

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-61/18 (23. 3. 61)

R. Evangelisti, G. Sacerdoti: ALCUNE PROPRIETA' DI UN ANELLO
DI ACCUMULAZIONE AD OTTO.

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.
Servizio Documentazione

Nota interna: n° 73
23 Marzo 1961

R. Evangelisti e G. Sacerdoti: ALCUNE PROPRIETA' DI UN ANELLO DI ACCUMULAZIONE AD OTTO.

Introduzione.

Nella fisica nucleare è utile talvolta poter accumulare in un anello particelle cariche relativistiche (cioè con velocità molto prossima alla velocità della luce). Per questo in varie parti del mondo si sono studiati e si stanno costruendo apparati per questo scopo.

Spesso queste macchine chiamate 'anelli di accumulazione' hanno anche la funzione di fornire energia alle particelle.

In questa nota viene descritto un apparato che sembra, secondo i calcoli preliminari svolti, poter catturare con continuità su un'orbita chiusa e ben definita, le particelle che nella macchina sono iniettate.

1) - Descrizione dell'apparato.

L'apparato che è illustrato nella figura 1, consiste di due magneti a ferro di cavallo che costringono le particelle cariche dell'energia voluta, a percorrere una traiettoria chiusa ad otto: le particelle vengono iniettate tangenzialmente all'orbita chiusa in una sezione della macchina.

Tra le espansioni polari del magnete e le sezioni "diritte" passa la ciambella ove viene fatto un vuoto molto spinto.

I due magneti hanno lo stesso raggio di curvatura, cioè quello dell'orbita media. Come si sa, nelle macchine acceleratrici, il parametro da cui dipendono le proprietà foccheggianti della macchina è il gradiente di campo magnetico sul piano mediano. Nel magnete 1 (ved. fig.1), varrà per tutta la lunghezza dell'orbita la seguente relazione:

$$n_1 = - \frac{R_0}{B} \frac{dB}{dR} \quad (1)$$

e nel magnete 2 verrà la relazione analoga:

$$n_2 = - \frac{R_0}{B} \frac{dB}{dR} \quad (2)$$

Imponiamo che valga la relazione:

$$1 - n_1 = n_2 - 1 = a^2 \quad (3)$$

Il sistema a R.F. che serve a catturare le particelle è costituito da tre cavità di tipo classico le cui sezioni sono indicate in fig. 1 - C₁, C₂, C₃. Le cavità sono sistemate entro il campo magnetico ove la traiettoria delle particelle è quindi curva nella zona da esse interessata.

L'azione del sistema a R.F., eccitato sulla frequenza di rivelazione delle particelle si può così descrivere "a blocchi":

- 1) il campo magnetico nella cavità C_1 (associato al gradiente di campo elettrico che in essa si ha) devia la direzione della velocità della particella (vedi fig. 1).
- 2) il campo elettrico della cavità C_3 ha azione analoga al campo elettromagnetico della cavità C_1 (v. fig. 1).
- 3) i campi elettrici delle cavità C_1 , C_2 e C_3 variano l'energia delle particelle proporzionalmente alla loro distanza dall'orbita media; il coefficiente di proporzionalità è funzione della fase al passaggio della particella.

2) - Proprietà ottiche del canale magnetico.

Per i simboli usati ci riferiamo alla figura 1. La prima proprietà di cui gode è la seguente: le traiettorie delle particelle sono isocrone cioè il tempo di rivoluzione è indipendente dall'energia delle particelle. Infatti chiamiamo traiettoria fondamentale la traiettoria che corre sul piano mediano ed è costituita da due archi di cerchio di raggio R_0 nei tratti compresi tra le espansioni polari dei magneti. La traiettoria n. 2 di fig. 1 è ancora una traiettoria chiusa di equilibrio di lunghezza pari alla lunghezza della traiettoria fondamentale e corrispondente ad una energia che soddisfa la relazione:

$$\frac{E - E_0^*}{E_0^*} = \frac{y(1 - n_1)}{R_0} = \frac{y(n_2 - 1)}{R_0} \quad (4)$$

y è la distanza radiale in modulo e in segno fra la traiettoria fondamentale nel settore 1 ove $n_1 < 1$. (Le energie sono espresse sempre in elettron volt eV).

La seconda proprietà di cui gode il circuito è la seguente: se una qualche causa di perturbazione (come per esempio un campo magnetico o un campo elettrico radiale concentrati in una piccola sezione) provoca una deviazione della particella dall'orbita stabile, la nuova traiettoria di equilibrio non è più sincrona con le traiettorie che si hanno in assenza della perturbazione, ma subisce un allungamento o un accorciamento a seconda del segno della perturbazione. Per esempio se la perturbazione è un campo magnetico B che agisce su di una lunghezza l , la variazione percentuale $\Delta t/T_0$ del tempo di rivoluzione rispetto al periodo delle particelle sincrone è dato da:

$$\frac{\Delta t}{T_0} = G_0^2 \cdot B \cdot l \quad (5)$$

ove G_0^2 è una costante indipendente dalla posizione azimutale della perturbazione, e B è il campo magnetico preso come positivo se ha la stessa direzione del campo magnetico nel quadrante 2. Il valore di G_0^2 è dato da

$$G_0^2 = \frac{c}{4\pi a^2 E_0^*} \quad (6)$$

E_0^* = energia in eV

c = velocità della luce

La dimostrazione di tale proprietà è svolta in appendice I.

Una terza proprietà del sistema è che in presenza della perturbazione, la traiettoria stabile che interseca la traiettoria fondamentale nell'azimut θ ove si ha perturbazione corrisponde ad una energia che non è E ma è $E + \Delta E$ ove (nel caso la perturbazione sia dovuta ad un campo magnetico)

$$\Delta E = \hat{r}_1^2 B \ell = \bar{y} \frac{E_0^*}{R_0} a^2 \quad (7)$$

in appendice riportiamo la formula che ci dà G_1^2 in quattro posizioni azimutali in cui si pensa di localizzare la perturbazione cioè sistemare le cavità a R.F. C_1 e C_2 .

Una quarta proprietà è che si ha foccheggiamento alle oscillazioni di betatrone sia orizzontali che verticali se a rimane compreso tra 0 e a_{\max} funzione dello sviluppo angolare dei settori. Anche questa proprietà è dimostrata in appendice. (v. fig. 2)

3) - Il sistema a R.F.

Come abbiamo già visto, la R.F. è costituita da tre cavità C_1 , C_2 , C_3 di cui almeno la C_3 è sistemata in una sezione della ciambella in presenza del campo magnetico continuo, cioè la traiettoria della particella è curva anche dentro alla cavità a R.F.

Nelle appendici possiamo vedere come questo punto sia essenziale agli effetti della cattura.

Diamo qui di seguito una descrizione del campo elettrico e magnetico delle tre cavità. La cavità C_1 , che è una normale cavità risonante, è attraversata dalle particelle nella zona A (v. fig. 1) ove il campo elettrico è rappresentato da un'espressione del tipo:

$$E_1 = -y K_1 \omega \alpha_1 + E_0 \omega \alpha_1 \quad (8)$$

α_1 = fase entrata particella nella cavità

y = inteso positivo se lo spostamento radiale è positivo nel quadrante 1 (v. fig. 1).

\mathcal{E}_1 inteso positivo se nella direzione del moto delle particelle.

Il campo magnetico associato ha la seguente forma:

$$B_1 = \frac{\kappa_1}{\omega} \sin \alpha_1 \quad (9)$$

ω = pulsazione della cavità risonante (la cavità risonante è sincrona con la frequenza di rivoluzione delle particelle; tale sincronismo può essere ottenuto sulla frequenza fondamentale o su un'armonica superiore. Per ipotesi, ove non è esplicitamente specificato il contrario, il sincronismo si intende quello sulla frequenza fondamentale).

