

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-60/52 (23. 11. 60)

R. Evangelisti, G. Sacerdoti: UN METODO DI CATTURA PER PARTICELLE INIETTATE IN UN ANELLO DI ACCUMULAZIONE A FOCALIZZAZIONE DEBOLE.

Nota interna: n° 58
23 Novembre 1960.

R. Evangelisti e G. Sacerdoti:

UN METODO DI CATTURA PER PARTICELLE INIETTATE IN UN ANELLO DI
ACCUMULAZIONE A FOCALIZZAZIONE DEBOLE.-

Introduzione.

La cattura di particelle cariche in uno storage ring è sempre un problema di difficile soluzione ed in particolare nel caso dell'AdA di Frascati che è una macchina la quale, non usando un campo magnetico pulsato ma solo un campo magnetico costante, accetta e cattura particelle esclusivamente in virtù del damping delle oscillazioni di betatrone. Nella presente nota si espongono alcuni calcoli preliminari relativi alla cattura di particelle con un sistema che sfrutta opportune dissimmetrie radiali del campo di accelerazione delle particelle stesse.-

Descrizione del metodo.

Il metodo consiste nel sistemare lungo l'anello di accumulazione una serie di cavità risonanti che producano campi elettrici diretti tangenzialmente lungo le circonferenze rappresentanti le orbite stabili delle particelle a differenti energie (v. fig. 1). Tali campi elettrici prodotti da dispositivi a radiofrequenza localizzati lungo la periferia dello storage ring abbiano un andamento $\mathcal{E} = K \Delta r$ dove con Δr intendiamo indicare lo scostamento radiale della particella rispetto alla orbita media stabile, sulla quale cioè la frequenza di rotazione della particella è sincrona con la frequenza delle cavità risonanti.

Soluzione analitica.

Per risolvere le equazioni del moto facciamo le ipotesi che l'influenza del campo elettrico sul moto della particella sia un fenomeno adiabatico rispetto alle oscillazioni di betatrone ed inoltre ammettiamo che si possa scrivere

$$(1) \quad \bar{F} = e K y \text{ sen}(\varphi_0 - \omega_e t + \theta)$$

\bar{F} - valore medio nel tempo della forza dovuta al campo elettrico esercitata sulla particella;

y - scostamento della circonferenza stabile per la energia istantanea della particella rispetto alla orbita stabile di cattura; è quindi una grandezza che dipende dalla energia della particella e non dalla ampiezza delle oscillazioni di betatrone;

ω_e - è la pulsazione delle cavità risonanti;

φ_0 - è la fase iniziale del campo elettrico;

θ - è lo spostamento di fase lungo l'azimut;

K - (Volt/m²) è fattore di campo elettrico.

Risulta

$$(2) \quad \theta_{\text{particella}} = N \left(\omega_p t + \frac{\omega_p}{R_0} \int_0^t y dt \right)$$

N - rapporto fra pulsazione della radiofrequenza e pulsazione di rotazione della particella;

ω_p - pulsazione di rivoluzione della particella;

R_0 - raggio del magnete.

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$(3) \quad \frac{E - E_0}{E_0} = \frac{y}{R_0} (1 - n)$$

$$(4) \quad E - E_0 = E_{in} + R_0 \omega_p \int_0^t \bar{F} dt$$

Derivando le espressioni (3) e (4) rispetto al tempo e tenendo presenti le relazioni (1) e (2) si ottiene:

$$(5) \quad \frac{d(E - E_0)}{dt} = R_0 \omega_p K e y \operatorname{sen} \left(\varphi_0 + \frac{N \omega_p}{R_0} \int_0^t y dt \right)$$

$$(6) \quad \frac{d(E - E_0)}{dt} = \frac{E_0}{R_0} y' (1 - n)$$

Uguagliando le espressioni (5) e (6) otteniamo:

$$(7) \quad R_0 \omega_p K e y \operatorname{sen} \left(\varphi_0 + \frac{N \omega_p}{R_0} \int_0^t y dt \right) = \frac{E_0}{R_0} y' (1 - n)$$

Poniamo $\frac{N \omega_p}{R_0} \int_0^t y dt + \varphi_0 = z$ in modo che risulta

$$(8) \quad y = \frac{R_0}{N \omega_p} z' \quad (9) \quad y' = \frac{R_0}{N \omega_p} z''$$

