

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-60/45 (20.10.60)

M. Terenzi: STUDIO DELLO SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG DI
TARGHETTA SPESSA DELL'ELETTROSINCROTRONE DI FRASCATI.
(Tesi di Laurea).

Estratto dalla: Tesi di Laurea.

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.
Servizio Documentazione

Nota interna: n° 54
20 Ottobre 1960

M. Terenzi: STUDIO DELLO SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG DI TARGHET
TA SPESSE DELL'ELETTRO-SINCROTRONE DI FRASCATI (Tesi di Laurea).

Indice della tesi

Introduzione

| | |
|--|--------|
| <u>Parte Prima</u> - Apparato sperimentale per lo studio dello spettro di bremsstrahlung | pag. 1 |
| Sguardo d'insieme | 2 |
| Caratteristiche dei componenti d'apparato sperimentale | 3 |
| a) Radiatore T | 3 |
| b) Collimatore | 3 |
| c) Magnete pulitore | 3 |
| d) Tubo a vuoto | 4 |
| e) Convertitore dello spettrometro | 4 |
| f) Spettrometro a coppie | 4 |
| g) Contatori ed elettronica | 5 |
| h) Quantmetro | 7 |
| | |
| <u>Parte Seconda</u> - Risultati della determinazione dello spettro di bremsstrahlung | 9 |
| Richiami sulla teoria del bremsstrahlung | 10 |
| Bremsstrahlung nel campo del nucleo | 11 |
| a) correzioni Coulombiane | 11 |
| b) correzioni di schermo | 12 |
| c) correzioni al limite delle alte frequenze | 13 |
| Bremsstrahlung nel campo dell'elettrone | 14 |
| Sezione d'urto totale di bremsstrahlung | 14 |
| Definizioni di "spettro" di bremsstrahlung | 15 |
| Esperienza | 16 |
| Distribuzione angolare dell'intensità del fascio γ | 16 |
| Sulla distribuzione energetica degli elettroni che urtano la targhetta | 19 |
| Studio della forma dello spettro | 23 |
| Elaborazione dei risultati | 24 |
| Confronto preliminare teoria-esperienza | 26 |
| | |
| <u>Parte terza</u> - Deduzione di una formula di bremsstrahlung di targhetta spessa | 29 |
| Rassegna dei principali fenomeni connessi con l'attraversamento del radiatore da parte degli elettroni | 30 |

| | |
|--|--------|
| Una nota sulla distribuzione energetica del beam degli elettroni | pag 32 |
| Una formula di bremsstrahlung di targhetta spessa | ' 34 |
| Impostazione e risoluzione del problema. Confronto, Conclusioni | ' 38 |
| <u>===== Appendice A</u> - Sulla sezione d'urto di creazione di coppie con equipartizione dell'energia | ' A/1 |
| <u>===== Appendice B</u> - Sulla correzione dello spettro di brems strahlung per il potere risolutivo finito dei contatori | ' A/3 |
| <u>===== Appendice C</u> - Alcune questioni sul calcolo dell'integrale di targhetta "spessa" | ' A/7 |
| <u>===== Bibliografia e figure</u> | |

Introduzione

Nell'elettrosincrotrone di Frascati elettroni di energia $E_0 = 1000 \text{ MeV}$, urtano alla fine di ogni ciclo di accelerazione un bersaglio posto all'interno della camera a vuoto dell'acceleratore. Si origina, in tal modo, un fascio γ , per frenamento degli elettroni nel radiatore. Nel fascio sono compresi fotoni con tutte le energie da zero ad $E_0 - m_0 c^2$. Per una corretta interpretazione delle esperienze di fisica nucleare che si possono realizzare mediante il fascio γ , è necessaria la conoscenza delle caratteristiche del fascio, ed in particolar modo del suo spettro. Questo lavoro è uno studio della forma dello spettro di bremsstrahlung che si ottiene dall'elettrosincrotrone. Il problema è sperimentalmente risolto con l'uso di uno spettrometro a coppie. In questo modo non si ha una misura assoluta delle varie componenti spettrali, ma solo i rapporti relativi di queste, ciò che è sufficiente nella maggior parte dei casi. La forma dello spettro per i fotoni vicina all'energia massima dipende in modo critico dalla particolare situazione sperimentale che si realizza e precisamente, in ultima analisi, dalle caratteristiche del radiatore e dalla collimazione. Gli effetti dello spessore del radiatore e della collimazione del fascio vengono analizzati in questo lavoro, e il risultato è che, sia l'aumento dello spessore che una maggiore collimazione determinano una perdita percentuale dei fotoni di molto alta energia. Questo è da attribuirsi ai fenomeni che accompagnano l'attraversamento del radiatore da parte degli elettroni.

Si analizzano questi fenomeni, e si deduce una descrizione quantitativa, per le caratteristiche spettrali dal fascio di bremsstrahlung che si ottiene dall'elettrosincrotrone.

Errata Corrige

| Pag. | Riga | In luogo di | Leggere |
|------|--------------|--|---|
| 2 | 5 dal basso | .. ad assorbimento totale M | .. ad assorbimento totale Q |
| 5 | 16 dal basso | .. pila Winstron | .. pila Winston |
| 6 | 2 dal basso | .. altezza 16 mm | .. altezza 106 mm |
| 8 | 1 dall'alto | .. carica g | .. carica q |
| 16 | 1 dall'alto | .. $\sigma_{ntc}(E_0, u)$ è ciò che diremo | .. $\sigma_{ntc}(E_0, u)$ è ciò che diventa |
| 22 | 10 dall'alto | N_{e1}, N_{e2} | N_{e1}, N_{e2} |
| 25 | 9 dall'alto | (K, K + K) | (K, K + ΔK) |
| 30 | 14 dal basso | .. in pò più generale | .. un pò più in generale |
| 32 | 6 dall'alto | .. proporzionale a K_1 | .. proporzionale a K; |
| 33 | 13 dal basso | .. per un numero totale N | .. per un numero totale N_0 |
| 34 | 1 dall'alto | .. tra teoria ed esperienza possono..... | .. tra teoria ed esperienza nel caso $t_0 = 0.013$ l.r. possono |
| 35 | 6 dall'alto | $n(E_0, E, t)$ | $n(E_0, E, t, \theta)$ |
| 37 | 10 dall'alto | .. risulta $\vartheta = d\theta$ | .. risulta $\text{sen } \theta d\theta = \vartheta d\theta$ |
| 38 | 2 dal basso | .. il più del 10% | .. a più del 10% |
| A/7 | 3 dal basso | .. dipende da T | .. dipende da Γ |

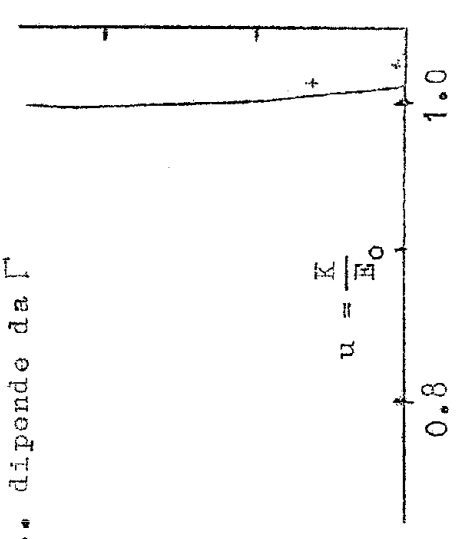
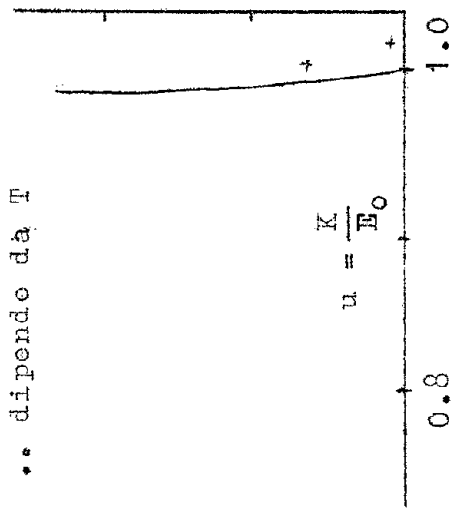


Figura 150

PARTE PRIMA

Apparato sperimentale per lo studio dello spettro di bremsstrahlung.

Sommario.

Al fine di rendere più agevole la comprensione della esperienza e il procedimento seguito, premettiamo una descrizione del dispositivo sperimentale adottato nello studio dello spettro di bremsstrahlung.

Questa descrizione non contiene in dettaglio le caratteristiche costruttive dei vari elementi dell'insieme, per i quali rimandiamo ai lavori originali; essa dà solo le caratteristiche operative essenziali alla comprensione della esperienza.

Sguardo d'insieme

In fig. 1 viene presentato uno schema essenziale dell'apparato sperimentale adottato:

T: targhetta di tantalio dell'elettrosincrotrone.

G: collimatore di Pb cilindrico; lunghezza 30 cm; vengono usati due collimatori con diametro di 38 mm e di 8 mm.

P: magnete pulitore (broom magnet)

G: tubo a vuoto posto tra il pulitore e la camera dello spettrometro.

S: spettrometro a coppie.

R: convertitore dello spettrometro

Q: quantanetro ad assorbimento totale del tipo 'R. Wilson'.

A₁, A₂, A₃ e B₁, B₂, B₃ sono due telescopi di contatori a scintillazione posti in posizione fissa, simmetricamente, rispetto al fascio dei γ in modo da contare solo le coppie simmetriche degli elettroni. Il funzionamento operativo dell'insieme è il seguente:

alla fine di ogni ciclo di accelerazione il fascio di elettroni accelerati dall'elettrosincrotrone, colpisce la targhetta T di tantalio. Il fascio di γ , da questi generati per irraggiamento, viene collimato per mezzo del collimatore C, 'pulito' delle particelle cariche che lo accompagnano, dal magnete P, e, attraverso il tubo a vuoto G, giungono al convertitore R. Le coppie che i raggi γ creano in R, vengono selezionate in energia dal campo magnetico dello spettrometro. I telescopi di contatori, seguiti da un opportuno circuito di conteggio, rivelano solo le coppie simmetriche prodotte dai γ di data energia. Il quantanetro ad assorbimento totale M, misura l'energia trasportata dal fascio, e permette di riferire tutti i conteggi ad una stessa intensità del fascio. Sperimentalmente ogni misura consiste di un conteggio di coppie simmetriche di elettroni, e attraverso questo si giunge, come diremo, ad una misura indi-

retta del numero di γ di nota energia irraggiati. In tal modo si può esaminare, come ci si propone, l'intero spettro.

Caratteristiche dei componenti l'apparato sperimentale.

Illustreremo ora le caratteristiche essenziali dei vari elementi che realizzano l'intero dispositivo sperimentale.

a) Radiatore T.

Nel caso dell'esperienza vengono usate due targhette di diverso spessore, ciò che permette un utile studio comparativo delle caratteristiche del bremsstrahlung, e dà informazioni circa i vari fenomeni che lo accompagnano, complicandone gli aspetti intrinseci. Questo sarà detto più chiaramente nel seguito. Gli spessori usati sono di 0.05 mm e 0.5 mm corrispondenti rispettivamente a $0.013X_0$ e $0.13 X_0$. Con X_0 intendiamo la lunghezza di radiazione, che è definita per un materiale generico dall'espressione

$$1/X_0 = \frac{4}{137} \frac{N}{A} Z^2 r_0^2 \text{ Cu } (183 Z^{-1/3})$$

e che per il tantalio vale $X_0 = 6,5 \text{ gr/cm}^2$

b) Collimatore.

È di piombo, cilindrico. La sua lunghezza è di 30 cm. Si usano due collimatori l'uno con diametro di 38 mm, l'altro di 8 mm, corrispondenti rispettivamente all'apertura di 3.6 mrad e di 0.75 mrad.

In questo modo si può avere una stima dell'intensità dei raggi γ emessi ad angoli diversi dall'angolo zero.

c) Magnete pulitore.

È un magnete a mantello nel cui gap esiste un campo di circa 15 Kgauss. La sua funzione è quella di eliminare tutte le particelle cariche che accompagnano il fascio. La distanza tra il magnete pulitore P e il convertitore

R dello spettrometro è calcolata in modo che elettroni aventi energia di 1000 MeV e incidenti con la direzione del fascio, vengano deviati di una quantità superiore al diametro del tubo da vuoto all'ingresso dello spettrometro.

d) Tubo a vuoto.

Consta di un tubo di ottone cilindrico, avente un diametro di 20 cm, e connesso ad un lato alla camera a vuoto dello spettrometro. Nel suo interno è fatto un vuoto di 0.03 mm Hg, il suo ingresso e la sua uscita sono costituiti da fogli di mylar di 0.2 mm di spessore. Questo spessore è tale da garantire una perfetta tenuta e resistenza alla pressione esterna, e inoltre, unitamente alle caratteristiche del materiale, rende del tutto trascurabili i fenomeni elementari di interazione dei γ con la materia (creazione di coppie, effetto Compton, effetto fotoelettrico), che potrebbero alterare il fascio.

e) Convertitore R dello spettrometro.

È costituito di un disco di alluminio di 6 cm di diametro e avente uno spessore di $1.08 \cdot 10^{-3} X_0$ (X_0 = lunghezza di radiazione). Questo materiale è facilmente reperibile e inoltre per esso si conosce molto bene la sezione d'urto di creazione di coppie.

f) Spettrometro.

Si tratta di uno spettrometro a coppie per alte energie. Le caratteristiche costruttive e di funzionamento sono ampiamente descritte nel lavoro originale redatto dai progettisti (1). Riassumiamo pertanto le sue proprietà operative. Ricordiamo che i telescopi di contatori a scintillazione sono in posizione fissa all'esterno del magnete, per non alterare le caratteristiche di funzionamento dei fotomoltiplicatori. La posizione dei telescopi è scelta in relazione all'ottica dello spettrometro.

tro, in modo da rivelare le coppie simmetriche aventi l'energia E (ogni ramo della coppia) funzione del campo B nel gap del magnete. Trascurando la massa di quiete dell'elettrone l'energia K del quanto γ che ha prodotto la coppia simmetrica è $K = 2E$. La selezione in energia dei γ in arrivo si ottiene variando B da 0.5 a 10.5 Kgauss. Si rivelano così coppie simmetriche di elettroni nel range di energia 25 — 525 MeV, e, indirettamente, γ di energia da 50 a 1050 MeV. Variando perciò B si può esaminare l'intero spettro dei γ . Lo spettrometro è calibrato seguendo l'andamento dell'intensità B del campo magnetico in funzione della corrente d'alimentazione I del magnete. (Fig. 2) Pertanto ad un fissato valore della corrente I (e perciò ad un fissato valore di B) corrisponde un dato valore dell'energia della coppia rivelata e perciò del γ corrispondente. Durante la misura la corrente viene controllata e misurata con una precisione dell'1‰ con un metodo di confronto che fa uso di un potenziometro di precisione e di una cella standard (pila Winstron). Per avere una idea della precisione raggiungibile nelle nostre misure, osserviamo che la corrente è stabilizzata all'1‰ e che le traiettorie degli elettroni sono state calcolate e controllate sperimentalmente con la tecnica del filo, con una precisione del 3‰.

g) Contatori ed elettronica.

Riportiamo in fig. 3 lo schema a blocchi dei rivelatori e di tutta l'apparecchiatura elettronica. I due telescopi di contatori sono posti nelle traiettorie di due elettroni aventi la stessa energia. Ogni telescopio consta di tre contatori il primo dei quali è posto a circa un metro dal magnete, compatibilmente con il potere risolutivo dello spettrometro, e per non influenzare il guadagno dei fotomoltiplicatori per le variazioni del campo magnetico. Ogni scintillatore è connesso, attraverso una guida di luce ad un

fotomoltiplicatore. L'anodo del fotomoltiplicatore dei tre contatori di ogni telescopio è connesso con una coincidenza tripla C_t avente tempo risolutivo $\tau = 6$ ns. La uscita delle due triple, relative ai due telescopi, vanno direttamente ad una coincidenza doppia C_d con $\tau = 10$ ns, e, l'una ritardata di 50 ns rispetto all'altra, ad una analoga coincidenza doppia.

Ogni coincidenza è seguita da un discriminatore e da una scala. In questo modo si possono contare, nello stesso tempo, sia le coincidenze simultanee N_S che le ritardate N_R . Quest'ultime comprendono sia le casuali che le coincidenze spurie dovute a coppie di elettroni asimmetriche relative ad un'energia dei fotoni diversa da quella che si sta considerando nella misura. Il fatto di misurare nello stesso tempo e non successivamente sia le coincidenze simultanee che le ritardate presenta il seguente vantaggio: si hanno informazioni relative alle stesse condizioni sperimentali, indipendentemente dall'intensità attuale del fascio γ , e dalle polarizzazioni degli strumenti elettronici. Rimuovendo il convertitore R ed eseguendo un analogo conteggio, si ha il relativo fondo N_F . N_F è il numero delle coincidenze casuali dovute al fondo. Il corretto conteggio, delle coincidenze, dovute alle coppie simmetriche prodotte nel convertitore di alluminio, è dato da

$$N_V = N_S - N_R = N_F$$

Osserviamo inoltre che le dimensioni degli scintillatori plastici per ogni telescopio sono le seguenti:

- 1° scintillatore: larghezza 18 mm, altezza 54 mm, spessore 1 mm
- 2° scintillatore: larghezza 40 mm, altezza 76 mm, spessore 1 mm
- 3° scintillatore: larghezza 72 mm, altezza 16 mm, spessore 1 mm.

Le dimensioni del 1° scintillatore sono imposte dalla richiesta risoluzione in energia ($\sim 2,7\%$) e dallo scattering degli elettroni di bassa energia (≈ 50 MeV) nel convertitore. Le dimensioni degli scintillatori successivi vanno aumentando per evitare la perdita di conteggio dovuta allo scattering degli elettroni negli scintillatori. I fotomoltiplicatori sono del tipo RCA 6810 A. Le coincidenze triple sono del tipo a linea a costanti distribuite⁽²⁾. In fig. 4 è riportata la caratteristica relativa al canale 1-2 della tripla. In fig. 5 si riporta l'andamento del numero di eventi contati in funzione del taglio del discriminatore interno alla coincidenza. Le figg. 6a e 6b riportano gli analoghi andamenti per le coincidenze di coppia. Le caratteristiche delle due doppie hanno lo stesso andamento.

Concludiamo osservando che l'uso di un'elettronica rapida è imposta dall'alta intensità dell'elettrosincrotrone di Frascati, onde evitare affollamento e conseguente perdite di conteggio.

h) Quantanetro.

Questo strumento misura l'energia trasportata dal fascio di bremsstrahlung. Esso è stato descritto ampiamente dal Wilson (3). Si tratta di sostanza di una camera a ionizzazione costituita di dodici lastre di rame elettroliticamente pure, accuratamente lavorate, di 1 cm di spessore e distanziate alternativamente di 1 e 2 mm tra loro: eccetto l'ultimo intervallo che è di 6,5 mm. Le placche sono connesse tra loro in modo tale che su metà di esse compaia l'alta tensione, mentre l'altra metà riceve la corrente di ionizzazione. La camera è riempita ad una pressione di 800 mmHg misurata a 20°C, con una miscela di argo al 95% e di CO₂ al 5%. Il numero e le dimensioni delle lastre sono scelte in modo che il fascio dei γ venga interamente assorbito dal quantanetro. In queste ipotesi la energia to

tale del fascio è proprio proporzionale alla carica g prodotta per ionizzazione e misurata da un opportuno circuito integratore. L'energia totale U trasportata dal fascio può venire espressa dalla relazione:

$$U = \frac{\gamma W q}{e} = \text{cost } g$$

ove q è la carica raccolta agli elettrodi della camera e la carica elementare;

W l'energia di ionizzazione;

r è il rapporto tra l'energia perduta nel rame e nel gas.

La costante può essere calcolata teoricamente o determinata sperimentalmente o risulta

$$\text{cost}_{\text{teorica}} = 4.82 \times 10^{18} \text{ MeV/coul}$$

$$\text{cost}_{\text{speriment.}} = 4.55 \times 10^{18} \text{ MeV/coul.}$$

Inoltre essa dovrebbe essere largamente indipendente dall'energia massima dei γ , ed il range di proporzionalità tra V e g dovrebbe andare da qualche MeV a 100 GeV.

Particolari accorgimenti rendono indipendente entro vasti limiti la risposta del quantmetro dall'allineamento del fascio rispetto all'asse del quantmetro. Più precisamente la risposta resta costante per uno spostamento di qualche cm della direzione del fascio parallelamente all'asse del quantmetro, e per un'angolo di incidenza tra i due assi minori di 45° . L'uso del quantmetro rende possibile la calibrazione del fascio e permette di eseguire misure relative ad uguale energia del fascio in arrivo, e, che è lo stesso, relative al medesimo numero di quanti equivalenti. Questi sono definiti dalla relazione

$$Q = \frac{V}{E_0} = \frac{1}{E_0} \int_0^{E_0 - m_0 c^2} K n(K) dK$$

ove $n(K)$ è la funzione di distribuzione dei quanti γ di energia K , ed $E_0 - m_0 c^2$ la loro energia massima.

PARTE SECONDA

Risultati della determinazione dello spettro di bremsstrahlung.

Sommario.

Il confronto dei risultati sperimentali dello studio sulla forma dello spettro dell'elettrosincrotrone viene fatto con la teoria di Bethe ed Heitler (irraggiamento nel campo del nucleo) e di Wheeler e Lamb (irraggiamento nel campo dell'elettrone). Si premettono pertanto i risultati della teoria accompagnati da un breve commento. Vengono descritte le misure eseguite e si illustra l'elaborazione di esse. Si esegue quindi un confronto preliminare tra teoria e esperienza, e da questo si traggono alcune conclusioni che serviranno, nel seguito, per lo studio definitivo.

Richiami sulla teoria del bremsstrahlung.

Tra i possibili processi elementari di interazione elettrone-atomo, quello dell'irraggiamento (bremsstrahlung) costituisce uno dei capitoli fondamentali dell'elettrodinamica quantistica. Il fenomeno si presenta nei seguenti termini: un elettrone di energia totale E_0 , che interagisce col campo Coulombiano del nucleo, o con quello degli elettroni atomici, può irradiare un quanto γ di energia K ($0 \leq K \leq E_0 - m_0 c^2$). In seguito a questo irraggiamento le caratteristiche dinamiche dell'elettrone (di energia e di direzione di moto) variano bruscamente.

L'energia del quanto γ irradiato varia in modo continuo nell'intervallo $0 \leq K \leq E_0 - m_0 c^2$, e la direzione di emissione di esso, rispetto a quella di volo dell'elettrone, può essere qualsiasi. Per un elettrone di energia E_0 , la probabilità di emissione di un quanto γ di energia K , e formante un angolo θ rispetto alla direzione dell'elettrone in arrivo, è funzione di K e di θ . Questa dipendenza è quantitativamente precisata attraverso l'introduzione della sezione d'urto. E' possibile definire la sezione d'urto di bremsstrahlung $\sigma(E_0, K, \theta) dK d\theta$ differenziale rispetto all'energia e all'angolo di emissione del quanto γ , e teoricamente dedurne l'espressione. Tale sezione d'urto risulta proporzionale alla probabilità di emissione di un quanto γ , con le caratteristiche dinamiche specificate, da parte di un elettrone, in un atto elementare di interazione con l'atomo. La sezione d'urto dipende anche dall'atomo frenante attraverso il parametro Z (numero atomico). Ci interessiamo, per le ragioni che diremo, delle sezioni d'urto di irraggiamento $\sigma(E_0, K) dK$ differenziale rispetto all'energia dei quanti. Si tratta della $\sigma(E_0, K, \theta) dK d\theta$ integrata sull'angolo θ di emissione del quanto.

Per calcolare l' "esatta" sezione d'urto occorre conoscere l' "esatta" funzione d'onda che descriva un elettrone in un campo coulombiano schermato. Questo è possibile solo nel caso non relativistico ($E_0 \ll m_0 c^2$). Si può assumere qui per l'hamiltoniana dell'elettrone l'espressione di Schrodinger. La teoria relativa è stata svolta in modo esatto da Sommerfeld.

Nel caso relativistico ($E_0 \gg m_0 c^2$) non è possibile dare un' "esatta" funzione d'onda⁽⁴⁾, e ci si deve accontentare di una funzione d'onda approssimata. Per l'hamiltoniana dell'elettrone occorre qui assumere la forma del Dirac. La teoria è stata svolta da Bethe e Heitler, facendo uso dell'approssimazione di Born per il bremsstrahlung nel campo del nucleo. Il contributo portato dagli elettroni atomici è stato calcolato da Wheeler e Lamb.

Bremsstrahlung nel campo del nucleo

La teoria originale è di Bethe ed Heitler⁽⁵⁾; ad essa hanno portato contributi anche altri autori. In questa teoria l'interazione coulombiana elettrone-nucleo viene trattata come un termine perturbativo e sviluppata in serie di potenze di α^2 arrestandosi al primo termine (approssimazione di Born). Varie correzioni sono state portate al lavoro originale, e queste si possono classificare in tre tipi:

- a) correzioni coulombiane;
- b) correzioni per lo schermo;
- c) correzioni al limite delle altre frequenze.

Correzioni coulombiane.

