

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-60/14 (1960)

G. Sacerdoti: PROPRIETA' OTTICHE DI UN QUADRUPOLO MAGNETICO
ELICOIDALE.

Estratto da: L'Elettrotecnica, 47, 322 (1960)

PROPRIETÀ OTTICHE DI UN QUADRUPOLO MAGNETICO ELICOIDALE

GIANCARLO SACERDOTI (*)

In questo articolo si propone un nuovo dispositivo, il quadrupolo elicoidale, per focalizzare particelle cariche.

Dallo studio delle proprietà ottiche si trova che, soddisfatte alcune condizioni, un simile dispositivo ha la proprietà di focalizzare fasci di particelle cariche e come tale può trovare applicazioni nello studio della fisica nucleare.

Un esempio numerico ci fornisce alcuni dati tecnici orientativi su tale tipo di macchina.

INTRODUZIONE.

Nella fisica nucleare è spesso necessario concentrare fasci di particelle cariche di alta energia uscenti da un punto che, analogamente a quanto si fa in ottica, si chiama sorgente, in un altro punto che si chiama immagine; così in altre occasioni è necessario far sì che fasci di particelle che escono da una sorgente vengano canalizzati per un tragitto rettilineo anche di parecchie decine di metri, cioè è necessario che la sezione del fascio rimanga limitata durante questo tragitto [1] [2]. Se, per es., l'ampiezza angolare del fascio che esce da una sorgente, è pari a $1/10 \times 1/10$ sterad., ad una distanza di 10 metri dalla sorgente, se non si intervenisse con opportuni dispositivi, la sezione del fascio sarebbe di 1×1 m. Per impedire la dispersione del fascio e per far convergere, per esempio alla distanza di 10 metri il fascio in un punto, possono essere usati quadrupoli elettrostatici o magnetici: gli elettrostatici servono per le particelle di basso momento, quelli magnetici per particelle di momento più alto (1).

Questi dispositivi per particelle di elevato momento 200-20 000 MeV/c (2), quali oggi si producono con macchine acceleratrici in molti laboratori di ricerca [4] [5] [6], diventano oggetti molto pesanti (parecchie tonnellate) e molto costosi (parecchi milioni), naturalmente il costo e il peso variano a seconda delle caratteristiche funzionali [7] [8].

Un quadrupolo è schematicamente rappresentato in fig. 1.

Chiamiamo il piano $z = 0$ « piano principale »
» » » $x = 0$ « piano secondario ».

La relazione che lega [7] z_2 e $\frac{dz_2}{dy} = z_2'$ all'uscita del quadrupolo, alle z_1 e $\frac{dz_1}{dy} = z_1'$ all'entrata è la seguente:

$$(1) \begin{vmatrix} z_2 \\ z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh \beta l & \frac{1}{\beta} \sinh \beta l \\ \beta \sinh \beta l & \cosh \beta l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_1' \end{vmatrix}$$

(*) Dr. Ing. GIANCARLO SACERDOTI del C.N.R.N.

(1) Le interazioni tra campo magnetico e particelle sono regolate dalla relazione di Lorentz $F = e B v$ [3].

(2) L'energia di una particella si misura generalmente in milioni di elettroni volt: un elettrone volt è l'energia cinetica che una particella di carica pari a quella di un elettrone acquisita in una differenza di potenziale di 1 volt.

ove:

l = spessore del quadrupolo (cm)

$$\beta^2 = \frac{dBz}{dx} \cdot \frac{3 \times 10^{-4}}{p} \text{ (cm}^{-2}\text{)}$$

$\frac{dBz}{dx}$ = derivate rispetto x della componente secondo

z dell'induzione del quadrupolo

(Bz in gauss; x in cm; $\frac{dBz}{dx}$ assume di solito valori compresi tra 500 e 2000)

p = momento della particella in MeV/c (c = velocità della luce).

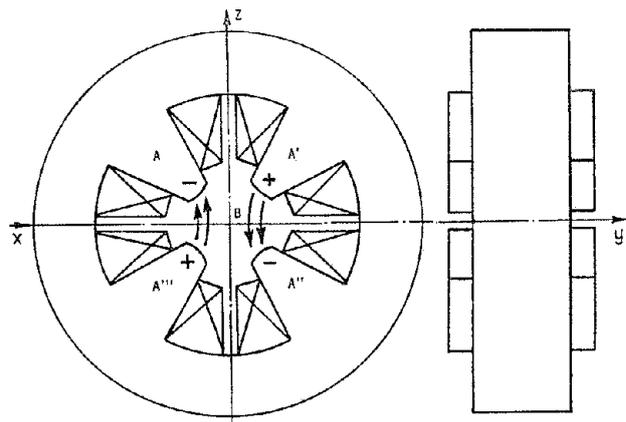


Fig. 1. — Sezioni di una lente quadrupolare.