La cavità C_2 è attraversata dalle particelle nella zona B ove il campo elettrico è esprimibile dalla seguente espressione:

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{02} \cos \alpha_2 \quad (10)$$

La cavità C_3 è attraversata nella zona D e il campo elettrico è il seguente:

$$\mathcal{E}_{op} = \mathcal{E}_{03} \sin(\omega t + \alpha_3) \quad (11)$$

p indica l'asse normale all'armatura del condensatore della cavità.

α_3 è la fase della particella al passaggio per il centro della cavità.

L'azimut della particella, sotto la ipotesi che, durante l'attraversamento, la grandezza y non vari, è dato, in funzione del tempo, dalla relazione:

$$\theta = \omega t - \omega t \frac{y}{R_0} \quad (12)$$

per cui si ha che la componente di campo elettrico tangenziale alla traiettoria media della particella è data da:

$$\mathcal{E}_{3t} = \mathcal{E}_{03} \sin(\omega t + \alpha_3) \sin\left(\omega t - \omega t \frac{y}{R_3}\right) \quad (13)$$

Il campo elettrico normale è dato invece da:

$$\mathcal{E}_{3n} = \mathcal{E}_{03} \sin(\omega t + \alpha_3) \cos\left(\omega t - \omega t \frac{y}{R_3}\right) \quad (14)$$

Passiamo ora a calcolare l'energia che la particella acquista al passaggio attraverso le tre cavità risonanti e la deflossione che la particella subisce al passaggio attraverso le tre cavità.

Nei calcoli che facciamo terremo solo conto dei termini lineari in α e y (trascureremo in particolare i termini in α^2 , y^2 e αy).

Nel passaggio attraverso la cavità C_1 le particelle riceveranno un incremento di energia pari a:

$$\Delta E_1 = -y k_1 l_1 \omega \alpha_1 + \mathcal{E}_{01} l_1 \omega \alpha_1 \quad (15)$$

Nel passaggio attraverso la cavità C_2 l'energia acquistata dalla particella è data da:

$$\Delta E_2 = \mathcal{E}_{02} l_2 \omega \alpha_2 \quad (16)$$

Nel passaggio attraverso la cavità C_3 si ha:

$$\Delta E_3 = \int \mathcal{E}_{3t} ds \quad (17)$$

s = coordinata curvilinea della traiettoria

In forma esplicita la ΔE_3 diventa:

$$\Delta E_3 = \frac{c E_{03}}{\omega} \int_{wt_e}^{wt_u} \sin(\omega t + \alpha_3) \sin(\omega t - \omega t \frac{y}{R_0}) d(\omega t) \quad (18)$$

t_e = istante di entrata e sarà dato dall'espressione:

$$t_e = - \frac{R_0^* + y_0 + y}{c} \arccos \frac{R_0^*}{R_0^* + y_0 + y} \quad (19)$$

t_u = istante di uscita = - t_e

R_0^* = distanza della faccia interna della cavità dal centro del magnete.

$$y_0 = R_0 - R_0^*$$

L'espressione di ΔE_3 si può ancora modificare nel seguente modo:

$$\Delta E_3 = \Delta E_{03} + \left[\frac{d\Delta E_3}{dy} \right] y \quad (20)$$

ΔE_{03} (= energia acquistata da una particella che si muove sull'orbita avante $y = 0$) è facilmente calcolabile e sarà data da:

$$\begin{aligned} \Delta E_{03} &= c \frac{E_{03}}{\omega} \int_{wt_e(y=0)}^{wt_u(y=0)} \sin(\omega t + \alpha_3) \sin \omega t d(\omega t) = \\ &= c \frac{E_{03}}{\omega} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \sin^2 \theta d\theta \omega \alpha_3 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\theta_{max} = -\theta_{min} = \omega t_u(y=0)$$

$d\Delta E_3/dy$ per $y = 0$ sarà dato dalla relazione:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta E_3}{dy} &= \frac{d}{dy} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} E_{3t} d\theta = \\ &= \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{\partial E_{3t}}{\partial y} d\theta + E_{3t}(\theta_{max}) \frac{d\theta_{max}}{dy} - E_{3t}(\theta_{min}) \frac{d\theta_{min}}{dy} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c \frac{\varepsilon_{03}}{\omega} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} (\sin \theta \cos \alpha_3 + \sin \alpha_3 \cos \theta) \left(-\frac{\theta}{R_0} \right) \left(\omega \frac{\theta y}{R_0} \cos \theta + \sin \theta \sin \frac{\theta y}{R_0} \right) + \\
&+ c \frac{\varepsilon_{03}}{\omega} \left[\sin(\theta_{\max} + \alpha_3) \sin \theta_{\max} \right] \frac{d\theta_{\max}}{dy} - \\
&- c \frac{\varepsilon_{03}}{\omega} \left[\sin(\theta_{\min} + \alpha_3) \sin \theta_{\min} \right] \frac{d\theta_{\min}}{dy}
\end{aligned} \quad (22)$$

ricordiamo che è:

$$\frac{d\theta_{\max}}{dy} = - \frac{d\theta_{\min}}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2R_0 y_0}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2y_0}{R_0^3}} \quad (23)$$

La relazione (22) diventa:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\varepsilon_3}{dy} &\cong -c \frac{\varepsilon_{03}}{\omega R_0} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \theta \sin \theta \cos \alpha_3 \cos \theta \, d\theta + \\
&+ 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2R_0 y_0}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2y_0}{R_0^3}} \right) c \frac{\varepsilon_{03}}{\omega} \sin^2 \theta_{\max} \cos \alpha_3
\end{aligned} \quad (24)$$

Nel passaggio tra la (22) e la (24) abbiamo trascurato i termini proporzionali ad y/R_0 e α_3 . Quindi la formula (24) è valida per α_3 e y piccoli.

Calcoliamo ora:

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \varepsilon_{3n} \, ds = B_3 \ell_3 \quad (25)$$

a cui viene ad essere proporzionale la deflessione che la particella subisce nel passare attraverso la cavità

$C_3 B_3$ è il campo magnetico equivalente, cioè il campo magnetico che agendo su una lunghezza l_3 produrrebbe la stessa deflessione.

Sarà:

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \mathcal{E}_{3n} ds = c \frac{\mathcal{E}_{03}}{\omega} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} (\sin \theta \cos \alpha_3 + \cos \theta \sin \alpha_3) \cdot$$

$$\cdot \left(\cos \theta \cos \frac{\theta y}{R_0} - \sin \theta \sin \frac{\theta y}{R_0} \right) d\theta = \quad (26)$$

$$= \sin \alpha_3 \cdot c \cdot \frac{\mathcal{E}_{03}}{\omega} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos^2 \theta d\theta$$

Nei passaggi precedenti abbiamo trascurato i termini in αy , α^2 e y^2 .

4) - Equazione del moto delle particelle.

In questo paragrafo ricaviamo, per quanto detto nei paragrafi 2 e 3 l'equazione del moto di una particella per α e y sufficientemente piccoli.