L'approssimazione di Born richiede che l'energie iniziali e finali dell'elettrone siano tali da verificare le limitazioni

$$\frac{2\pi Z}{137\beta_0} \ll 1 \quad \frac{2\pi Z}{137\beta} \ll 1$$

β_0 e β essendo le velocità romeriane iniziali e finali dell'elettrone. Questa approssimazione viene meno quando il numero atomico del bersaglio aumenta, l'energia iniziale degli elettroni diminuisce, l'energia dei fotoni approssima il limite delle alte frequenze ($K \approx E_0 - mc^2$). Nel caso del Pb il disaccordo è dell'ordine del 10% alle alte energie. Calcoli eseguiti da Betho, Davies e Maximon⁽⁶⁾ nei quali l'interazione coulombiana è compresa nell'hamiltoniana imperturbata, portano al seguente termine di correzione, che va aggiunto alla formula della sezione d'urto dedotta nell'approssimazione di Börn

$$\Delta_c = - \frac{4Z^2 r_0^2}{137} \frac{dK}{K} \left[1 + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E}{E_0} \right] \mathcal{F}(Z)$$

In essa r_0 è il raggio classico dell'elettrone, E_0 , E le energie iniziali e finali dell'elettrone, $\mathcal{F}(Z)$ è una funzione calcolata da Betho e Heitler. Nel caso del tantalio ($Z = 73$) risulta $\mathcal{F}(Z) = 0.275600$.

Correzioni di schermo.

In una prima approssimazione nel calcolo della sezione d'urto si fa l'assunto che il campo con cui interagisce l'elettrone sia il puro campo coulombiano del nucleo, e si trascura l'effetto di schermo dell'elettrone. L'influenza dello schermo è stata calcolata da Betho⁽⁷⁾, il quale mostrò che l'effetto di schermo è importante solo per momenti di rinculo $q < Z^{1/3}/137$. Per il tantalio perciò la regione in cui $q > 0.03$ non è influenzata dallo schermo. Nell'effetto di schermo ha importanza determinante la distanza dal nucleo a cui l'elettrone irradia, ed è ovviamente diversa a seconda dei valori di questa rispetto al raggio nucleare e a quello atomico. I risultati sono esprimibili mediante l'introduzione del parametro $\gamma = \frac{100 m_0 c^2 K}{E_0 E Z^{1/3}}$. Agli effetti dello schermo è essenziale il modello atomico assunto; i calcoli più diffusi si basano sul modello di

Thomas-Fermi. La accuratezza ottenibile con una formula corretta per schermo dipende dalla validità dell'approssimazione estremo-relativistica e dal modello atomico usato.

Correzioni al limite delle alte frequenze.

L'approssimazione di Born non permette di calcolare il valore della sezione d'urto al limite delle alte frequenze. Più precisamente essa annulla per un'energia $K \rightarrow E_0 - m_0 c^2$; è cioè nulla la probabilità che in un atto elementare di interazione un elettrone spenda tutta la sua energia nell'emissione di un fotone. Vari studi sperimentali⁽⁸⁾ indicano invece che la sezione d'urto ha un valore finito a tale limite. Calcoli recenti fatti da Fano⁽⁹⁾, predicono un valore finito per la sezione d'urto al limite delle alte frequenze. Secondo i risultati di Fano risulterebbe nel nostro caso $\int \sigma(E_0, K) \Big|_{K=E_0-m_0c^2} \approx 10^{-29} \text{ cm}^2$ del tutto trascurabile.

Trascureremo pertanto questa correzione.

Concludiamo riportando l'espressione della sezione d'urto da noi considerata, e comprensiva delle correzioni sopra esposte.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_n(E_0, K) dK = 4 \bar{\Phi} \frac{dK}{K} \left\{ 1 + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \left[\frac{\phi_1(\chi)}{4} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \ln Z - \psi(Z) \right] - \frac{2}{3} \frac{E}{E_0} \left[\frac{\phi_2(\chi)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - \psi(Z) \right] \right\} \end{aligned}$$

In questa

$$\bar{\Phi} = \frac{Z^2 r_0^2}{137} = Z^2 5.78 \times 10^{-28} \text{ cm}^2$$

E_0 , $E = E_0 - K$, energia iniziale e finale dell'elettrone

$\phi_1(\chi)$, $\phi_2(\chi)$ funzioni di schermo calcolate da Bethe

$\psi(Z)$ funzione per la correzione coulombiana calcolata da Bethe.

Bremsstrahlung nel campo dell'elettrone

La teoria è stata sviluppata da Wheeler e Lamb⁽¹⁰⁾. Rispetto agli analoghi calcoli per il bremsstrahlung nel campo del nucleo, questi sono più complicati a causa del carattere di scambio dell'interazione in cui c'è un grande trasferimento di energia e di momento all'elettrone di rinculo, al contrario del bremsstrahlung nel campo del nucleo il quale viene supposto infinitamente pesante. Un'ulteriore complicazione è rappresentata dal legame degli elettroni atomici. L'influenza del legame atomico degli elettroni è stata calcolata solo nella regione estremo-relativistica .

Usando il modello di Thomas-Fermi, la sezione d'urto assume la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \sigma_e(E_0, K) dK = 4 \bar{\epsilon} \frac{dK}{K} \left\{ \left[1 + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{\phi_1(\epsilon)}{4} - \frac{2}{3} \ln Z \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \frac{E}{E_0} \left(\frac{\phi_2(\epsilon)}{4} - \frac{2}{3} \ln Z \right) \right\} \end{aligned}$$

ove

$$\epsilon = \frac{100 \text{ mc}^2 K}{E_0 E Z^{2/3}}$$

$\phi_1(\epsilon)$, $\phi_2(\epsilon)$ sono funzioni calcolate da Wheeler e Lamb.

Sezione d'urto totale di bremsstrahlung

La sezione d'urto totale di irraggiamento differenziale rispetto all'energia dei fotoni, è espressa da

$$\sigma_{n+e}(E_0, K) dK = \sigma_n(E_0, K) dK + \sigma_e(E_0, K) dK$$

ove σ_n e σ_e hanno l'espressione sopra data.

L'andamento della funzione σ_{n+e} è data in fig. 7 . In questa si è iniziata la curva dall'energia $K = 400 \text{ MeV}$.

Com'è noto la σ_{n+e} infatti diverge per $K \rightarrow 0$.

Definizioni di "spettro" di bremsstrahlung

Il frenamento di elettrone nella targhetta di tantalio, dà origine ad un fascio γ , nel quale i quanti sono distribuiti secondo tutte le energie da 0 ad $E_0 - m_0 c^2$. Ogni componente spettrale del fascio, e cioè i fotoni di fissata energia K , possiede una certa intensità, funzione di K . E' interessante la conoscenza della distribuzione spettrale del fascio, e, a tale scopo, si introduce il concetto di "spettro" di bremsstrahlung. Il modo più ovvio per definirlo è il seguente. Diciamo $n(K)$ la funzione di distribuzione energetica dei γ ; in tal modo $n(K)dK$ rappresenta il numero di fotoni con energia compresa nell'intervallo infinitesimo $(K, K+dK)$. Si può definire "spettro" la funzione $Kn(K)$. Essa ha le dimensioni di un numero puro, ed il seguente significato: la quantità $Kn(K)dK$ è proporzionale all'energia trasportata dai fotoni compresi nello intervallo $(K, K+dK)$, mentre la quantità

$$\int_0^{E_0 - m_0 c^2} Kn(K)dK$$

esattamente rappresenta l'energia totale del fascio.

Per definizione di sezione d'urto risulta

$$Kn(K)dK = A K \sigma_{n+e}(E_0, K)dK$$

A essendo una costante di proporzionalità.

E' preferibile assumere per lo "spettro" di bremsstrahlung un'altra definizione, equivalente alla precedente e da questa deducibile. Introdotto il parametro $u = K/E_0$, energia dei fotoni, frazionale rispetto all'energia incidente E_0 degli elettroni, intenderemo per "spettro" di bremsstrahlung la funzione così definita

$$b(u) = b\left(\frac{K}{E_0}\right) = \frac{K \sigma_{n+e}(E_0, u)}{\int_0^{1 - \frac{m_0 c^2}{E_0}} K \sigma_{n+e}(E_0, u) du}$$

In questa espressione $\sigma_{u+e}(E_0, u)$ è ciò che diremo la sezione d'urto di bremsstrahlung data precedentemente, quando al posto di K si sostituisca u .

Ovviamente il campo di variabilità di u è

$$0 < u < 1 - \frac{m_0 c^2}{E_0} .$$

La funzione $b(u)$ ha le dimensioni di un numero puro, e $b(u)du$ è la frazione di energia trasportata dai fotoni compresi nell'intervallo $(u, u+du) = (\frac{K}{E_0}, \frac{K}{E_0} + d(\frac{K}{E_0}))$.

Mediante l'introduzione della funzione spettro, si elimina la divergenza che compare nella sezione d'urto per $K \rightarrow 0$. Il suo andamento è dato in fig. 8 .

Esperienza

Parleremo delle misure eseguite. Esse possono classificarsi in tre tipi e si riferiscono a:

- a) distribuzione angolare dell'intensità del beam dei γ .
- b) distribuzione in energia degli elettroni che colpiscono il radiatore
- c) studio della forma dello spettro.

Di queste, l'ultima misura costituisce la fondamentale, nel senso che assolve lo scopo propostoci. Le prime due sono complementare dell'ultima, e nel complesso danno informazioni essenziali sul meccanismo di produzione del fascio γ e suggeriscono utili informazioni nell'interpretazione definitiva dello spettro. Questo sarà detto più esplicitamente nel seguito.

Distribuzione angolare dell'intensità del fascio γ .

Il fascio di γ prodotto dal frenamento degli elettroni nel radiatore, non è costituito da fotoni tutti emessi in avanti, bensì esistono anche fotoni emessi ad un angolo non nullo rispetto alla direzione d'incidenza degli elettroni. Questo fatto è dovuto ai seguenti atti elementa

ri di deflessione: deflessione intrinseca nel processo elementare di irraggiamento, deflessione conseguente allo scattering di un elettrone nel radiatore prima di irradiare, scattering dei γ nel radiatore. La distribuzione angolare dell'intensità del fascio determinata è comprensiva di tutte e tre le deflessioni dette. La disposizione sperimentale per il suo studio è rappresentata in fig. 9 .

Rispetto a quella usata per lo studio dello spettro, c'è da notare l'esclusione dello spettrometro, e l'inclusione della camera M di ionizzazione con pareti sottili di alluminio ed elettrodi dello spessore totale di $4.3 \cdot 10^{-4}$ l.r.

Il collimatore C e la camera Q sono montate su basi mobili, e possono venire spostate a piacere rispetto alla direzione di allineamento dell'insieme.

La camera M sottile è attraversata dall'intero fascio e la carica m che essa raccoglie è rporporzionale alla energia totale del fascio. Con il collimatore C ed il quantmetro Q spostati di un angolo θ , rispetto alla direzione in avanti, la carica $q(\theta)$ raccolta da Q è proporzionale all'energia del fascio emessa ad angolo θ . Queste considerazioni giustificano la seguente definizione per intensità del beam all'angolo θ

$$I(\theta) = \frac{q(\theta)}{m}$$

Sono state eseguite misure variando l'angolo θ di 0.5 in 0.5 mrad, con radiatore di tantalio di 0.5 e 0.05mm. Questi spessori rispettivamente corrispondono a $t = 0.13$ l.r. e a $t = 0.013$ l.r.

Le misure sulla distribuzione angolare dei γ con $t = 0.13$ l.r, vengono eseguite con un collimatore cilindrico di 5 mm di diametro, corrispondente ad un'apertura angolare di 0.47 mrad quelle con $t = 0.013$ con un collimatore di 2 mm di diametro, corrispondente ad un apertura angolare di 0.19 mrad.

Com'è noto la radiazione di bremsstrahlung viene approssimativamente emessa in avanti entro un angolo solido dell'ordine di $m_0 c^2 / E_0 = 0.5$ mrad. Per una targhetta infinitamente sottile, l'intensità della radiazione ad angoli maggiori di questo dovrebbe essere trascurabile. Per una targhetta di spessore finito questo non accade, e si può senz'altro considerare che la presenza di un'intensità non trascurabile ad angoli maggiori di $m_0 c^2 / E_0$, sia dovuta allo scattering degli elettroni entro il radiatore. La distribuzione angolare della radiazione χ proveniente dagli acceleratori di elettroni è stata in questa ipotesi, calcolata da Schiff⁽¹¹⁾.

Il suo risultato è il seguente: il rapporto tra l'intensità ad un angolo θ maggiore di mc^2/E e l'intensità a $\theta = 0$ è, per unità di angolo solido:

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{-E_1\left(-\frac{\theta^2}{2\beta x}\right)}{\ln 2/\beta x E^2 - c}$$

ove E_1 è la funzione esponenziale integrale, β è una funzione della energia E degli elettroni incidenti (espresso in unità $m_0 c^0$) sulla targhetta e del materiale di questa, x è lo spessore (in cm) della targhetta, c la costante di Eulero. La formula di Schiff è dedotta nell'ipotesi che la targhetta sia abbastanza sottile che lo stragglung degli elettroni non sia eccessivo.

I risultati sperimentali vengono confrontati con la formula di Schiff.

La fig. 10 rappresenta questo confronto per $t = 0.131$ l.r. In essa la curva continua rappresenta la formula di Schiff per $X = 0.5$ mm, mentre quella tratteggiata rappresenta la stessa formula per $X = 0.6$ mm (0.156 l.r.), per tener conto che la targhetta è inclinata di circa 10° rispetto alla direzione del beam. L'accordo tra teoria ed esperienza

conforma che lo spessore efficace, cioè contribuente allo irraggiamento, è quello effettivo, ed esclude l'eventualità di attraversamenti multipli da parte degli elettroni. La fig. 11 rappresenta lo stesso confronto per $t = 0.0131 \text{ l.r.}$. In essa la curva a tratti rappresenta la formula di Schiff per $t = 0.15 \text{ mm}$, mentre lo spessore vero della targhetta è di 0.05 mm . Se ne deduce che la targhetta ha uno spessore efficace maggiore di quello effettivo. Questo fatto è da attribuirsi agli attraversamenti multipli degli elettroni. Nell'attraversare infatti lo spessore di 0.05 mm un elettrone perde un'energia di circa 100 KeV , e per questa perdita, se non subisce contemporaneamente uno scattering notevole; esso può conservare il suo equilibrio orbitale. Pertanto è in grado di cadere una seconda volta sulla targhetta. L'effetto diventa ancora più evidente quando si considerino le perdite per irraggiamento di fotoni di molto bassa energia. Nel caso di $t = 0.13 \text{ l.r.}$ gli attraversamenti multipli sono del tutto trascurabili, da per le maggiori perdite di energia sia per lo scattering più notevole subito dagli elettroni.

Sulla distribuzione energetica degli elettroni che urtano la targhetta.

Il metodo seguito, nell'elettrosincrotrone di Frascati, per costringere gli elettroni a colpire il radiatore, alla fine di ogni ciclo di accelerazione è il seguente: si elimina il campo elettrico accelerante a radio frequenza; mentre il campo magnetico nella ciambella continua a salire. Prescindendo dalle eventuali perdite di energia per irraggiamento, gli elettroni continuano a circolare nella ciambella con la energia raggiunta all'istante di eliminazione del campo elettrico, mentre l'aumento del campo magnetico determina la contrazione della loro orbita. Di conseguenza gli elettroni spiralizzano verso le pareti interne, dove

urtano la targhetta posta nella dovuta posizione. Pertanto alla fine di ogni ciclo di accelerazione un pacchetto di elettroni colpisce il radiatore per un tempo pari a quello richiesto per la spiralizzazione: questa durata dell'impulso del beam è di 2.5 ms. Essendo il periodo τ del campo magnetico di 50 ms, si hanno 20 impulsi/sec di elettroni, ciascuno di durata di 2.5 ms. Semplici calcoli che valutano l'effetto della durata finita dell'impulso degli elettroni, le dimensioni finite del pacchetto, le eventuali perdite per irraggiamento, mostrano che lo spread in energia degli elettroni non supera l'0.8%, mentre la distribuzione energetica dovrebbe essere molto stretta e sottile, e senza altro trascurabile la sua influenza sull'andamento dello spettro, calcolato per un pacchetto monoenergetico di elettroni di energia $E_0 = 1000$ MeV. In realtà, in aggiunta all'effetto di cui sopra, c'è n'è un'altro che si deve prendere in considerazione ed è il seguente: accade che, durante il ciclo di accelerazione, alcuni elettroni spiralizzano sul radiatore prima di avere raggiunto l'energia finale di 1000 MeV. Si tratta di quegli elettroni i quali per cause intrinseche al processo di accelerazione e al funzionamento complessivo della macchina, vengono a trovarsi in condizioni dinamiche tali da non permettere una orbita stabile, e vanno a cadere sulla targhetta. Il nostro scopo è quello di stimare il numero di elettroni che cadono sul radiatore con energia $E < E_0$. Questi elettroni irradiano infatti fotoni con energia $0 \leq K \leq E - m_0 c^2$, i quali vengono rivelati nelle misure sulla determinazione dello spettro. Essi d'altro canto non possono contribuire alla emissione di fotoni di alta energia, e il loro effetto è quello di rendere più dolce la pendenza della funzione spettro al limite delle alte energie.

Sperimentalmente, per risolvere il problema sopra annunciato, si è proceduto al seguente modo.

Il dispositivo sperimentale è quello usato per la determinazione dello spettro di bremsstrahlung (vedi fig. 1). Si fa uso inoltre di un circuito a cancello, la cui durata è $\tau = 1$ ms. Il gate è sincronizzato con il circuito di iniezione dell'elettrosincrotrone, e comanda il circuito di conteggio dello spettrometro a coppie. Una linea a ritardo variabile T permette, l'apertura del gate all'istante T dopo l'iniezione degli elettroni nella ciambella. In questo modo il circuito dello spettrometro a coppie è efficiente solo nell'intervallo di tempo $(T, T + \tau)$, ed esegue perciò solo conteggi, relativi a quegli elettroni che cadono sul radiatore entro il detto intervallo di tempo a partire dalla iniezione. È noto che l'energia attuale E degli elettroni, durante il processo di accelerazione, è funzione dell'istante t (a partire dall'iniezione). L'andamento della funzione $E = E(t)$ è rappresentato in fig. 12 .

Si può dunque dire che il dispositivo di sopra permette il conteggio dei fotoni, irraggiati dagli elettroni che cadono sulla targhetta ed aventi energia compresa tra $E(T + \tau)$ ed $E(T)$. In questo modo si può eseguire una stima sulla distribuzione energetica degli elettroni che cadono sulla targhetta. Infatti, diciamo $N_0(E) dE$ il numero di elettroni con energia tra E ed $E + dE$ che colpiscono il radiatore. Consideriamo i fotoni di energia K da essi irraggiati. Detta $\sigma(E, K) dK$ la sezione d'urto di irraggiamento per fotoni con energia tra K , $\sigma K + dK$, il numero $N(K)dK$ di fotoni emessi nell'attraversare lo spessore X è per definizione:

$$N(K)dK = \Delta N_0(E) dE \sigma(E, K) dK$$

Δ essendo una costante di proporzionalità. Per un impulso di elettroni di energia compresa nell'intervallo finito $(E, E + \Delta E)$ si ha:

$$N(K) dK = A \int_E^{E+\Delta E} N_e(E) dE \sigma(E, K) dK = A N_e(\bar{E}) \sigma(\bar{E}, K) dK \Delta E$$

D'altro canto il numero N_c di coppie simmetriche prodotte da fotoni di energia K è

$$N_c = B N(K) dK \sigma_c(K, \frac{1}{2})$$

B essendo una costante, $\sigma_c(K, \frac{1}{2})$ la sezione d'urto di coppie con energia equipartito. Se ne deduce

$$N_c = C N_e(\bar{E}) \Delta E \sigma(\bar{E}, K) dK \sigma_c(K, \frac{1}{2})$$

e essendo una costante.

Ne risulta indicando con 1 e 2 due misure diverse

$$\frac{N_e(\bar{E}_1)}{N_e(\bar{E}_2)} = \frac{N_{e1}}{N_{e2}} \frac{\sigma(\bar{E}_2, K)}{\sigma(\bar{E}_1, K)} \frac{\Delta E_2}{\Delta E_1}$$

Sperimentalmente si fissa il campo magnetico dello spettrometro (ad un valore corrispondente dei fotoni $K=700\text{MeV}$) si fa variare il ritardo T del gate (rispetto all'istante di iniezione e si eseguono i relativi conteggi). Si considerano con ciò gli elettroni con energia compresa nell'intervallo di estremi $E(T + \tau)$ ed $E(\tau)$. Se ne deduce $\bar{E} = \frac{E(T+\tau) + E(\tau)}{2}$ e $\Delta E = E(T+\tau) - E(\tau)$. Le stesse misure vengono eseguite con un altro valore del campo magnetico dello spettrometro (relativo a $K = 800 \text{ MeV}$). Il risultato della stima, è in entrambi i casi, lo stesso. Si parte dal valore $T = 18 \text{ ms}$ (energia corrispondente degli elettroni 921 MeV), e via via lo si aumenta di 1 ms , fino ad arrivare a $T = 24 \text{ ms}$. I conteggi relativi ai valori $T = 22, 23, 24 \text{ ms}$, si riferiscono tutti ad elettroni che hanno l'energia tra 999 e 1000 MeV . Il campo elettrico a r.f. è infatti eliminato all'istante $t = 22.5 \text{ ms}$ rispetto all'iniezione, ed il tempo di collisione degli elettroni è di 2.5 ms .

Non si hanno conteggi per $T < 18$ ms. Se ne conclude che elettroni di energia minore di circa 920 MeV non urtano la targhetta. I risultati della stima eseguita, sono riportati nella seguente tabella

| ΔE_{MeV} | \bar{E}_{MeV} | $N(\bar{E})$ |
|-------------------------|------------------------|--------------|
| 30 | 936 | 1 |
| 26 | 964 | 5 |
| 14 | 984 | 13 |
| 8 | 995 | 38 |
| 1 | 999,5 | 1000 |

Nell'esecuzione dei calcoli si è preso arbitrariamente uguale a 1000 il numero di elettroni con energia media $\bar{E} = 999.5$ MeV. La tabella va interpretata al modo seguente: $N(\bar{E})$ rappresenta il numero di elettroni la cui energia è compresa tra $\bar{E} + \frac{\Delta E}{2}$ ed $\bar{E} - \frac{\Delta E}{2}$, per 1000 elettroni incidenti di energia $\bar{E} = 999.5$ MeV. Così ad esempio, il numero di elettroni la cui energia è compresa tra 991 e 977 MeV è 13.

Nel seguito verrà messo in evidenza l'interesse di questa stima.

Studio della forma dello spettro.

Lo scopo di queste misure è la determinazione sperimentale della forma dello spettro di bremsstrahlung, che si ha dall'elettrosincrotrone. Si deve a tale scopo determinare l'intensità delle varie componenti spettrali del fascio γ , e cioè il numero di fotoni con energia tra K e $K + dK$. Per studiare l'intero spettro vanno pertanto eseguite diverse misure in corrispondenza dei diversi valori della energia K dei fotoni presenti nel fascio. A questo scopo si varia il campo magnetico dello spettrometro da

0.5 a 10 Kgauss. In tal modo si rivelano le coppie simmetriche di elettroni prodotti dai γ nel convertitore nel range di energia tra 25 e 525 MeV, corrispondente a fotoni di energia da 50 a 1050 MeV. Ogni misura va riferita alla stessa carica q raccolta nel quantmetro. Essendo q proporzionale all'energia totale del fascio γ , si rondo no in questo modo le misure equivalenti e confrontabili. Ogni misura è ripetuta più volte per controllarne la riproducibilità. E' importante minimizzare il rapporto tra le coincidenze buone e quelle spurie. Considerate le caratteristiche dell'insieme di rivelazione, si può vedere che questo rapporto risulta direttamente proporzionale alla intensità del fascio γ . Per questo si mantiene l'intensità del fascio γ non superiore a 10^{10} quanti equivalenti/minuto. In questa situazione sperimentale il conteggio è riproducibile entro l'errore statistico ($1/\sqrt{N} \leq 1\%$). Vieno studiata la forma dello spettro per due radiatori di tantalio: l'uno di 0.013 l.r., l'altro di 0.13 l.r. Per ciascuno di essi si usano due collimatori, l'uno di 8 mm di diametro (apertura angolare di 0.75 mrad), l'altro di 38 mm (3.6 mrad). Sperimentalmente il risultato di ogni misura è un conteggio. Mostriamo ora come da questo si possa risalire alla determinazione della forma dello spettro di bremsstrahlung cioè della funzione $I(k/\epsilon_0)$.

Elaborazione dei risultati

Supponiamo di aver fissato il campo magnetico dello spettrometro e sia E l'energia corrispondente delle coppie simmetriche rivelate. Sia N_V il conteggio corrispondente. Se il sistema di rivelazione spettrometro-rivelatori avesse un potere risolutivo infinito avremmo

$$N_V = A N(k) dk G_c(k, \frac{1}{2}) d(\frac{E}{k})$$

essendo A una costante $N(K) dK$ il numero di fotoni con energia tra K , $eK + dK$ presente nel fascio che arriva sul radiatore dello spettrometro, $\sigma_c(k, \frac{1}{2}) d(\frac{E}{K})^*$ la sezione d'urto di produzione di coppie con energia equipartita, in cui un ramo della coppia ha l'energia E .

In realtà, dipendendo dall'ottica dello spettrometro e dalle dimensioni finite degli scintillatori plastici al conteggio N_V contribuiscono i fotoni la cui energia cade nell'intervallo finito $(K, K + \Delta K)$. Vengono perciò rivelate coppie di elettroni, un membro della coppia avendo energia tra E ed $E + \Delta E$ (con $\Delta E = \frac{\Delta K}{2}$).

