

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-60/18 (15. 6. 60)

M. Puglisi, G. Sacerdoti: COSTRUZIONE E SPERIMENTAZIONE DI UN
ROTATRONE QUALE SEPARATORE DI ISOTOPI. PROPOSTA DI E-
SPERIENZA.

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.R.N.
Servizio Documentazione

Relazione n° AS 10
15 Giugno 1960

M. Puglisi e G. Sacerdoti : COSTRUZIONE E SPERIMENTAZIONE
DI UN ROTATRONE QUALE SEPARATORE DI ISOTOPI (Proposta di
esperienza).

Introduzione.

L'apparato che si propone di costruire è de-
stinato alla separazione di isotopi per, "centrifugazione
elettromagnetica". Tale apparecchio è proposto sulla ba-
se dei lavori tecnici riportati nel testo e del progetto
e preventivo di massima.

-----ooOoo-----

Cap. I°) - UN NUOVO CONTENITORE MAGNETICO PER PARTICELLE CARICHE: IL ROTATRONE.

1) Introduzione.

Per realizzare la fusione controllata dell'idrogeno è necessario confinare in una zona dello spazio gas ionizzato ad altissima temperatura. Si è cercato di confinare il gas ionizzato soprattutto con campi magnetici di particolare forme (toroidali, ad otto, a solenoide).⁽¹⁾⁽²⁾

In questo articolo si propone un nuovo dispositivo atto a contenere ioni di energia corrispondente a quella necessaria per ottenere fusione e si studia il moto di un ione nel campo magnetico del dispositivo.

Questo dispositivo crea un campo magnetico rotante (come nelle macchine elettriche). Se sono soddisfatte alcune relazioni tra la frequenza f di rotazione nel campo magnetico e la frequenza propria f' di ciclotrone⁽³⁾ delle particelle entro il campo magnetico, si può sperare, dai primi calcoli approssimati svolti in questo articolo, che la macchina sia un contenitore magnetico di buona qualità. Per quanto si è detto risulta ragionevole chiamare il dispositivo 'rotatrone'.

2) Descrizione del Rotatrone e principio di funzionamento

Un rotatrone è rappresentato in fig. I.1: esso consiste di due coppie di semi bobine incrociate eccitate con correnti sfasate di 90° . Come è noto dalla elettrotecnica elementare tale dispositivo crea un campo magnetico rotante. Tra le quattro semibobine vi è un recipiente a tenuta di vuoto entro cui si trova il gas da contenere. Eventualmente sulla parete superiore e su quella inferiore del recipiente vi si possono sistemare elettrodi per innescare l'arco atto a fornire la prima ionizzazione al gas. Il cam

rotazione del campo magnetico: però tale componente può ridursi piccola come si vuole diminuendo f .

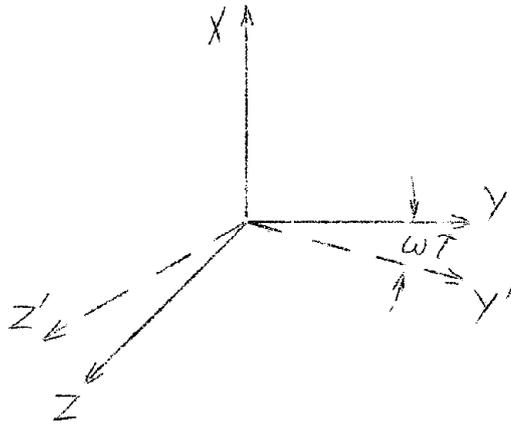


FIG. I.2

Il campo magnetico ha la seguente espressione (nel sistema di assi coordinati di fig. I.2):

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= + B_0 \cos \omega t \\ B_z &= + B_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (1)$$

A questo campo magnetico è associato (Appendice I), per le equazioni di Maxwell, un campo elettrico dato dalle formule (2)

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= -x \omega B_0 \cos \omega t \\ E_z &= -x \omega B_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

Trascuriamo nella trattazione l'influenza di E sul moto delle particelle. Nel paragrafo 5 discuteremo i limiti di questa approssimazione.