Analogamente [7] le relazioni che legano x_2 , x_2' a x_1 e x_1' sono le seguenti:

$$(2) \begin{vmatrix} x_2 \\ x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \beta l & \frac{1}{\beta} \sin \beta l \\ -\beta \sin \beta l & \cos \beta l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_1' \end{vmatrix}$$

Nella tabella I sono riportati i valori di β in funzione del momento e di $\frac{dBz}{dx}$.

Poichè la matrice che moltiplica la z_1 e z_1' per ottenere z_2 e z_2' contiene coseni iperbolici, le particelle sul piano $x = 0$ tendono a divergere, cioè le z_2 e z_2' tendono ad essere $>$ dei valori iniziali.

Sul piano $z = 0$ invece le particelle tendono a convergere all'uscita del quadrupolo. Ciò significa che la lente ha proprietà focheggianti sul piano principale e ha proprietà defocheggianti sul piano secondario. Con una coppia di quadrupoli disposti sullo stesso asse (fig. 2) opportunamente distanziati e con opportuni gradienti

TABELLA I. - Valori di β in funzione del momento e di $\frac{dB_z}{dx}$

$$\left(\frac{dB_z}{dx} = \text{gauss/cm} \quad P = \text{Mev/c} \quad \beta = \text{cm}^{-1} \right)$$

$\frac{dB_z}{dx}$	P_{125}	P_{250}	P_{500}	P_{1000}	P_{1500}	P_{2000}
100	$1,55 \times 10^{-2}$	$1,10 \times 10^{-2}$	$0,78 \times 10^{-2}$	$0,55 \times 10^{-2}$	$0,45 \times 10^{-2}$	$0,39 \times 10^{-2}$
500	$3,4 \times 10^{-2}$	$2,45 \times 10^{-2}$	$1,73 \times 10^{-2}$	$1,23 \times 10^{-2}$	$1,01 \times 10^{-2}$	$0,87 \times 10^{-2}$
1000	$4,9 \times 10^{-2}$	$3,45 \times 10^{-2}$	$2,45 \times 10^{-2}$	$1,73 \times 10^{-2}$	$1,42 \times 10^{-2}$	$1,23 \times 10^{-2}$
1500	$5,64 \times 10^{-2}$	4×10^{-2}	$2,82 \times 10^{-2}$	$2,08 \times 10^{-2}$	$1,73 \times 10^{-2}$	$1,49 \times 10^{-2}$
2000	$6,9 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-2}$	$3,45 \times 10^{-2}$	$2,45 \times 10^{-2}$	2×10^{-2}	$1,73 \times 10^{-2}$
2500	11×10^{-2}	$7,8 \times 10^{-2}$	$5,5 \times 10^{-2}$	$3,9 \times 10^{-2}$	$3,18 \times 10^{-2}$	$2,75 \times 10^{-2}$

del campo magnetico e con i piani principali rotati di 90° , si può ottenere convergenza nei due piani $x=0$; $z=0$ in modo tale che le particelle che escono da un punto (oggetto) vengano fatte convergere in uno stesso punto (punto immagine). Il sistema di quadrupoli agisce sulle particelle come una vera e propria lente a simmetria cilindrica su un fascio di luce.

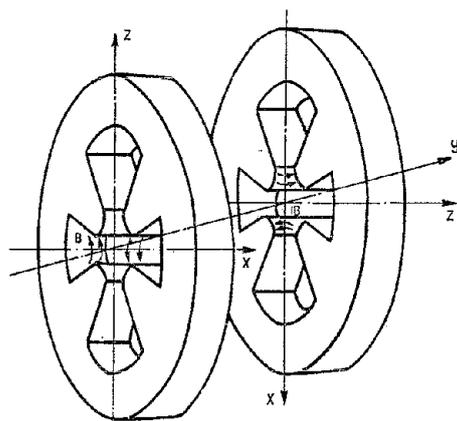


Fig. 2. — Disposizione foceggiante di due lenti quadrupolar

In questo articolo studiamo un nuovo tipo di lente quadrupolare di tipo elicoidale come indicato in fig. 3. Si può immaginare tale lente generata da un quadrupolo sottilissimo che si sposti lungo l'asse y ruotando di un angolo proporzionale allo spostamento.

LA TRAIETTORIA DELLE PARTICELLE IN UNALENTE ELICOIDALE DI TIPO « QUADRUPOLO ELICOIDALE ».

Premettiamo innanzi tutto alcune definizioni sui simboli adottati in seguito (vedi anche fig. 3).

