pi(1+\sqrt{2})} \operatorname{sen} \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2} \right\} \quad (9)$$

L'azione deviatrice prodotta dal campo magnetico è invece espressa dalla formula (10), ove con  $x$  si intende l'ascissa curvilinea della particella

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} B_z c dx = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{\mathcal{E}_M}{\sqrt{2}} \cos \alpha \frac{\operatorname{sen} \pi x}{d} \frac{\operatorname{sen} \pi \sqrt{2}}{d} x dx \quad (10)$$

Risolvendo l'integrale si ottiene

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} B_z c dx = \frac{\mathcal{E}_M}{\sqrt{2}} \cos \alpha \left\{ \frac{d}{\pi(1-\sqrt{2})} \operatorname{sen} \frac{\pi(1-\sqrt{2})}{2} - \frac{d}{\pi(1+\sqrt{2})} \operatorname{sen} \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2} \right\} \quad (11)$$

La somma dei due effetti è rigorosamente nulla e quindi con tale tipo di cavità non è possibile eliminare l'azione del campo magnetico, associato al campo elettrico avente un gradiente radiale, azione che consiste nel portare fuori fase le particelle sincrone.

### Appendice 1

Diciamo  $\Delta y'_1$  e  $\Delta y'_2$  le deviazioni angolari prodotte dalle due perturbazioni, supposte concentrate nelle sezioni  $S_2$  ed  $S\varphi_0$ . Vale la relazione matriciale (v. pag. 18 della NI 73)

$$|M| \begin{vmatrix} \bar{y} \\ y' + \Delta y'_1 \end{vmatrix} + |T| \begin{vmatrix} 0 \\ \Delta y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{y} \\ y' \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$\text{ove } m_{11} = \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a$$

$$m_{12} = \frac{R_0}{a} (\operatorname{sen} 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a + \operatorname{senh} 2\pi a) \quad (13)$$

$$m_{21} = \frac{a}{R_0} (\operatorname{senh} 2\pi a - \operatorname{sen} 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a)$$

$$m_{22} = \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a$$

$$\begin{aligned}
t_{11} &= \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a + \sin 2\gamma_0 a \cdot \operatorname{sech} 2\pi a \\
t_{12} &= \frac{R_0}{a} (\cos 2\gamma_0 a \cdot \operatorname{sech} 2\pi a + \sin 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a) \\
t_{21} &= \frac{a}{R_0} (\cos 2\gamma_0 a \cdot \operatorname{sech} 2\pi a - \sin 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a) \\
t_{22} &= \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a - \sin 2\gamma_0 a \cdot \operatorname{sech} 2\pi a
\end{aligned} \tag{14}$$

La espressione (12) si spezza nel sistema di due equazioni nelle incognite  $\bar{y}$  e  $y'$ , che risultano espresse, una volta risolto il sistema, da

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{D} [m_{12} \Delta y'_1 + \alpha \Delta y'_2] \\
y' + \Delta y'_1 &= \frac{1}{D} [(m_{22} - D - 1) \Delta y'_1 + \beta \Delta y'_2]
\end{aligned} \tag{15}$$

ove  $D = 2(1 - \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a)$

$$\alpha = t_{12} + m_{12} t_{22} - t_{12} m_{22} \tag{16}$$

$$\beta = m_{21} t_{12} - m_{11} t_{22} + t_{22}$$

L'espressione matriciale da cui ricaviamo  $4\pi R_0 \frac{\Delta t}{T_0}$  è la seguente

$$\begin{aligned}
4\pi R_0 \frac{\Delta t}{T_0} &= \int_0^\pi M_1(\theta a) \begin{vmatrix} \bar{y} \\ y' + \Delta y'_1 \end{vmatrix} d\theta + \int_0^{\pi - \gamma_0} M_1(\theta a) \begin{vmatrix} 0 \\ \Delta y'_2 \end{vmatrix} d\theta - \int_0^{2\pi} M_2(h\theta a) M_1(\pi a) \cdot \\
&\cdot \begin{vmatrix} \bar{y} \\ y' + \Delta y'_1 \end{vmatrix} d\theta - \int_0^{2\pi} M_2(h\theta a) M_1[(\pi - \gamma_0)a] \begin{vmatrix} 0 \\ \Delta y'_2 \end{vmatrix} d\theta + \\
&+ \int_0^\pi M_3(\theta a) M_2(h2\pi) M_1(\pi a) \begin{vmatrix} \bar{y} \\ y' + \Delta y'_1 \end{vmatrix} d\theta + \int_0^{\pi + \gamma_0} M_3(\theta a) M_2(h2\pi) M_1[(\pi - \gamma_0)a] \begin{vmatrix} 0 \\ \Delta y'_2 \end{vmatrix} d\theta
\end{aligned} \tag{17}$$