La relazione corretta è pertanto la seguente

$$N_V = A N(K) \Delta K \sigma_c(k, \frac{1}{2}) \frac{\Delta K}{2K}$$

D'altro canto, per definizione $I(\frac{K}{E_0}) d(\frac{K}{E_0})$ rappresenta la funzione di energia dei fotoni compresi nell'intervallo $(K, K + dK)$ presente del fascio. Perciò, se indichiamo con E_{tot} l'energia totale del fascio avremo

$$N(K) dK = E_{tot} I\left(\frac{K}{E_0}\right) d\left(\frac{K}{E_0}\right) \frac{1}{K}$$

Inoltre se Q è la carica totale raccolta dal quantmetro, q la costante del quantmetro. Risulta

$$\frac{Q}{q} = E_{tot} = \int_0^{E_0 - m_0 c^2} K N(K) dK$$

Combinando queste relazioni si deduce:

$$N_V = \frac{A}{2} \frac{Q}{q} \frac{1}{E_0} I\left(\frac{K}{E_0}\right) \sigma_c(k, \frac{1}{2}) \left(\frac{\Delta K}{K}\right)^2$$

c

$$I\left(\frac{K}{E_0}\right) = \frac{N_V}{\frac{A}{2} \frac{Q}{q} \frac{1}{E_0} \sigma_c(k, \frac{1}{2}) \left(\frac{\Delta K}{K}\right)^2}$$

* - Vedi appendice A.

Lo spread percentuale nell'energia dei fotoni accettati, è per il nostro sistema di rivelazione costante $\Delta K/K = \text{cost.}$ Riferendo i conteggi alla stessa carica raccolta dal quantmetro si ha

$$\frac{I(K_1/E_0)}{I(K_2/E_0)} = \frac{N_{V_1}}{N_{V_2}} \frac{G_c(K_2, \frac{1}{2})}{G_c(K_1, \frac{1}{2})}$$

Come s'è già detto N_V è il conteggio vero dato da $N_V = N_S - N_R - N_F$ ove N_S e N_R sono le coincidenze simultanee e ritardate, N_F il conteggio di fondo. N_R sono coincidenze spurie dovute a coppie non simmetriche, N_F sono coincidenze casuali dovute al fondo. L'accuratezza della descrizione data è in realtà influenzata dallo scattering multiplo degli elettroni nel convertitore, e dal potere risolutivo finito dei contatori. Prima di eseguire il confronto teoria esperienza occorre eseguire le relative correzioni. I calcoli sono stati eseguiti e il risultato è mostrato nei grafici che riportiamo. Per l'effetto delle perdite di conteggio derivante dallo scattering degli elettroni nel convertitore dello spettrometro rimandiamo alla bibliografia⁽¹²⁾ (Diambrini, Figuera, Rispoli, Serra. Nota interna n° 48).

L'eventualità di analoghe correzioni per scattering nei rivelatori è eliminata dall'aver scelto il secondo ed il terzo scintillatore di ogni telescopio, di opportune dimensioni maggiori del primo. Il calcolo delle correzioni da apportare per il potere risolutivo finito dei contatori è riportato in appendice B.

Confronto preliminare teoria - esperienza.

I risultati del confronto della forma dello spettro di bremsstrahlung teorico e sperimentale sono rappresentati nelle fig. 13 per i due spessori di 0.13 e 0.013 l.r. e, per ognuno di questi, per due collimatori di diversa

apertura angolare (0.75 e 3,6 mrad). Questi risultati sono stati pubblicati recentemente⁽¹²⁾.

Le curve teoriche sono quelle previste dalla teoria di Bothe ed Heitler, di Wheeler Lamb, calcolate numericamente come s'è detto. L'intensità teorica è stata corretta sia per lo scattering degli elettroni nel convertitore dello spettrometro e per le dimensioni verticali dei contatori, sia per il potere risolutivo finito dei contatori (vedi appendice B). Queste correzioni sono rappresentate nei grafici da linee tratteggiate. Nei grafici sono presentati i risultati sperimentali con l'errore statistico ($\frac{1}{\sqrt{N}} \leq 1\%$). Nel confronto si fa coincidere il valore dell'intensità sperimentale relativa a $u = 0.700$ con il valore teorico.

Il risultato del confronto è essenzialmente il seguente: esiste per ogni spessore e per ogni collimazione, un disaccordo al limite delle alte energie; il disaccordo è maggiore per $t = 0.13$ l.r. che per $t = 0.013$ l.r.

Per il radiatore $t = 0.013$ l.r. il disaccordo tra teoria ed esperienza è entro il 2% quando si usi il collimatore con apertura angolare di 0.75 mrad, maggiore quando l'apertura angolare è di 36 mrad. Questo mostra che aumentando l'angolo di collimazione si ha una perdita relativa di fotoni di alta energia.

Questo effetto non si ha per $t = 0.13$ l.r.

Il disaccordo tra teoria ed esperienza al limite delle alte energie $0.85 \leq K \leq 1$ può essere dovuto alle seguenti cause

- a) Spread in energia degli elettroni che urtano la targhetta, e possibilità che un elettrone irradi più di un fotone attraversando l'intero spessore del radiatore (straggling). Questa seconda causa diventa più importante della prima, quando $t = 0.13$ l.r., come mostrano i risulta-

ti sperimentali.

b) Scattering degli elettroni nell'attraversare il radiatore.

Il disaccordo che si trova tra teoria ed esperienza nel nostro caso, è stato già notato da altri sperimentatori, sicchè può ritenersi una caratteristica generale della radiazione γ prodotta dagli acceleratori. Le ragioni vanno ricercate probabilmente tra quelle dette. In ciò che segue, prenderemo separatamente in esame ciascuno degli effetti connessi con l'attraversamento del radiatore da parte degli elettroni, e ne valuteremo, nei casi possibili la relativa importanza.

PARTE TERZA

Deduzione di una formula di bremsstrahlung di targhetta
spessa.

Sommario.

Vengono analizzati i principali fenomeni che accompa-
gnano l'attraversamento del radiatore da parte degli elet-
troni. Se ne discute la loro importanza nel determinare la
forma dello spettro di bremsstrahlung. Viene quindi affron-
tato il problema di targhetta "spessa", e dedotta una for-
mula atta ad interpretarne il bremsstrahlung.

I risultati vengono posti a confronto con l'esperien-
za.

Rassegna dei principali fenomeni connessi con l'attraversamento del radiatore da parte degli elettroni.

Il confronto teoria-esperienza sopra riportato è preliminare non definitivo. Nell'eseguirlo si è voluto trarre da esso il maggior numero possibile di informazioni circa i vari fenomeni che accompagnano il passaggio di elettroni nel radiatore, ed il meccanismo di produzione del fascio γ nell'elettrosincrotrone. Il nostro scopo è quello di dedurre una formula di bremsstrahlung per targhetta di spessore finito. Il problema s'è presentato nello studio della radiazione γ proveniente dagli acceleratori di elettroni, soprattutto da sincrotroni. E' stato affrontato da vari autori (cfr. ad es., Hisdal⁽¹³⁾, Mohr⁽¹⁴⁾, Wilson⁽¹⁵⁾, Eyges⁽¹⁶⁾, Penfeld⁽¹⁷⁾.) In genere i risultati trovati si applicano solo alla particolare situazione sperimentale in esame, oppure i calcoli eseguiti mediante semplificazioni non sempre accettabili, si che i risultati conducono soprattutto a stime della forma dello spettro, e non sono quantitativamente esatti. Il nostro scopo è quello di trattare il problema in pò più generale, prescindendo dalla particolare situazione sperimentale. Negli studi riguardo lo spettro γ proveniente dagli acceleratori si nota in generale un disaccordo tra teoria ed esperienza al limite delle alte frequenze. A questa regione di energia soprattutto rivolgeremo la nostra attenzione.

Nel confronto preliminare eseguito si sono fatte due semplificazioni essenziali: si è supposta la targhetta infinitamente sottile, e si è considerato il beam di elettroni proveniente dall'elettro-sincrotrone, monoenergetico. Queste approssimazioni non sono verificate nella realtà, e ad essa probabilmente, va ascritto il motivo fondamentale del disaccordo tra teoria ed esperienza.

Per una targhetta di spessore finito occorre tener

conto di vari effetti secondari che accompagnano l'attraversamento del radiatore da parte degli elettroni. Questi fenomeni, che alterano nel complesso, e, in modo diverso, a seconda della regione di energia dei fotoni considerata, lo spettro dei fotoni, sono i seguenti:

- a) Effetto di perdita di energia degli elettroni incidenti per ionizzazione e irraggiamento.
- b) Effetto della scattering multiplo degli elettroni.
- c) Assorbimento dei fotoni, irraggiati alla profondità t della targhetta, nella rimanente parte della targhetta stessa.

Trascureremo senz'altro le perdite di energia per ionizzazione, così come l'assorbimento dei fotoni.

Le perdite per ionizzazione, sull'intero spessore del radiatore, costituiscono infatti una frazione del tutto trascurabile dell'energia incidente E_0 .

L'assorbimento dei fotoni è piccolo e, per l'energia che ci interessano, risulta costante e pertanto non influisce sulla forma dello spettro (per energie relativamente elevate dei γ l'assorbimento è dovuto quasi esclusivamente alla creazione di coppie, e, per $K > 137 mc^2 Z^{-1/3}$, cioè per $K > 4$ MeV nel nostro caso, la sezione d'urto di coppie è una costante del materiale).

Dovremo perciò tener conto dello scattering multiplo e delle perdite di energia per irraggiamento (straggling). L'effetto dello scattering multiplo è quello di diffondere notevolmente la distribuzione angolare dei γ . Il risultato è che, mentre per targhetta infinitamente sottile l'irraggiamento è sostanzialmente compreso entro un angolo solido di ampiezza mc^2/E_0 ^{nel caso} direzione in avanti, per una targhetta di spessore finito, esiste una frazione non trascurabile di fotoni emessi ad un angolo maggiore di mc^2/E_0 .

L'effetto dello straggling è il seguente: un elettro-

ne che alla profondità t della targhetta abbia irraggiato un quanto di energia K , può, nel rimanente spessore, irraggiare un quanto, purchè di energia non superiore ad $E_0 - K - m_0 c^2$. Quando si tenga presente che la probabilità di irradiare un quanto di energia K è circa inversamente proporzionale a K , c'è da attendersi, nel caso di spessore finito, una produzione percentuale di γ al limite delle alte frequenze, minore di quella che si avrebbe per targhetta infinitamente sottile. Questo effetto è evidente dal punto di vista sperimentale se si confronta la forma dello spettro per i due spessori $t = 0.13$ l.r. e $t = 0.013$ l.r. della targhetta.

Una nota sulla distribuzione energetica del beam degli elettroni.

Un altro effetto di cui si deve tener conto è quello derivante dallo spread in energia degli elettroni incidenti. Questo spread è legato alle caratteristiche del processo di accelerazione, ed il suo effetto è quello di ridurre la pendenza della funzione $b(u)$ al limite delle alte frequenze. Per una valutazione quantitativa occorre la conoscenza della funzione di distribuzione energetica degli elettroni che urtano il radiatore. Per tali elettroni, come s'è detto diffusamente più sopra, due sono le origini dello spread: l'una è costituita dalle dimensioni finite del pacchetto che urta il radiatore alla fine di ogni ciclo di accelerazione, dalla durata finita del tempo di collisione, ecc.; l'altra dal fatto che alcuni elettroni vanno perduti durante il processo di accelerazione, e, di questi, una parte cade sul radiatore.

Corrispondentemente si può parlare di due distribuzioni energetiche sovrappoventisi. Lo spread della prima ammonta, come s'è osservato al 0.8%, ma d'altro canto la distribuzione è così sottile che il suo effetto non è rive-

labile sperimentalmente. Lo spread derivante dalla perdita degli elettroni è stato stimato come detto più sopra (misure di gate). La relativa distribuzione energetica viene messa a confronto con quella dovuta a straggling. Questa viene calcolata mediante integrazione della funzione di straggling (vedi in seguito) nell'intervallo desiderato di energia. Il risultato di questo confronto è riassunto nella seguente tabella

| (E_1, E_2) (MeV) | % di elettroni presenti nell'interv. (E_1, E_2) <u>Spread della macchina</u> | % di elettroni presenti nell'interv. (E_1, E_2) <u>Straggling</u> |
|-----------------------|---|--|
| 1000-999 | 94.6% | 53.0% |
| 999 -991 | 3.6 % | 22.6% |
| 991 -977 | 1.3 % | 10.5% |
| 977 -951 | 0.5 % | 8.4% |
| 951 -921 | 0.1 % | 5.4% |

In essa si mostra la percentuale di elettroni la cui energia è compresa nell'intervallo (E_1, E_2)

- Per un numero totale N di elettroni incidenti sul radiatore (spread della macchina
- per un numero totale N_0 di elettroni incidenti sul radiatore, di energia $E_0 = 1000$ MeV, dopo che hanno attraversato lo spessore $t = 0.065$ l.r.

Dalla tabella si vede come lo spread della macchina sia trascurabile rispetto a quello di straggling. La distribuzione energetica dovuta allo straggling diventa naturalmente più diffusa aumentando t .

Se si ripete lo stesso calcolo considerando lo straggling relativo ad un calore $t = 0.0065$ l.r., si trova che le due distribuzioni sono confrontabili tra loro. Questo fatto suggerisce che, le lievi differenze trovate nel con

fronto preliminare tra teoria ed esperienza, possono essere dovute anche allo spread degli elettroni incidenti.

Il disaccordo più notevole che invece si ha per $t = 0.13$ l.r. è in massima parte dovuto allo straggling. Nel calcolo che segue terremo conto di esso, e trascureremo lo spread degli elettroni incidenti. Considereremo pertanto il beam incidente come monoenergetico.

Una formula di bremsstrahlung di targhetta spessa.

Per visualizzare il problema riferiamoci allo schema di fig. 14. Sia t la generica profondità della targhetta espressa in lunghezza di radiazione. Sia t_0 il suo spessore totale. Indichiamo con $n(E_0, E, t, \theta) dE d\theta$ il numero di elettroni presenti alla profondità t con energia nello intervallo $(E, E+dE)$ scatterati nell'angolo $(\theta, \theta+d\theta)$ rispetto alla direzione in avanti. Sia $\sigma(E, K) dK$ la sezione d'urto di irraggiamento per fotoni di energia tra K e $K+dK$. Supporremo che i fotoni siano emessi nella direzione di volo dell'elettrone. Nello attraversare lo spessore dt , il numero di fotoni con energia tra K e $K+dK$, emessi dagli elettroni presenti allo spessore t e aventi energia tra E ed $E+dE$ nella direzione $(\theta, \theta+d\theta)$ è dato da:

$$N n(E_0, E, t, \theta) dE \sigma(E, K) dK dt d\theta$$

se N indica il numero di atomi per cm^2 del radiatore.

Osserviamo che:

- 1) all'irraggiamento dei fotoni di energia K , contribuiscono tutti e soli gli elettroni con energia totale $E \geq K + m_0 c^2$;
- 2) agli effetti della rivelazione sono efficaci solo gli elettroni che siano scatterati di un angolo minore di $\Gamma/2$, essendo $\Gamma/2$ la semiampiezza dell'angolo di apertura del collimatore. Solo questi elettroni, infatti, inviano fotoni entro l'angolo di rivelazione.

Per il numero totale di fotoni con energia tra K e $K+dK$ rivelati, si ha pertanto

$$(1) \quad P(K)dK = dKN \int_0^{t_0} \int_{k+m_0c^2}^{E_0} n(E_0, E, t, \theta) \delta(E, K) dE d\theta dt$$

E' essenziale conoscere la funzione $n(E_0, E, t, \theta)$.

Porremo

$$(2) \quad n(E_0, E, t, \theta) = n(E_0, E, t) \mathcal{H}(\theta, t)$$

In questa relazione $n(E_0, E, t)$ è la funzione di distribuzione energetica degli elettroni alla generica profondità t della targhetta. $\mathcal{H}(\theta, t)$ è la funzione di distribuzione angolare. Come hanno mostrato Rossi e Greisen⁽¹⁸⁾ per alte energie degli elettroni, la distribuzione per scattering multiplo, è approssimativamente gaussiana ed ha la forma:

$$(3) \quad \mathcal{H}(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{E}{2t}\right)^2 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{E}{2t}\right)^2 \frac{\theta^2}{t}}$$

ove E è l'energia degli elettroni in MeV e t lo spessore in lunghezza di radiazioni. La (3) è stata normalizzata in modo che il suo integrale su tutti gli angoli sia unitario ed è valida per piccoli angoli di scattering. E' certo lecito assumere la (3) per gli elettroni di energia E_0 . Per elettroni di energia $E < E_0$ vanno fatte le seguenti osservazioni. La (3) si riferisce ad elettroni incidenti con energia E e dà di questi la distribuzione angolare allo spessore t . Un elettrone di energia $E < E_0$ e, nelle nostre ipotesi, un elettrone che ha emesso un fotone di energia $K = E_0 - E$. Adesso non sarebbe applicabile la (3) per due motivi:

- nell'emissione del fotone, l'elettrone è deflesso;
- se il fotone viene emesso a profondità $t_1 < t$, allo spessore t esso ha percorso come elettrone di energia E ,

non lo spessore t , ma lo spessore $t-t_1$.

Per poter applicare la (3) all'elettrone con energia E occorre fare alcune ipotesi. Supporrò cioè che:

- a) la deflessione subita dall'elettrone nell'emissione di un quanto di energia K sia dello stesso ordine di grandezza della deflessione di scattering;
- b) nel passaggio dell'elettrone dallo stato di energia E_0 allo stato $E=E_0-K$, le sue caratteristiche medie di scattering non variano in modo sensibile.

Entrambe le ipotesi possono essere, almeno entro certi limiti, giustificate. Per la prima basta osservare che la deflessione subita dall'elettrone nell'emissione del quanto è dell'ordine di $\frac{mc^2}{E_0}$ e quella di scattering allo spessore t dell'ordine di $\frac{21}{E_0} \sqrt{t}$. La seconda ipotesi è tanto meglio verificata quanto meno E differisce da E_0 , e cioè quanto più piccola è l'energia del γ emesso; le caratteristiche medie di scattering, infatti, variano lentamente con l'energia dell'elettrone. Questo fatto implica che probabilmente la formula che otterremo vada bene al limite delle alte frequenze, meno bene nella regione delle basse energie.

Per ciò che riguarda la funzione di distribuzione energetica $n(E_0, E, t)$ questa è stata calcolata da Bethe⁽¹⁹⁾ ed è la funzione di straggling (Eyges⁽²⁰⁾ ha eseguito lo stesso calcolo). Bethe dà la seguente formula per la frazione di elettroni emergenti allo spessore t con energia tra E ed $E+dE$

$$(4) \quad W(E_0, E, t) dE = \frac{dE}{E_0} \frac{[\ln(E_0/E)]^{at-1}}{\Gamma(at)}$$

essendo a una costante. Nella deduzione della funzione di straggling si assume che tutte le perdite di energia siano dovute ad irraggiamento, un'ipotesi certo valida nel nostro caso. Se si normalizza la funzione W ad 1, si trova

$a = \ln 2$. Pertanto se N_0 è il numero totale di elettroni incidenti di energia E_0 il numero di quelli emergenti allo spessore t con energia tra E ed $E+dE$ è

$$(4') \quad n(E_0, E, t) dE = N_0 \frac{dE}{E_0} \frac{[\ln(E_0/E)]^{t/\ln 2 - 1}}{\Gamma(t/\ln 2)}$$

Osserviamo ora che la funzione di distribuzione (3) dà il numero di elettroni scatterati nella direzione $(\theta, \theta+d\theta)$ per unità di angolo solido. Il numero di quelli scatterati nell'angolo solido $d\Omega$ nella direzione $(\theta, \theta+d\theta)$ è $\Theta(\theta, \theta) d\Omega$. Essendo $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ per piccoli angoli risulta $\theta = d\theta$ e perciò

$$\Theta(\theta, \theta) d\Omega = \left(\frac{E}{21}\right)^2 \frac{\theta}{E} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{21}\right)^2 \frac{\theta^2}{E}} d\theta$$

Concludiamo dando il numero di fotoni con energia tra K e $K+dK$ rivelati:

$$(5) \quad P(K) dK = A dK \int_0^{t_0} \int_{k+m_0c^2}^{E_0} \frac{1}{E_0} \frac{[\ln(E_0/E)]^{t/\ln 2 - 1}}{\Gamma(t/\ln 2)} \left(\frac{E}{21}\right)^2 \frac{\theta}{E} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{21}\right)^2 \frac{\theta^2}{E}} G(E, K) dE d\theta dt$$

A essendo una costante, inessenziale al nostro scopo che è la verifica della forma dello spettro. Dalla (5) si deduce la forma dello spettro moltiplicando il valore dello integrale per K . Nell'appendice C vengono discussi alcuni problemi relativi all'integrale (5) e alla sua integrazione numerica.

Risultati dell'integrazione della formula di targhetta
spessa.

Confronto con i risultati sperimentali

La formula 7) che descrive, entro certe approssimazio-
ni, il bremsstrahlung per un radiatore di spessore fini-
to, è stata integrata con riferimento alla seguente si-
tuazione sperimentale:

spessore del radiatore $t = 0.13$ l.r.

angolo di collimazione $\Gamma = 3.6$ mrad

È interessante confrontare i risultati ottenuti:

a) con la funzione $b(u)$ precedentemente definita (cfr.

Parte seconda) e cioè la

$$8) \quad b(u) = \frac{K \sigma_{n+e}(E_0, u)}{\int_0^{1 - \frac{m_0 c^2}{E_0}} K \sigma_{n+e}(E_0, u) du}$$

valida, al limite, per uno spessore infinitamente sot-
tile del radiatore.

b) con i risultati sperimentali.

I risultati del primo confronto sono numericamente
rappresentati nella annessa tabella e riportati nella fi-
gura 15 a). Come s'è già detto, la 7) dà l'intensità del
bremsstrahlung a meno di una costante. Nell'eseguire il
confronto si fanno coincidere i due valori corrisponden-
ti relativi ad $u = 0.700$ (zona di pianerottolo). I valori
dell'intensità praticamente coincidono per le due curve
per $0 \leq u \leq 0.700$; differenze esistono per, $0.700 \leq u \leq 1$.
In questo intervallo i valori dell'intensità dedotta da 7)
sono più bassi di quelli corrispondenti previsti dalla 8);
precisamente la differenza varia tra 1'1% (per $u = 0,825$)
il più del 10% (per $u = 0.985$). Questo fatto è messo in e-
videnza nel grafico di fig. 15 b).

Per poter eseguire il confronto con l'esperienza occorre portare le dovute correzioni (per lo scattering nel radiatore e il potere risolutivo del sistema di rivelazione). Questo confronto è riportato in fig. 15 b per l'intero spettro, e nella figura 15 c per l'intervallo $0.700 \leq u$.

Notiamo che la formula di targhetta spessa è stata integrata per K entro l'intervallo (200, 985) MeV. All'esterno di questo si fa uso di un'estrapolazione. Per un'esame della validità della formula 7) più significativa è la fig. 15 c. In questa sono riportati i risultati sperimentali con l'errore statistico, a confronto con la intensità $b(u)$ per una targhetta infinitamente sottile, e con quella per targhetta di spessore finito. Per entrambe, tratteggiata, la correzione per il potere risolutivo del sistema di rivelazione. Queste correzioni non sono quantitativamente uguali per le due curve, avendo esse diversa pendenza. Dal grafico si vede come la 7) sia complessivamente d'accordo con i risultati sperimentali, il disaccordo essendo tra il 2% ($u = 0.900$) e meno del 5% ($u=0.985$). Per la 8) questo disaccordo è tra più del 5% ($u = 0.900$) e

15% ($u=0.985$) come conclusione si può dire che la formula 7) descrive sufficientemente bene il bremsstrahlung di targhetta di spessore finito.

Non è possibile, in questo momento, dire la precisione con cui è stato eseguito il calcolo numerico e decidere della bontà di questo (a questo proposito si vede l'appendice C).

In ogni caso il relativo abbassamento che la formula 7) dà al limite delle alte energie, non può essere l'effetto apparente di un'eventuale imprecisione di calcolo.

Resta con ciò confermato che, agli effetti della determinazione della forma dello spettro di bremsstrahlung, lo scattering e lo straggling degli elettroni, hanno un ruolo importante e, magari, essenziale.

T A B E L L A

Confronto numerico tra l'intensità del bremsstrahlung $b(u)$ dedotta dalla teoria di Bethe - Heitler (thin target) e dalla formula 7) del testo (thick target), per

$$\underline{t = 0.13 \text{ l.r.} \quad \underline{\Gamma = 3.6 \text{ mrad}}$$

| $u = \frac{K}{E_0}$ | $b(u)$ thin target | $b(u)$ thick target |
|---------------------|-----------------------|------------------------|
| 0.200 | 1.137 | 1.140 |
| 0.300 | 1.049 | 1.051 |
| 0.400 | 0.983 | 0.984 |
| 0.500 | 0.935 | 0.935 |
| 0.600 | 0.907 | 0.910 |
| 0.700 | 0.987 | 0.897 |
| 0.750 | 0.900 | 0.895 |
| 0.800 | 0.905 | 0.895 |
| 0.825 | 0.909 | 0.895 |
| 0.850 | 0.913 | 0.897 |
| 0.900 | 0.923 | 0.899 |
| 0.925 | 0.922 | 0.887 |
| 0.950 | 0.913 | 0.863 |
| 0.960 | 0.903 | 0.845 |
| 0.975 | 0.865 | 0.787 |
| 0.985 | 0.802 | 0.717 |

APPENDICE A

Sulla sezione d'urto di creazione di coppie con equipartizione dell'energia.