Facciamo l'ipotesi che le cavità siano sufficientemente vicine in modo che rimangano praticamente costanti le differenze di fase tra le cavità. (al variare di E)

Chiamato n il numero di giri abbiamo che (essendo le energia sempre espresse in eV):

$$\frac{d(E - E_0^*)}{dn} = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 =$$

$$= -y k_1 l_1 \cos \alpha_1 + \mathcal{E}_0 l_1 \cos \alpha_1 + \mathcal{E}_{02} l_2 \cos \alpha_2 +$$

$$+ c \frac{\mathcal{E}_{03}}{\omega} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sin^2 \theta d\theta \cos \alpha_3 + c \frac{\mathcal{E}_{03}}{\omega R_0} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \theta \sin \theta d\theta +$$

$$- 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} R_0 y_0} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 y_0}{R_0^3}} \right) c \frac{\mathcal{E}_{03}}{\omega} \sin^2 \theta_{\max} y \cos \alpha_3 \quad (27)$$

$$\frac{d\alpha}{dn} = (B_1 l_1 \sin \alpha_1 + B_3 l_3 \sin \alpha_3) G_0^2 \cdot 4\pi \quad (28)$$

che si può anche scrivere

$$\frac{d\alpha}{dn} = \left[\frac{K_1}{\omega} l_1 \sin \alpha_1 + c \frac{\epsilon_{03}}{\omega} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \omega^2 \theta d\theta \sin \alpha_3 \right] G_0^2 \cdot 4\pi \quad (29)$$

Si ha inoltre (v. formula (7))

$$t - t_0^* = \frac{y}{R_0} t_0^* a^2 + G_1^2 \left[\frac{K_1}{\omega} l_1 \sin \alpha_1 + c \frac{\epsilon_{03}}{\omega} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \omega^2 \theta d\theta \sin \alpha_3 \right] \quad (30)$$

Noi imporremo nelle condizioni che seguono le seguenti ipotesi:

$$1) \quad \epsilon_{01} l_1 \cos \alpha_1 + \epsilon_{02} l_2 \cos \alpha_2 + c \frac{\epsilon_{03}}{\omega} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sin^2 \theta d\theta \cos \alpha_3 = 0 \quad (31)$$

questa relazione si riduce in ultima analisi a porre per esempio $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 + \pi$ e nel ricavare successivamente il valore di $\epsilon_{02} l_2$

$$2) \quad \text{imponiamo che sia } B_1 l_1 < B_3 l_3 \quad (32)$$

tale condizione si traduce nella seguente relazione (v. formule 9 e 26):

$$\epsilon_{03} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \omega^2 \theta d\theta > l_1 K_1 \quad (33)$$

imponiamo inoltre che sia

$$K_1 l_1 > c \frac{\epsilon_{03}}{\omega R_0} \left[- \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \theta \sin \theta d\theta + \left(\frac{1}{\sqrt{2} R_0 y_0} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 y_0}{R_0^3}} \right) 2 R_0 \sin^2 \theta_{\max} \right] \quad (34)$$

ricordando che è:

$$\omega R_0 = c \quad (35)$$

la relazione diventa:

$$k_1 l_1 > \frac{E}{E_{03}} \left[\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} A \sin \theta d\theta + 2R_0 \sin \theta_{\max} \left(\frac{1}{\sqrt{2}R_0 y_0} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2y_0}{R_0^3}} \right) \right] \quad (36)$$

La (33) e la (36) per i calcoli svolti in appendice diventano in prima approssimazione:

$$2 \sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} - \frac{1}{3} \frac{2y_0}{R_0} \sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} > \frac{k_1 l_1}{E} > 2 \sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} - \frac{10}{3} \frac{y_0}{R_0} \sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} \quad (37)^{(x)}$$

(v. appendice V).

Le equazioni del moto potranno scriversi nella forma seguente:

$$\frac{d(E - E_0^*)}{dn} = -F_0^2 y \quad (38)$$

$$y = E - E_0^* + F_1 \alpha \quad (39)$$

$$\frac{d\alpha}{dn} = -F_2^2 \alpha \quad (40)$$

Queste equazioni ci dicono che nello spazio delle fasi si ha convergenza verso il punto $\alpha = 0$ ed $E - E_0^* = 0$.

5) - Considerazioni teoriche.

Il sistema proposto possiede alcune caratteristiche che, a nostro avviso, sono di importanza essenziale per la cattura delle particelle, mentre altre non sono specificatamente essenziali.

Il filo conduttore che ci ha guidato nella progettazione del dispositivo è stato il meccanismo dell'irrag-

(x) Questa condizione è possibile grazie ai termini che compaiono a causa della curvatura della particella untro la cavità. (v. formula, App. V).

giamento della particella. Come è noto infatti nei metodi ove non si usano campi magnetici pulsati, l'irraggiamento permette la cattura delle particelle stesse in anelli di accumulazione. La radiazione emessa da una particella si può schematizzare come un campo elettromagnetico avente il vettore di Pointing sempre nella direzione del moto della particella. Inoltre finchè la particella si muove sincrona con il campo elettromagnetico della radiazione, la particella non perde mediamente energia e si ha uno scambio tra l'energia della radiazione e l'energia della particella. Si ha irraggiamento, e quindi cattura, solo per effetto della curvatura della traiettoria della particella che fa sì che la particella esca dal campo elettromagnetico della radiazione 'staccandosi' da esso. Nel sistema che abbiamo proposto si realizzano appunto delle condizioni analoghe: infatti se il campo magnetico della cavità C_1-C_2 ed il campo elettrico della cavità C_3 sono tra loro normali, il vettore di Pointing fittizio che "vede" la particella è sempre nella stessa direzione del moto e la particella, durante l'interazione col campo elettromagnetico, sfugge a causa della curvatura.

Queste osservazioni permettono di stabilire quale è la causa essenziale della cattura delle particelle, e la causa a nostro parere è la presenza del vettore di Pointing sempre diretto nella direzione del moto e la curvatura della traiettoria dentro alla cavità: tanto più lungo è il tratto curvo tanto più efficace è la cattura.

Inessenziale invece, ma comodo per il calcolo, è la disposizione a otto che fa sì che il tempo di rivoluzione delle particelle non dipenda dalla loro energia.

Un'obiezione che viene naturale fare, e che a nostro parere è l'unica che si possa seriamente fare a que-

sti calcoli, è che in realtà si ha, a causa della distanza finita delle cavità C_1 , C_2 e C_3 , una variazione nella differenza di fase tra esse in funzione dell'energia delle particelle, che si traduce probabilmente in una oscillazione ulteriore intorno alle traiettorie precedentemente calcolate.

Nel caso in cui si abbiano a catturare particelle di segno opposto, bisogna far sì che le particelle di un segno "vedano" il vettore di Pointing diretto in un certo senso, mentre le particelle di segno contrario "vedano" il vettore di Pointing diretto in senso contrario; e ciò si può ottenere cambiando la frequenza delle cavità, per esempio usando la seconda o la terza armonica (v. app. VI). Non sono stati eseguiti calcoli teorici del rendimento di cattura nè calcoli per la determinazione delle dimensioni del fascio: tali calcoli, peraltro molto laboriosi, sono strettamente legati alla particolare soluzione tecnica adottata.

Appendice ICalcolo delle condizioni di foccheggiamento in un anello ad otto.

Per ricavare le condizioni di foccheggiamento dell'anello ad otto si sono ricavate, come si fa usualmente, le matrici di trasferimento delle oscillazioni verticali ed orizzontali e si è imposto che le tracce fossero 1.