Sia $x^1 y^1 z^1$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali avente l'asse y coincidente con l'asse del quadrupolo elicoidale.

L'asse x^1 giaccia sul piano principale della sezione di entrata; l'asse z^1 giaccia sul piano secondario della sezione di entrata del quadrupolo.

Immaginiamo che il quadrupolo elicoidale sia costituito da n quadrupoli di spessore infinitesimo l e ruotato ciascuno rispetto al precedente di un angolo infinitesimo α . Sarà $nl=L$ lunghezza del quadrupolo elicoidale.

Chiamiamo con x^i, y^i, z^i un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con y^i coincidente con y^1 ma con gli assi x^i e z^i aventi un angolo pari a $i\alpha$ con x^1 e z^1 rispettivamente; tale sistema di assi coordinati avrà l'asse x^i sul piano principale del quadrupolo i esimo.

Chiamiamo con x_a^i, y_a^i, z_a^i le coordinate della posizione della particella all'entrata del q esimo quadrupolo misurata nel sistema di coordinate x^i, y^i, z^i .

Si ponga inoltre:

$$(3) \quad |X_a^i| = \begin{vmatrix} x_a^i \\ x_a^{i/2} \\ z_a^i \\ z_a^{i/2} \end{vmatrix}$$

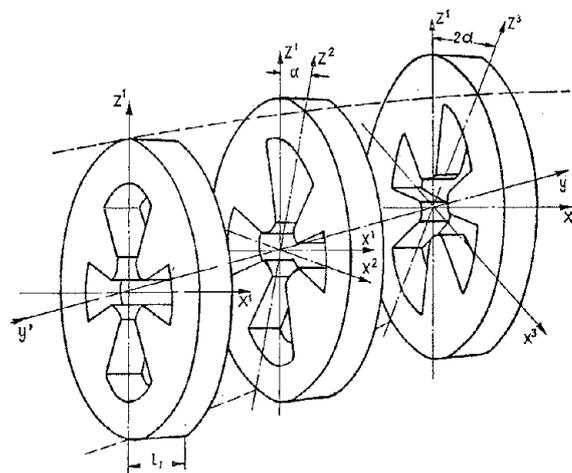


Fig. 3. — Lente quadrupolare elicoidale.

Con semplici passaggi (vedi Appendice I) si ottiene $|X_n^n| = |W|^n |X_1^1|$ ove:

$$(5) \quad |W| = \begin{vmatrix} 1 & l & \alpha & 0 \\ -\beta^2 l & 1 & 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 & 1 & l \\ 0 & -\alpha & \beta^2 l & 1 \end{vmatrix}$$

Per ricavare la proprietà del sistema ottico in esame dobbiamo ricavare le radici dell'equazione secolare del determinante $|W|$ [10].

Le radici di tale equazione sono:

$$(6) \quad \lambda_{1,2,3,4} = 1 \pm \sqrt{-\alpha^2 \pm l^2 \beta^2}.$$

Se $K = \frac{\alpha}{l} < \beta$ [10], una radice λ_i è un modulo maggiore di uno, per cui il quadrupolo elicoidale non ha proprietà focheggianti. Le radici in tal caso sono in prima approssimazione le seguenti:

$$(7) \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 1 \pm i\gamma \\ \lambda_{3,4} &= 1 \pm \delta \end{aligned}$$

ove:

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + l^2 \beta^2}; \quad \gamma = \sqrt{l^2 \beta^2 - \alpha^2}.$$

Se invece $K = \frac{\alpha}{l} > \beta$, i λ si potranno scrivere trascurando gli infinitesimi di secondo ordine ⁽³⁾ (cioè i termini ove compare l^2 , α^2 o αl).

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 1 \pm i\gamma \\ \lambda_{3,4} &= 1 \pm i\delta \end{aligned}$$

ove:

$$\begin{aligned} \delta &= + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 l^2} \\ \gamma &= + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 l^2}. \end{aligned}$$

Essendo quindi le radici di modulo pari a 1, non si ha divergenze nelle traiettorie.

Dalla (4) si ottiene con semplici passaggi (vedi calcoli di Appendice 2)