Sostituendo le (8) e (9) nella espressione (7) otteniamo la equazione differenziale:

$$(10) \quad a \cdot \operatorname{sen} z \cdot z' = z''$$

ove si è posto

$$(11) \quad a = \frac{R_0^2 e K \omega_p}{E_0 (1-n)}$$

Integrando la (10) una prima volta rispetto al tempo otteniamo

$$(12) \quad -a \cdot \cos z = z' + C$$

Essendo per $t = 0$ $z = \varphi_0$ si ricava

$$C = -a \cos \varphi_0 - \frac{y_0 N \omega_p}{R_0}$$

Integrando la (12) si ottiene:

$$(13) \quad \int \frac{dz}{\cos z + \left(\frac{-y_0 N \omega_p}{R_0 a} - \cos \varphi_0 \right)} = -a \int dt$$

Se risulta

$$/ 1 / > / \frac{y_0 N \omega_p}{R_0 a} + \cos \varphi_0 /$$

si ha una soluzione convergente per l'integrale al primo membro di (13). Infatti la formula risolutiva sotto la condizione (14) risulta la seguente:

$$(15) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_0 N \omega_p}{R_0 a} - \cos \varphi_0 \right)^2}} \lg / \frac{A \operatorname{tg} z/2 + B}{A \operatorname{tg} z/2 - B} / = -a(t - t_0)$$

$$\text{avendo posto } 1 + \cos \varphi_0 + \frac{y_0 N \omega_p}{R_0 a} = A \quad (16)$$

$$(17) \quad \sqrt{\frac{-2y_0 N \omega_p \cos \varphi_0}{R_0 a} - \frac{y_0^2 N^2 \omega_p^2}{R_0^2 a^2} + \sin^2 \varphi_0} = B$$

$$(18) \quad -a B = g$$

Si ricava infine:

$$(19) \quad / \frac{A \operatorname{tg} z/2 + B}{A \operatorname{tg} z/2 - B} / = e^{g(t - t_0)}$$

Dalla (19) otteniamo:

$$(20) \quad \operatorname{tg} \frac{z}{2} = -\frac{B}{A} \frac{1 + e^{g(t - t_0)}}{1 - e^{g(t - t_0)}}$$

Interessa ora vedere come si comporta la derivata rispetto al tempo della fase della particella per t che tende all'infinito. Mentre per la fase risulta ovviamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z = 2 \operatorname{arctg} \left(+ \frac{B}{A} \right)$$

a seconda che $g \leq 0$ $g \geq 0$, per la derivata della fase si ha:

$$(21) \quad \frac{1}{\cos^2 z/2} z'/2 = -\frac{B}{A} \frac{2 g e^{g(t - t_0)}}{(1 - e^{g(t - t_0)})^2}$$

da cui risulta

$$(22) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z' = 0 \quad \text{per } g < 0.$$

Se

$$|1| < \left| \frac{y_0 N \omega_p}{R_0 a} + \cos \varphi_0 \right|$$

l'integrale converge ad un valore tale per cui si ha una soluzione oscillante. La formula (22) dimostra come vi sia convergenza dell'orbita della particella iniettata verso la circonferenza stabile di cattura: nello spazio delle fasi la zona di cattura è rappresentata in fig. 3.

Si possono facilmente ricavare dalle formule precedenti le seguenti espressioni utili per calcolare il rendimento di cattura:

$$(23) \quad \Delta y_0 \max = 2 \frac{R_0 a}{\omega_p N} = \frac{2k_c^3 K}{E_0^* N(1-n)}$$

$$(24) \quad \frac{\Delta y}{y} / \text{giro} \sim gT = g \frac{2\pi R_0}{c} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 \varphi_0 + \frac{-2y_0 \omega_p N \cos \varphi_0}{R_0 a} - \frac{y_0^2 \omega_p^2 N^2}{R_0^2 a^2}} \cdot \frac{R_0^3 K \omega_p}{E_0^* (1-n)} \frac{2\pi}{c}$$

questo è il valore massimo del decremento logaritmico

$$(25) \quad \frac{E_{\text{acc}} - E_0}{E_0} = \frac{y}{R_0} = \frac{2 R_0^2 K}{E_0^* (1-n) \cdot N}$$

E^* - indica energia in elettronvolt;

c - è la velocità della luce;

$E_{\text{acc}} - E_0$ è la banda energetica delle particelle accettate dal dispositivo.