La matrice di trasferimento delle oscillazioni orizzontali è data dalla relazione:

$$|M_0| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot |M_3| \cdot |M_4| \quad (41)$$

essendo (per $R_0 = 1$):

$$|M_1| = \begin{vmatrix} \cos \theta_a & \frac{\sin \theta_a}{a} \\ -a \sin \theta_a & \cos \theta_a \end{vmatrix} \quad (42)$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & -2 t_y \frac{\theta_2}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (43)$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} \cosh \theta_a & \frac{\sinh \theta_a}{a} \\ a \sinh \theta_a & \cosh \theta_a \end{vmatrix} \quad (44)$$

$$|M_4| = \begin{vmatrix} 1 & -2 t_y \frac{\theta_2}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (45)$$

e la traccia orizzontale è data da:

$$T_0 = \cosh \theta_a \cos \theta_a + 2a t_y \frac{\theta_2}{2} \left[\sin \theta_a \cosh \theta_a - \sinh \theta_a \cos \theta_a \right] - 2a^2 t_y^2 \frac{\theta_2}{2} \sinh \theta_a \sin \theta_a \quad (46)$$

La matrice per le oscillazioni verticali è data da:

$$|M_v| = |M_{1v}| \cdot |M_{2v}| \cdot |M_{3v}| \cdot |M_{4v}| \quad (47)$$

ove:

$$|M_{1v}| = \begin{vmatrix} \cos \sqrt{1-a^2} \theta_0 & \frac{\sin \sqrt{1-a^2} \theta_0}{\sqrt{1-a^2}} \\ -\sqrt{1-a^2} \sin \sqrt{1-a^2} \theta_0 & \cos \theta_0 \sqrt{1-a^2} \end{vmatrix} \quad (48)$$

$$|M_{2v}| = \begin{vmatrix} 1 & -2t_0 \frac{\theta_0}{z} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (49)$$

$$|M_{3v}| = \begin{vmatrix} \cos \sqrt{1+a^2} \theta_0 & \frac{\sin \sqrt{1+a^2} \theta_0}{\sqrt{1+a^2}} \\ -\sqrt{1+a^2} \sin \sqrt{1+a^2} \theta_0 & \cos \sqrt{1+a^2} \theta_0 \end{vmatrix} \quad (50)$$

$$|M_{4v}| = |M_{2v}| \quad (51)$$

La traccia delle matrici verticali è data da:

$$\begin{aligned} T_0 &= \cos \sqrt{1-a^2} \theta_0 \cos \sqrt{1+a^2} \theta_0 - \\ &- \frac{\sin \sqrt{1-a^2} \theta_0 \sin \sqrt{1+a^2} \theta_0}{2} \left[\sqrt{\frac{1+a^2}{1-a^2}} + \sqrt{\frac{1-a^2}{1+a^2}} \right] + \\ &+ 2t_0 \frac{\theta_0}{z} \left[\sqrt{1+a^2} \cos \sqrt{1-a^2} \theta_0 \sin \sqrt{1+a^2} \theta_0 + \right. \\ &\left. + \sqrt{1-a^2} \sin \sqrt{1-a^2} \theta_0 \cos \sqrt{1-a^2} \theta_0 \right] + 2\sqrt{1-a^2} t_0^2 \frac{\theta_0}{z} \sin \sqrt{1+a^2} \theta_0 \sqrt{1-a^2} \theta_0 \end{aligned} \quad (52)$$

In fig. 2 è riportata la zona, nello spazio a e in cui sono realizzate le condizioni

$$\left| \frac{v}{c} \right| < 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{v}{v_0} \right| < 1$$

Appendice II

Calcolo dell'allungamento della traiettoria dovuto ad una perturbazione causata da una forza normale alla traiettoria della particella.

Calcoliamo l'allungamento della traiettoria nel caso in cui $\mathcal{A}_0 = 2\pi$ (senza sezioni diritte)

Una perturbazione, dovuta per esempio ad un campo magnetico $B_1 \cdot \sin \alpha_1$ concentrato in una zona di lunghezza l_1 provoca una variazione nel valore di $y' = dy/d\theta$ pari a ($R_0 = 1$):

$$\Delta y' = B_1 l_1 \frac{c}{E_0^*} \sin \alpha_1 = C_0 \sin \alpha_1 \quad (53)$$

Abbiamo considerato che la perturbazione sia localizzata in 4 posizioni e precisamente nelle sezioni S_1, S_2, S_3, S_4 , (v. fig. 4).

Riportiamo alla fine dell'appendice i risultati ottenuti nei quattro casi. Il procedimento seguito è stato il seguente: la traiettoria chiusa (orbita stabile) passante per il punto 1 nel centro del traferro della sezione S_1 sarà percorsa da una particella la cui energia scarta rispetto ad E_0^* di ΔE

$$\Delta E = \bar{y} \frac{E_0^* a^2}{R_0} \quad (54)$$

per cui è soddisfatta la relazione

$$|M_1| \cdot |M_2| \cdot |M_3| \cdot \begin{vmatrix} \bar{y}' \\ y' + \Delta y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{y} \\ y' \end{vmatrix} \quad (55)$$

ove

$$|M_1| = |M_3| = \begin{vmatrix} \cos \pi a & \frac{R_0 \sin \pi a}{a} \\ -\frac{a}{R_0} \sin \pi a & \cos \pi a \end{vmatrix} \quad (56)$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} \cosh 2\pi a & R_0 \frac{\sinh 2\pi a}{a} \\ \frac{a}{R_0} \sinh 2\pi a & \cosh 2\pi a \end{vmatrix} \quad (57)$$

Si è ricavato y e y' .

Si è proceduto poi al calcolo di $\Delta t/T$ mediante la formula

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{4\pi R_0} \left[\int_0^\pi |M_1(\theta)| \cdot \begin{vmatrix} y \\ y' + \Delta y' \end{vmatrix} d\theta - \int_0^{2\pi} |M_2(h\theta)| \cdot |M_1(\pi)| \begin{vmatrix} y \\ y' + \Delta y' \end{vmatrix} d\theta + \int_0^\pi |M_3(\theta)| \cdot |M_2(h2\pi)| \cdot |M_1(\pi)| \begin{vmatrix} y \\ y' + \Delta y' \end{vmatrix} d\theta \right] \quad (58)$$

con questo procedimento si sono ottenuti i seguenti risultati per le quattro sezioni S_1, S_2, S_3, S_4 .

Sezione S_1 . Si ha:

$$\bar{y} = \frac{C_0 \sin \pi R_0}{a D} (\sin 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a + \sinh 2\pi a) \quad (59)$$

$$y' = - \frac{C_0 \sin \alpha R_0}{2} \quad (60)$$

$$D = 2(1 - \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a) \quad (61)$$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{C_0 \sin \alpha}{4\pi a^2} \quad (62)$$

Sezione S₂. Si ha:

$$\bar{y} = \frac{C_0 \sin \alpha R_0}{a D} (2 \cos 2\pi a \cdot \sinh 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a + \sin 2\pi a) \quad (63)$$

$$y' = - \frac{C_0 \sin \alpha R_0}{2} \quad (64)$$

$$D = -2(1 - \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a) \quad (65)$$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{C_0 \sin \alpha}{4\pi a^2} \quad (66)$$

Sezione S₃. (entrata del magnete 1). Si ha:

$$\bar{y} = \frac{C_0 \sin \alpha R_0}{D} (\sin 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a \cdot \cos 2\pi a + \sinh 2\pi a) \quad (67)$$

$$y' = - \frac{C_0 \sin \alpha R_0}{2} \quad (68)$$

$$D = 2(1 - \cos 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a) \quad (69)$$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{C_0 \sin \alpha}{4\pi a^2} \quad (70)$$

Sezione S₄. (entrata magnete 2). Si ha:

$$\bar{y} = \frac{C_0 \sin \alpha R_0}{D} (\cos 2\pi a \cdot \sinh 2\pi a + \sin 2\pi a \cdot \cosh 2\pi a) \quad (71)$$

$$y' = - \frac{C_0 + m \times R_0}{2} \quad (72)$$

$$D = - 2(1 - \cos 2\pi a \cdot \cos 2\pi a) \quad (73)$$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{C_0 \sin \alpha}{4\pi a^2} \quad (74)$$

Come si vede il tempo di rivoluzione rimane indipendente dalla posizione ove si mette la perturbazione.

Appendice III.

Considerazioni sulla possibilità di usare altri tipi di cavità al posto di C₃.

