

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-60/26 (1960)

G. Sacerdoti: CALCOLO DEL CIRCUITO EQUIVALENTE DI UNA CAVITA'  
RISONANTE ECCITATA DA UNA SPIRA.

Estratto da: Alta Frequenza, 29, 401 (1960)



..... Estratto da  
ALTA FREQUENZA  
giu.-ago. 1960; XXIX, 3-4, p. 401-410

## Calcolo del circuito equivalente di una cavità risonante eccitata da una spira.

GIANCARLO SACERDOTI

*Si espone un procedimento valido in molti casi pratici per il calcolo delle costanti di un circuito equivalente di una cavità risonante del tipo usato in un elettrosincrotrone per accelerare le particelle. Per una banda di frequenza abbastanza larga, il circuito equivalente con costanti concentrate è particolarmente semplice e queste risultano di facile calcolo.*

### **Introduzione.**

Negli elettrosincrotroni (Bibliografia 1, 2), per accelerare le particelle si usano cavità risonanti della forma indicata in figura 1. Le particelle cariche (elettroni) passano attraverso la cavità lungo l'asse di simmetria e vengono accelerate tra  $A$  ed  $A'$  dal campo elettrico oscillante, che qui viene creato. Per poter accelerare le particelle, la frequenza di eccitazione dovrà essere pari ad un multiplo della frequenza di rivoluzione delle particelle stesse. Inoltre, poichè le particelle sono soggette a piccole variazioni di velocità, talvolta riesce necessario modulare conseguentemente la frequenza di eccitazione della cavità; l'ordine di grandezza dell'ampiezza di modulazione è di qualche unità per cento della frequenza di funzionamento. Dato l'alto coefficiente di qualità del circuito risonante equivalente alla cavità, la modulazione di frequenza presenta difficoltà notevoli. L'eccitazione della cavità viene effettuata mediante una spira disposta come indica la figura 1.

Nella presente nota ci si propone di calcolare i parametri di un circuito elettrico con costanti concentrate, che simuli il comportamento della cavità stessa per frequenze prossime a quella di risonanza.

### **Induttanza propria e mutua nel caso di una cavità risonante.**

Nei fenomeni elettrici lentamente variabili, quando si consideri una rete di circuiti filiformi chiusi, viene definito come induttanza  $L_i$  del circuito  $i$ -esimo, e come mutua induttanza  $M_{ij}$  tra i circuiti  $i$ -esimo e  $j$ -esimo, il flusso magnetico, provocato da una corrente unitaria che percorre il circuito  $i$ -esimo ed abbracciato rispettivamente dal circuito

tributo dei tratti radiali della spira. Per il campo dovuto alla spira varranno allora le:

$$[5] \quad \mathbf{H}_s = \mathbf{H}' + \mathbf{H}'' ,$$

$$[6] \quad \begin{aligned} H'_{r'} &= 0 & H''_{r''} &= 0 \\ H'_{\vartheta'} &= K \frac{I_s}{4} N_1 (K r') & H''_{\vartheta''} &= -K \frac{I_s}{4} N_1 (K r'') \\ H'_z &= 0 & H''_z &= 0, \end{aligned}$$

essendo:

$H'$  il contributo del tratto  $a_1$  della spira che si trova al raggio  $R_3$ ,

$H''$  » » » »  $a_2$  » » » » » »  $R_4$ ,

$r', \vartheta', z$  le coordinate cilindriche con origine il punto di mezzo del tratto  $a_1$ ,

$r'', \vartheta'', z$  le coordinate cilindriche con origine il punto di mezzo del tratto  $a_2$ ,

$I_s$  la corrente della spira,

$K$  il quoziente  $\omega/c$ .

Come già detto, si è trascurato il contributo dei tratti radiali della spira, ammettendo che esso sia compensato dalle correnti di reazione sulle superfici piane (fondi) della cavità risonante. Quindi si ha:

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_{\vartheta'} + \mathbf{H}_{\vartheta''} .$$

Le correnti di reazione sull'armatura dovranno procurare un campo tale da annullare la componente normale all'armatura stessa, dovuta alla corrente di spira. Secondo queste considerazioni si calcola facilmente il campo  $H_a$ .