Risulta infine una espressione semplificata

$$4\pi R_0 \frac{\Delta t}{T_0} = \frac{\bar{y}}{a} \phi + \frac{(y' + \Delta y'_1)}{a^2} R_0 \psi + \frac{R_0}{a^2} \Delta y'_2 X \tag{18}$$

ove  $\phi = \sin 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a - \operatorname{sech} 2\pi a$

$$\psi = 1 - \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a \tag{19}$$

$$X = 1 - \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a + \sin 2\gamma_0 a \cdot \operatorname{sech} 2\pi a$$

Dalle (18) e (19) otteniamo, dopo ovvi passaggi

$$4\pi R_0 \frac{\Delta t}{T_0} = \frac{R}{a^2 D} [\bar{y} \Delta y'_1 + \Delta y'_2] \tag{20}$$

E' facile verificare come risulti  $\int = \int = D$  e quindi si abbia il risultato annunciato nel paragrafo 1).

### Appendice 2

Supponiamo che la particella perda energia nella sezione  $S_2$  e ne acquisti successivamente una quantità uguale nella sezione  $S_1$ . Sussiste la relazione

$$|M| \begin{vmatrix} \bar{y} - \Delta \bar{y} \\ y' \end{vmatrix} + |T|^* \begin{vmatrix} \Delta \bar{y} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{y} \\ y' \end{vmatrix} \quad (21)$$

ove  $m_{ij}$  coincide con le espressioni (13) mentre risulta

$$\begin{aligned} t_{11}^* &= \cos(2\pi - \varphi_0) a \cdot \cosh + \sin \varphi_0 a \cdot \operatorname{sech} \\ t_{12}^* &= \frac{R_0}{a} [\sin(2\pi - \varphi_0) a \cdot \cosh + \cos \varphi_0 a \cdot \operatorname{sech}] \\ t_{21}^* &= \frac{a}{R_0} [\cos \varphi_0 a \cdot \operatorname{sech} - \sin(2\pi - \varphi_0) a \cdot \cosh] \\ t_{22}^* &= \cos(2\pi - \varphi_0) a \cdot \cosh - \sin \varphi_0 a \cdot \operatorname{sech} \end{aligned} \quad (22)$$

Nelle relazioni (22) ove non indicato è sottinteso l'argomento  $2\pi a$ .

Risolviendo la (21) nelle incognite  $\bar{y}$  e  $y'$  si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{y} - \Delta \bar{y} &= \alpha \frac{\Delta \bar{y}}{D} \\ y' &= \beta \frac{\Delta \bar{y}}{D} \cdot \frac{a}{R_0} \end{aligned} \quad (23)$$

ove  $\alpha = -1 - \cos \varphi_0 a + \cos(2\pi - \varphi_0) a \cdot \cosh + \cos \cosh + \sin \varphi_0 a \cdot \operatorname{sech}$

$$\beta = -\sin \varphi_0 a - \operatorname{sech} [1 - \cos \varphi_0 a] + \cosh [\sin - \sin(2\pi - \varphi_0) a] \quad (24)$$