Per rendere più evidente come sia necessaria la curvatura della traiettoria durante l'interazione col campo elettromagnetico affinché avvenga la cattura, esaminiamo come succede nel caso in cui al posto di C₃ ci fosse C₄. (fig. 3).

$$B_4 l_4 = \frac{v}{h} \frac{\sin \alpha}{c} l_4 \quad (75)$$

(B₄ è il campo magnetico equivalente agli effetti della deflessione al campo elettrico E₄).

L'energia che nel passaggio attraverso le cavità la particella guadagna, è facile vedere che è uguale:

$$\Delta E = \frac{v}{h} y [\sin \alpha - \sin(\alpha + \Delta \varphi)] \quad (76)$$

$$\Delta \varphi = \frac{l_4}{c} \omega \quad (77)$$

per cui si ha

$$\Delta E = - \frac{V_4}{h} \cos \alpha \cdot l_4 \frac{\omega}{c} \quad (78)$$

La relazione tra l'energia guadagnata in funzione della distanza dall'orbita media e la deflessione subita dalla particella è identica a quella che si aveva nel caso delle cavità C_1 e C_2 . Questa cavità non avrebbe potuto catturare le particelle. Anche eccitando a frequenze diverse le due cavità non si sarebbe avuta cattura.

Effetto positivo di cattura si sarebbe avuto probabilmente, se al posto di C_3 ci fossero state due guide d'onda disposte ad un angolo di due radianti come in figura 6. Infatti queste guide d'onda sfruttano un effetto di curvatura e quindi non è più verificato il risultato espresso dalla formula (78). I calcoli sono notevolmente più difficili di quelli richiesti per risolvere il caso prospettato nel testo: riportiamo nell'appendice successiva alcuni risultati di calcoli effettuati per le 2 guide d'onda partendo da determinate ipotesi approssimate.

Appendice IV.

Alcuni calcoli relativi al caso di due guide d'onda.

Nelle sezioni A e A' delle due guide d'onda G_1 e G_2 (vedi fig. 4) intersecate dalla traiettoria media delle particelle, la perturbazione elettromagnetica è in una relazione di fase tale che la particella vede lo stesso campo magnetico e campi elettrici uguali di modulo ma di direzione contraria, poichè nella guida G_1 la velocità di propagazione dell'onda è verso la parte interna del magnete mentre nella guida G_2 la velocità di propagazione

dell'onda è verso la parte esterna del magnete. Quindi una particella che percorre l'orbita media non assorbe mediamente energia attraversando le due cavità mentre è soggetta successivamente a due campi magnetici equisensi che, analogamente a quanto visto per le cavità C_1 e C_2 provocano una variazione del tempo di rivoluzione pari a

$$\frac{\Delta t}{T} = 2 G_0^2 B_1 l_1 \quad (79)$$

Una particella che percorra una traiettoria diversa da quella media, per un determinato angolo di calettamento delle due guide, le attraversa, in prima approssimazione, in fase e quindi non assorbirà energia. Infatti se tra le guide G_1 e G_2 la traiettoria della particella, in prima approssimazione è esprimibile con la relazione:

$$y = K_1 \theta + K_2 \quad (80)$$

ove

K_1 e K_2 = costanti

θ = azimut

è facile vedere che il tempo che impiega una particella a passare da una guida all'altra, rispetto al periodo di rivoluzione, sarà dato da

$$\Delta t = \frac{\int y(\theta) d\theta}{c} = \frac{K_1 \theta_{max}^2}{2c} + \frac{K_2 \theta_{max}}{c} \quad (81)$$

θ_{max} = angolo di calettamento delle 2 cavità.

D'altra parte per $\theta = 0$

$$y_1 = K_2$$

per $\theta = \theta_{max}$

$$y_2 = K_2 + K_1 \theta_{max} \quad (82)$$

e quindi

$$\Delta t^* = \frac{K_1 \theta_{\max} + 2K_2}{c} \quad (83)$$

$\omega \Delta t^*$ = differenza di fase tra i punti di intersezione della particella con le guide d'onda.

Se $\Delta t^* = \Delta t$ allora sarà rispettato in prima approssimazione il sincronismo onda - particella nel passaggio dei corpuscoli attraverso le due guide d'onda.

Ciò è verificato, come si vede facilmente, se $\theta_{\max} = 2$. Se le 2 guide d'onda sono eccitate con frequenza multipla del periodo di rivoluzione, questa condizione viene modificata.

Da quanto si è detto deriva che una particella, passando attraverso le cavità C_1 e C_2 (che sono in fase) e attraverso le guide d'onda G_1 e G_2 , subirà complessivamente un allungamento nel tempo di rivoluzione dato da

$$\frac{\Delta t}{T_0} = \frac{e}{4\pi a^2 E_0^*} \left[B_{\max} l_0 \sin \alpha + 2B_1 l_1 \sin(\alpha + \gamma) \right] \quad (84)$$

$$\text{Quando } \gamma = \pi \quad \text{e} \quad B_0 \cdot l_0 < 2B_1 \cdot l_1 \quad (85)$$

si ha che per α prossimo a 0 $\frac{\Delta t}{T_0}$ diventa negativo.

La relazione precedente si può anche scrivere:

$$\frac{\Delta t}{T_0} = \frac{c}{4\pi a^2 E_0^*} \left[\frac{K}{\omega} l_0 \sin \alpha + 2B_1 l_1 \sin(\alpha + \gamma) \right] \quad (86)$$

$$\frac{d(E - E_0)}{dn} = R_0 K y < \cos \alpha \quad y = R_0 \frac{\Delta E}{E_0^*} \frac{1}{a^2} \quad (87)$$

Un'ulteriore approssimazione rispetto alla ipotesi espressa dalla formula (80), può essere fatta supponen-

do che, nel tratto fra le due guide d'onda calettate a due radianti, la funzione $y = y(\varphi)$ sia del tipo cosinoidale. Se con ΔL indichiamo l'allungamento della traiettoria rispetto all'arco di cerchio congiungente i punti di transito attraverso G_1 e G_2 risulta:

$$\Delta L = \frac{\mathcal{E}l}{E_0^*} \frac{R_0}{a^2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\cos a \varphi - 2 \cos a} \quad (88)$$

$$\Delta L = 2 \frac{\mathcal{E}l}{E_0^*} \frac{R_0}{a^2} \left[\frac{\sin a}{a} - \cos a \right] \quad (89)$$

Questa ipotesi ulteriormente approssimante fa sì che si abbia una differenza di fase fra entrata ed uscita in G_1 e G_2

$$\Delta t \cdot \omega = \Delta \varphi \quad (90)$$

$$\Delta t = \frac{2\mathcal{E}l}{cE_0^*} \frac{R_0}{a^2} \left(\frac{\sin a}{a} - \cos a \right) \quad (91)$$

e l'energia complessivamente acquistata nel passaggio G_1 - G_2 risulta

$$\begin{aligned} \Delta E_{G_1, G_2} &= \mathcal{E}_0 l \sin \alpha - \mathcal{E}_0 l \sin(\alpha + \Delta \varphi) = -\mathcal{E}_0 l \cos \alpha \cdot \Delta \varphi = \\ &= -\frac{\mathcal{E}_0^2 l^2 R_0}{c E_0^* a^2} \omega \left[\frac{\sin a}{a} - \cos a \right] \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (92)$$

$$\text{per } a \rightarrow 0 \quad \Delta E = \frac{\mathcal{E}_0^2 l^2 R_0 \omega}{c E_0^* 3} \sin 2 \left(\omega t - \frac{\varphi}{\lambda} \right) \quad (93)$$

$$\text{essendo } \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cdot \sin \alpha \quad (94)$$