Per i valori di  $K r'$  e  $K r''$  inferiori a 1,5, le [6] si possono scrivere con approssimazione di qualche unità per cento:

$$[7] \quad H_{\vartheta'} = \frac{I_s}{2 \pi r'} \quad H_{\vartheta''} = - \frac{I_s}{2 \pi r''} .$$

Inoltre varranno le semplici relazioni:

$$[8] \quad \begin{aligned} r'^2 &= R^2 + R_3^2 - 2 R_3 R \cos \vartheta \\ r''^2 &= R^2 + R_4^2 - 2 R_4 R \cos \vartheta . \end{aligned}$$

Con facili passaggi dalle [7] si ottiene (B.6):

$$\begin{aligned}
 H'_R (R = R_1) &= \frac{I_s}{2 \pi R_1} (a_{13}^2 \text{sen } \vartheta + a_{13}^3 \text{sen } 2 \vartheta + \dots + a_{13}^{n+1} \text{sen } n \vartheta + \dots) \\
 H''_R (R = R_1) &= - \frac{I_s}{2 \pi R_1} (a_{14}^2 \text{sen } \vartheta + a_{14}^3 \text{sen } 2 \vartheta + \dots + a_{14}^{n+1} \text{sen } n \vartheta + \dots) \\
 H'_R (R = R_2) &= \frac{I_s}{2 \pi R_2} (a_{32}^2 \text{sen } \vartheta + a_{32}^3 \text{sen } 2 \vartheta + \dots + a_{32}^{n+1} \text{sen } n \vartheta + \dots) \\
 H''_R (R = R_2) &= - \frac{I_s}{2 \pi R_2} (a_{42}^2 \text{sen } \vartheta + a_{42}^3 \text{sen } 2 \vartheta + \dots + a_{42}^{n+1} \text{sen } n \vartheta + \dots),
 \end{aligned}$$

[9]

ove rappresentano:

$H'_R (R = R_1)$  la componente di  $H'$  normale alla superficie dell'armatura di raggio  $R_1$ .  
 $H'_R (R = R_2)$  » » »  $H'$  » » » » »  $R_2$ .  
 $H''_R (R = R_1)$  » » »  $H''$  » » » » »  $R_1$ .  
 $H''_R (R = R_2)$  » » »  $H''$  » » » » »  $R_2$ .

$a_{ij}$  il rapporto  $R_i/R_j$ .

Per le formule [2A] dell'appendice,  $H_{aR}$  avrà l'espressione:

$$\begin{aligned}
 H_{aR} &= \frac{I}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n c_{n1} J_n (K R) \cos (n \vartheta + \varphi_{n1}) e^{-i\omega t} + \\
 &+ \frac{I}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n c_{n2} N_n (K R) \cos (n \vartheta + \varphi_{n2}) e^{-i\omega t};
 \end{aligned}$$

[10]

per ragioni di simmetria azimutale rispetto alla spira:

$$\varphi_{n1} = \varphi_{n2}.$$

Le costanti  $c_{n1}$ ,  $c_{n2}$  si calcolano ponendo eguali  $H_{aR} (R = R_1)$  a  $-H_{sR} (R = R_1)$  e  $H_{aR} (R = R_2)$  a  $-H_{sR} (R = R_2)$ .

Le equazioni che si ottengono sono per le [5], [9], [10] le seguenti:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{aligned}
 \frac{I}{R_1} [c_{11} J_1 (K R_1) + c_{12} N_1 (K R_1)] &= \frac{I_s}{2 \pi R_1} (a_{13}^2 - a_{14}^2) \\
 \frac{I}{R_2} [c_{11} J_1 (K R_2) + c_{12} N_1 (K R_2)] &= \frac{I_s}{2 \pi R_2} (a_{32}^2 - a_{42}^2) \\
 \dots &\dots \\
 \dots &\dots
 \end{aligned} \right. \\
 &[11] \\
 &\left\{ \begin{aligned}
 \frac{n}{R_1} [c_{n1} J_n (K R_1) + c_{n2} N_n (K R_1)] &= \frac{I_s}{2 \pi R_1} (a_{13}^{n+1} - a_{14}^{n+1}) \\
 \frac{n}{R_2} [c_{n1} J_n (K R_2) + c_{n2} N_n (K R_2)] &= \frac{I_s}{2 \pi R_2} (a_{32}^{n+1} - a_{42}^{n+1}).
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Conosciuti  $c_{n1}$ ,  $c_{n2}$ , risulta così noto anche  $H_a$ .