Il processo di creazione di coppie è, nella impostazione teorica molto simile a quello dell'irraggiamento, e la teoria di entrambi viene svolta su linee parallele. Seguendo la teoria di Dirac dell'elettrone positivo, la creazione di coppie appare infatti il processo inverso del bremsstrahlung. Poichè la teoria quantistica dà una diretta connessione tra la probabilità del verificarsi d'un evento e dell'evento inverso, i calcoli sulla creazione di coppie possono essere basati su quelli relativi al bremsstrahlung. La teoria è stata svolta da Bethe ed Heitler⁽¹⁹⁾ nel loro studio originale sulle linee dotte.

Nei nostri calcoli si è fatta uso della sezione d'urto di Bethe ed Heitler con la correzione per l'approssimazione di Born dovuta a Bethe, Davies, Maximon⁽⁶⁾, per la creazione di coppie nel campo del nucleo. Essa assume, tenendo conto della equipartizione, la seguente espressione:

$$\sigma_u dv = \bar{\sigma} dv \left[\frac{1}{2} \phi_1(x) + \frac{1}{6} \phi_2(x) - \frac{2}{9} \ln z - \frac{8}{3} \psi(z) \right]$$

$$\text{con } \bar{\sigma} = \frac{z^2}{137} r_0^2, \quad v = \frac{E_+}{K} = \frac{E_-}{K}.$$

ϕ_1 , ϕ_2 , $\psi(z)$ sono le funzioni incontrate nella teoria del bremsstrahlung.

Per la creazione di coppie nel campo dell'elettrone si fa uso dei risultati di Wheeler Lamb⁽¹⁰⁾. Per l'equipartizione dell'energia si ha:

$$\sigma_2 dv = \frac{\bar{\sigma}}{2} dv \left\{ \frac{1}{2} \phi_1(\varepsilon) + \frac{1}{6} \phi_2(\varepsilon) - \frac{16}{9} \ln z \right\}$$

$\phi_1(\varepsilon)$ e $\phi_2(\varepsilon)$ sono le funzioni già incontrate nella

teoria del bremsstrahlung.

La sezione d'urto totale è la somma delle due

$$\tilde{\sigma}_{u+e} = \tilde{\sigma}_u + \tilde{\sigma}_e$$

Questa funzione è stata numericamente calcolata per l'aluminio ($Z = 13$). Il suo andamento è mostrato in fig. 16 .

APPENDICE B

Sulla correzione dello spettro di bremsstrahlung per il potere risolutivo finito dei contatori.

Nel nostro schema sperimentale, la rivelazione di un quanto γ , è una coincidenza simultanea prodotta dalla creazione di una coppia simmetrica di elettroni nel convertitore dello spettrometro. Nell'ipotesi di un potere risolutivo infinito dei contatori, il nostro sistema di rivelazione permetterebbe la rivelazione di un quanto con energia tra K , e $K+dK$, quando esso crei una coppia, della quale un membro abbia l'energia in $(E, E+dE)$ l'altro in $(E, E-dE)$ con $E = K/2$.

In realtà il potere risolutivo dei contatori è finito, avendo essi uno spread totale nell'energia degli elettroni pari a ΔE . Un ramo della coppia per essere rivelato può cioè avere una qualsiasi energia tra $E - \frac{\Delta E}{2}$ ed $E + \frac{\Delta E}{2}$. Corrispondentemente lo spread nella rivelazione di un quanto γ è $\Delta K = 2\Delta E$. Per un fissato valore del campo magnetico dello spettrometro relativo al valore K dell'energia dei fotoni, vengono cioè rivelati tutti i fotoni con energia compresa nell'intervallo $(K - \frac{\Delta K}{2}, K + \frac{\Delta K}{2})$. Di conseguenza la intensità del bremsstrahlung che si determina sperimentalmente, risulta diversa da quella teorica, la prima essendo un'integrazione di questa sull'intervallo $(u - \frac{\Delta u}{2}, u + \frac{\Delta u}{2})$. Lo scopo del presente calcolo è la determinazione della correzione da apportare alla $I(K/E_0)$ teorica, per poter eseguire il confronto con la esperienza.

La probabilità di rivelare un fotone la cui energia Z sia compresa nell'intervallo $K - \frac{\Delta K}{2}$ e $K + \frac{\Delta K}{2}$ è funzione di Z , e la indicheremo con $p(Z)dZ$. Dette E_1 ed E_2 le energie degli elettroni della coppia corrispondente

deve risultare

$$(1) \quad Z = E_1 + E_2$$

Il valore Z può essere assunto in tanti modi diversi quante sono le soluzioni (E_1, E_2) della (1) ove Z è fissato, cioè in infiniti modi diversi dal momento che E_1 ed E_2 possono variare con continuità, entrambi nell'intervallo $(E - \frac{\Delta E}{2}, E + \frac{\Delta E}{2})$ con $E = K/2$. A ciascuno di questi modi spetta una probabilità composta che è il prodotto $p(E_1)p(E_2)$, della probabilità $p(E_1)$ che un membro della coppia abbia l'energia tra E_1 ed E_1+dE_1 per la probabilità $p(E_2)$ che l'altro membro abbia l'energia in (E_2, E_2+dE_2) . Le probabilità di queste varie modalità sono incompatibili tra loro. Perciò la probabilità che si presenti una di esse, non importa quale, è la somma, e più precisamente lo integrale, delle probabilità rispettive.

La integrazione va estesa alla striscia del piano (E_1, E_2) compresa tra le due rette parallele $E_1+E_2=Z$ ed $E_1+E_2=Z+dZ$.

La probabilità $p(E_1)dE_1$ di rivelare un membro della coppia con energia tra (E_1, E_1+dE_1) è una funzione rettangolare di ampiezza dE_1 , quando E_1 sia compreso nell'intervallo $(E - \frac{\Delta E}{2}, E + \frac{\Delta E}{2})$. Così per E_2 . La difficoltà della doppia integrazione è soltanto formale. Il risultato è il seguente: la probabilità di rivelare un fotone la cui energia sia nell'intervallo $(Z, Z+dZ)$ quando

$$K - \frac{\Delta K}{2} \leq Z \leq K + \frac{\Delta K}{2}$$

è proporzionale a Z , è nulla per Z esterno al detto intervallo.

Si può perciò porre:

$$(2) \quad p(Z) = nZ + n$$

I coefficienti m ed n della (2) si possono determinare al seguente modo:

per $K - \frac{\Delta K}{2} \leq Z \leq K$ deve essere

a) $p(K - \frac{\Delta K}{2}) = 0$

b) $\int_{K - \frac{\Delta K}{2}}^K p(Z) dZ = \frac{1}{2}$

Infatti per definizione

$$\int_{K - \frac{\Delta K}{2}}^{K + \frac{\Delta K}{2}} p(Z) dZ = 1$$

e la funzione p(Z) è simmetrica rispetto all'asse Z = K.

per $K \leq Z \leq K + \frac{\Delta K}{2}$ deve essere

a) $p(K + \frac{\Delta K}{2}) = 0$

$$\int_K^{K + \frac{\Delta K}{2}} p(Z) dZ = \frac{1}{2}$$

Quando si impongono queste condizioni, separatamente per ciascuno dei due intervalli, si trova il seguente risultato:

$$(3) \quad p(Z) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\Delta K}\right)^2 Z - \left(\frac{2}{\Delta K}\right)^2 K + \frac{2}{\Delta K} & \text{per } K - \frac{\Delta K}{2} \leq Z \leq K \\ -\left(\frac{2}{\Delta K}\right)^2 Z + \left(\frac{2}{\Delta K}\right)^2 K + \frac{2}{\Delta K} & K \leq Z \leq K + \frac{\Delta K}{2} \end{cases}$$

La funzione p(Z) dicesi funzione di risoluzione dell'insieme di rivelazione. Essa è una funzione triangolare. Nel piano cartesiano (p(Z), Z) essa è un triangolo isoscele, poggiante sull'asse Z, simmetrico rispetto alla retta Z = K, di base ΔK altezza $\frac{2}{\Delta K}$, area unitaria.

Agli effetti della correzione è utile esprimere la funzione (3) per mezzo della variabile $u' = \frac{Z}{E_0}$ e del pa

parametro $u = \frac{k}{E_0}$. Essi sono rispettivamente l'energia frazionale effettiva e l'energia frazionale apparente (cioè misurata) dei γ rivelati. Corrispondentemente si ha la seguente espressione:

$$(4') \quad p(u') = \begin{cases} \left(\frac{2}{\Delta u}\right)^2 u' - \left(\frac{2}{\Delta u}\right)^2 u + \frac{2}{\Delta u} & \text{per } u - \frac{\Delta u}{2} \leq u' \leq u \\ -\left(\frac{2}{\Delta u}\right)^2 u' + \left(\frac{2}{\Delta u}\right)^2 u + \frac{2}{\Delta u} & \text{per } u \leq u' \leq u + \frac{\Delta u}{2} \end{cases}$$

La (4) ha le stesse proprietà della (3). È ancora un triangolo isoscele di altezza $\frac{2}{\Delta u}$, base Δu , area unitaria.

Nella (4) u' è la variabile, u è un parametro. Il significato della (4) è il seguente: $p(u')du'$ rappresenta la probabilità di rivelare un fotone di energia frazionale $u' = Z/E_0$ (con $(u - \frac{\Delta u}{2} \leq u' \leq u + \frac{\Delta u}{2})$), quando si contino, mediante lo spettrometro, fotoni di energia apparente interna all'intervallo $(u - \frac{\Delta u}{2}, u + \frac{\Delta u}{2})$. La (4) assegna cioè un "peso", ad ogni valore u' appartenente al detto intervallo. Perciò se $I_{teor}(u')$ rappresenta lo spettro teorico di bremsstrahlung, lo spettro sperimentale misurato è

$$I_{sper}(u) = \int_{u - \frac{\Delta u}{2}}^{u + \frac{\Delta u}{2}} I_{teor}(u') p(u') du'$$

In questo modo si porta la correzione allo spettro teorico, dovuta al potere risolutivo finito dei contatori, per poter eseguire il confronto teoria-esperienza. Nella fig. 17 è rappresentata la funzione di risoluzione triangolare per l'energia $K = 800$ MeV.

Notiamo esplicitamente che la correzione per lo spread dei contatori è sensibile solo per la coda dello spettro, del tutto inessenziale per la rimanente parte. Questo è facilmente comprensibile, dal momento che la funzione $I_{teor}(u')$ è, se si eccettua la zona $u' \sim 1$, praticamente costante.

APPENDICE C

Alcune questioni sul calcolo dell'integrale di targhetta
'spessa'.

Si deve eseguire l'integrale:

$$1) P(K) dK = A \int_{\sqrt{K+m_0c^2}}^{t_0} \int_{\frac{\Gamma}{2}}^{\frac{E_0}{2}} \frac{[L_n(E_0/E)]^{\frac{t}{\ln 2}-1}}{\Gamma(t/\ln 2)} \left(\frac{E}{2t}\right)^2 \frac{\theta}{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{2t}\right)^2 \frac{\theta^2}{t}} G(E, K) dE d\theta dt$$

I limiti d'integrazione vanno scelti a secondo della particolare situazione sperimentale che si vuole studiare (definita dalle caratteristiche del radiatore e dall'angolo di collimazione).

Osserviamo intanto che è possibile ridurre l'integrale triplo ad uno doppio. Basta osservare che:

$$\frac{d}{d\theta} \left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{2t}\right)^2 \frac{\theta^2}{t}} \right) = -\frac{\theta}{t} \left(\frac{E}{2t}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{2t}\right)^2 \frac{\theta^2}{t}}$$

Con una prima integrazione su θ avremo:

$$\int_0^{\frac{\Gamma}{2}} \left(\frac{E}{2t}\right)^2 \frac{\theta}{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{2t}\right)^2 \frac{\theta^2}{t}} = \left[-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{2t}\right)^2 \frac{\theta^2}{t}} \right]_0^{\frac{\Gamma}{2}} = 1 - e^{-C \frac{E^2}{t}}$$

ove C è una costante che dipende da T.

In questo modo si ha:

$$2) P(K) dK = A \int_{\sqrt{K+m_0c^2}}^{t_0} \int_{\frac{E_0}{2}}^{\frac{E_0}{2}} \frac{[L_n(E_0/E)]^{\frac{t}{\ln 2}-1}}{\Gamma(t/\ln 2)} \left(1 - e^{-C \frac{E^2}{t}}\right) G(E, K) dE dt$$

Osserviamo subito che per la funzione

$$u(E_0, E, \phi) = \frac{[\ln(E_0/E)]^{\frac{t}{\ln 2} - 1}}{\Gamma(t/\ln 2)}$$

risultando sempre $\frac{t}{\ln 2} - 1 < 0$, si ha

$$\lim_{E \rightarrow E_0} u(E_0, E, \phi) = \infty$$

La funzione integranda è però sommabile nel suo dominio di integrazione, come può facilmente dimostrarsi, ciò che non è il caso di fare in questa sede.

L'integrale 2) viene calcolato numericamente mediante la calcolatrice elettronica F.I.N.A.C. (+).

Per illustrare questa integrazione numerica tratteremo, a proposito dell'integrale 2), le seguenti questioni,

1) Una trasformazione dell'integrale

Per ragioni riguardanti la programmazione (utilità di lavorare in virgola fissa) è preferibile esprimere l'energia in GeV anzichè in MeV. Con questo la costante C che compare nell'esponenziale nell'integrale 2) va sostituita con la nuova costante $C' = C/(10^{-3})^2 = C10^6$ mentre l'integrale va moltiplicato per una inessenziale costante. La funzione Γ viene calcolata mediante lo sviluppo $1/\Gamma(x) = x + a x^2 + b x^3 + \dots$

Perciò

$$\frac{1}{\Gamma(t/\ln 2)} = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

con

$$b_1 = 1.442695 \dots$$

$$b_2 = 1.201398 \dots$$

$$b_3 = 1.969458 \dots$$

per $t < 1$ gli altri termini vanno rapidamente diminuendo.

(+) - F.I.N.A.C. Ferranti - Istituto Nazionale Applicazioni
ni Calcolo.

Quando si tenga presente che $E_0 = 1 \text{ GeV}$, l'integrale 2) diventa

$$\int_0^{t_0} \int_{k+m_0c^2}^{E_0} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3) (-\ln E)^{\frac{t}{nB} - 1} \left\{ 1 - e^{-e' \frac{E^2}{t}} \right\} \delta(E, k) dE dt$$

oppure

$$3) \quad \mathcal{P}(k) dk = \int_0^{t_0} \int_{k+m_0c^2}^{E_0} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3) e^{\left(\frac{t}{nB} - 1\right) \ln(-\ln E)} \left\{ 1 - e^{-e' \frac{E^2}{t}} \right\} \delta(E, k) dE dt$$

a meno di una costante moltiplicata.

E' nella forma 3) che si invia l'integrale alla calcolatrice e si imposta la programmazione.

2) Metodo di calcolo

Per l'integrazione numerica di 3) si è scelto il metodo di Cavalieri - Simpson.

Illustreremo questo metodo nel caso di una quadratura e ne diremo l'applicazione al nastro integrale.

Si supponga di dover eseguire l'integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx$$

ove $f(x)$ è una funzione non integrabile elementarmente.

Il problema della relativa integrazione numerica, è risolto rappresentando la funzione integranda mediante una formula di interpolazione, e integrando questa tra i limiti desiderati. In questo modo si deriva una formula di quadratura per l'integrazione approssimata di una funzione di cui sono noti i valori numerici. Tra i vari metodi che sono stati elaborati quello di Cavalieri-Simpson è probabilmente il più utile, certo tra i più semplici. Esso consiste in questo: si divide l'intervallo (a, b) in un numero pari di n intervalli uguali di ampiezza h .

Si ha quindi:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a+2h} f(x) dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x) dx + \dots + \int_{a+(n-2)h}^b f(x) dx$$

Si fa quindi uso della formula di Cavalieri - Simpson, secondo cui

$$\int_a^{a+2h} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)] \dots$$

$$\int_{a+(n-2)h}^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a+(n-2)h) + 4f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

E complessivamente

$$4) \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \dots + 2f(a+4h) + \dots + f(b)]$$

Il significato geometrico della formula di Cavalieri Simpson, è quello di sostituire, in ogni intervallo parziale d'integrazione, la curva della funzione integranda con una parabola ad assi verticali. Per una data funzione f , il grado di approssimazione raggiungibile con la 4), dipende dal numero n di intervalli in cui si è diviso (a, b) , e la precisione ottenibile aumenta con n .

Precisamente si può dimostrare che l'errore η che si commette nell'uso dell'approssimazione 4) è:

$$\eta = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{IV}\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{con } a < \frac{a+b}{2} < b$$

denotando la derivata quarta di f .

Il metodo di Cavalieri-Simpson, illustrato per una quadratura, può facilmente essere esteso ad una cubatura. Ci riferiremo al caso in cui il dominio di integrazione sia rettangolare. Il caso di un dominio qualsiasi può ovviamente ridursi a questo.

Si debba calcolare l'integrale

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy$$

esteso al dominio rettangolare del piano (x,y) definito dalle limitazioni:

$$a \leq x \leq b$$

$$c \leq y \leq d$$

Dividiamo l'intervallo (a,b) in un numero pari n di intervalli uguali di ampiezza h , l'intervallo (c,d) in un numero pari m di intervalli uguali di ampiezza k . Poniamo

$$a = x_0; c = y_0$$

con ciò risulta

$$x_i = x_0 + ih; y_j = y_0 + jk$$

(i=0,2,4...n)
(j=0,2,4...m)

Poniamo inoltre $f(x,y) = F(x,y)$

Si ha

$$6) \quad I = \int_{x_0}^{x_0+2h} \int_{y_0}^{y_0+2k} f(x,y) dx dy + \int_{x_0+2h}^{x_0+4h} \int_{y_0+2k}^{y_0+4k} f(x,y) dx dy + \dots + \int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} \int_{y_0+(m-2)k}^{y_0+(m-2)k} f(x,y) dx dy$$

Scriveremo:

$$6') \quad I = I_{0,0} + I_{2,2} + I_{4,4} + \dots + I_{(n-2),(m-2)}$$

intendendo

$$I_{0,0} = \int_{x_0}^{x_0+2h} \int_{y_0}^{y_0+2k} f(x,y) dx dy; \quad I_{2,2} = \int_{x_0+2h}^{x_0+4h} \int_{y_0+2k}^{y_0+4k} f(x,y) dx dy; \text{ ecc.}$$

Consideriamo uno degli integrali parziali, che compaiono in 6), ad esempio $I_{0,0}$. Si ha:

$$I_{0,0} = \int_{x_0}^{x_0+2h} \int_{y_0}^{y_0+2k} f(x,y) dx dy$$

Si applichi la regola di Cavalieri-Simpson, a questo integrale considerato come funzione di x . Risultata:

$$I_{0,0} = \frac{h}{3} \left\{ \int_{y_0}^{y_0+2k} f(x_0, y) dy + 4 \int_{y_0}^{y_0+2k} f(x_0+h, y) dy + \int_{y_0}^{y_0+2k} f(x_0+2h, y) dy \right\}$$

Si applica ancora la regola di Cavalieri-Simpson a ciascuno degli integrali che compaiono entro parentesi. Tenendo presente la posizione $f_{rs} = f(x_r, y_s)$ si ottiene:

$$I_{0,0} = \frac{hk}{9} [f_{00} + f_{02} + f_{22} + f_{20} + 4(f_{01} + f_{12} + f_{21} + f_{10}) + 16f_{11}]$$

Espressioni analoghe si ottengono per gli altri integrali. Sommando tutti gli integrali parziali si può dare alla (6) la seguente espressione

$$I = \frac{h}{3} [F_0 + 4F_1 + 2F_2 + \dots + 4F_{n-1} + F_n]$$

ovvero

$$F_0 = \frac{k}{3} [f_{00} + 4f_{01} + 2f_{02} + \dots + 4f_{0m-1} + f_{0m}]$$

$$F_1 = \frac{k}{3} [f_{10} + 4f_{11} + 2f_{12} + \dots + 4f_{1m-1} + f_{1m}]$$

e in generale

$$F_j = \frac{k}{3} [f_{j0} + 4f_{j1} + 2f_{j2} + \dots + 4f_{jm-1} + f_{jm}]$$

($j = 1, 2, 3, \dots, n$)

3) Programmazione

Il problema fondamentale, nella risoluzione del nostro integrale, è imposto dalla divergenza della funzione integranda per $E \rightarrow E_0$. Come s'è già detto però, l'integrale ha un valore finito. Nella esecuzione del calcolo numerico si procede al modo seguente.

Il dominio di integrazione D definito dalle

limitazioni

$$D \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq t_0 \\ K + m_0 c^2 \leq E \leq E_0 \end{array} \right. \quad E_0 = 1 \text{ GeV}$$

viene diviso in tre domini parziali:

$$a) \quad D_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq t_0 \\ K + m_0 c^2 \leq E \leq E_1 \end{array} \right. \quad E_1 = 0.950 \text{ GeV}$$

$$b) \quad D_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq t_0 \\ E_1 \leq E \leq E_2 \end{array} \right. \quad E_2 = 0.9998 \text{ GeV}$$

$$c) \quad D_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq t_0 \\ E_2 \leq E \leq E_0 \end{array} \right. \quad E_0 = 1 \text{ GeV}$$

L'integrazione estesa al dominio D è ovviamente la somma delle integrazioni parziali estese ai domini D₁, D₂, D₃. La scelta di questi domini non è arbitraria ma viene fatta in base alle seguenti considerazioni. Il comportamento della funzione integranda è critico, per un fissato valore di $t \neq 0$ per E vicino ad E₀, e per E = E₀ quando $t \rightarrow 0$. Per E variabile nell'intervallo (K + m₀c², E₁) con E₁ = 0.950 GeV la variazione della funzione integranda è molto lenta che non per E variabile nell'intervallo (E₁, E₀). Inoltre, nonostante la maggiore ampiezza del primo intervallo rispetto al secondo (almeno per la maggior parte dei valori di K) l'integrazione sul dominio D₁ dà un contributo minore di quello dell'integrazione sul dominio D₂ + D₃. Questi due fatti giustificano la nostra scelta per D₁. Consideriamo ora l'integrazione per $0 \leq t \leq t_0$ ed $E_1 \leq E \leq E_0$. Per $E \rightarrow E_0$ il metodo di Cavalieri-Simpson non è applicabile, in quanto i valori che la funzione integranda assume sono tali da superare l'intervallo di floating della calcolatrice.

Questo non avviene se ci limitiamo a far variare E nell'intervallo (E₁, E₂) con E₂ = 0.9998 GeV. Da ciò la suddivisione, di cui sopra, nei domini D₂ e D₃.

Consideriamo ora l'integrazione estesa al dominio D_3 .
Si tratta di risolvere l'integrale

$$P(K)dK = A \int_0^{t_0} \int_{E_2}^{E_0} \frac{[\ln(E_0/E)]^{\frac{t}{\ln 2} - 1}}{\Gamma(t/\ln 2)} \left\{ 1 - e^{-\frac{E^2}{t}c} \right\} \sigma(E, K) dE dt$$

Osserviamo intanto che la funzione $\sigma(E, K)$ per $E \simeq E_0$, così come la $e^{-\frac{E^2}{t}c}$, per t fissato ed $E \simeq E_0$, sono praticamente costanti. Si può scrivere perciò

$$P(K)dK = A \sigma(E_0, K) \int_0^{t_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0^2}{t}c} \right) dt \int_{E_2}^{E_0} \frac{[\ln(E_0/E)]^{\frac{t}{\ln 2} - 1}}{\Gamma(t/\ln 2)} dE$$

Si può mostrare che per E_2 vicino ad E_0 (e nel nostro caso lo è entro il 2‰) risulta

$$(7) \int_{E_2}^{E_0} \frac{[\ln(E_0/E)]^{\frac{t}{\ln 2} - 1}}{\Gamma(t/\ln 2)} dE = \frac{[\ln(E_0/E_2)]^{\frac{t}{\ln 2}}}{\Gamma(1 + \frac{t}{\ln 2})}$$

Con ciò si ha semplicemente

$$P(K)dK = A \sigma(E_0, K) \int_0^{t_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0^2}{t}c} \right) \frac{[\ln(E_0/E_2)]^{\frac{t}{\ln 2}}}{\Gamma(1 + \frac{t}{\ln 2})} dt$$

Ci si riporta così ad un integrale ad una sola dimensione; il calcolo può essere eseguito in modo relativamente semplice applicando il metodo di Cavalieri-Simpson. Un modo di procedere per giudicare la bontà della approssimazione 7) è quello di scegliere un altro valore di E_2 , sempre molto vicino ad E_0 ; operare ancora la suddivisione del dominio totale in tre domini parziali, e confrontare i risultati che si ottengono.

Per ciò che riguarda la scelta degli intervalli in

cui si devono dividere D_1 o D_2 , questa è schematicamente rappresentata nella tabella A.

Nella fig. 18 si dà uno schema a blocchi del programma di esecuzione dell'integrale.

Abbiamo precedentemente riportato i risultati dell'integrazione numerica.

Questa prima integrazione dovrebbe essere ripetuta, raddoppiando il numero degli intervalli sia per la variabile t , che per la E , per ciascuno dei tre domini di integrazione. Se il secondo risultato concorderà col primo entro la precisione desiderata, (ad esempio l'1%), si può essere certi della validità del calcolo numerico. Questo modo di procedere è usuale, e sarebbe in special modo indicato nel nostro caso, in cui si tratta l'integrazione di una funzione a comportamento particolarmente critico.