$$(8) \quad \begin{aligned} X_n^n &= X_1^1 \cos n \delta + Z_1^1 \frac{\alpha l}{l^2 \beta^2} [\cos n \gamma - \cos n \delta] + X_1^1 \left[\frac{l \delta}{l^2 \beta^2} \sin n \delta - \frac{\alpha^2 l}{\beta^2 l^2 \gamma} \sin n \gamma \right] + \\ &+ Z_1^1 \frac{\alpha}{\gamma} \sin n \gamma \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} X_n^n &= X_1^1 \cos n \delta + Z_1^1 \frac{\alpha}{\delta} \sin n \delta - X_1^1 \frac{l^2 \beta^2}{l \delta} \sin n \delta \\ Z_n^n &= Z_1^1 \cos n \gamma + X_1^1 \frac{l \alpha}{l^2 \beta^2} (\cos n \delta - \cos n \gamma) + Z_1^1 \left[\frac{l \alpha^2}{l^2 \beta^2 \delta} \sin n \delta - \frac{l \gamma}{l^2 \beta^2} \sin n \gamma \right] + \\ &- X_1^1 \frac{\alpha}{\delta} \sin n \delta \\ Z_n^n &= Z_1^1 \cos n \gamma - X_1^1 \frac{\alpha}{\gamma} \sin n \gamma + Z_1^1 \frac{l^2 \beta^2}{l \gamma} \sin n \gamma \end{aligned}$$

Ponendo nella (9) $\alpha = Kl$ e $ln = \gamma$ si ottiene:

$$(10) \quad \begin{aligned} X(\gamma) &= X_1 \cos \gamma \sqrt{K^2 + \beta^2} + Z_1' \frac{K}{\beta^2} (\cos \gamma \sqrt{\beta^2 - K^2} - \cos \gamma \sqrt{\beta^2 + K^2}) + \\ &+ X_1' \left[\frac{\sqrt{K^2 + \beta^2}}{\beta^2} \sin \gamma \sqrt{K^2 + \beta^2} - \frac{K^2}{\beta^2 \sqrt{\beta^2 - K^2}} \sin \gamma \sqrt{\beta^2 - K^2} \right] + \\ &+ Z_1 \frac{K}{\sqrt{-K^2 + \beta^2}} \sin \gamma \sqrt{\beta^2 - K^2} \\ \frac{\delta X}{\delta \gamma}(\gamma) &= X_1' \cos \gamma \sqrt{K^2 + \beta^2} + Z_1' \frac{K}{\sqrt{K^2 + \beta^2}} \sin \gamma \sqrt{K^2 + \beta^2} - X_1 \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + K^2}} \sin \gamma \sqrt{K^2 + \beta^2} \\ Z(\gamma) &= Z_1 \cos \gamma \sqrt{\beta^2 - K^2} + X_1' \frac{K}{\beta^2} (\cos \gamma \sqrt{K^2 + \beta^2} - \cos \gamma \sqrt{\beta^2 - K^2}) + \\ &+ Z_1' \left(\frac{K^2}{\beta^2 \sqrt{\beta^2 + K^2}} \sin \gamma \sqrt{K^2 + \beta^2} - \frac{\sqrt{\beta^2 - K^2}}{\beta^2} \sin \gamma \sqrt{\beta^2 - K^2} \right) + \\ &- X_1 \frac{K}{\sqrt{\beta^2 + K^2}} \sin \gamma \sqrt{\beta^2 + K^2} \end{aligned}$$

⁽³⁾ Questo procedimento è rigorosamente lecito perchè l è un infinitesimo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y}(\gamma) &= Z_1' \cos \sqrt{\beta^2 - K^2} \gamma + \\ &- X_1' \frac{K}{\sqrt{\beta^2 - K^2}} \sin \gamma \sqrt{\beta^2 - K^2} + \\ &+ Z_1 \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 - K^2}} \sin \gamma \sqrt{\beta^2 - K^2}. \end{aligned}$$

Ove con $X(\gamma)$, $Z(\gamma)$, $\frac{\partial X}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial Z}{\partial \gamma}$ si intendono le coordinate della traiettoria riferite al sistema di coordinate ortogonali ove l'asse x coincide con l'asse principale della sezione del quadrupolo di coordinate y . Le coordinate contrassegnate con 1 sono le coordinate iniziali (per $\gamma = 0$).

In Appendice 3 riportiamo le formule per il caso in cui γ sia immaginario. Le formule (10) rappresentano quindi la traiettoria di una particella in funzione delle coordinate iniziali.

ALCUNI CASI NOTEVOLI DELLE EQUAZIONI (10).

Le equazioni (10) e (30) ci forniscono una descrizione completa delle proprietà ottiche del sistema in oggetto.

Sia S una sorgente puntiforme di particelle sull'asse del quadrupolo ($X_1 = Z_1 = 0$).

Ricaviamo le condizioni affinché le particelle che escono da S convergano in un punto I nei casi seguenti:

- a) I dentro il magnete,
- b) I fuori del magnete.

