Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-60/42 (6. 9. 60)

C. Bernardini: EFFETTO DI PICCOLI TERMINI LINEARI DI SMORZAMENTO SU MOTI NON LINEARI IN UNA DIMENSIONE.

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.R.N.
Servizio Documentazione

Nota interna: n° 52
6 Settembre 1960

C. Bernardini: EFFETTO DI PICCOLI TERMINI LINEARI DI SMORZAMENTO SU MOTI NON LINEARI IN UNA DIMENSIONE.

1) In questa nota riassumo alcuni semplici risultati che permettono di valutare l'effetto di piccoli termini viscosi sul moto di una particella in un campo di forze non armonico, in una dimensione. Questi risultati hanno qualche interesse in connessione con il progetto AdA ed alcuni meccanismi di iniezione non lineare.

Considero una equazione del moto, nella coordinata x, della forma

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \psi(x) = 0$$

dove β è il coefficiente di smorzamento (per esempio, quello dovuto alla radiazione di sincrotrone) e $\psi(x)$ è la forza (per esempio, quella dovuta al campo magnetico della macchina). Per confronto, nel caso classico delle oscillazioni orizzontali di betatrone

$$\psi(x) = (1-n)\,\omega_0^2\, x$$

con i soliti simboli.

Poniamo

$$\psi(x) = \frac{dV}{dx}, \quad \dot{x} = p, \quad E = \frac{1}{2}p^2 + V(x)$$

Segue che

$$\delta E = p\,\delta p + \psi(x)\,\delta x = -\beta p\,\delta x \qquad (1)$$

E ha l'ovvio significato di energia totale della particella.

2) Se $E > V(x)$ per $x_1 \leq x \leq x_2$, ma $E < V(x)$ per $x < x_1$, $x > x_2$, essendo x_1 ed x_2 finiti (v. fig. 1), allora è possibile un moto periodico, per $\beta = 0$. Il periodo è

$$T(E) = \sqrt{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

essendo x_1 e x_2 radici di

$$V(x) = E$$

La curva caratteristica $E(x, p) =$ costante è una curva chiusa ($\beta = 0$) che viene percorsa in un tempo $T(E)$. Se poi $\beta \neq 0$ ma $\beta T(E) << 1$, la variazione di E, ΔE, in un periodo si può calcolare da (1) integrando sul perimetro della curva caratteristica di energia E. L'approssimazione consiste nel considerare E quasi costante per un tempo $T(E)$. Segue che

$$\Delta E = -2\sqrt{2}\,\beta\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - V(x)}\,dx \qquad (2)$$

In questa approssimazione, la variazione temporale di E è data quindi dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\Delta E}{T(E)} = -2\beta E\,\frac{\int_{x_1}^{x_2}\left(1 - \frac{V(x)}{E}\right)^{1/2} dx}{\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\left(1 - \frac{V(x)}{E}\right)^{1/2}}} \qquad (3)$$

3) Un caso particolare di notevole interesse è

$$V(x) = \alpha\ x^{2n} \qquad (n \text{ intero})$$

In questo caso si ha

$$\frac{dE}{dt} = -2\ \beta\ \gamma_n\ E$$

dove γ_n non dipende da E ed è

$$\gamma_n = \frac{\int_{-1}^{+1} (1 - u^{2n})^{1/2}\ du}{\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1-u^{2n})^{1/2}}\ du} = n/2$$

Inoltre, essendo l'ampiezza di oscillazione

$$A = |x_1| = x_2 \sim E^{1/2n}$$

si ha la seguente equazione per l'ampiezza

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2}\beta\ A \text{ (indip. da n !)}$$

4) Tornando al caso generale, scriviamo la (3) nella forma

$$\frac{dE}{dt} = -2\ \beta\ E\ F\ (E)$$

Con il cambiamento di variabile

$$x = \frac{1}{2}\ (x_2 - x_1)\ u + \frac{1}{2}\ (x_2 + x_1)$$

e ponendo

$$1 - \frac{V(x)}{E} = (1 - u^2)\ G(u,E)$$

(ricordare che $x_{1,2}$ sono funzioni di E !) si vede immediatamente che dev'essere soddisfatta la disuguaglianza

$$\frac{1}{2} \min\ G^2(E) \leq F(E) \leq \frac{1}{2} \operatorname{Max}\ G^2\ (E)$$

dove min e Max denotano minimo e massimo della funzione che segue, per $-1 \leq u \leq +1$.

Per l'ampiezza (asimmetrica) di oscillazione $x_i = A$ $(i = 1,2)$ si ha

$$\frac{dA}{dt} = -2\,\beta\,\sigma\,(A)\,A$$

dove

$$\sigma\,(A) = \frac{F\left[E(x_i)\right]}{\left(\frac{d\,\log\,E}{d\,\log\,x_i}\right)}\,, \qquad (A = x_i)$$

5) Nel caso di un moto non periodico, si può studiare in quali condizioni il damping produce 'cattura' (trapping), in una buca, di particelle che, senza damping, non resterebbero in essa. Questa situazione è illustrata in figura 2.

Sia E_c l'energia associata alla curva separatrice: per $E \leq E_c$ si hanno moti periodici.

Sia inizialmente $E > E_c$ e riferiamoci alla situazione illustrata in figura 2: una particella parte da $x < x_{min}$, raggiunge x_{max}, ritorna indietro e ripassa per x_{min}. Si chiede per quali valori di E la particella ritorna in x_{min} con $E \leq E_c$. La variazione di E lungo il percorso ora descritto è (dalla (1))

$$\triangle E = \beta\sqrt{2}\int_{x}^{x_{min}} \sqrt{E_c - V(\overline{x})}\;d\overline{x} + \triangle E_o = \triangle E\,(x)$$

dove

$$\triangle E_o = 2\sqrt{2}\;\beta\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{E_c - V(\overline{x})}\;d\overline{x}$$

Ovviamente, x_{min} e x_{max} sono soluzioni di

$$E_c = V(x)$$

In più, nel caso di figura 2, V(x) ha un massimo per $x = x_{min}$, ed anzi $V(x_{min})$ definisce E_c.