L'allungamento della traiettoria per la presenza del campo elettrico nelle due guide d'onda si calcola come segue. Supponendo ci sia perfetto annullamento del cam-

po magnetico associato al campo elettrico delle prime 2 cavità con il campo magnetico dell'onda nelle 2 guide cioè che i 2 sistemi siano eccitati in fase opportuna, la traiettoria stabile è data da

$$|M(a)| \left\{ \left[|M(\pi-a)| \cdot |M(h\pi a)| \right] \left| y_1 \right| + \begin{matrix} \frac{\Delta E}{E} \frac{R_0}{a^2} \\ 0 \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} y(\theta) \\ y'(\theta) \end{matrix} \quad (95)$$

ove si considera una sola metà della struttura ad otto: l'altra risulta a questa simmetria specularmente

$$\Delta E_0 = E_0 l \sin \left(\omega t - \frac{y}{\lambda} \right) \quad (96)$$

Se $y'(\theta) = 0$ si ha l'orbita stabile e si ottiene:

$$\left(-\omega h a \pi \sin a \pi + \sinh a \pi \cosh a \pi \right) y_1 - \sin a \frac{\Delta E}{E_0} \frac{R_0}{a^2} = 0 \quad (97)$$

da cui si ha:

$$y_1 = \frac{\sin a}{\sinh \pi a \cosh \pi a - \sin \pi a \cosh \pi a} \frac{l E_0 \sin \alpha}{E_0} \frac{R_0}{a^2} \quad (98)$$

L'allungamento della traiettoria è dato da:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2}{c} \frac{\sinh \pi a}{a} y_1 - 2 \int_0^{\pi} \frac{\cosh \pi a \sinh \pi a + \sin \pi a \cosh \pi a}{c a} y_1 + \\ &+ \frac{\Delta E}{E_0} \frac{R_0}{a^2} 2 \left(1 - \frac{\sin a}{a} \right) = \frac{2}{c} \frac{\sin a l E_0 \sin \alpha}{(\sinh \pi a \cosh \pi a - \sin \pi a \cosh \pi a) E_0^*} \cdot \\ &\cdot \frac{R_0}{a^3} \left[\sinh \pi a + \cosh \pi a \sin \pi a \right] + \frac{2}{c} \frac{l E_0}{E_0^*} \sin \alpha \frac{R_0}{a^2} \left[1 - \frac{\sin a}{a} \right] = \\ &= K l E_0 \sin \alpha = K E_0 l \sin \left(\omega t - \frac{y}{\lambda} \right) = K E_0 l \sin \left(\alpha_1 - \frac{y}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (99)$$

ove, se a è piccolo $K = \left(\frac{1}{2c} \frac{R_0}{a^2} + \frac{1}{3c} R_0 \right)$ (100)

Le equazioni del moto risulterebbero quindi molto più complicate che nel caso studiato nel testo,

Appendice V

Riportiamo alcune formule utili alla intelligenza del testo. Supponendo che la traiettoria nell'interno della cavità C_3 abbia un certo raggio di curvatura \neq risulta

$$a) \cos A_{\max} \sim 1 - \frac{\theta_{\max}^2}{2} \sim 1 - \frac{y_0}{R_0} \quad \theta_{\max} \sim \sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} \quad (101)$$

$$b) \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos^2 \theta d\theta \sim \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) d\theta = 2\theta_{\max} - \frac{\theta_{\max}^3}{3} = 2\sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} - \frac{2y_0}{3R_0} \sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} \quad (102)$$

c) Calcolo di $\frac{d\theta_{\max}}{dy}$

$$\cos A_{\max} = \frac{R_0^*}{R_0 + y} \quad \frac{R_0^*}{R_0^2} = \theta_{\max} \frac{d\theta_{\max}}{dy}$$

$$\frac{d\theta_{\max}}{dy} = \frac{R_0^*}{R_0 \sqrt{2y_0 R_0}} \quad \frac{d\theta_{\max}}{dy} = \left(1 - \frac{y_0}{R_0}\right) \frac{1}{\sqrt{2y_0 R_0}} \quad (103)$$

$$d) - \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \theta \sin \theta \cos \theta d\theta + 2R_0 \frac{d\theta_{\max}}{dy} \sin^2 \theta_{\max} \quad (v.24)$$

Tale espressione diviene, in prima approssimazione,

$$\sim - \int_{\theta_e}^{\theta_u} \theta^2 d\theta + \left(1 - \frac{y_0}{R_0}\right) \frac{2R_0}{\sqrt{2y_0 R_0}} \theta_{\max}^2 = -\frac{2}{3} \theta_{\max}^2 + \quad (104)$$

$$+ 2\sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} \left(1 - \frac{y_0}{R_0}\right) = -\frac{2 \cdot 2}{3} \frac{y_0}{R_0} \sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} + 2\sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} -$$

$$- \frac{2y_0}{R_0} \sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} = 2\sqrt{\frac{2y_0}{R_0}} - \frac{10}{3} \frac{y_0}{R_0} \sqrt{\frac{2y_0}{R_0}}$$

Appendice VIModifiche necessarie per la cattura di elettroni e positroni contemporaneamente.

Poichè la cattura avviene quando il vettore di Pointing è diretto nello stesso senso del moto della particella, il dispositivo descritto precedentemente serve solo alla cattura di particelle che si muovono in una certa direzione e perciò dotate di un certo segno. Se vogliamo catturare invece particelle di segno opposto, è necessario sincronizzare il complesso $C_1 - C_2$ sulla frequenza di rivoluzione e la cavità C_3 sulla seconda armonica. In tal caso il vettore di Pointing \vec{P} è

$$|\vec{P}| = K \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha$$

Risulta $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\vec{P}| = 2K\alpha^2$ mentre $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} |\vec{P}| = -2K(\pi - \alpha)^2$.

In tale caso il piano delle fasi $E - \alpha$ risulta diviso in due zone, una con centro in $\alpha = 0$ ed una con centro in $\alpha = \pi$ per cui si ha rispettivamente cattura di elettroni e cattura di positroni.