Esempi numerici.

Fissiamo i seguenti valori:

$$E = 3 \times 10^8; \quad n = 0,6; \quad R_0 = 0,6 \text{ m}$$

otteniamo i seguenti diagrammi

$$\Delta y_0 \text{ max} = 0,13 \times 10^{-8} \frac{K}{N} \quad (K \text{ in Volt/m}^2) \quad \text{v. fig. 5}$$

$$\frac{\Delta y}{y} / \text{giro} \text{ calcolato per } \psi_0 = 0 \text{ e } \frac{-y_0 \omega_p N}{R_0 a} = 1 \text{ è dato da:}$$

$$\frac{\Delta y}{y} / \text{giro} \sim 0,72 K 10^{-8} \quad \text{v. fig. 6}$$

$$\frac{\Delta E}{E} \sim 0,4 \times 10^{-8} \frac{K}{N} \quad \text{v. fig. 4}$$

Un valore ragionevole per K può essere ad esempio $1,6 \times 10^7$ Volt/m²: infatti se ad una distanza dal centro della gap di 6 cm l'onda ha un campo elettrico tangente all'orbita massimo di 10^6 Volt/metro K ha il valore di $1,6 \times 10^7$ Volt/m².

Ad esempio con un gradiente di 10^5 volt/m² il decremento logaritmico diverrebbe per giro $0,72 \times 10^{-3}$ e quindi per particelle con y_0 dell'ordine di 6 cm si avrebbe una spiralizzazione di circa 44 μ /giro che è notevolmente superiore alla attenuazione per damping di irraggiamento.

Conclusioni.

Se tale metodo di cattura viene ritenuto utile per la soluzione del problema di iniezione che si presenta con l'AdA potremmo procedere al calcolo del rendimento di cattura ottenibile con tale dispositivo.-

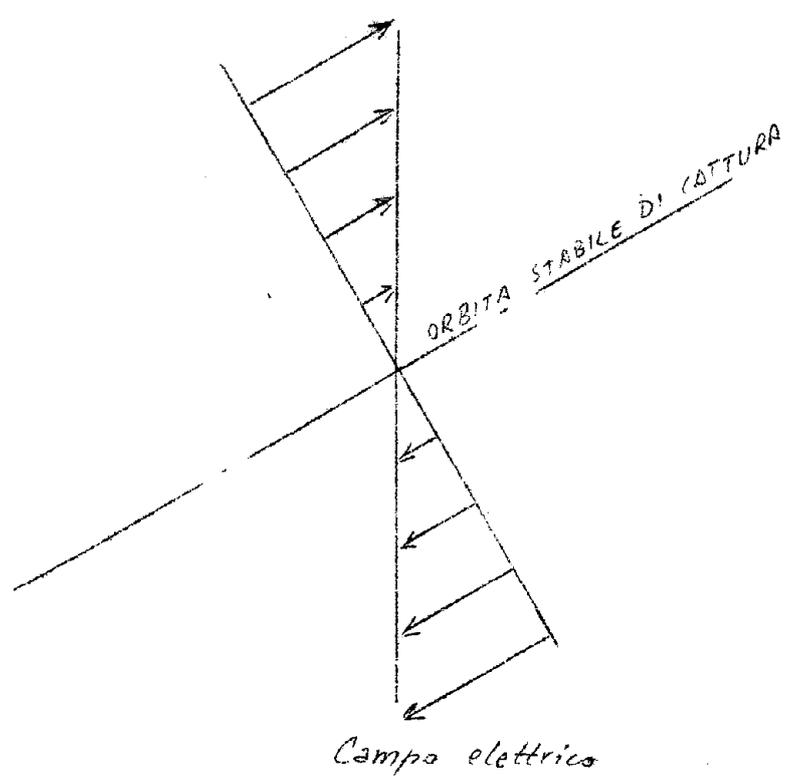
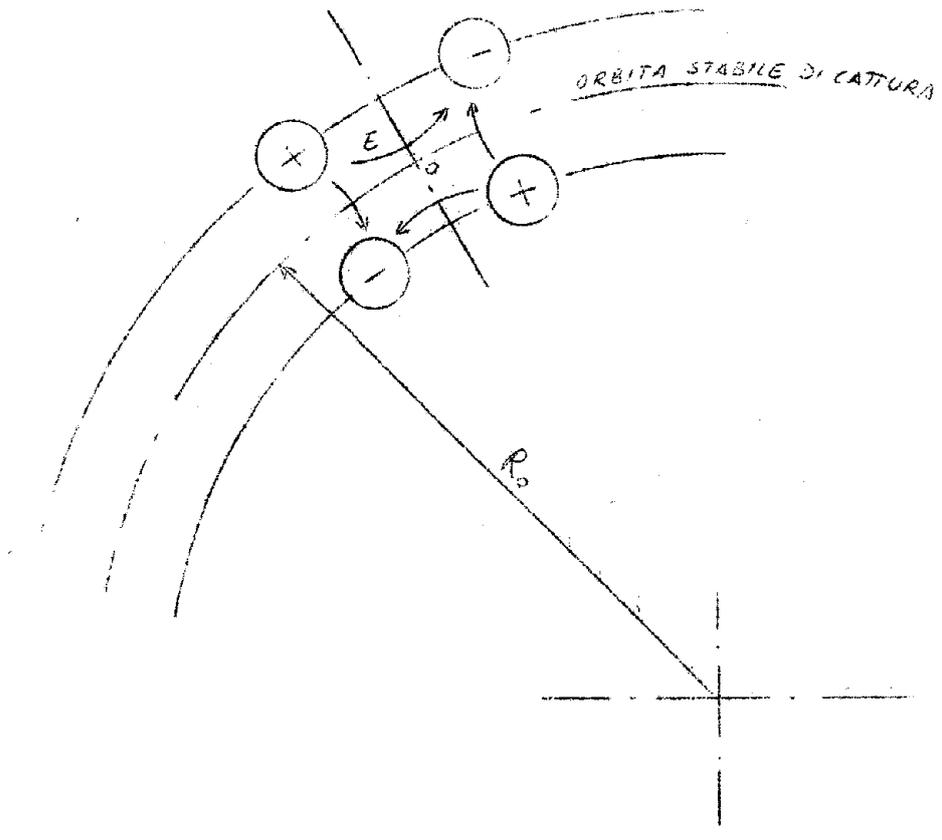