Le [II] si semplificano notevolmente se, al posto di  $N_n(\rho)$ ,  $J_n(\rho)$ , si sostituiscono le seguenti espressioni approssimate:

$$[I2] \quad N_n(\rho) = -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{\rho}\right)^n$$

$$J_n(\rho) = \frac{\rho^n}{n! 2^n}.$$

I valori di  $c_{n1}$ ,  $c_{n2}$ , forniti dalle [II] e dalle [I2], sono allora i seguenti:

$$[I3] \quad c_{n1} = \frac{\left(\frac{1}{R_1}\right)^n (a_{32}^{n+1} - a_{42}^{n+1}) - \left(\frac{1}{R_2}\right)^n (a_{13}^{n+1} - a_{14}^{n+1})}{a_{21}^n - a_{12}^n} \frac{I_s}{2\pi} (n-1)! 2^n \left(\frac{c}{\omega}\right)^n$$

$$c_{n2} = \frac{R_1^n (a_{32}^{n+1} - a_{42}^{n+1}) - R_2^n (a_{13}^{n+1} - a_{14}^{n+1})}{a_{21}^n - a_{12}^n} \frac{I_s}{2} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \left(\frac{\omega}{c}\right)^n.$$

#### Calcolo delle induttanze proprie e mutue del circuito equivalente.

Note le formule che permettono di ricavare il campo magnetico, risulta semplice, almeno concettualmente, dedurre il circuito equivalente. Il flusso magnetico, abbracciato dalla spira di eccitazione, si potrà scrivere:

$$[I4] \quad \Phi_s = \Phi_{ss} + \Phi_{as} + \Phi_{0s} = (L_{ss} + M_{as}) I_s + M_{0s} I_0,$$

dove sono:

$$\Phi_{ss} = L_{ss} I_s \quad \text{il contributo della corrente } I_s \text{ della spira,}$$

$$\Phi_{as} = M_{as} I_s \quad \text{» } \text{» } \text{ delle correnti di reazione di armatura,}$$

$$\Phi_{0s} = M_{0s} I_0 \quad \text{» } \text{» } \text{ della corrente di armatura,}$$

$L_{ss}$  l'induttanza propria della spira.

Definiamo  $L_{ss} + M_{as} = L_s$  « induttanza della spira in presenza dell'armatura ».

Con eguali criteri possiamo scrivere per il flusso  $\Phi_0$  <sup>(1)</sup> abbracciato dall'armatura:

$$[I5] \quad \Phi_0 = \Phi_{s0} + \Phi_{a0} + \Phi_{00} = (M_{s0} + M_{a0}) I_s + L_{00} I_0,$$

<sup>(1)</sup> Per quanto detto in precedenza, è una costante indipendente dalla linea chiusa scelta in modo che abbracci l'armatura.

nella quale s'indicano con:

$$\begin{aligned}\Phi_{s0} &= M_{s0} I_s && \text{il contributo della corrente } I_s, \\ \Phi_{a0} &= M_{a0} I_s && \text{» » delle correnti di reazione di armatura,} \\ \Phi_{00} &= L_{00} I_0 && \text{» » della corrente di armatura.}\end{aligned}$$

Diciamo per definizione  $M_{s0} + M_{a0} = M_0$  « mutua induttanza del circuito di spira sul circuito di armatura ».

Provvediamo ora al calcolo dei vari flussi che compaiono in [14] e [15]. Per il calcolo di  $\Phi_{s0}$ ,  $\Phi_{a0}$ ,  $\Phi_{00}$ , poichè possiamo scegliere a piacere una linea qualsiasi sull'armatura, scegliamo la linea intersezione tra il piano, ove si trova la spira, e l'armatura.

Per il calcolo di  $\Phi_{ss}$  possiamo usare la formula, valida nei limiti delle ipotesi e semplificazioni già adottate:

$$[16] \quad \Phi_{ss} = 4 \cdot 10^{-7} l I_s \left( \log_e \frac{d}{\rho} + \frac{0,23 \mu}{4} \right),$$

in cui siano, in unità del sistema Giorgi:

$l$  la dimensione lungo l'asse  $z$  della spira (rettangolare),

$d$  » » radiale della spira,

$\rho$  il diametro del conduttore con cui è fatta la spira,

$\mu$  la permeabilità magnetica relativa del mezzo rispetto a quella del vuoto.