Segue che sono catturate quelle particelle per le quali è inizialmente

$$E \leq E_c + \triangle E\,(x)$$

Se, come spesso accade,

$$V(x) \simeq E_c - \frac{1}{2} \Omega^2 (x - x_{min})^2 \text{ per } x \simeq x_{min}$$

si ha

$$\Delta E(x) \simeq \Delta E_o + \frac{1}{2} \beta \Omega (x - x_{min})^2$$

Da questo risultato si vede che l'intervallo di energie catturate cresce linearmente con β; inoltre cresce quadraticamente con $x - x_{min}$ e questa circostanza può incoraggiare un tentativo di studio delle condizioni di trapping partendo da un punto (coordinata x) molto distante dalla posizione di equilibrio delle particelle, con un campo sufficientemente distorto in x.

6) Infine, è facile estendere queste formule al caso in cui anche il damping sia non lineare, della forma

$$\beta (x, \dot{x}^2)\, \dot{x}$$

Infatti, nella stessa approssimazione usata al § 2, basta inserire al posto di $\dot{x}^2$ la funzione

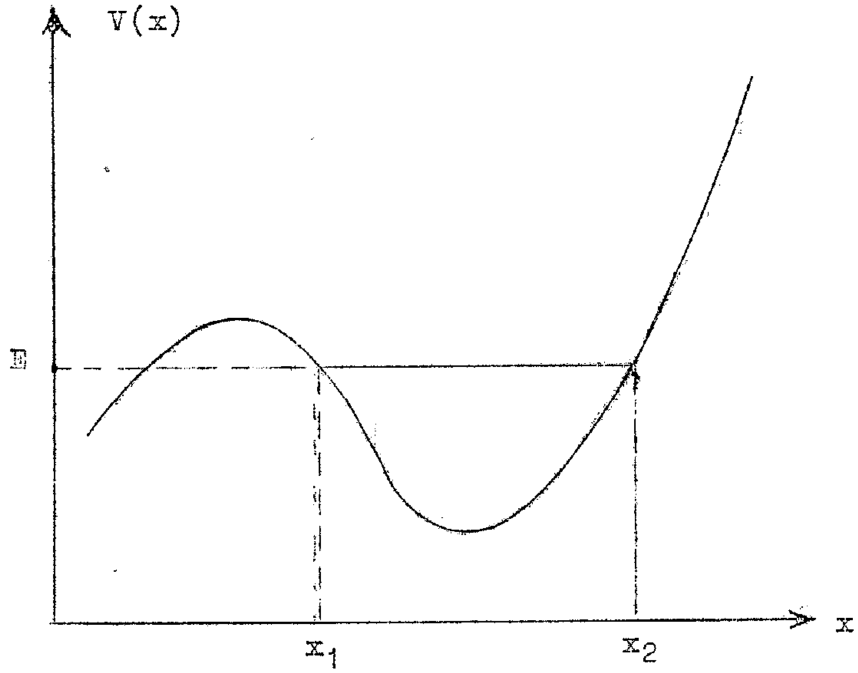
$$p^2(x) = 2 \,(E - V(x))$$

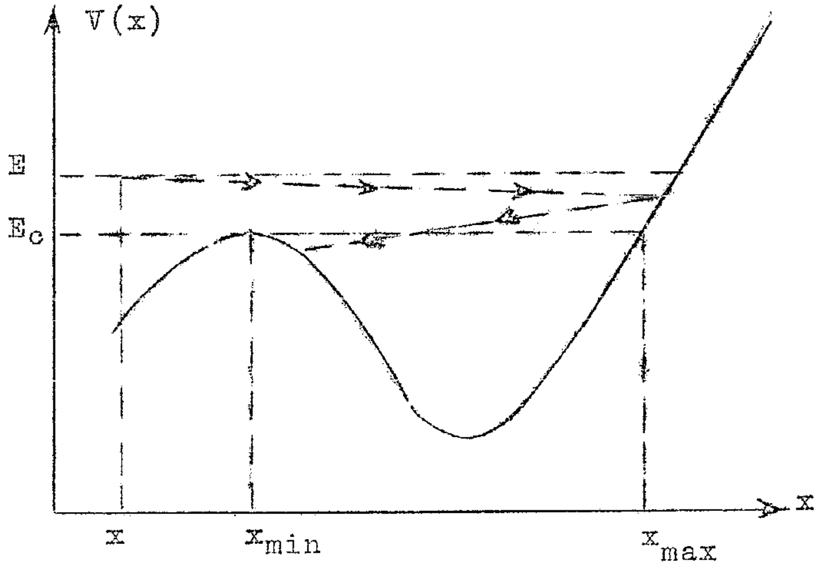
calcolata sulla curva caratteristica di energia E, e portare la funzione $\beta \left[x, p^2(x)\right]$ sotto il segno di integrazione nella (2).

L'equazione differenziale per E diviene

$$\frac{dE}{dt} = -2E \frac{\int_{x_1}^{x_2} \beta (x, p^2)(1 - \frac{V(x)}{E})^{1/2} dx}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(1 - \frac{V(x)}{E})^{1/2}}}$$

Questa equazione non ha proprietà così semplici come quella del caso β = costante; tuttavia permette di studiare numericamente, in ogni caso, l'effetto del damping.


V(x)
E
x
x_1
x_2


V(x)
E
E_c
x
x
x_{min}
x_{max}