Osserviamo infine che la eventualità dell'analoghe integrazioni, relative ad altre situazioni sperimentali (essenzialmente $t = 0.13$ l.r. e $\Gamma = 0.75$ mrad), va decisa, o meno, in base a considerazioni di natura economica.

Si può osservare a questo proposito che la programmazione resta immutata; sono così eliminate le ore di prova e l'uso della macchina calcolatrice è limitato alla sola esecuzione del calcolo, per un tempo che non dovrebbe superare le 6-8 ore.

Ringraziamo il Dr. Pesamosca per la valida, essenziale collaborazione nell'esecuzione del calcolo, ed il Dr. Turrin per i consigli e suggerimenti nell'impostazione del medesimo.

TABELLA A

Programmazione dell'integrale.

Questa programmazione si riferisce alla seguente situazione sperimentale $t_0 = 0.13$ l.r. $\sqrt{s} = 3.6$ mrad. Si divide l'intervallo di integrazione rispetto ad E, in due intervalli I). $(K + m_0 c^2, 0.950)$ GeV II). $(0.950, 0.9998)$ GeV

Si indica con:

- h_1 il passo di integrazione rispetto ad E. Esso è variabile a seconda del valore del parametro K.
- h_2 il passo di integrazione rispetto a t. Esso è costante per ogni valore di K.
- I il numero di intervalli in cui è diviso l'intervallo di integrazione rispetto ad E (E' variabile)
- J idem per l'integrazione rispetto a t (J = 28)
- n, il numero degli integrali da calcolarsi per n fissati valori del parametro K. (n = 17)

Si deve calcolare: $J = \frac{h_2}{3} [4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + \dots + F_I]$

con (+) $F_1 = \frac{h_1}{3} [4\psi(K+h_2, h_1) + 2\psi(K+h_2, 2h_1) + \dots + \psi(K+h_2, Jh_1)]$

$$F_2 = \frac{h_1}{3} [4\psi(K+2h_2, h_1) + 2\psi(K+2h_2, 2h_1) + \dots + \psi(K+2h_2, Jh_1)]$$

$$F_I = \frac{h_1}{3} [4\psi(K+Ih_2, h_1) + 2\psi(K+Ih_2, 2h_1) + \dots + \psi(K+Ih_2, Jh_1)]$$

(+) Non compaiono i primi termini della formula di Cavalieri-Simpson, dato che $\psi(E, t)$ è nulla sia per $E = K$, che per $t=0$ ($E \neq E_0$)

I, viene scelto, a seconda del valore di K per cui si esegue l'integrazione, al modo seguente:

per $K+m_0 c^2 \leq E \leq 0.950$

per $0.950 \leq E \leq 0.9998$

| K | I |
|-----------|----|
| 0.200 GeV | 26 |
| 0.300 | 26 |
| 0.400 | 22 |
| 0.500 | 22 |
| 0.600 | 18 |
| 0.700 | 14 |
| 0.750 | 12 |
| 0.800 | 8 |
| 0.825 | 8 |
| 0.850 | 8 |
| 0.875 | 6 |
| 0.900 | 6 |
| 0.925 | 6 |

| K | I |
|-----------|----|
| 0.200 GeV | 18 |
| 0.300 | 18 |
| 0.400 | 18 |
| 0.500 | 18 |
| 0.600 | 18 |
| 0.700 | 18 |
| 0.750 | 18 |
| 0.800 | 18 |
| 0.825 | 18 |
| 0.850 | 18 |
| 0.875 | 18 |
| 0.900 | 18 |
| 0.925 | 18 |
| 0.950 | 18 |
| 0.960 | 14 |
| 0.975 | 10 |
| 0.985 | 6 |

Bibliografia

- (1) - G. Bologna, G. Diambrini, F. Figuera ed altri: Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N. - nota interna n° 17.
- (2) - Pellegrini, Serra, Rispoli: Nuovo Cimento IX - 171 - (1958).
- (3) - R.R. Wilson - Nuclear Instruments 1 - 101 (1957)
- (4) - Bethe e Maximon - Phys. Rev. 93, 708 (1954)
- (5) - Bethe e Heitler - The quantum theory of radiation - oppure Proc. Roy. Soc. - A 146 - 83 (1934)
- (6) - Bethe, Davieso, Maximon - Phys. Rev. 97, 788 (1954)
- (7) - Bethe - Cambridge - Phil. Soc. 30, 524 (1934)
- (8) - Miller - Phys. Rev. 99, 1935 (1955)
- (8 bis) - Fuller e Koch - Phys. Rev. 109 - 630 (1958)
- (9) - Fano - Rev. of Modern Phys. 1959.
- (10) - Wheeler e Lamb - Phys. Rev. 55 - 858 (1939)
Phys. Rev. 101 - 1836 (1955)
- (11) - L.I. Schiff - Phys. Rev. 70, 87 (1946)
- (12) - Diambrini, Figuera, Rispoli, Serra - Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N. - Nota interna n° 48.
- (13) - Hisdal - Phys. Rev. 105, 1821 (1957)
- (14) - Motz William Wyckoff - Phys. Rev. 98, 968 (1953)
- (15) - R. Wilson - Proc. Phys. Soc. 66A, 638 (1953)
- (16) - Eyles - Phys. Rev. 81, 981 (1951)
- (17) - Penfeld - Review of Modern Physics 1959.
- (18) - Rossi e Groisen - Rev. Mod. Phys. 13, 240 (1941)
- (19) - Bethe ed Heitler - Proc. Roy. Soc. A146, 83 (1934)
- (20) - Eyles - Phys. Rev. 76, 264 (1949).

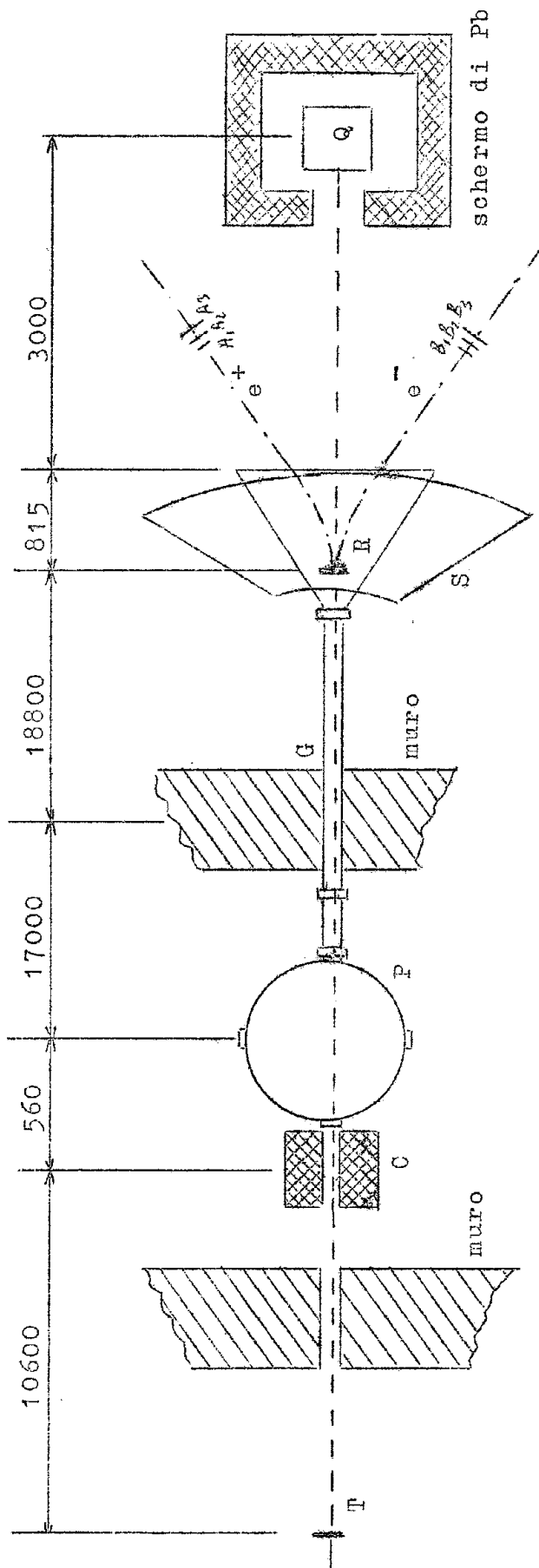


FIG. 1 - SCHEMA DELLA DISPOSIZIONE SPERIMENTALE PER LE MISURE SULLO SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG.

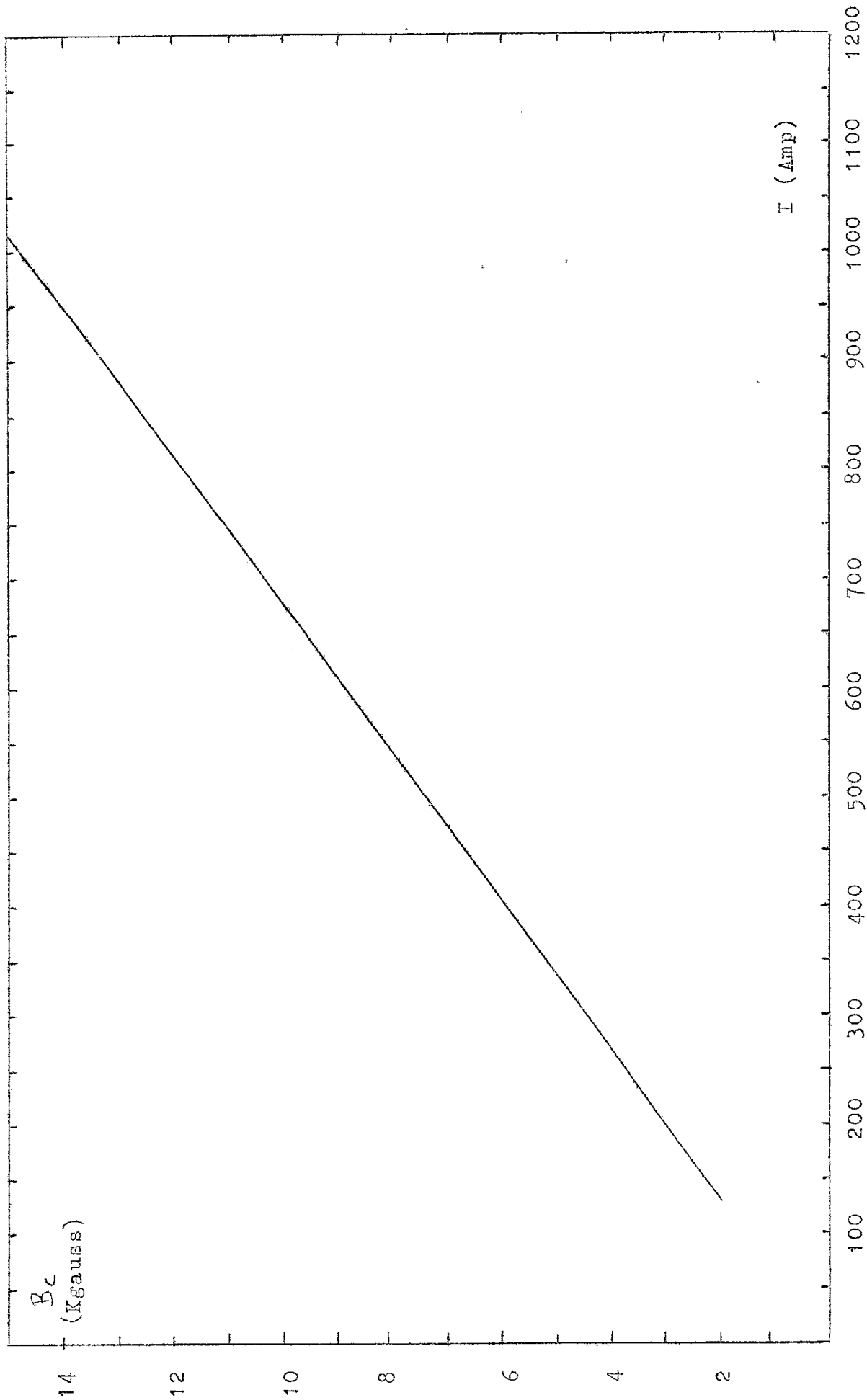


FIG. 2 - INDUZIONE MAGNETICA B_c (AL CONVERTITORE DELLO SPETTROMETRO) IN FUNZIONE DELLA CORRENTE D'ALIMENTAZIONE DEL MAGNETE.

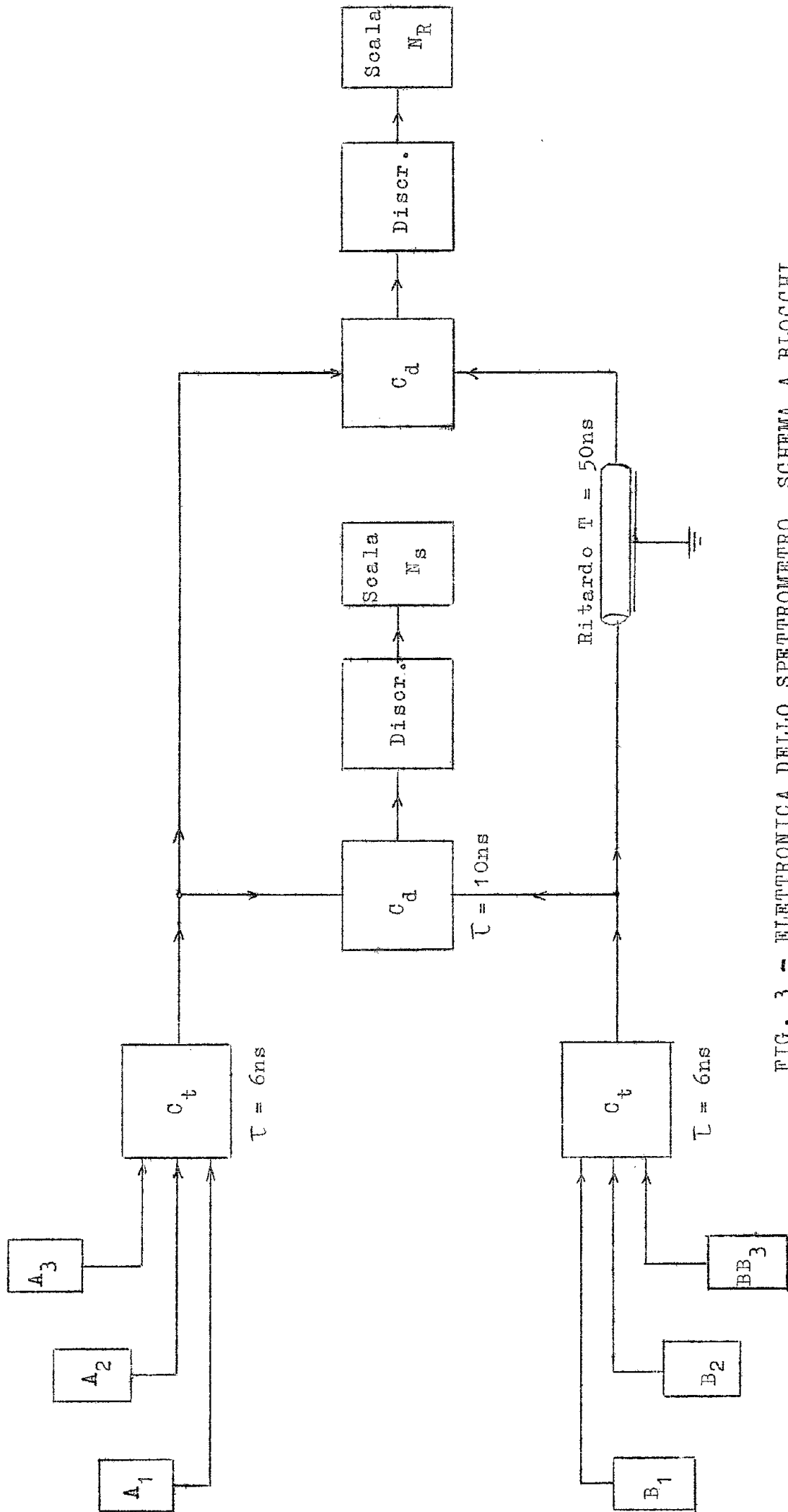


FIG. 3 - ELETTRONICA DELLO SPETTROMETRO. SCHEMA A BLOCCHI.

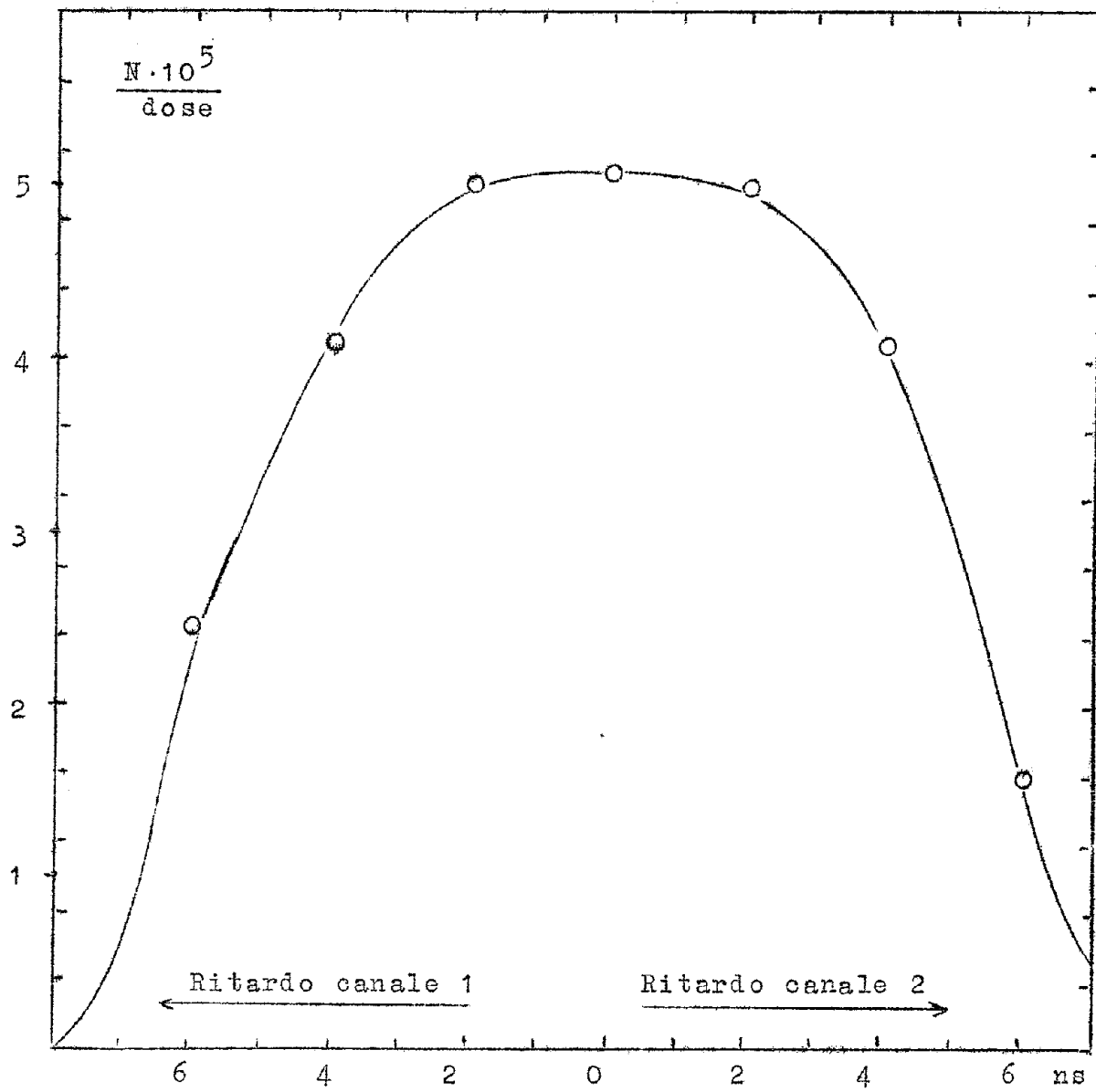


FIG. 4 - CARATTERISTICA DEL CANALE 1-2 DELLA COINCIDENZA TRIPLA.

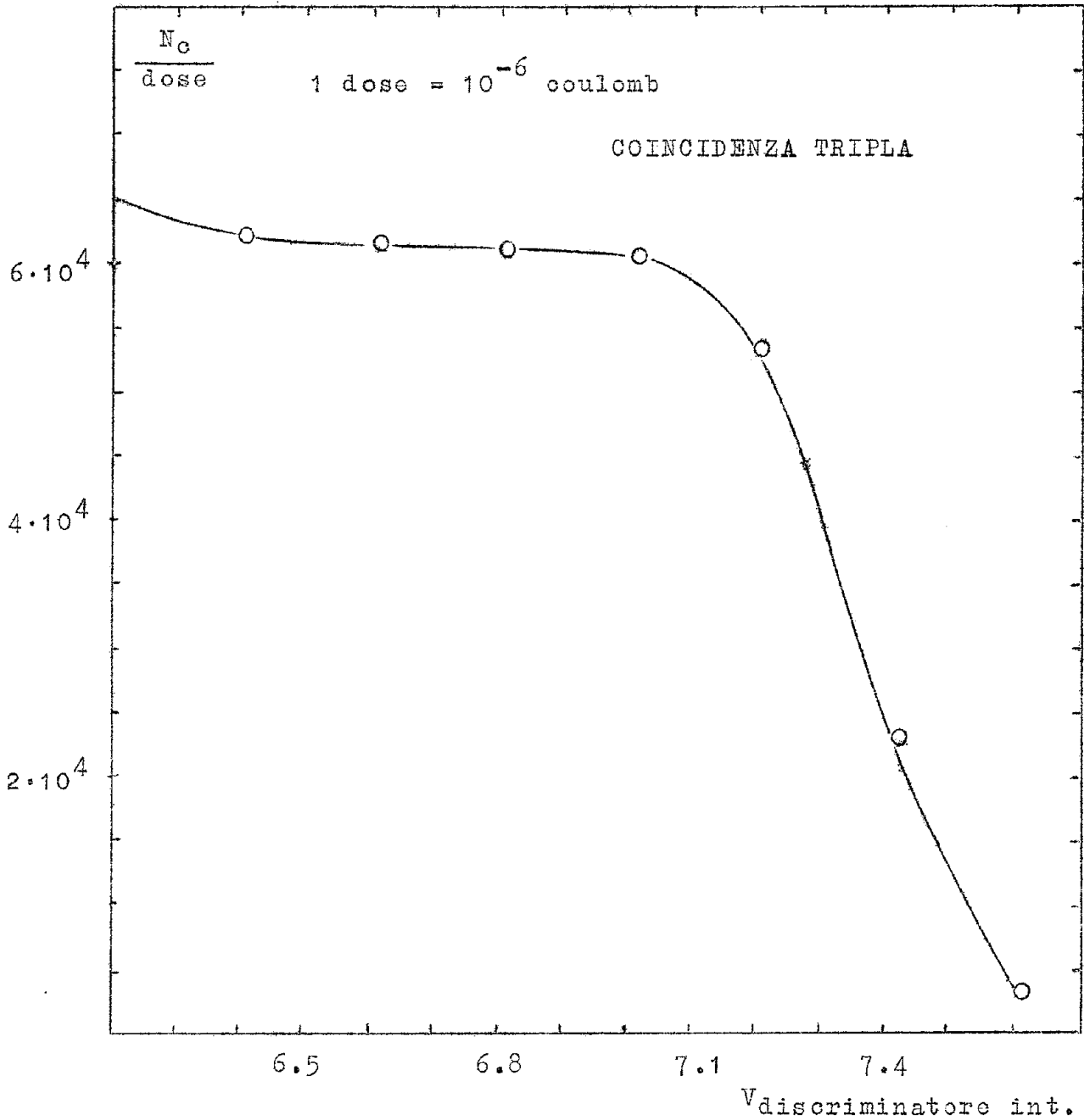


FIG. 5 - ANDAMENTO DEL CONTEGGIO IN FUNZIONE DEL
 TAGLIO DEL DISCRIMINATORE

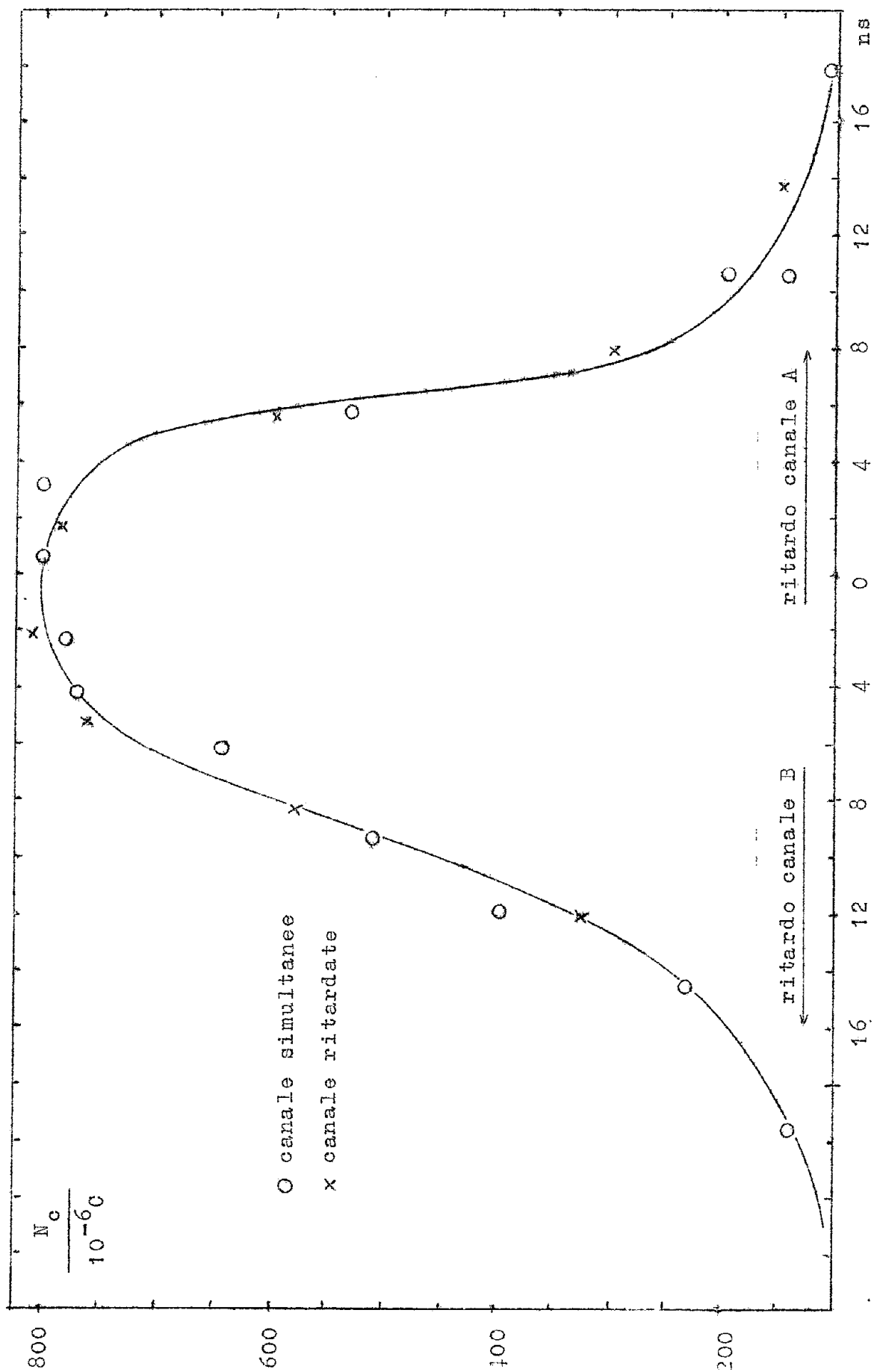


FIG. 6a - CARATTERISTICA DELLA COINCIDENZA DOPPIA. Numero di eventi in funzione del ritardo.