Per il calcolo di  $\Phi_{as}$  si parte dalle formule [2A] dell'appendice; integrando e ivi sostituendo le espressioni [12] e [13], si ottiene:

$$[17] \quad \Phi_{as} = \frac{\mu l I_s}{2 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{32}^{n+1} - a_{42}^{n+1}}{n} \left( \frac{a_{41}^n - a_{14}^n}{a_{31}^n - a_{12}^n} - \frac{a_{31}^n - a_{13}^n}{a_{21}^n - a_{12}^n} \right) +$$

$$- \frac{a_{13}^{n+1} - a_{14}^{n+1}}{n} \left( \frac{a_{42}^n - a_{24}^n}{a_{21}^n - a_{12}^n} - \frac{a_{32}^n - a_{23}^n}{a_{21}^n - a_{12}^n} \right).$$

Il  $\Phi_{0s}$  è dato dalla:

$$[18] \quad \Phi_{0s} = - \frac{\mu l c}{\omega} I_0 \left[ c_{10} J_0 \left( R \frac{\omega}{c} \right) + c_{20} N_0 \left( R \frac{\omega}{c} \right) \right]_{R_3}^{R_4},$$

ove  $c_{10}$  e  $c_{20}$  sono i coefficienti che si ricavano dalla [4].

Il  $\Phi_{00}$  si ottiene dalla [3] per integrazione e viene espresso come:

$$[19] \quad \Phi_{00} = - \frac{\mu l c}{\omega} I_0 \left[ c_{10} J_0 \left( R \frac{\omega}{c} \right) + c_{20} N_0 \left( R \frac{\omega}{c} \right) \right]_{R_1}^{R_2}.$$

Il  $\Phi_{a0}$  si ricava con lo stesso procedimento con cui si è dedotta la [17]; si trova:

$$[20] \quad \Phi_{a0} = \frac{\mu l I_s}{2 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{32}^{n+1} - a_{42}^{n+1} - a_{13}^{n+1} + a_{14}^{n+1}}{n}$$

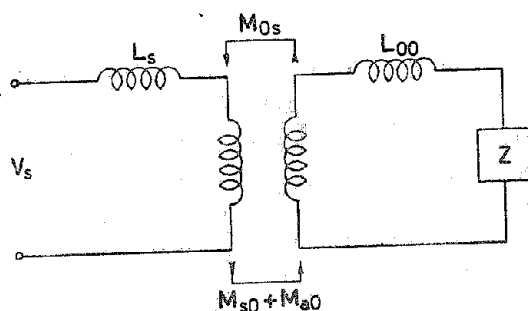


Fig. 2. — Circuito equivalente di una cavità risonante, eccitato da una spira.

Nei limiti di approssimazione usati per  $\Phi_{s0}$  si ottiene con considerazioni elementari:

$$[21] \quad \Phi_{s0} = \frac{\mu l I_s}{2 \pi} \left( \log_e \frac{R_2 - R_3}{R_3 - R_1} + \log_e \frac{R_4 - R_1}{R_2 - R_4} \right)$$

Le formule dalla [16] alla [21] forniscono le espressioni del flusso magnetico, che permettono di calcolare le induttanze proprie e mutue come definite nelle [14] e [15].

In conclusione il circuito equivalente della cavità risonante, eccitata da una spira, è quello di figura 2. In generale è  $M_{0s} \neq M_{s0} + M_{a0}$ , per cui il circuito equivalente risulta costituito da due rami con accoppiamento mediante trasformatore, di carattere pseudoinduttivo. La  $Z$  rappresenta l'impedenza che offre la cavità tra  $A$  e  $A'$  (fig. 1). In pratica tale impedenza consta principalmente di una capacità: in parallelo a questa si dovrà introdurre una resistenza per portare in conto le perdite del circuito e il carico degli elettroni (B.2).

#### Esempio numerico.

Riportiamo a titolo di esempio i valori delle induttanze, ottenuti con i seguenti dati numerici:

$$R_1 = 0,2 \text{ m}, \quad R_2 = 0,8 \text{ m}, \quad R_3 = 0,3 \text{ m}, \quad R_4 = 0,5 \text{ m},$$

$$\omega = 6,28 \cdot 4 \cdot 10^7 \text{ rad/s}, \quad l = 0,8 \text{ m}, \quad \rho = 0,01 \text{ m}.$$

Si ha:

$$L_{ss} = 0,938 \mu\text{H}, \quad M_{as} = -0,043 \mu\text{H}, \quad M_{0s} = 0,084 \mu\text{H},$$

$$L_{00} = 0,225 \mu\text{H}, \quad M_{s0} = 0,255 \mu\text{H}, \quad M_{a0} = -0,14 \mu\text{H},$$

e quindi:

$$L_s = L_{ss} + M_{as} = 0,895 \mu\text{H}, \quad M_0 = M_{s0} + M_{a0} = 0,115 \mu\text{H}.$$