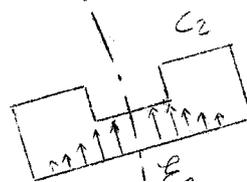
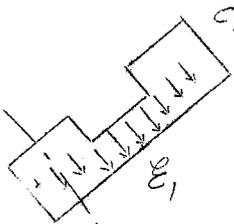
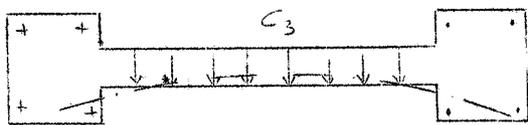
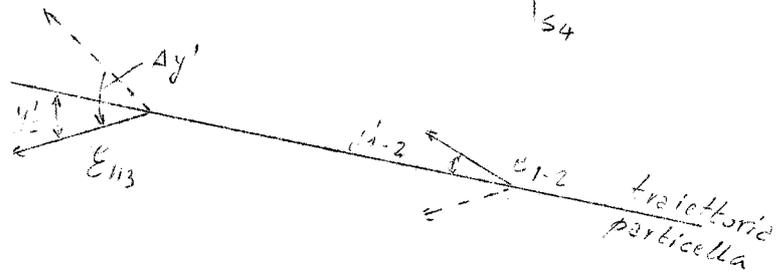
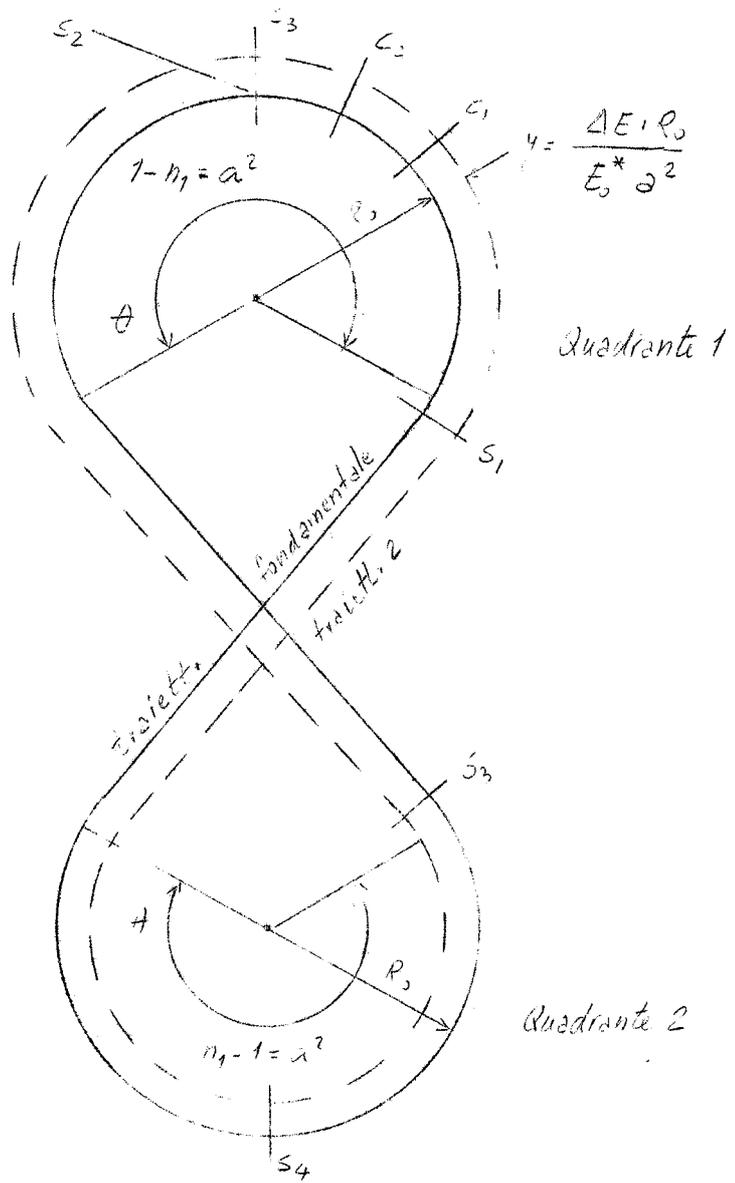