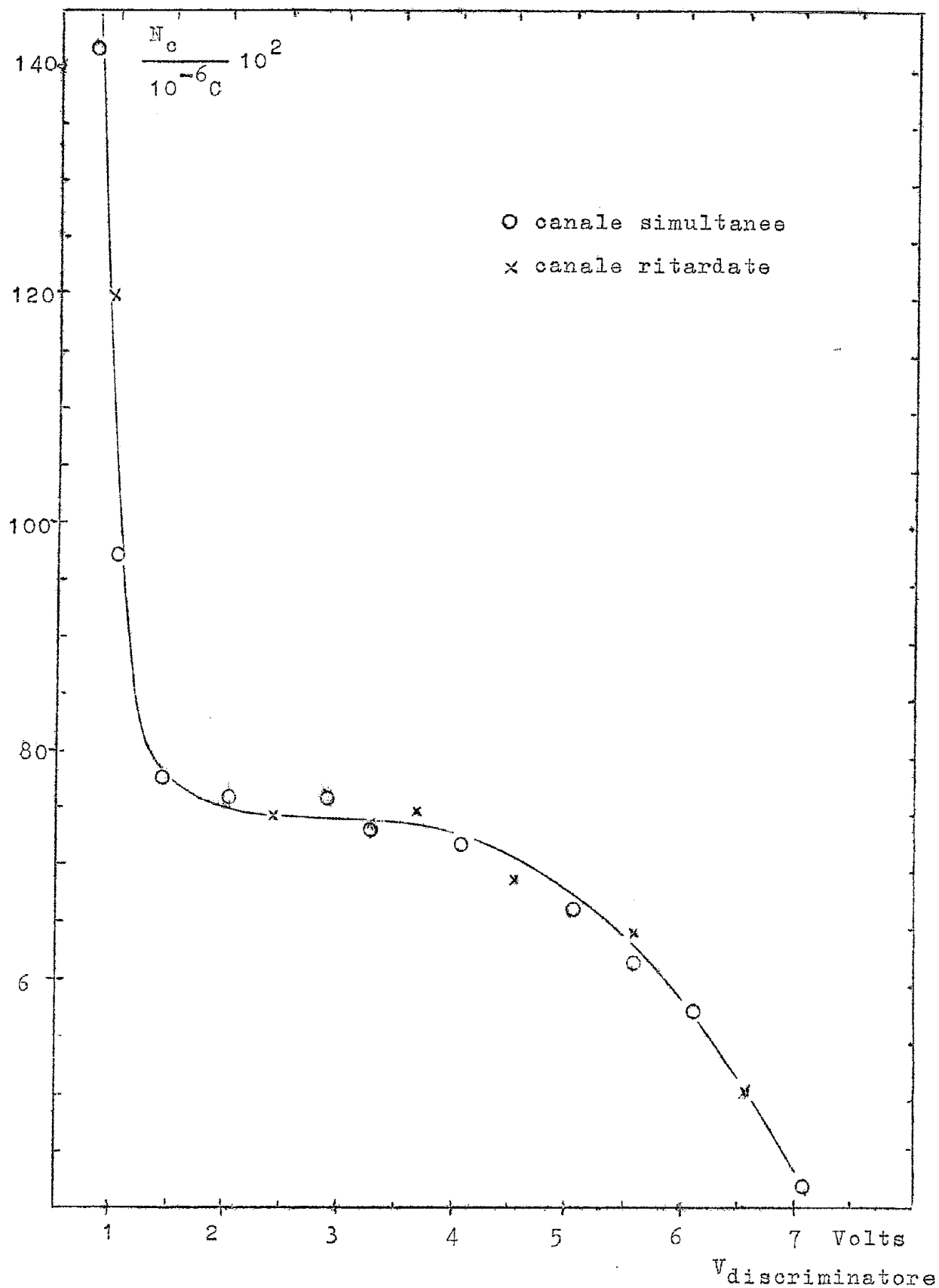


FIG. 6b - NUMERO DI EVENTI DI COINCIDENZA DOPPIA
IN FUNZIONE DEL TAGLIO DEL DISCRIMINATORE.

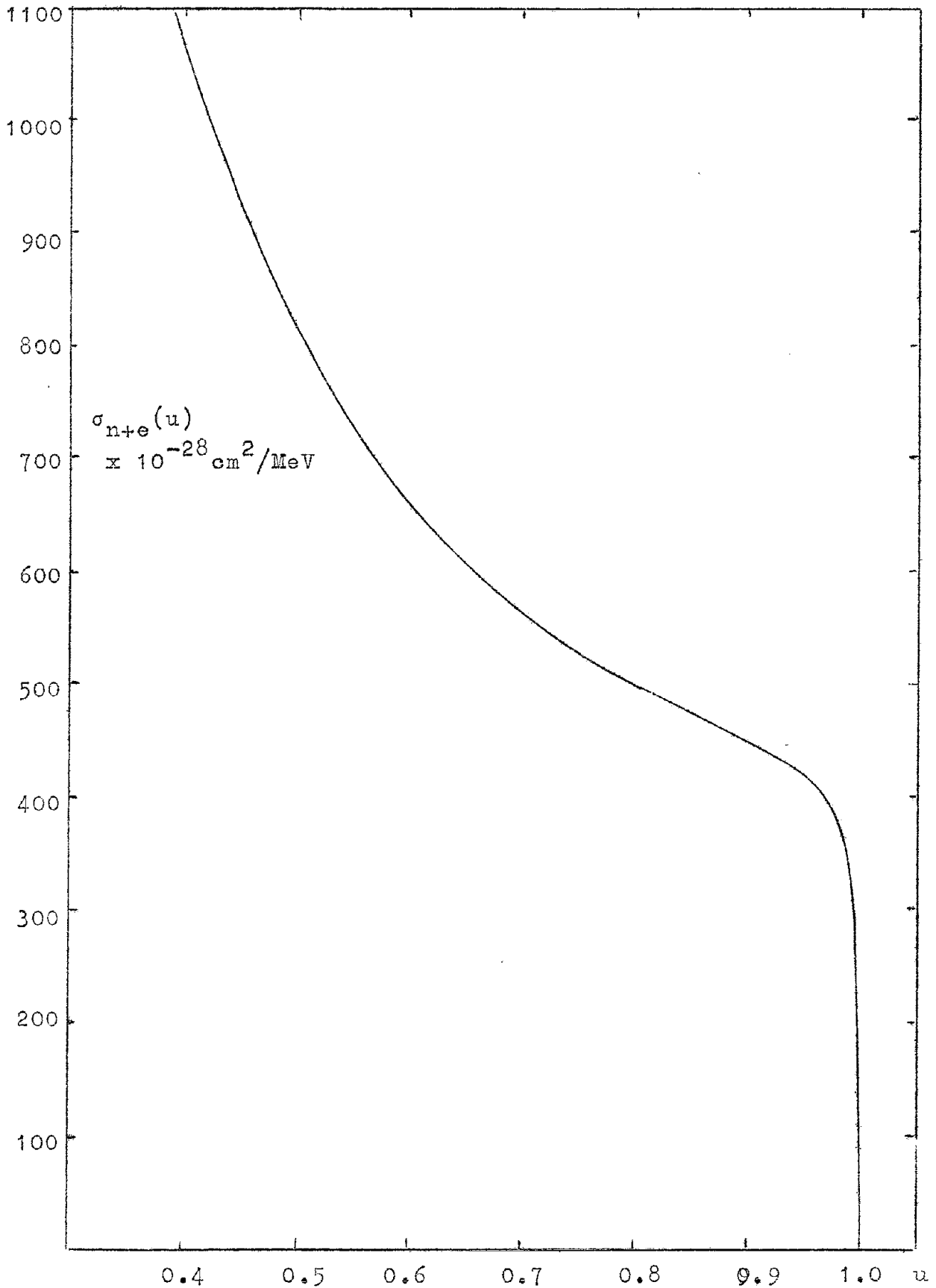


FIG. 7 - SEZIONE D'URTO DI BREMSSTRAHLUNG.
 Differenziale nell'energia (frazionale):
 $u = \frac{K}{E_0}$ dei γ . Secondo Bethe-Heitler e
 Wheeler-Lamb. Calcolata per il tantalio
 ($Z=13$) e per l'energia $E_0=1000$ MeV degli
 elettroni.

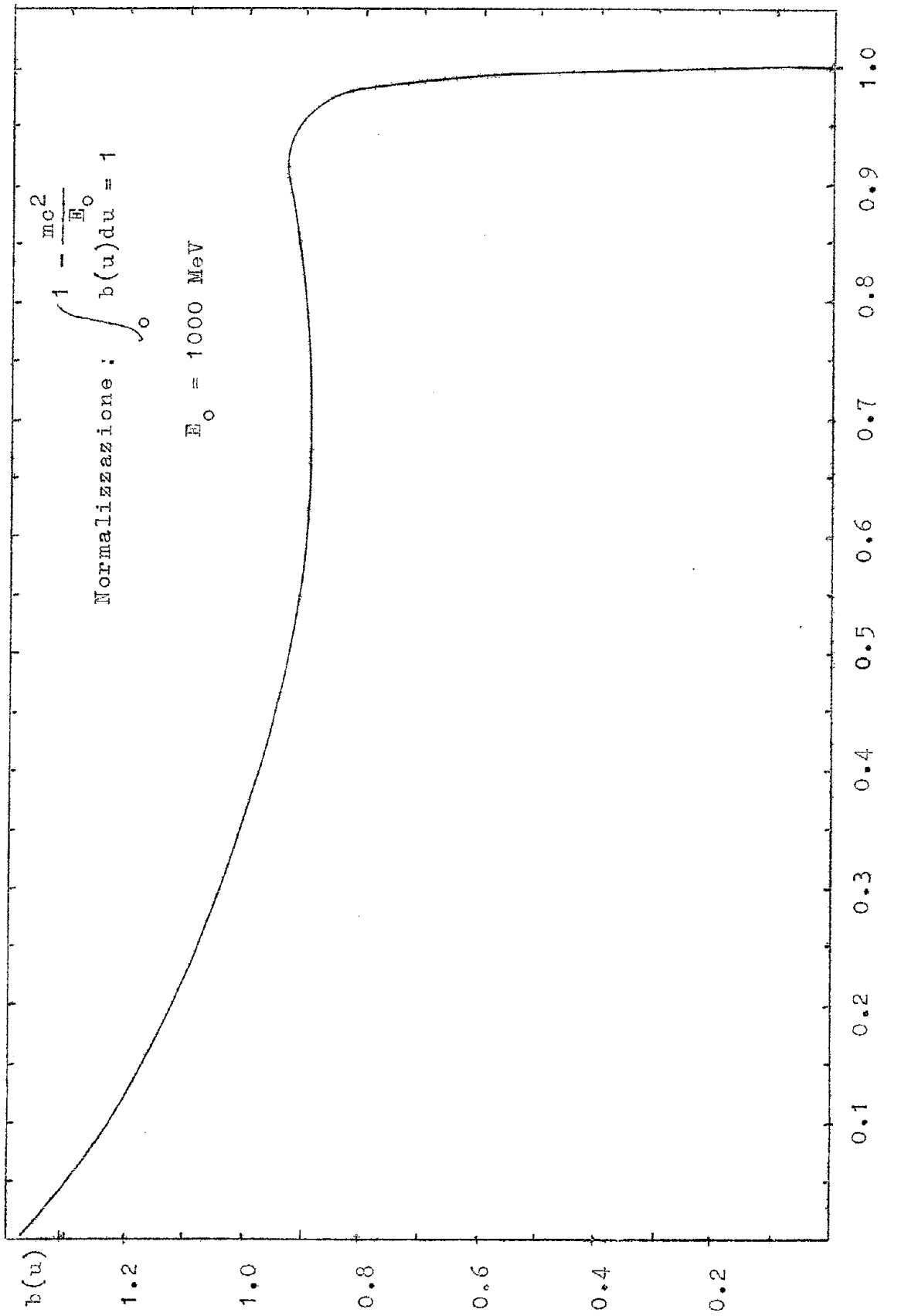


FIG. 8 - SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG. Secondo la teoria di Bethe e di Wheeler-Lamb. Calcolata per il tantalio ($Z = 73$).

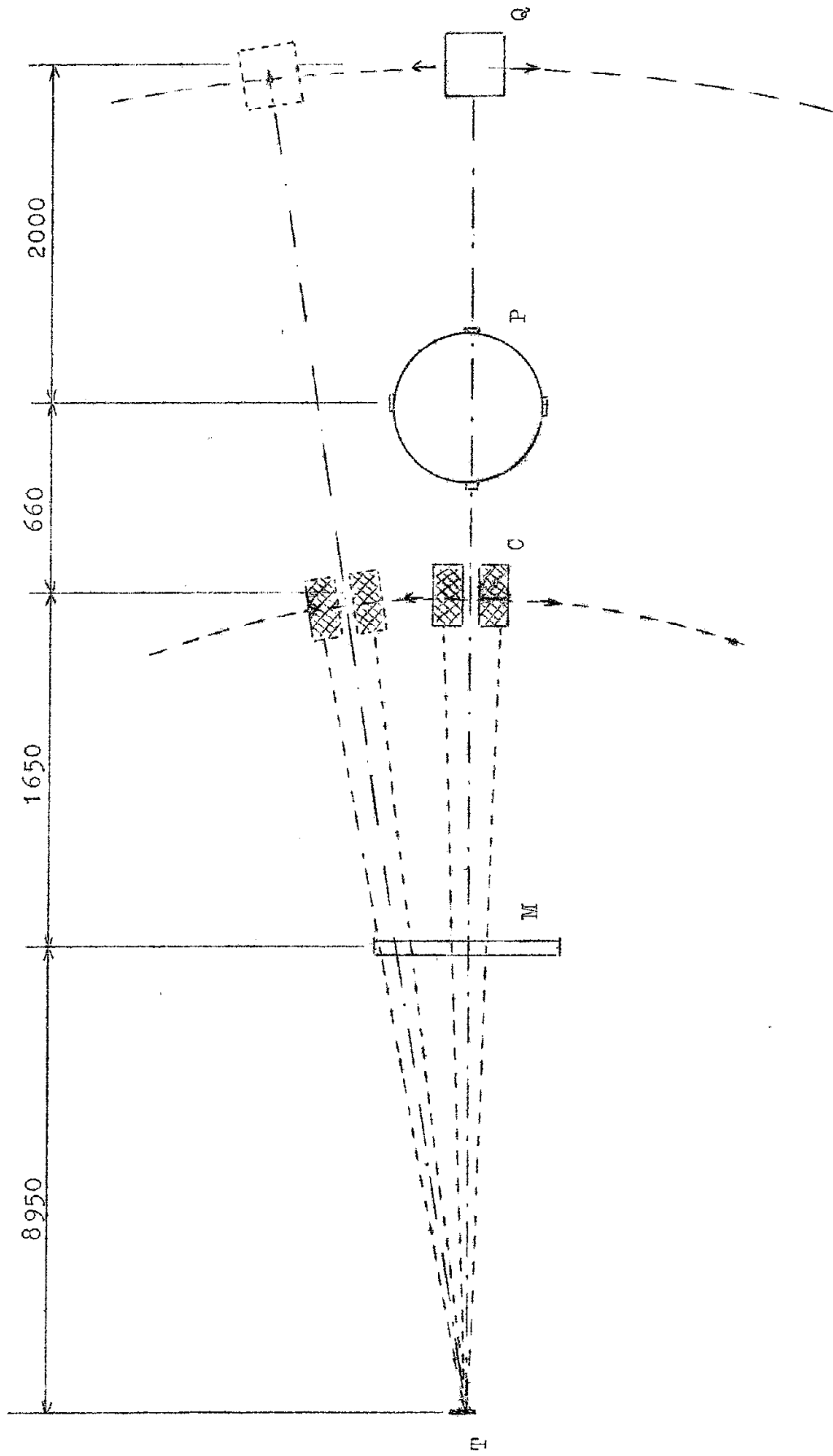
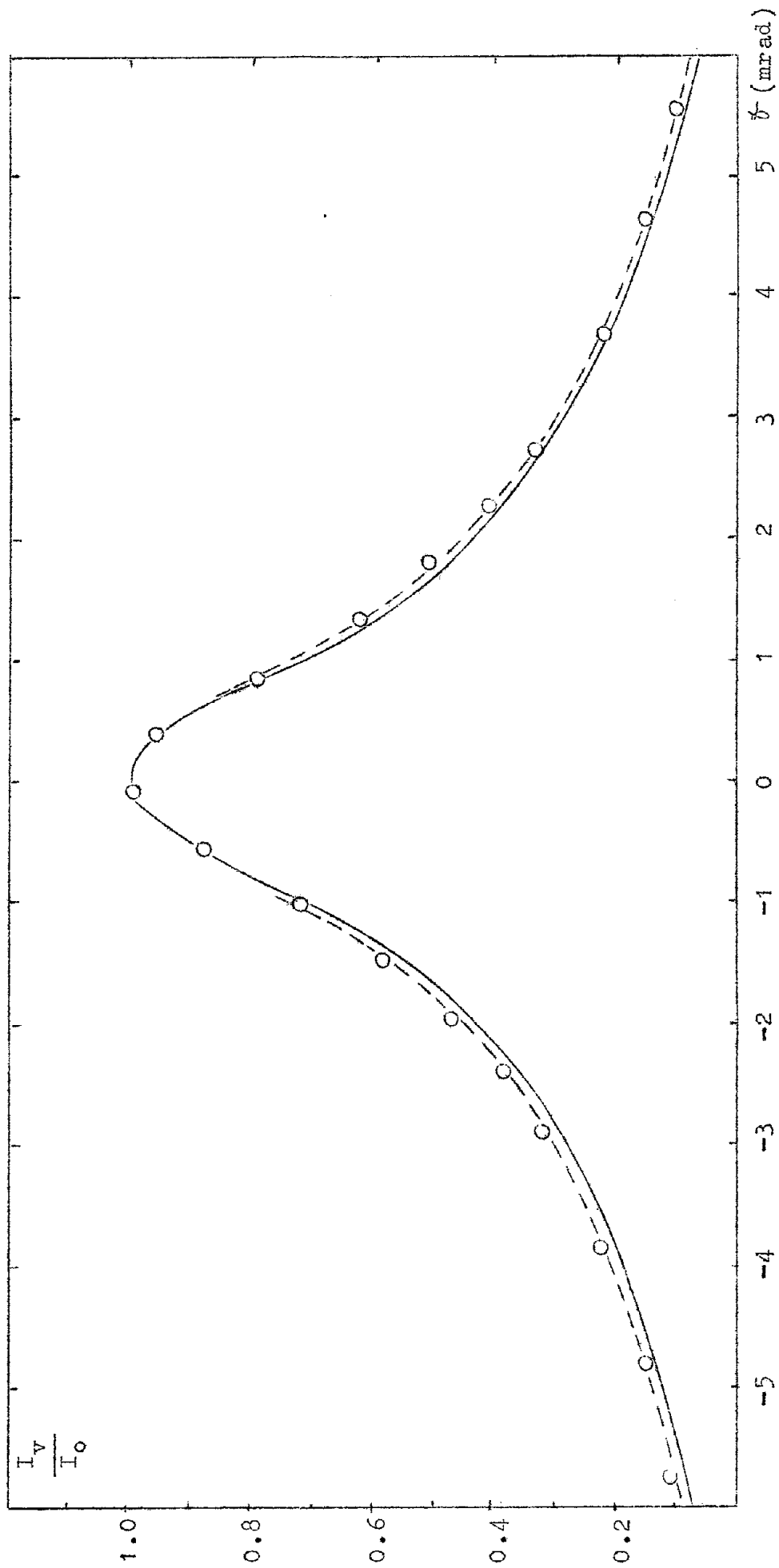
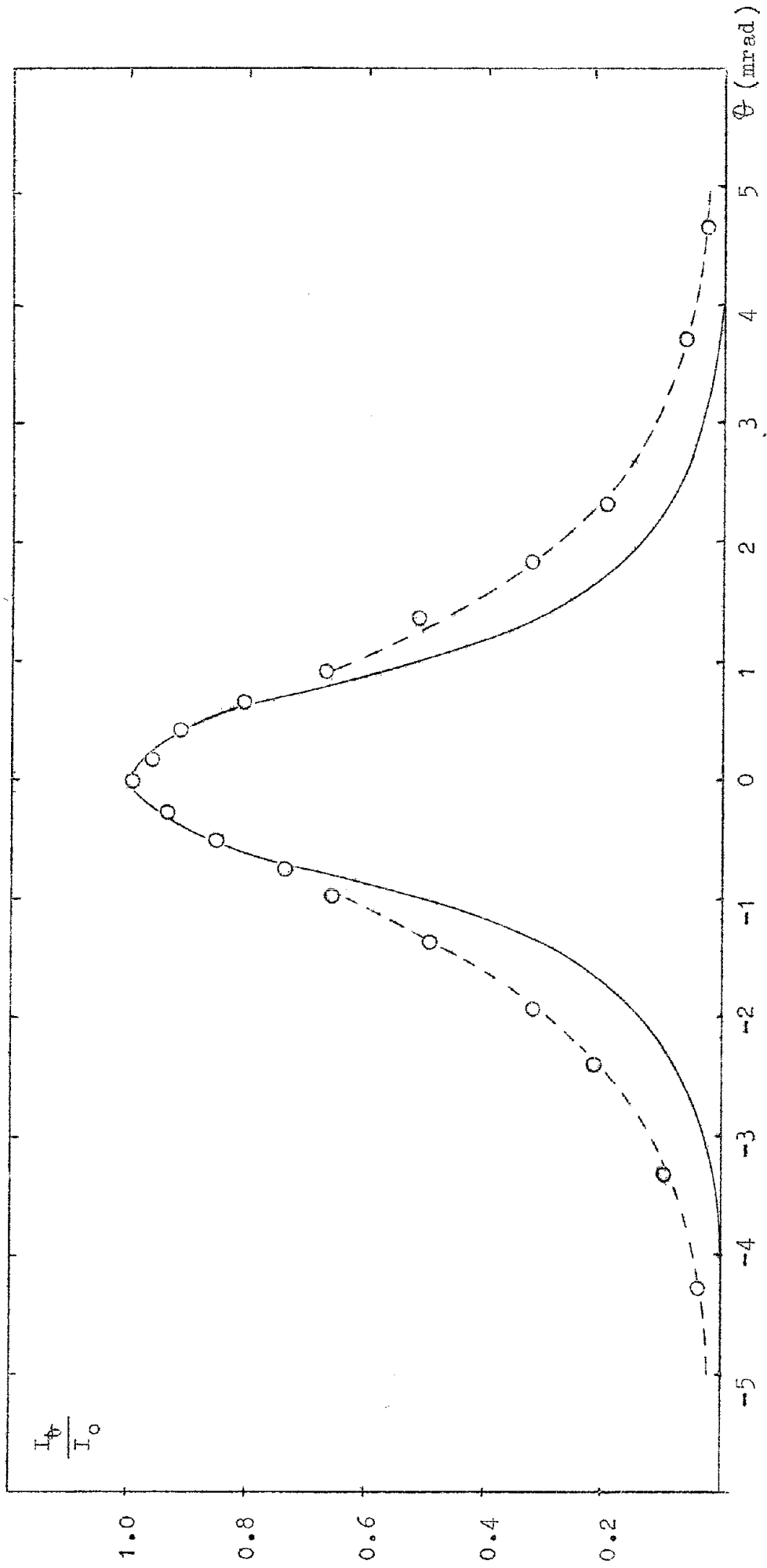


FIG. 9 - DISPOSITIVO SPERIMENTALE PER LA MISURA DELLA
 DISTRIBUZIONE ANGOLARE DELL'INTENSITA'.