Come si osserva nell'esempio numerico, il valore assoluto di  $M_{as}$  è molto piccolo rispetto a  $L_{ss}$ , perchè la spira è abbastanza lontana dall'armatura; più forte è invece l'influenza dell'armatura sul valore di  $M_0$ , che risulta in valore assoluto meno della metà di  $M_{s0}$ . Nella pratica normale si trascurano erroneamente nel calcolo delle costanti del circuito equivalente i termini  $M_{a0}$  e  $M_{as}$ , i quali, come mostra l'esempio, possono essere notevolmente importanti.

*Frascati - Laboratori Nazionali del Sincrotrone.*

## APPENDICE

### Formule del campo elettromagnetico in coordinate cilindriche.

Per comodità del lettore si riportano le formule del campo magnetico, usate nel testo per i calcoli svolti. Le espressioni del campo magnetico nello spazio, nelle coordinate cilindriche  $(r, \vartheta, z)$ , sono (B.5):

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{I}{R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n \psi_n + i h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \\ \text{[IA]} \quad H_\vartheta &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} - \frac{h}{r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n b_n \psi_n \\ H_z &= \sum b_n \psi_n, \end{aligned}$$

dove  $\psi_n$  vale:

$$e^{in\vartheta} J_n(Kr) e^{-i\omega t} \quad \text{ovvero} \quad e^{in\vartheta} N_n(Kr) e^{-i\omega t}$$

e sono:

$K$  il quoziente  $\omega/c$ ,

$\omega$  la pulsazione di eccitazione,

$c$  la velocità della luce,

$a_n, b_n$  coefficienti che dipendono dalle condizioni ai limiti del problema,

$h$  il grado di periodicità lungo l'asse  $z$ ,

$n$  il grado di periodicità azimutale,

$J_n, N_n$  funzioni di Bessel.



Con le ipotesi assunte nel testo, si vede che nel nostro caso  $b_n = 0$ ,  $h = 0$ ,  $a_n = a - n$ . Poichè  $J_n = -J_{-n}$ ,  $N_n = -N_{-n}$ , si ha:

$$[2A_1] \quad H_r = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n1} J_n(Kr) \cos(n\vartheta + \varphi_{n1}) e^{-i\omega t} + \\ + \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} n c_{n2} N_n(Kr) \cos(n\vartheta + \varphi_{n2}) e^{-i\omega t}$$

$$[2A_2] \quad H_\vartheta = -i \sum_{n=0}^{\infty} c_{n1} \frac{\partial J_n(Kr)}{\partial r} \operatorname{sen}(n\vartheta + \varphi_{n1}) e^{-i\omega t} + \\ - i \sum_{n=0}^{\infty} c_{n2} \frac{\partial N_n(Kr)}{\partial r} \operatorname{sen}(n\vartheta + \varphi_{n2}) e^{-i\omega t}$$

$$[2A_3] \quad H_z = 0.$$

Poichè la spira di eccitazione si trova su di un piano che passa per l'asse del sistema di coordinate scelto, dovrà risultare anche  $\varphi_{n1} = \varphi_{n2} = 0$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- (B.1) G. SALVINI: Il progetto italiano di un elettrosincrotrone - Nuovo Cimento, 1954, XII (Supplemento), p. 77.
- (B.2) A. ALBERIGI, I. F. QUERCIA e M. PUGLISI: L'impianto di radiofrequenza modulata in frequenza per l'elettrosincrotrone italiano da 1000 MeV - Relazione interna della Sezione Acceleratore dell'I. N. F. N., Frascati, 1957.
- (B.3) E. PERSICO: Lezioni sugli acceleratori di particelle - Conti e Pioda, Roma, 1954, p. 112-131.
- (B.4) D. GRAFFI: Teoria matematica dell'elettromagnetismo - Patron, Bologna, 1950, p. 220.
- (B.5) J. A. STRATTON: Electromagnetic Theory - McGraw-Hill, New York, 1941, p. 354.
- (B.6) H. B. DWIGHT: Tables of Integrals and Other Mathematical Data - McMillan, New York, 1957, p. 85.
- (B.7) E. JAHNKE and F. EMDE: Tables of Functions with Formulae and Curves - Dover, New York, 1945, p. 128-132.
- (B.8) F. W. GROVER: Inductance Calculations - D. Van Nostrand, New York, 1947, p. 39.