FIG. 1

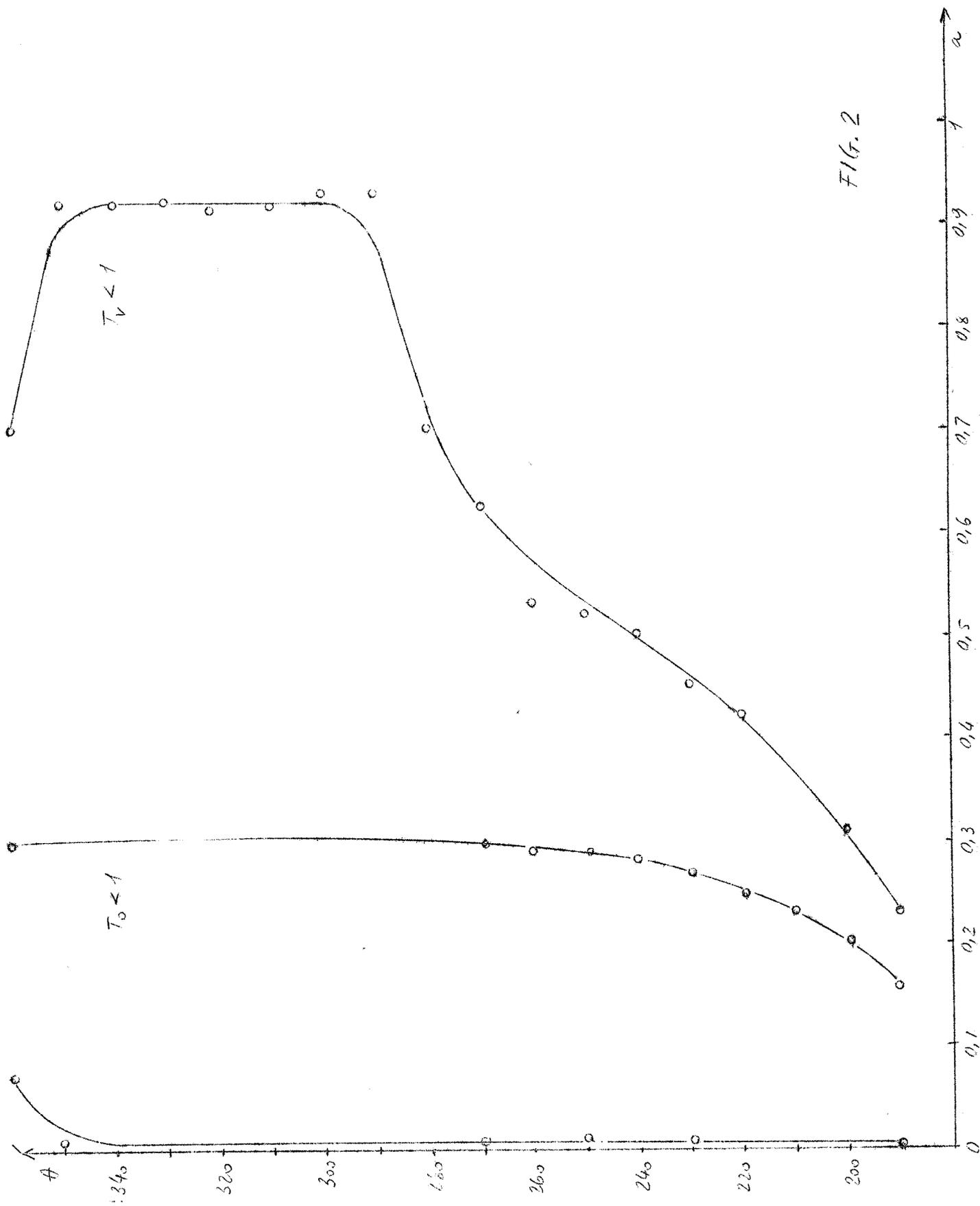


FIG. 2

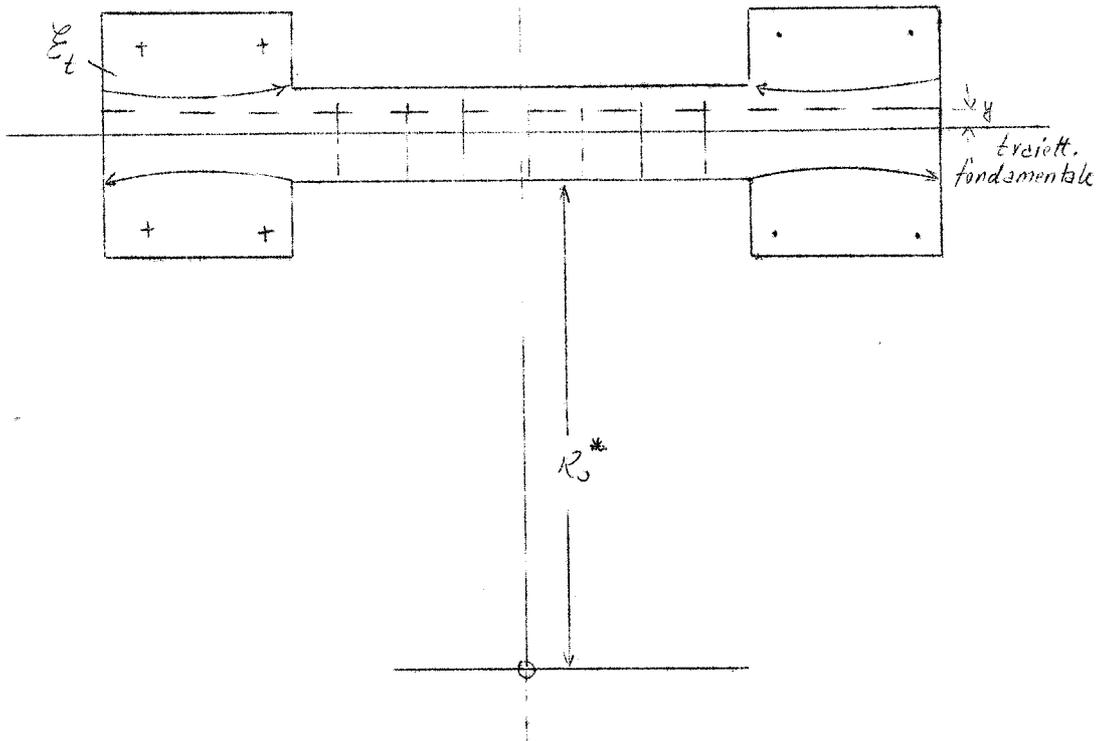
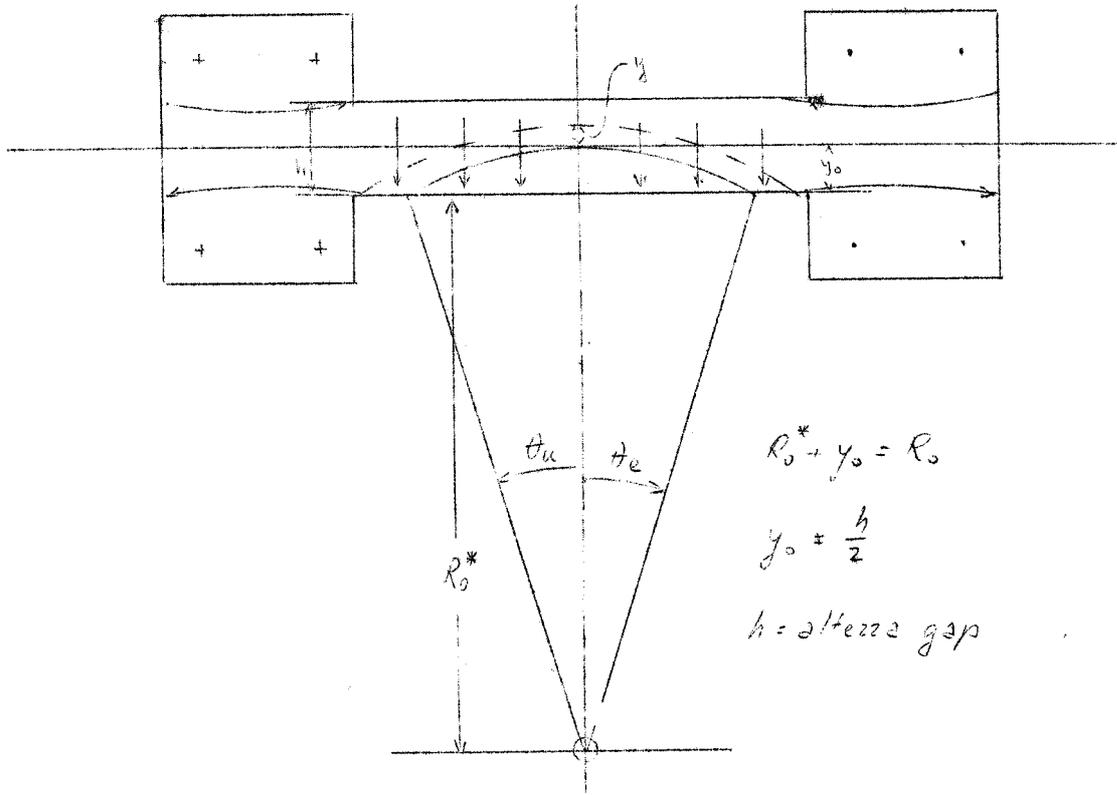
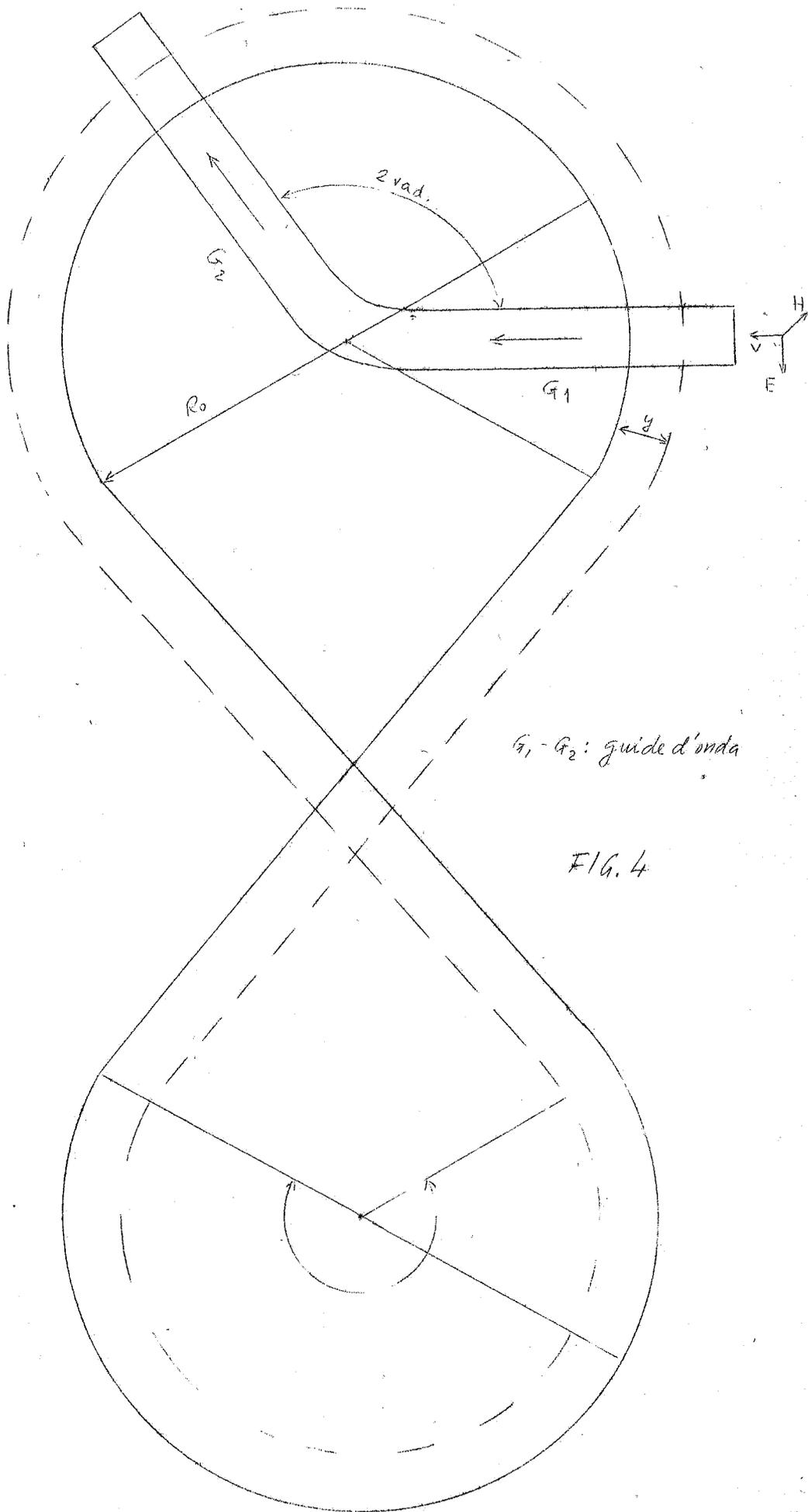


FIG. 3



$G_1 - G_2$: guide d'onda

FIG. 4