FIG. 1

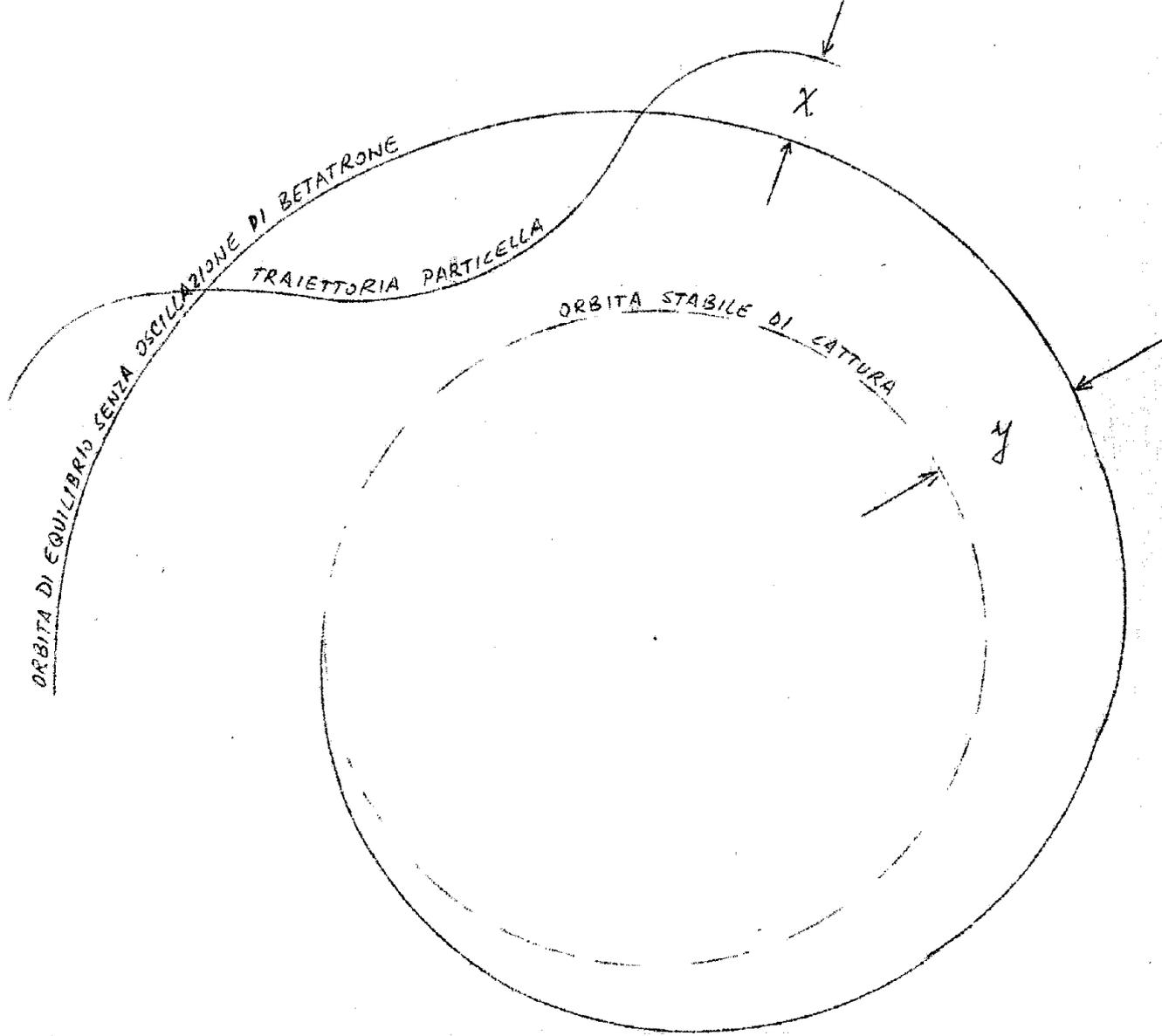


FIG. 2

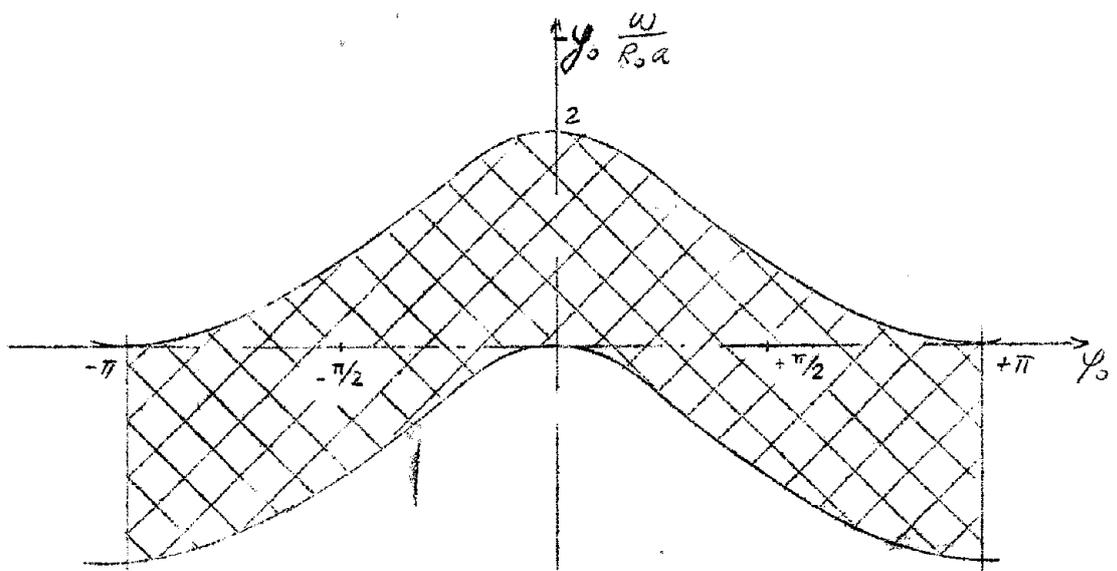