La risoluzione della (21) e quindi le (23) forniscono le coordinate di entrata nella sezione  $S_2$  della traiettoria chiusa. L'allungamento della traiettoria prodotto da una simile oscillazione di energia è esprimibile come

$$\begin{aligned} \Delta l &= \varphi_0 \frac{\Delta \bar{y}}{a} + \int_0^\pi M_1(\theta a) \begin{vmatrix} \bar{y} - \Delta \bar{y} \\ y' \end{vmatrix} d\theta - \int_0^{2\pi} M_2(h\theta a) M_1(\pi a) \begin{vmatrix} \bar{y} - \Delta \bar{y} \\ y' \end{vmatrix} d\theta + \\ &+ \int_0^\pi M_3(\theta a) M_2(2h\pi a) M_1(\pi a) \begin{vmatrix} \bar{y} - \Delta \bar{y} \\ y' \end{vmatrix} d\theta + \int_0^{\pi - \varphi_0} M_1(\theta a) \begin{vmatrix} \Delta \bar{y} \\ 0 \end{vmatrix} d\theta - \\ &- \int_0^{2\pi} M_2(h\theta) M_1(\pi - \varphi_0) \begin{vmatrix} \Delta \bar{y} \\ 0 \end{vmatrix} d\theta + \int_0^\pi M_3(\theta a) M_2(2h\pi a) M_1[(\pi - \varphi_0) a] \begin{vmatrix} \Delta \bar{y} \\ 0 \end{vmatrix} d\theta \end{aligned} \quad (25)$$

Si giunge alla espressione finale

$$\Delta l = \gamma_0 \frac{\Delta \bar{y}}{a} + \frac{(\bar{y} - \Delta \bar{y})}{a} \phi + \frac{\gamma'}{a^2} R_0 \Psi + \frac{\Delta \bar{y}}{a} X \quad (26)$$

ove per  $\phi$  e  $\Psi$  valgono ancora le espressioni (19) mentre risulta

$$X = \cos h \cdot \text{sen} (2\pi - \gamma_0) a - \text{sen} h \cdot \cos \gamma_0 a \quad (27)$$

(come al solito, ove non venga specificato, si sottintende l'argomento  $2\pi a$ )

Sostituendo nella (26) le espressioni (19), (23), (27) si dimostra che

$$\frac{(\bar{y} - \Delta \bar{y})}{a} \phi + \frac{\gamma'}{a^2} R_0 \Psi + \frac{\Delta \bar{y}}{a} X = 0 \quad (28)$$

e quindi risulta semplicemente

$$\Delta l = \frac{\gamma_0 \Delta \bar{y}}{a}$$

da cui una differenza di tempo di transito espressa dalla equazione (3).

### Appendice 3

Dinamica di una particella soggetta all'azione di due cavità a gradienti radiale.

Dalla formula (28) della NI 73, supponendo di eccitare le due cavità su frequenze pari rispettivamente a  $T_{10}^{-1}$  e  $T_{20}^{-1}$ , si ottiene

$$\frac{d\alpha_1}{dn} = K_1 \text{sen} \alpha_1 + K_2 \text{sen} \alpha_2 + [T_{10} - T_0] 4\pi \omega_0 \quad (29)$$

$$\frac{d\alpha_2}{dn} = K_1 \text{sen} \alpha_1 + K_2 \text{sen} \alpha_2 + [T_{20} - T_0] 4\pi \omega_0$$

ove  $\alpha_1$  = fase della particella nella cavità 1

$\alpha_2$  = fase della particella nella cavità 2

$\omega_0$  è la frequenza di rivoluzione corrispondente alla orbita media geometrica della macchina

$$T_0 = 4\pi / \omega_0$$

Dalla equazione (27) della NI 73 otteniamo invece

$$\frac{dE}{dn} = -\bar{K}_1 E \cos \alpha_1 - \bar{K}_2 E \cos \alpha_2 \quad (30)$$

Sottraendo dalla (29<sub>1</sub>) la (29<sub>2</sub>) si ottiene

$$\frac{d(\alpha_1 - \alpha_2)}{dn} = [T_{10} - T_{20}] \quad (31)$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)_0 + n [T_{10} - T_{20}] 4\pi\omega_0$$

Sommando la (29<sub>1</sub>) alla (29<sub>2</sub>) si ottiene

$$\frac{d(\alpha_1 + \alpha_2)}{dn} = 2K_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + 2K_2 \operatorname{sen} \alpha_2 + 4\pi\omega_0 [T_{10} + T_{20} - 2T_0] \quad (32)$$

Se facciamo l'ipotesi che sia

$$T_{10} - T_0 = T_0 - T_{20} \quad (33)$$

l'ultimo termine della (32) risulta identicamente nullo.