Nel caso a) tali condizioni si traducono nelle equazioni:

$$(11) \quad X(1) = 0 \text{ per qualsiasi } Z_1', X_1', \text{ essendo } Z(y) = 0 \quad X_1 = Z_1 = 0.$$

Dalla (10) si ricavano le semplici relazioni

$$(12) \quad y \sqrt{\beta^2 + K^2} = y \sqrt{\beta^2 - K^2} + \frac{2q\pi}{q = 1, 2, 3, \dots n}$$

$$(13) \quad k = \frac{\beta}{\sqrt[4]{2}} = 0,84 \beta.$$

Per le (13), la (12) diventa:

$$(14) \quad y = \frac{2q\pi}{0,77\beta} \quad q = 1, 2, 3, \dots n$$

Nel caso b) le condizioni diventano:

$$\frac{X}{\frac{dX}{dy}} = \frac{Z}{\frac{dZ}{dy}} = \text{costante} < 0, \text{ e ci\o per qualsiasi } X_1', Z_1', \text{ essendo:}$$

$$X_1 = Z_1 = 0.$$

Si ha foccheggiamento se valgono le relazioni (15) (16)

$$(15) \quad y \sqrt{\beta^2 + K^2} + y \sqrt{\beta^2 - K^2} = \pi + (2\pi q)$$

$$(16) \quad \text{tg } y \sqrt{\beta^2 - K^2} = \frac{2\sqrt{\beta^4 - K^4}}{K^2 - \sqrt{\beta^4 - K^4}}$$

Dalla (15) e (16) si ottiene l'equazione (17) da cui si ricava il rapporto $\frac{\beta}{K} = C$

$$(17) \quad \text{tg} \frac{\pi + 2q\pi}{\sqrt{\frac{1+C^2}{C^2-1}} + 1} = \sqrt{\frac{2\sqrt{C^4-1}}{1-\sqrt{C^4-1}}}$$

Si vede dalla (17) che C deve risultare compreso tra 1 e $\sqrt[4]{2}$ per cui y risulta dell'ordine di:

$$(18) \quad y = \frac{(\pi + 2q\pi)}{1,8\beta} \quad q = 0, 1, 2, \dots n$$

La lente in tale caso \u00e8 sensibilmente pi\u00f9 corta che nel caso a).

I massimi spostamenti che subisce la traiettoria di una particella con magneti infinitamente lungo si possono facilmente calcolare:

I\u00b0 caso: con $Z_1 = X_1 = X_1' = 0$ si ha

$$(19) \quad \Delta X_{max} = \frac{Z_1'}{\beta} \frac{2K}{\beta}$$

$$\Delta z_{max} = \frac{Z_1'}{\beta} \left[\frac{K^2}{\beta \sqrt{\beta^2 + K^2}} + \frac{\sqrt{\beta^2 - K^2}}{\beta^2} \right]$$

II\u00b0 caso: con $Z_1 = X_1 = Z_1' = 0$ si ha

$$(20) \quad \Delta X_{max} = \frac{X_1'}{\beta} \left[\frac{\sqrt{K^2 + \beta^2}}{\beta} + \frac{K^2}{\beta \sqrt{\beta^2 - K^2}} \right]$$

$$\Delta Z_{max} = \frac{X_1'}{\beta} \frac{2K}{\beta}$$

Nel caso in cui in particolare $K = 0,84\beta$ le formule (19) (20) diventano:

$$(19') \quad \Delta X_{max} = \frac{Z_1'}{\beta} 1,68$$

$$\Delta z_{max} = \frac{Z_1'}{\beta} 1,08$$

$$(20') \quad \Delta X_{max} = \frac{X_1'}{\beta} 2,64$$

$$\Delta z_{max} = \frac{X_1'}{\beta} 1,68$$

Come si vede dalle formule le coordinate $x(y), z(y)$ sono somma di due sinusoidi in y di uguale ampiezza ma di periodo diverso e i massimi sono ove si hanno i battimenti delle due sinusoidi.

GENERALITÀ TECNICHE ED ESEMPIO NUMERICO.

La costruzione di un quadrupolo presenta difficoltà tecniche.

Una costruzione come indicata in fig. 4 potrebbe rappresentare una soluzione possibile.

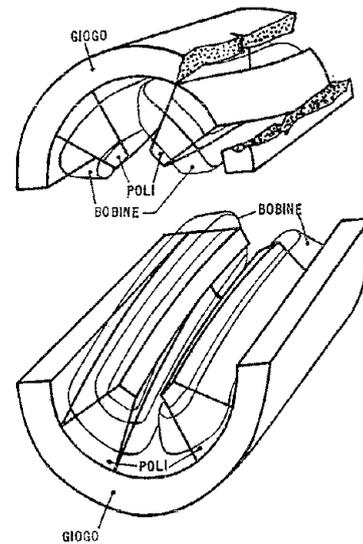


Fig. 4. — Schema costruttivo di una lente quadrupolare elicoidale.