——— Formula di Schiff per $t = 0.13$ l.r.
 - - - Formula di Schiff per $t = 0.156$ l.r.
 O Punti sperimentali per il radiatore di $t = 0.13$ l.r.

FIG. 10 - DISTRIBUZIONE ANGOLARE DELL'INTENSITA' DEL FASCIO DI BREMSSTRAHLUNG.



——— Formula di Schiff per $t = 0.013$ l.r.
 - - - - Formula di Schiff per $t = 0.039$ l.r.
 O Punti sperimentali per il radiatore di $t = 0.013$ l.r.

FIG. 11 - DISTRIBUZIONE ANGOLARE DELL'INTENSITA' DEL FASCIO DI BREMSSTRAHLUNG.

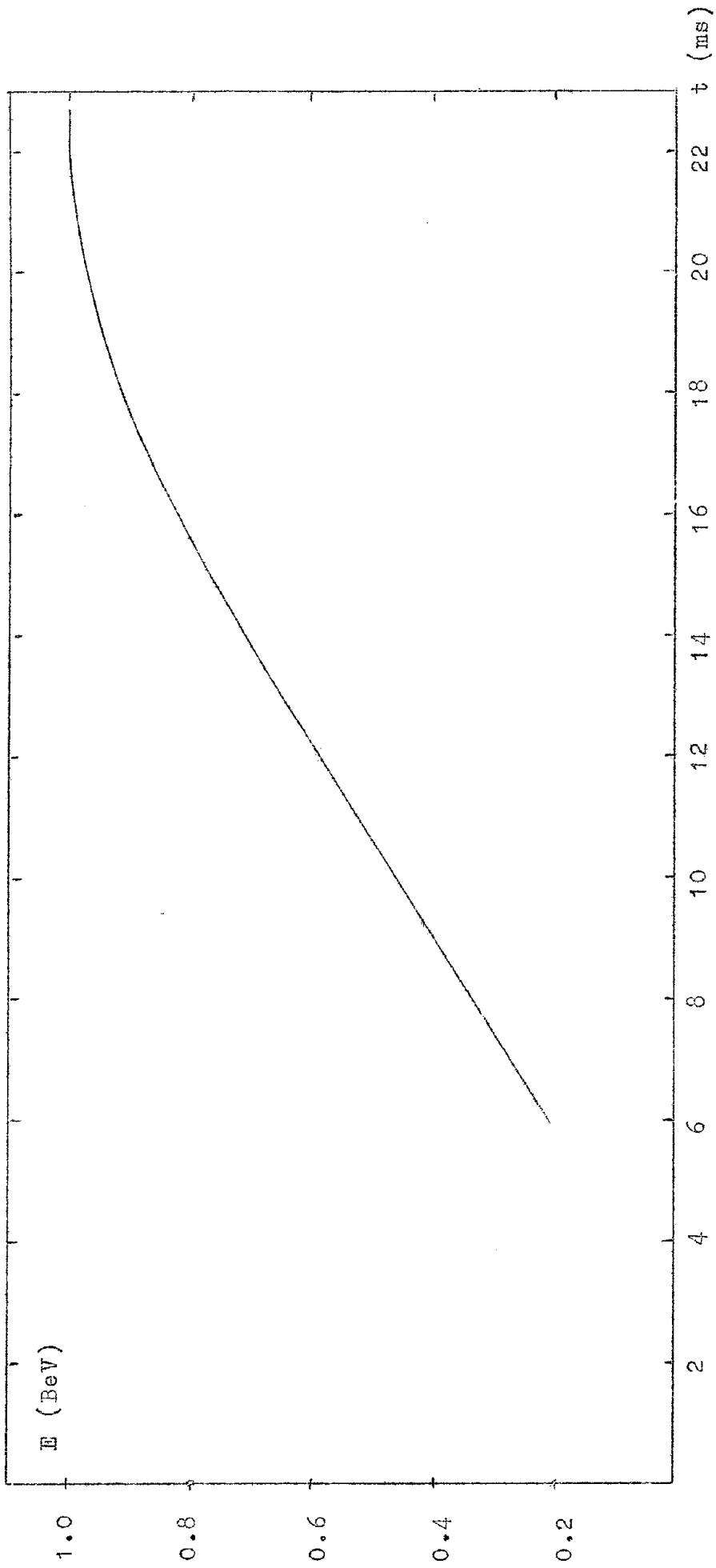


FIG. 12 - ENERGIA DEGLI ELETTRONI ACCELERATI IN FUNZIONE DEL TEMPO (a partire dalla iniezione).

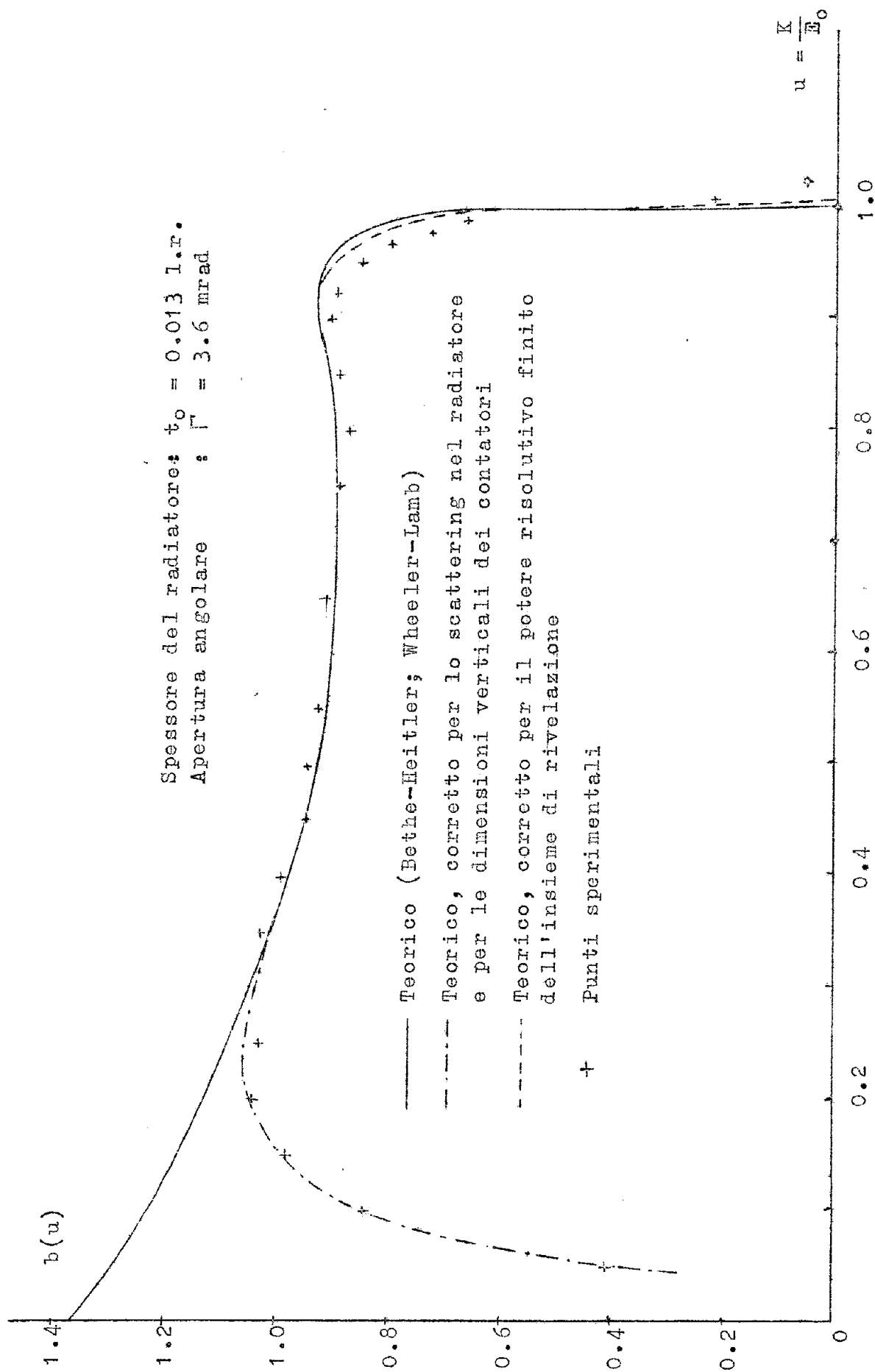


FIG. 13a - SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG.

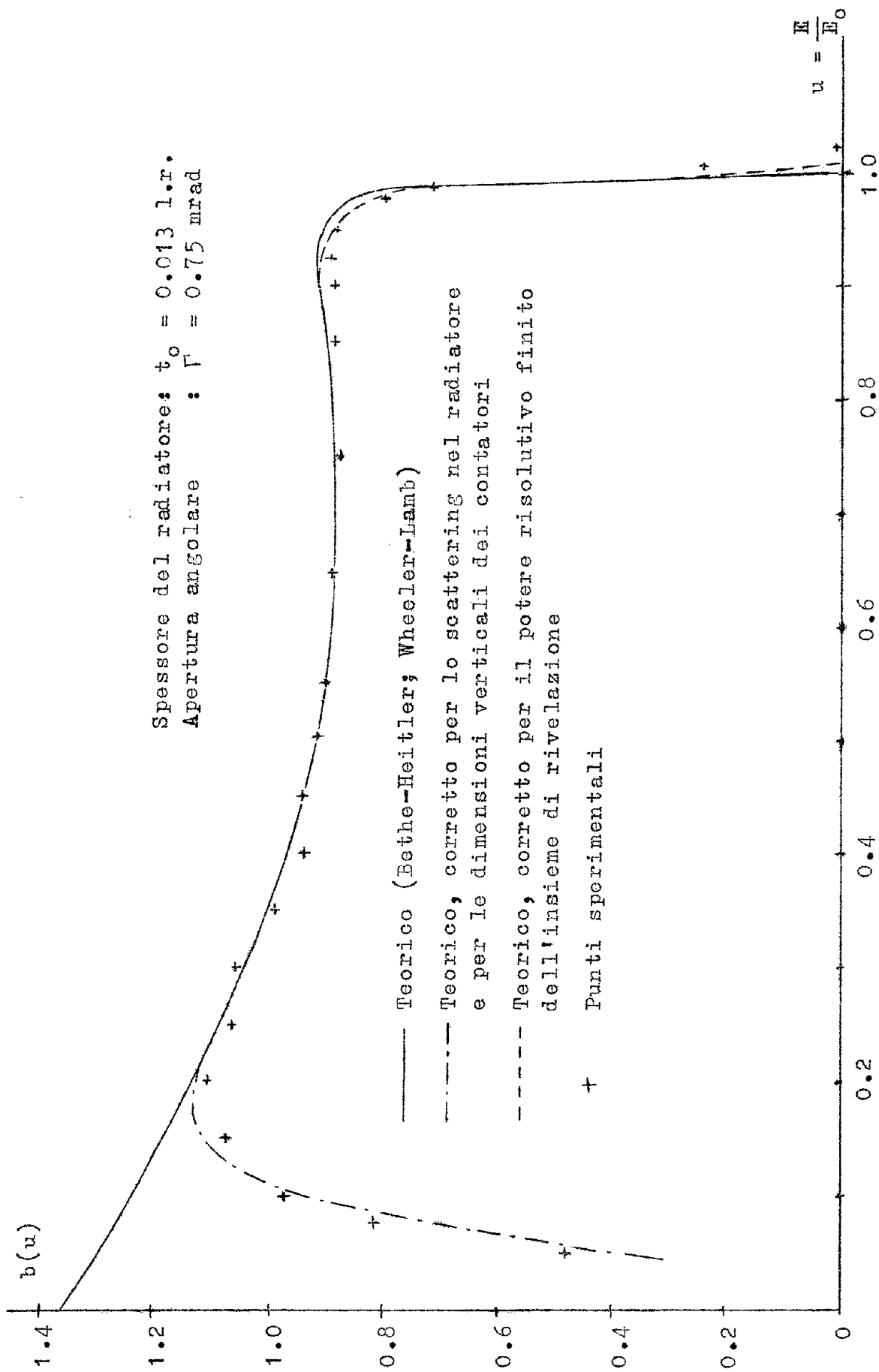


FIG. 13b - SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG.

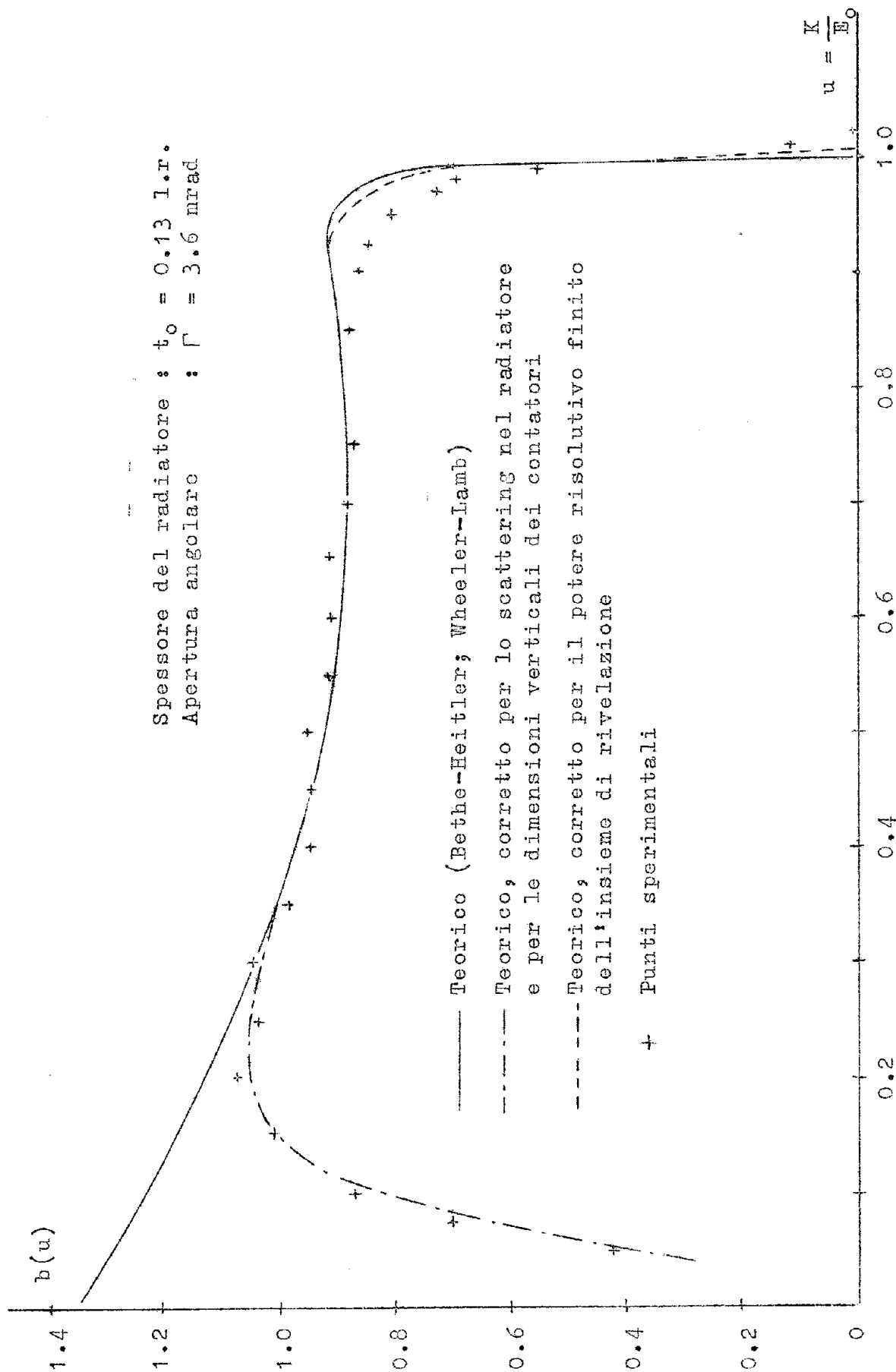


FIG. 13c - SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG.

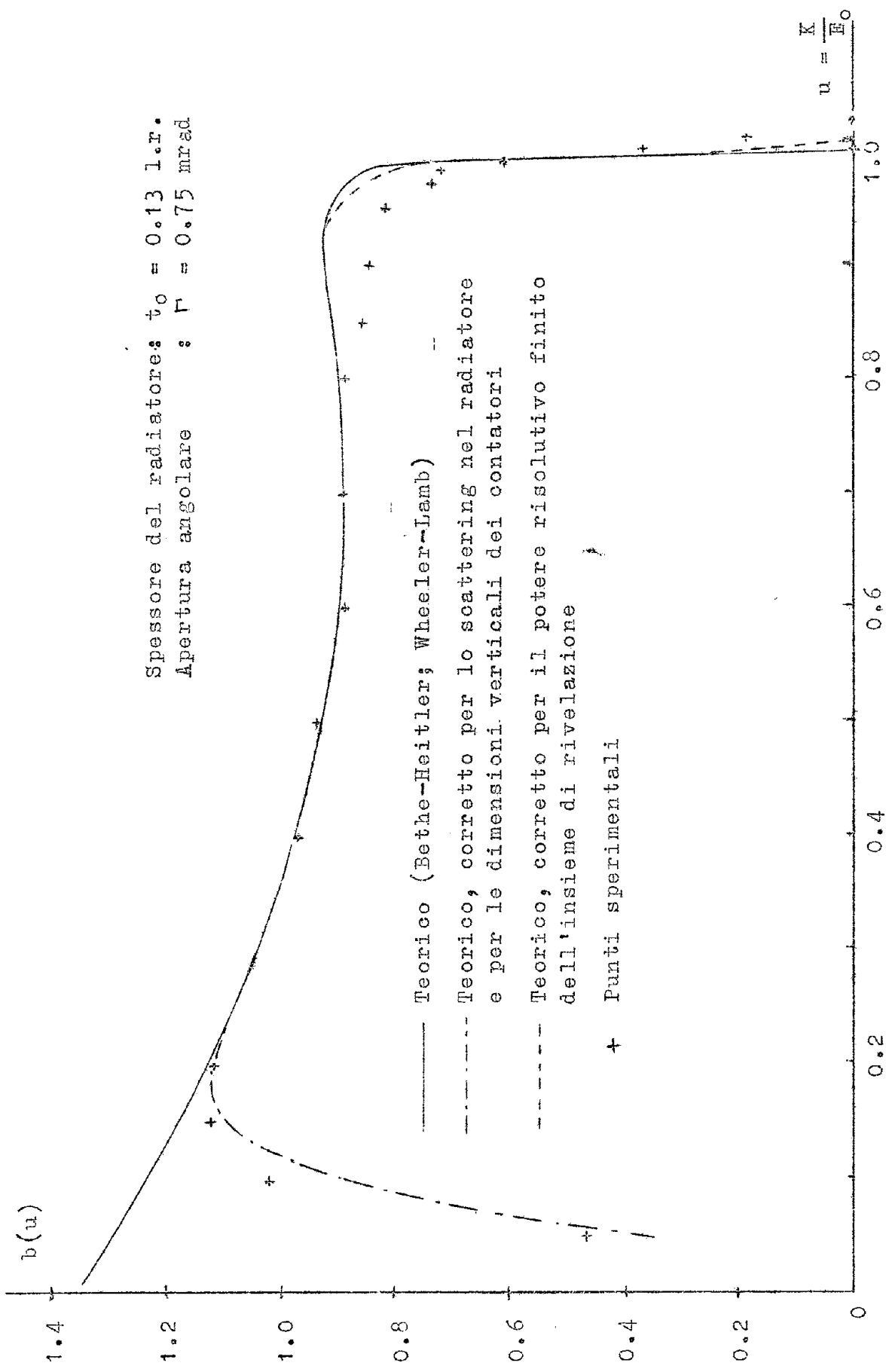


FIG. 13d - SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG.

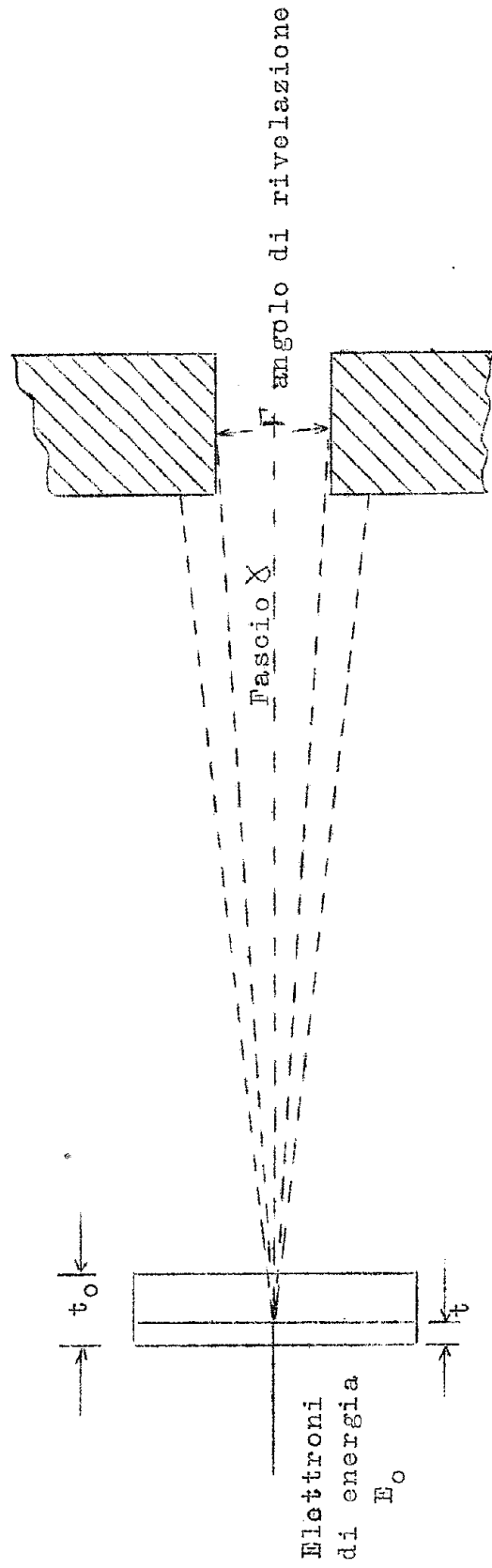


FIG. 14 -- SCHEMA PER L'IMPOSTAZIONE DEL CALCOLO DI BREMSSTRAHLUNG DI TARGHETTA "SPESSA".

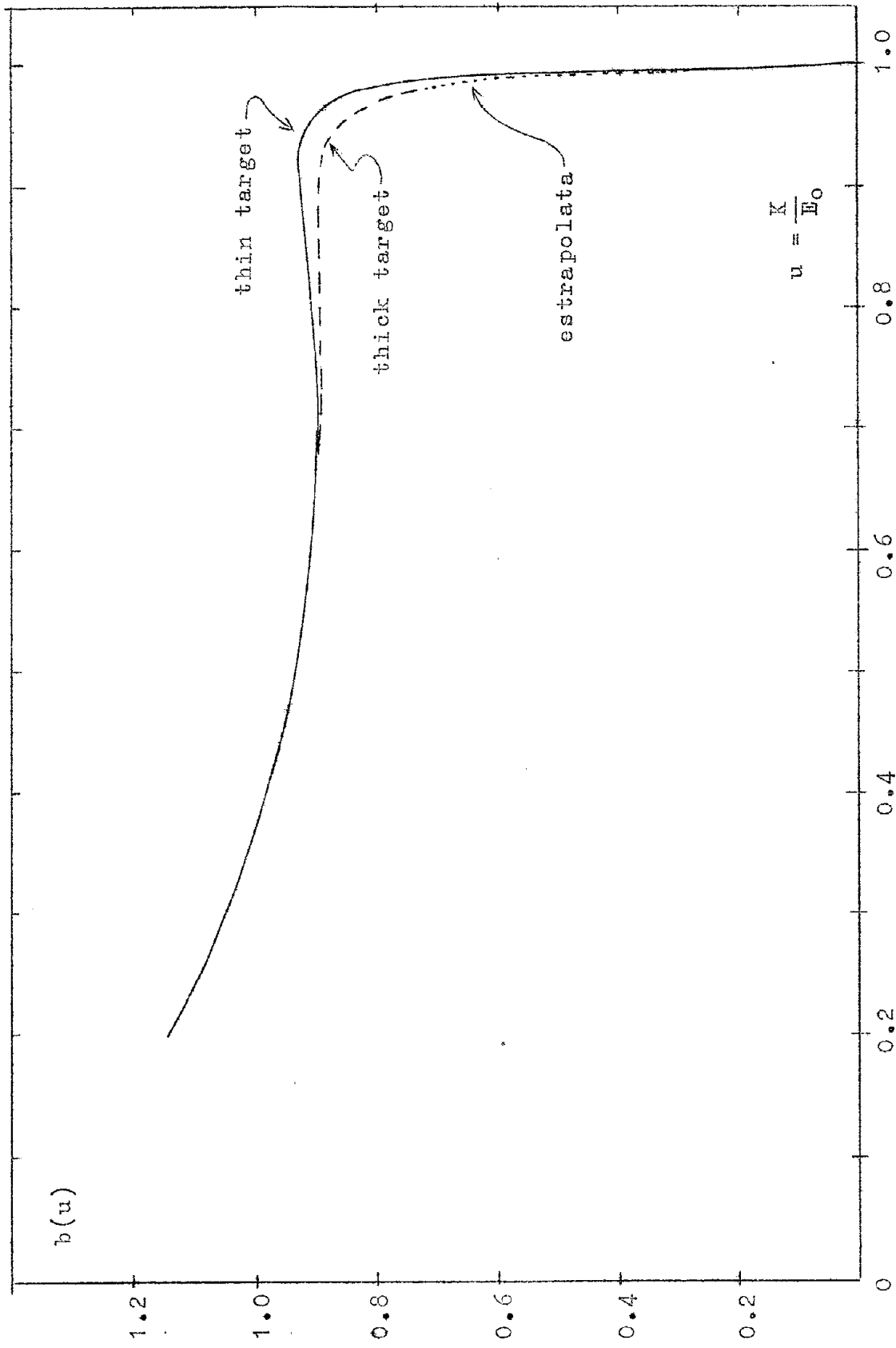


FIG. 15a - SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG. Confronto tra la teoria di Bethe-Heitler; Wheeler-Lamb e la formula (7) del testo per $t_0=0.13$ l.r. $\sqrt{\epsilon} = 3.6$ mrad.