Dalla dimostrazione generale riportata in appendice 1 risulta che

$$K_1 = K_2 = K$$

e quindi

$$\frac{d(\alpha_1 + \alpha_2)}{dn} = 4K \left[ \operatorname{sen} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \omega_0 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right] \quad (34)$$

Poniamo  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = x$

$$\frac{dx}{dn} = 2K \operatorname{sen} x \cdot \omega_0 \left[ \frac{n(T_{10} - T_{20}) 4\pi\omega_0}{2} + \varphi_0 \right] \quad (35)$$

ove  $\varphi_0 = (\alpha_1 - \alpha_2)_0$

$$\frac{dx}{\operatorname{sen} x} = 2K \omega_0 \left[ \frac{n(T_{10} - T_{20}) 4\pi\omega_0}{2} + \varphi_0 \right] \quad (36)$$

$$\ln \left| \frac{\operatorname{tang} x/2}{\operatorname{tang} \varphi_0/2} \right| = \frac{2K \operatorname{sen} [n(T_{10} - T_{20}) 2\pi\omega_0 + \varphi_0/2] - 2K \operatorname{sen} \varphi_0/2}{(T_{10} - T_{20}) 4\pi\omega_0} \quad (37)$$

Poniamo  $(T_{10} - T_{20}) \pi\omega_0 = \delta$

$$\ln \left| \frac{\operatorname{tang} x/2}{\operatorname{tang} \varphi_0/2} \right| = \frac{K \operatorname{sen} (2n\delta + \varphi_0/2) - K \operatorname{sen} \varphi_0/2}{\delta} \quad (38)$$

$$\operatorname{tang} x/2 = \operatorname{tang} \varphi_0/2 \cdot e^{\frac{K}{\delta} \operatorname{sen} (2n\delta + \varphi_0/2)} \cdot e^{-\frac{K}{\delta} \operatorname{sen} \varphi_0/2} \quad (39)$$

Dalla equazione (30) otteniamo

$$\frac{dE}{dn} = -\bar{K}E \left[ \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \right] = -2\bar{K}E \cdot \cos \alpha \cdot \cos \left( \frac{4\gamma n + \gamma_0}{2} \right) \quad (40)$$

supponendo che  $\bar{K}_1 = \bar{K}_2$  cioè le due cavità abbiano gli stessi gradienti radiali.

Poniamo  $\tan \alpha \cdot e^{-\frac{\kappa}{\delta} \sin \gamma_0/2} = A$

e dalla (40) otteniamo sostituendo la (39)

$$\frac{dE}{dn} = -2\bar{K}E \left\{ \frac{\cos \left( \frac{4\gamma n + \gamma_0}{2} \right) - A^2 \cos \left( \frac{4\gamma n + \gamma_0}{2} \right) \cdot e^{\frac{2\kappa}{\delta} \sin \left( \frac{4\gamma n + \gamma_0}{2} \right)}}{1 + A^2 e^{\frac{2\kappa}{\delta} \sin \left( \frac{4\gamma n + \gamma_0}{2} \right)}} \right\} \quad (41)$$

$$\int_{E_{in}}^E \frac{dE}{E} = 2\bar{K} \int_0^n f(n) dn$$

ove  $f(n)$  è una funzione oscillante della variabile corrente "numero dei giri".

L'equazione (39) dice che per  $n \rightarrow \infty$  la fase della particella oscilla attorno al valore iniziale mentre la relazione (41) mostra come anche l'energia della particella per  $n \rightarrow \infty$  varia oscillando intorno al valore iniziale

$$\tan \frac{\alpha}{2} = A e^{\frac{\kappa}{\delta} \sin [2\gamma n + \gamma_0/2]}$$

$$\ln \frac{E}{E_{in}} = 2\bar{K} \int f(n) dn$$

Contrariamente quindi a quanto accade con una sola cavità a gradiente, con due cavità a gradiente si ha in un certo qual senso stabilità di fase per la struttura ad otto.