Il magnete \u00e8 costituito da due gioghi a semi corone cilindriche e dai pali fatti a settori che a queste vengono imbullonate.

La bobina a forma elicoidale viene sistemata su un giogo: poi si sistemano i poli e il tutto si chiude con il giogo superiore.

La bobina va raffreddata ad H₂O fluente.

Per una magnete avente un'apertura di diametro utile pari a 100 mm e un gradiente di campo pari a 1400 gauss/cm possiamo fornire i seguenti dati orientativi:

peso ferro	\u2248 kg 1500/metro
peso bobina	\u2248 kg 250/metro
potenza dissipata	\u2248 60 kW/metro
costo	\u2248 2 milioni/metro

Se con siffatto magnete vogliamo ottenere l'immagine della sorgente interna con particelle di 1000 Mev/c otteniamo il seguente quadro di valori (vedi formule del paragrafo precedente).

$$\beta = 2,08 \times 10^{-2}$$

- Spiralizzazione elica . . . = 1,7 rad/m
- Lunghezza magnete . . . $L = 3,8$ m
- Peso (ferro + rame) . . . = 6,6 tonn
- Costo = lire 7 600 000
- Potenza di alimentazione = 270 kW
- Angolo solido accettato (*)

$$\frac{3,14}{4} \times Z_1' \times X_1' = 10^{-2} \text{ rad}$$

Distanza tra sorgente e immagine = 3,8 metri (5).

Per confronto riportiamo i dati per un sistema di due quadrupoli, quasi analoghi a quello del quadrupolo in oggetto, aventi le seguenti caratteristiche:

- Momento particelle = 1000 Mev/c
- gradiente $B \gg 1500$ gauss/cm (6)
- angolo solido = 10^{-2} sterad
- spessore I quadrupolo . . . = 36 cm
- » II » = 22 »
- distanza tra i quadrupoli . = 45 »
- diametro intraferro = 20 »
- peso degli oggetti = 8 »
- potenza dissipata = 350 kW
- costo = Lire 8 500 000

Nei q.e. si può pensare di raddoppiare L e in corrispon-

(4) Dalle formule (19') (20') si ricavano X_1' e Z_1' essendo in questo caso $X_{max} = 5$ cm $Z_{max} = 5$ cm.

(5) Aumentando il gradiente B_z da 1400 a 2500 gauss/cm, tale distanza può quasi dimezzare. Essendo piccolo il diametro del quadrupolo, si può pensare che ciò sia possibile.

(6) In questo caso, dato l'elevato diametro dell'intraferro, 1500 gauss/cm si può considerare un massimo.

denza della prima immagine porre un diaframma di piombo (forato in centro) in modo da bloccare particelle di momento diverso da quelle che si vogliono rivelare. Ricordiamo che le particelle di momento superiore a 1119 Mev/c (per cui $\beta = h$) vengono defocalizzate e vengono perdute sulle pareti del canale: variando quindi la corrente dell'avvolgimento si può variare la soglia di momento tagliato dal canale magnetico costituito dal magnete elicoidale. Dalla variazione del numero di particelle rivelate si può risalire al numero di particelle in funzione del momento. Considerazioni analoghe a quelle svolte si possono fare nel caso in cui la sorgente o l'immagine sono esterne al quadrupolo elicoidale.

CONCLUSIONE.

Da quanto si può dedurre dalla teoria e dall'esempio numerico, risulta che il quadrupolo elicoidale ha ottime proprietà focheggianti e può competere con successo sul piano economico con le soluzioni classiche di due quadrupoli. A questo proposito possiamo dire che in questi ultimi tempi, per particelle di alto momento nella pratica normale si tende a preferire al posto di due quadrupoli in cascata un numero maggiore di quadrupoli (3, 4, 5).

Questo sta a confermare che la nostra proposta è nel senso giusto: infatti un quadrupolo elicoidale può ritenersi come una successione di quadrupoli contigui.

Un vantaggio evidente del quadrupolo elicoidale è che l'azione del campo magnetico è continua e impedisce quindi alle traiettorie di allungarsi nel tratto vuoto di campo magnetico, come invece accade nel caso di una coppia di quadrupoli.

Nel lavoro si è appena accennato alla proprietà di selettività del quadrupolo elicoidale in funzione del momento delle particelle, ma non si sono confrontate queste sue proprietà con quelle analoghe del sistema classico. Crediamo che questi argomenti, data l'ampiezza della discussione, possano essere oggetto di un altro studio

APPENDICE 1.

CALCOLO DELLA RELAZIONE TRA (X_2^1) E (X_1^2) .