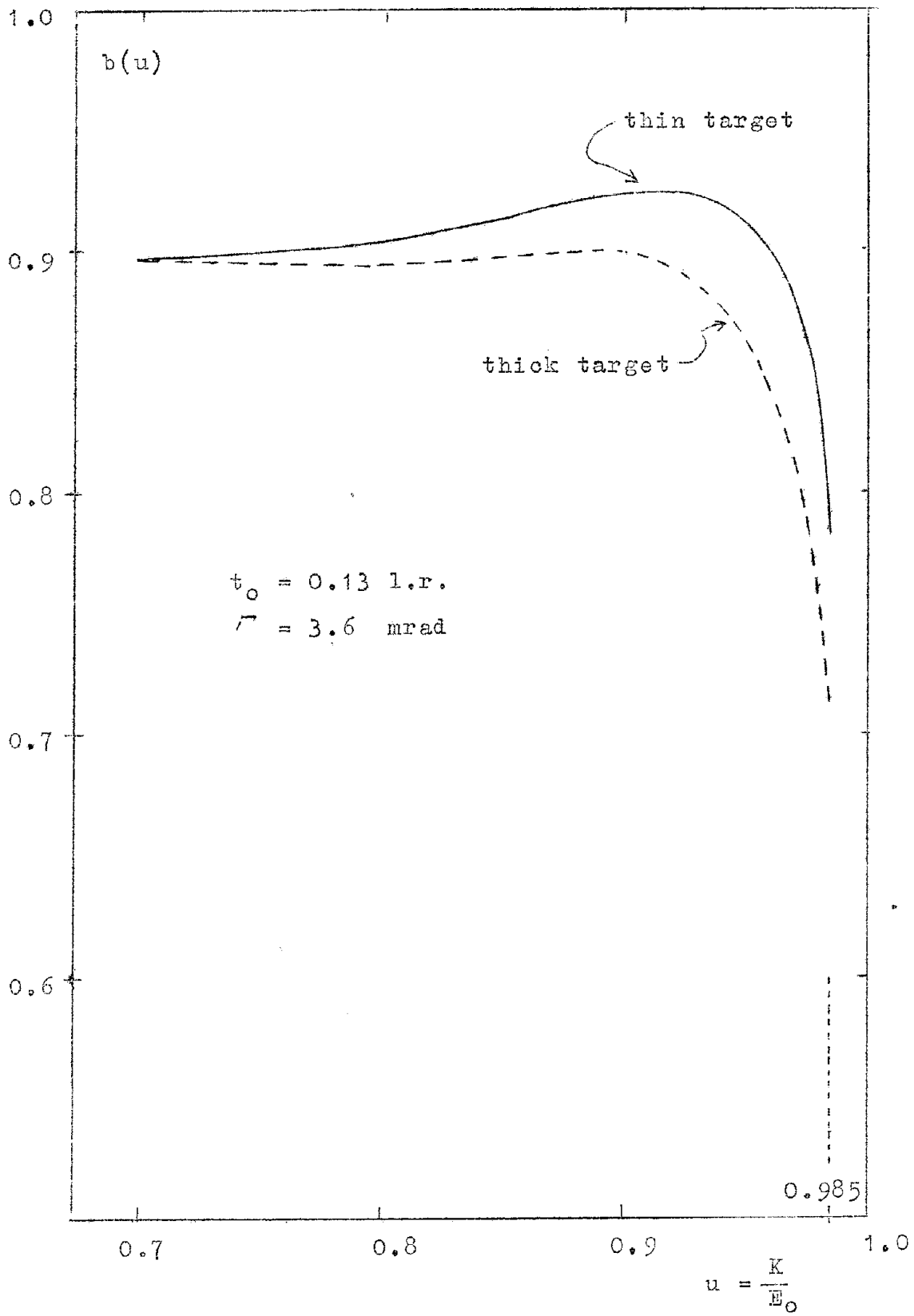


FIG. 15b - SPETTRO BI BREMSSTRAHLUNG.
 (Particolare del confronto).

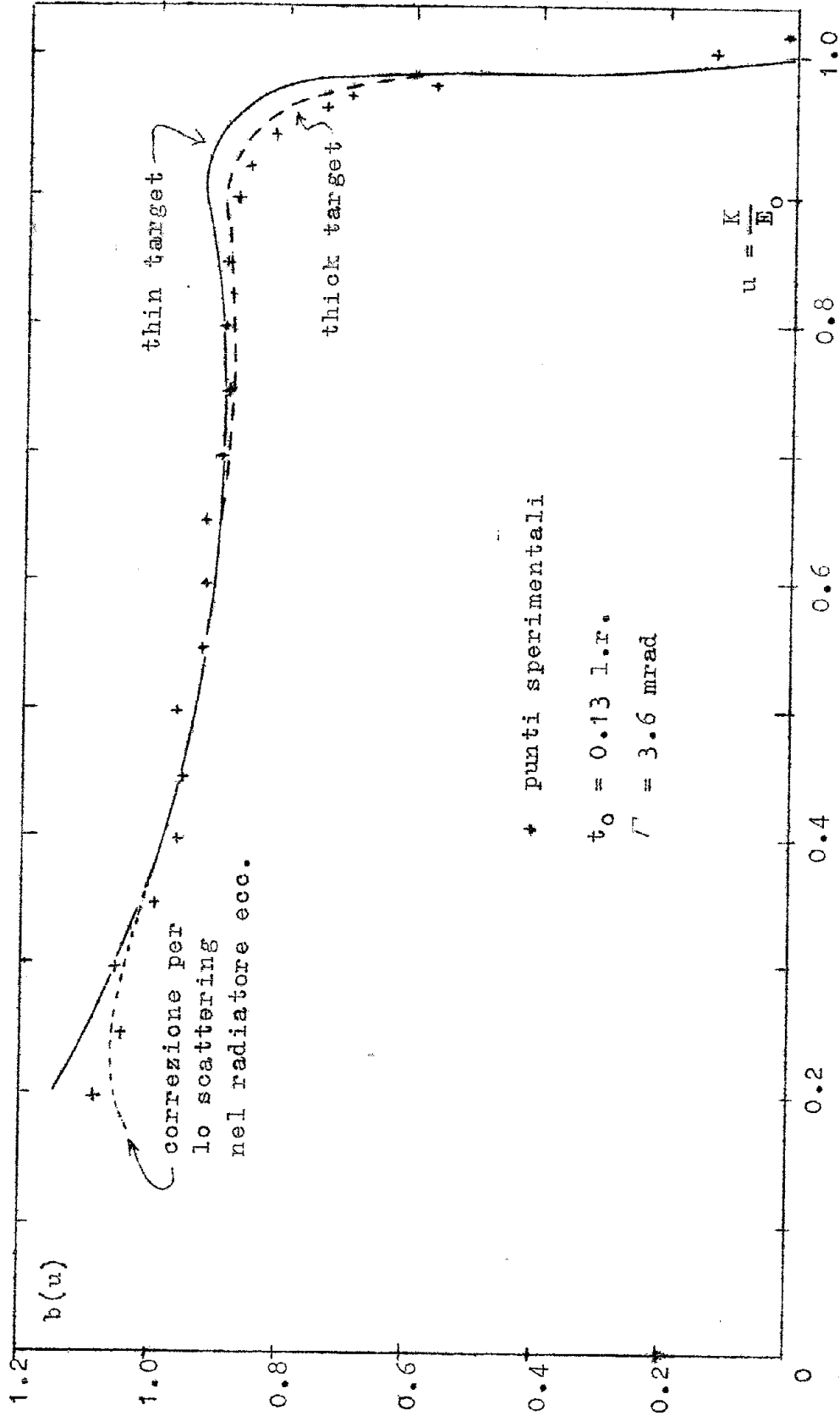


FIG. 15c - SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG. CONFRONTO TEORIA--ESPERIENZA.
 Rispetto a quelle di fig. 15a queste curve sono corrette per
 il potere risolutivo finito del sistema di rivelazione.

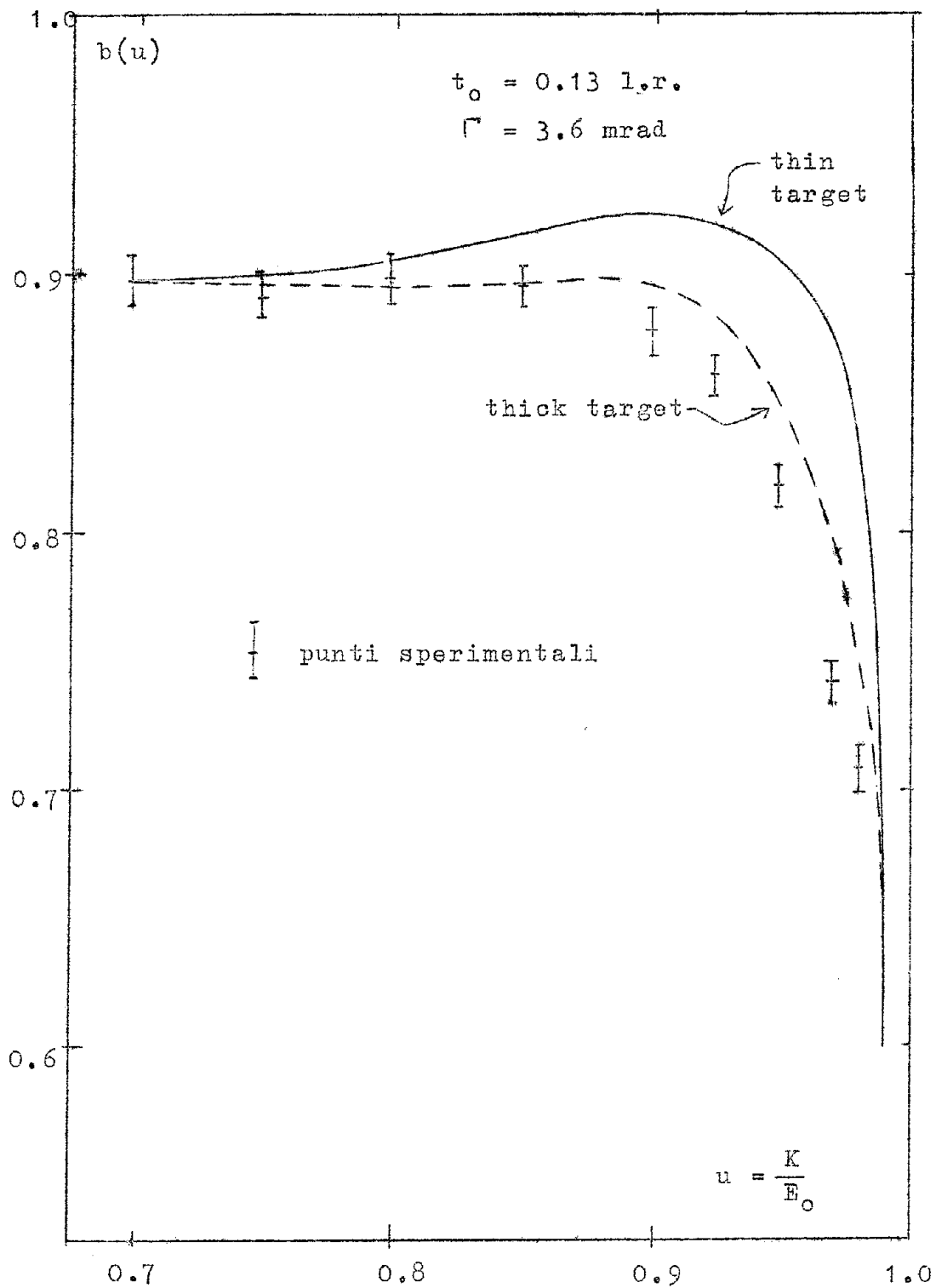


FIG. 15d - SPETTRO DI BREMSSTRAHLUNG. CONFRONTO TEORIA-ESPERIENZA (Particolare).

Le curve sono corrette per il potere risolutivo finito dell'insieme di rivelazione.

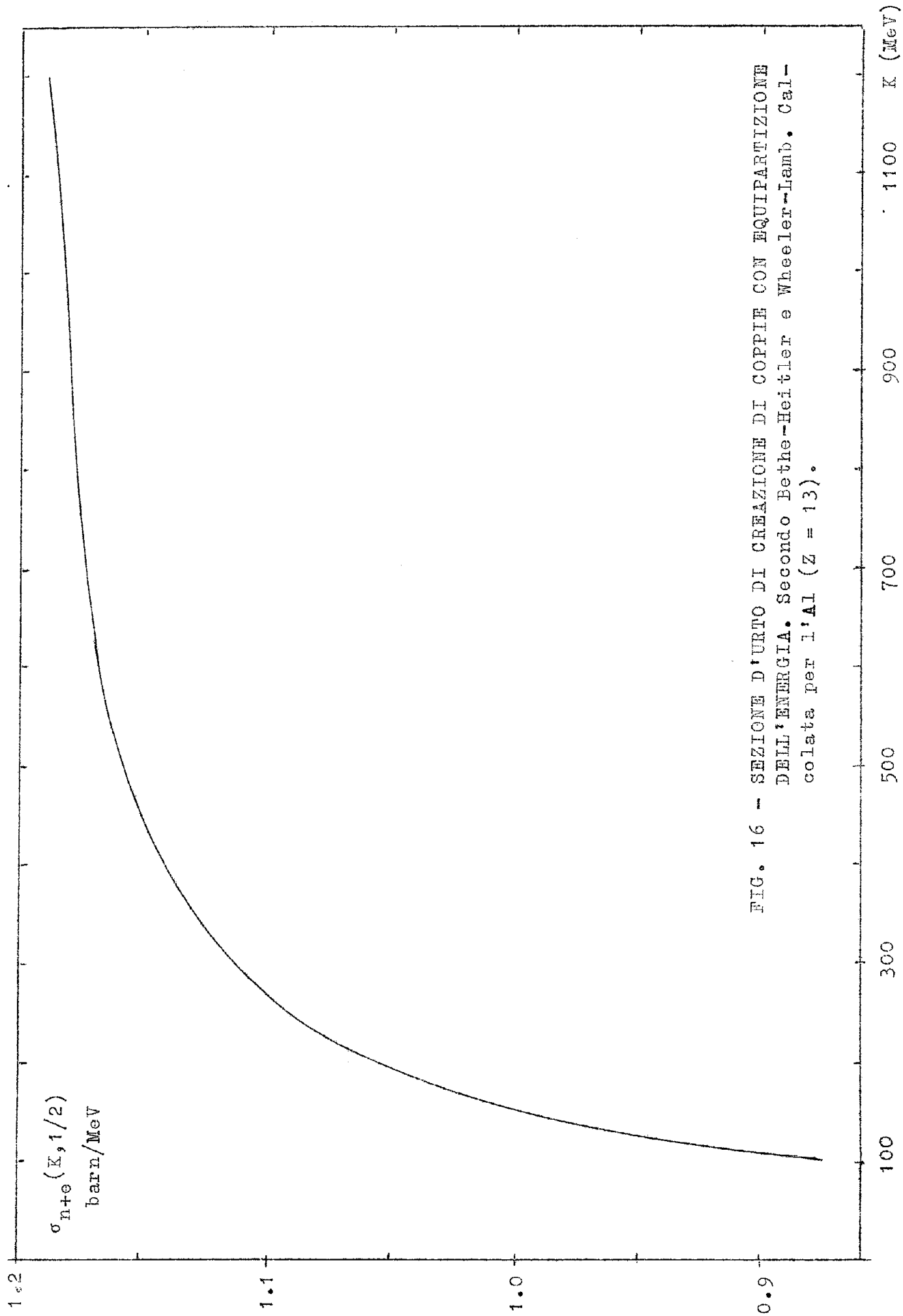


FIG. 16 - SEZIONE D'URTO DI CREAZIONE DI COPPIE CON EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA. Secondo Bethe-Heitler e Wheeler-Lamb. Calcolate per l'Al ($Z = 13$).

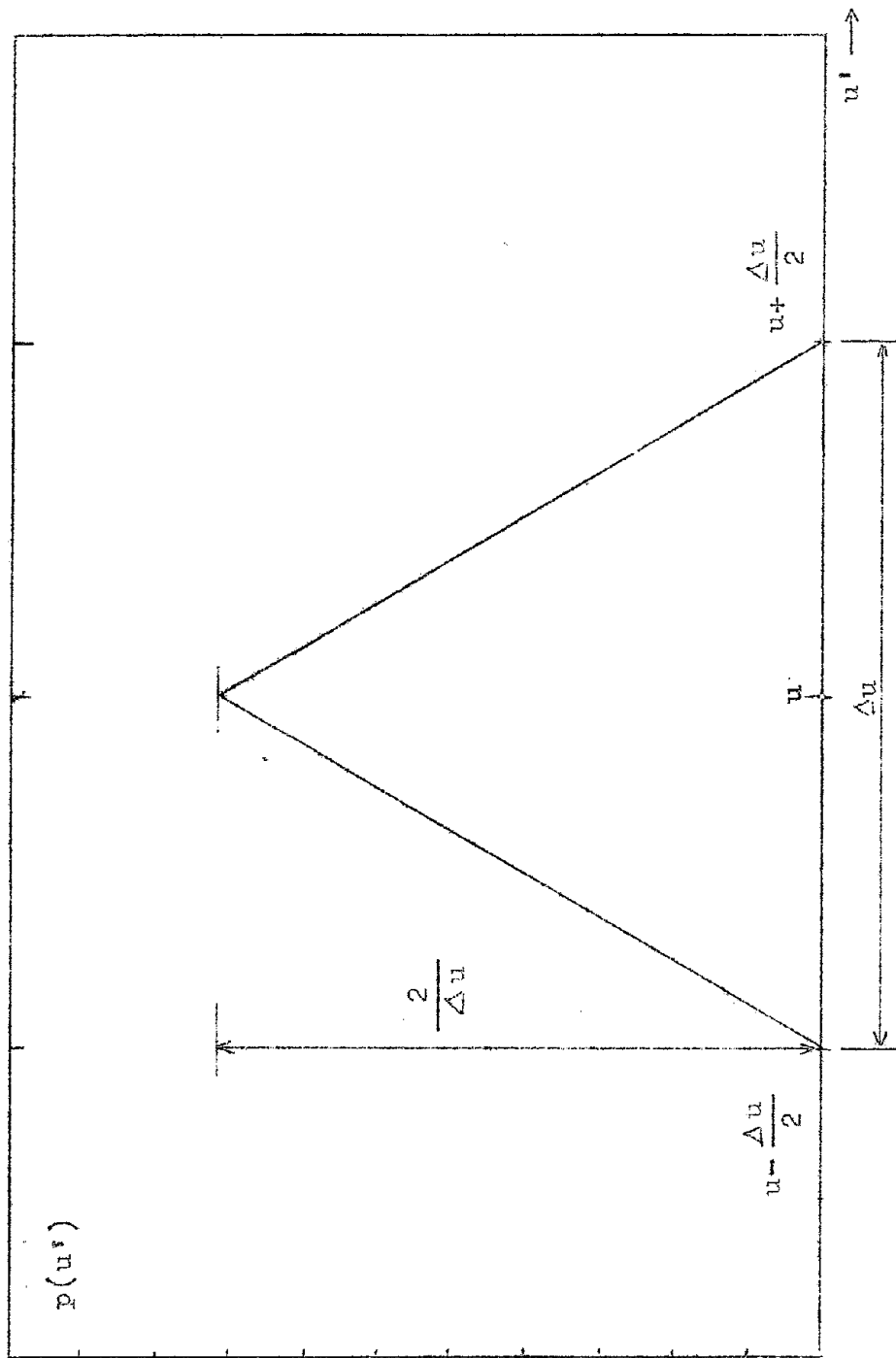


FIG. 17 - FUNZIONE DI RISOLUZIONE DEL SISTEMA DI RIVELAZIONE.

(Esempio per $u=0,800$ $\frac{\Delta u}{u} = 2,7\%$).

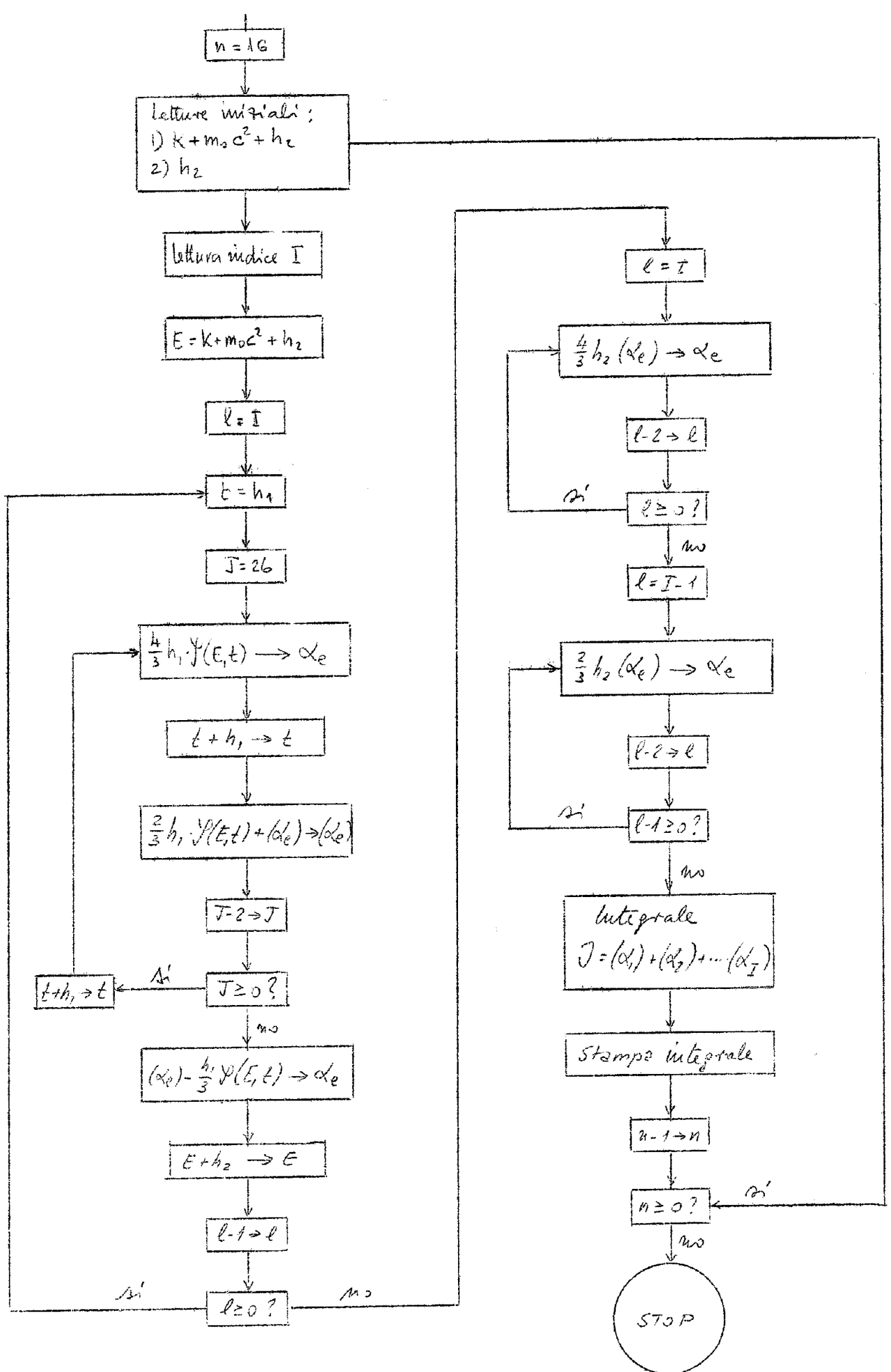


FIG. 18 -- SCHEMA A BLOCCHI DEL PROGRAMMA DI ESECUZIONE DEL CALCOLO MEDIANTE LA F.I.N.A.C. (Esempio per l'integrazione sul dominio D_1 e D_2 - vedi testo).