DIAGRAMMA STABILITA' DI FASE

FIG. 3

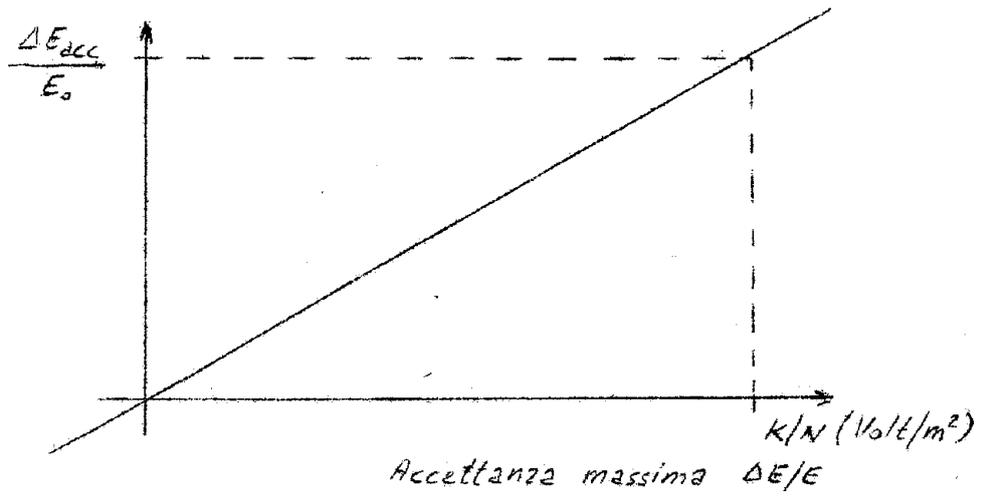


FIG. 4