Con le notazioni famigliari al calcolo delle matrici [9] e [10] si ha [(vedi (1), (2))]:

$$(21) \begin{vmatrix} X_2^1 \\ X_2^{1'} \\ Z_2^1 \\ Z_2^{1'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \beta l & \frac{1}{\beta} \sin \beta l & 0 & 0 \\ -\beta \sin \beta l & \cos \beta l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos h \beta l & \frac{1}{\beta} \sin h \beta l \\ 0 & 0 & \beta \sin h \beta l & \cos h \beta l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1^1 \\ X_1^{1'} \\ Z_1^1 \\ Z_1^{1'} \end{vmatrix}$$

$$(22) \begin{vmatrix} X_2^2 \\ X_2^{2'} \\ Z_2^2 \\ Z_2^{2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_2^1 \\ X_2^1 \\ Z_2^{1'} \\ Z_2^{1'} \end{vmatrix}$$

poichè l è piccolo quanto si vuole e α è pure piccolo, trascurando gli infinitesimi di ordinesuperiore si può scrivere:

$$(23) \quad |H| = \begin{vmatrix} \cos \beta l & \frac{1}{\beta} \sin \beta l & 0 & 0 \\ -\beta \sin \beta l & \cos \beta l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos h \beta l & \frac{1}{\beta} \sin h \beta l \\ 0 & 0 & \beta \sin h \beta l & \cos h \beta l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & l & 0 & 0 \\ -\beta^2 l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & \beta^2 l & 1 \end{vmatrix}$$

$$(24) \quad |T| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Con le notazioni (23), (24), (3) e chiamando $T(\delta)$ la matrice ottenuta da T cambiando α in δ si ottiene:

Chiamo $|W|$ la matrice prodotto delle matrici $|T|$ e $|H|$.

Si ha allora, trascurando gli infinitesimi di secondo ordine, cioè i fattori ove compare il prodotto 1:

$$(25) \quad \begin{aligned} |X_2^1| &= |H| |X_1^1| \\ |X_2^2| &= |T| |X_n^1| = |T| |H| |X_1^1| \\ |X_3^2| &= |H| |X_2^2| = |H| |T| |H| |X_1^1| \\ |X_3^3| &= |T| |H| |T| |H| |X_1^1| \\ |X_3^1| &= |T(-\alpha)| |H| |T| |H| |H_1^1| \\ |X_n^n| &= [T \dots H]^n |X_1^1| \\ |X_n^1| &= |T(-\alpha)| |T| |H|^{n-1} |X_1^1| \end{aligned}$$

$$(26) \quad |W| = \begin{vmatrix} 1 & l & \alpha & 0 \\ -\beta^2 l & 1 & 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 & 1 & l \\ 0 & -\alpha & \beta^2 l & 1 \end{vmatrix}$$

APPENDICE 2.

MATRICE $|M|$ CHE DIAGONALIZZA LA MATRICE $|W|$ E SUO INVERSO $|M^{-1}|$.

Ricordiamo che si ha:

Eseguendo i calcoli troviamo che la matrice $|M|$ che diagonalizza la $|W|$ è la (27) (7)

$$|X_n^n| = |M| |\lambda|^n |M^{-1}| |Z_1^1|$$

ove:

$$(27) \quad |M| = \begin{vmatrix} -2i\alpha l \gamma & 2i\alpha l \gamma & -2i\alpha l \delta + 2i\alpha l \delta & \\ 0 & 0 & 2\alpha l^2 \beta^2 & 2\alpha l^2 \beta^2 \\ 2l\gamma^2 & 2l\gamma & 2l\alpha^2 & 2l\alpha^2 \\ -2i\gamma l^2 \beta^2 & 2i\gamma l^2 \beta^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(29) \quad |\lambda|^n = \begin{vmatrix} e^{i\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{vmatrix}$$

La matrice inversa di $|M|$ cioè la matrice $|M^{-1}|$ è la (28) seguente:

$$(28) \quad |M^{-1}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \frac{\alpha}{\beta^2 l^2 \gamma^2} & +\frac{1}{4} \frac{1}{l \gamma^2} & +\frac{i}{4} \frac{1}{l^2 \beta^2 \gamma} \\ 0 & -\frac{1}{4} \frac{\alpha}{\beta^2 l^2 \gamma^2} & +\frac{1}{4} \frac{1}{l \gamma^2} & -\frac{i}{4} \frac{1}{l^2 \beta^2 \gamma} \\ \frac{i}{4} \frac{1}{\alpha l \delta} & +\frac{1}{4} \frac{1}{\alpha l^2 \beta^2} & 0 & -\frac{i}{4} \frac{1}{l^2 \beta^2 \delta} \\ -\frac{i}{4} \frac{1}{\alpha l \delta} & +\frac{1}{4} \frac{1}{\alpha l^2 \beta^2} & 0 & +\frac{i}{4} \frac{1}{l^2 \beta^2 \delta} \end{vmatrix}$$

(7) Per la teoria delle matrici rimandiamo alle referenze [9] [10]. Nella referenza [10] è spiegato esaurientemente il procedimento qui seguito.