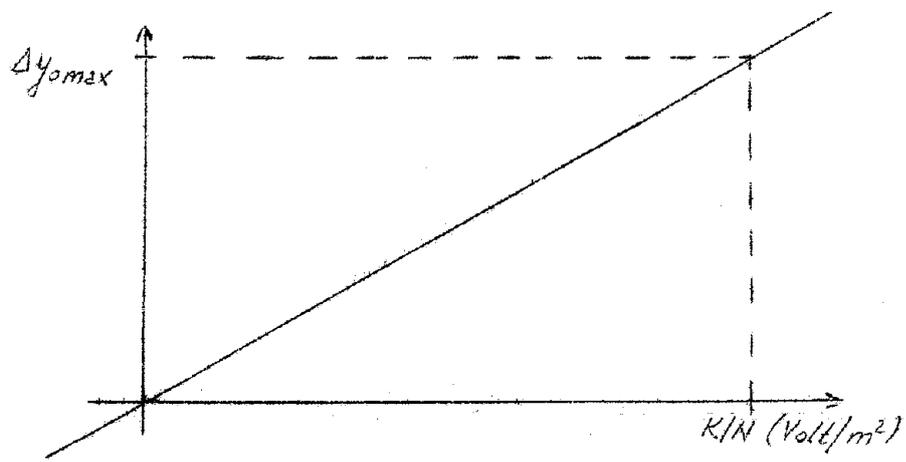


FIG. 5

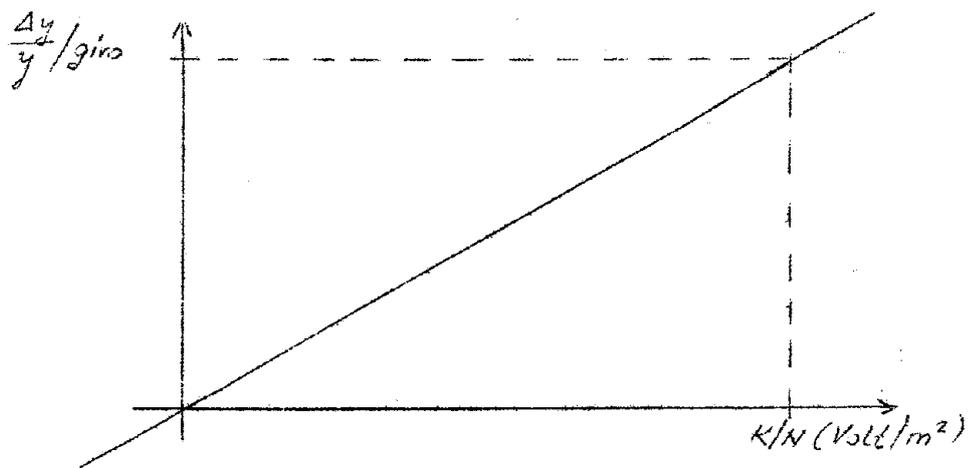


FIG. 6