APPENDICE 3.

FORMULE PER IL CASO IN CUI VI È DIVERGENZA DEL FASCIO DI PARTICELLE.

Nel caso in cui γ sia immaginario (ossia che si abbia divergenza; vedi condizioni (7)) le (10) diventano:

$$\begin{aligned}
 X(y) = & X_1 \cos y \sqrt{K^2 + \beta^2} + Z_1' \frac{K}{\beta^2} (\cos h y \sqrt{K^2 - \beta^2} - \cos y \sqrt{\beta^2 + K^2}) + \\
 & + X_1' \left(\frac{\sqrt{K^2 + \beta^2}}{\beta^2} \sin y \sqrt{K^2 + \beta^2} - \frac{K^2}{\beta^2 \sqrt{K^2 - \beta^2}} \sin h y \sqrt{K^2 - \beta^2} \right) + \\
 & + Z_1 \frac{K}{\sqrt{K^2 - \beta^2}} \sin h y \sqrt{K^2 - \beta^2}
 \end{aligned}$$

$$(30) \quad X'(y) = X_1' \cos y \sqrt{K^2 + \beta^2} + \frac{K}{\sqrt{K^2 + \beta^2}} Z_1' \sin y \sqrt{K^2 + \beta^2} - X_1 \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + K^2}} \sin y \sqrt{\beta^2 + K^2}$$

$$\begin{aligned}
 Z(y) = & Z_1 \cos h y \sqrt{K^2 - \beta^2} + X_1' \frac{K}{\beta^2} (\cos y \sqrt{K^2 + \beta^2} - \cos h y \sqrt{K^2 - \beta^2}) + \\
 & + Z_1' \left(\frac{K^2}{\beta^2 \sqrt{\beta^2 + K^2}} \sin y \sqrt{K^2 + \beta^2} + \frac{\sqrt{K^2 - \beta^2}}{\beta^2} \sin h y \sqrt{K^2 - \beta^2} \right) - \\
 & - \frac{X_1 K}{\sqrt{K^2 + \beta^2}} \sin y \sqrt{K^2 + \beta^2}
 \end{aligned}$$

$$Z'(y) = Z_1' \cos h y \sqrt{K^2 - \beta^2} - X_1' \frac{K}{\sqrt{K^2 - \beta^2}} \sin h y \sqrt{K^2 - \beta^2} + Z_1 \frac{\beta^2}{\sqrt{K^2 - \beta^2}} \sin h y \sqrt{K^2 - \beta^2}$$

Manoscritto pervenuto il 12 ottobre 1959.

BIBLIOGRAFIA

- | | |
|---|---|
| <p>[1] LOGFREN: <i>Bevatron Operational Experiences</i>. - « CERN », pag. 500÷502, Simposium 1956.</p> <p>[2] M. AGENO ed alt.: <i>Sulla situazione dei lavori per l'elettrosincrotrone italiano da 1200 Mev e sul programma ricerche</i>. - « Nuovo Cimento », suppl. n. 3, pag. 337÷339, 1959.</p> <p>[3] E. SEGRÈ: <i>Experimental Nuclear Physics</i>. - Vol. I, pag. 566÷568, J. Wiley, 1953.</p> <p>[4] G. SIMANE: <i>Accelerators of ions and electrons</i>. - Artia Prague, « Artia Prague », pag. 85÷86.</p> | <p>[5] H. BRUCK: <i>Théorie et technique des accélérateurs de particules</i>. - « Optique corpusculaire », Centre d'Etudes de Saclay.</p> <p>[6] P. GRIVET ed alt.: <i>Etude de lentilles magnetiques à focalisation fort</i>. - « CERN », pag. 102, Simposium 1956.</p> <p>[7] R. CARLILE: <i>The quadripole Magnet as focusing device</i>. - Hans Lab. of Physics, Stanford University, Calif. U.S.A.</p> <p>[8] G. SONA: <i>Ottica degli analizzatori magnetici nell'approssimazione di Gauss</i>. - 15-9-1958. Laboratori di Frascati del CNRN.</p> <p>[9] J. HEADING: <i>Matrix Theory for Physicists</i>. - Ed. Longmans, N.Y., 1958.</p> <p>[10] G. SACERDOTI: <i>Studio del moto di una particella carica in un campo magnetico in presenza di un'onda elettromagnetica ecc.</i> Accademia delle Scienze di Torino, 1959.</p> |
|---|---|