3) Moto della particella carica

Al tempo t_0 la velocità della particella sia rappresentata da una matrice X_0 a tre righe e una colonna

$$\left| X_0 \right| = \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

ove:

X_0 = componente secondo l'asse x della velocità iniziale

Y_0 = componente secondo l'asse y della velocità iniziale

Z_0 = componente secondo l'asse z della velocità iniziale

Al tempo t_0 sia $B_y = B_0$

Dopo un tempo τ infinitesimo la velocità $\left| X \right|$ sarà legata a $\left| X_0 \right|$ dalla relazione (4)⁽⁺⁾

$$\left| X_1 \right| = \left| W \right| \left| X_0 \right| \quad (4)$$

ove:

$$\left| W \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\omega'\tau \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega'\tau & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\omega' = \frac{e}{m} B_0$ è la pulsazione di ciclotrone; e, m sono rispettivamente carica e massa della particella.

Ma nel tempo τ l'asse secondo cui è diretto il campo magnetico è ruotato intorno ad x di un angolo pari a $\omega'\tau$.

Chiamando $\left| X \right|'$ la matrice che rappresenta la velocità riferita al nuovo sistema di assi x', y', z' (vedi figura I.2) si ha che:

$$\left| X(\tau) \right|' = \left| R(\omega'\tau) \right| \left| X_1 \right| \quad (5)$$

(+) - La relazione (4) si può ricavare in modo elementare dalle equazioni cardinali e si ritrova alla citazione bibliografica⁽⁴⁾.

ove:

$$|R(\omega\tilde{t})| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega\tilde{t} \\ 0 & \omega\tilde{t} & 1 \end{vmatrix}$$

Si ottiene quindi:

$$|X(n\tilde{t})| = \left[|R| |W| \right]^n |X_0| \quad (6)$$

ove con evidente significato di simboli $|X(n\tilde{t})|$ è la matrice velocità al tempo $n\tilde{t}$ e riferita al sistema di coordinate rotanti con il campo magnetico e cioè ad un sistema ruotante di un angolo pari a $n\omega\tilde{t}$ rispetto al sistema di coordinate iniziali. Per cui si ha la:

$$|X(n\tilde{t})| = |T| \left[|R| |W| \right]^n |X_0| \quad (7)$$

con $|T|$ avendo indicato la matrice seguente:

$$|T| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega n\tilde{t} & \sin \omega n\tilde{t} \\ 0 & -\sin \omega n\tilde{t} & \cos \omega n\tilde{t} \end{vmatrix}$$

Risolvendo la (7) con i metodi classici della diagonalizzazione (vedi Appendice I) si ottiene chiamando semplicemente $n\tilde{t} = t$

$$|X(t)| = |k(t)| |X_0| \quad (8)$$

ove k è una matrice avente i seguenti coefficienti:

$$k_{11} = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega'^2}{2} \cos Ct \quad \text{con } c = \sqrt{\omega'^2 + \omega^2}$$

$$k_{12} = -\frac{\omega\omega'}{c^2} (1 - \cos Ct) \quad k_{13} = -\frac{\omega'}{c} \sin Ct$$

$$k_{21} = -\frac{\omega\omega'}{c^2} \cos \omega t + \frac{\omega\omega'}{c^2} \cos Ct \cos \omega t + \frac{\omega'}{c} \sin \omega t \sin Ct$$

$$k_{22} = \frac{\omega'^2}{c^2} \cos \omega t + \frac{\omega^2}{c^2} \cos \omega t \cos Ct + \frac{\omega}{c} \sin Ct \sin \omega t$$

$$k_{23} = -\frac{\omega}{c} \cos \omega t \sin Ct + \sin \omega t \cos Ct$$

$$k_{31} = \frac{\omega\omega'}{c^2} \sin \omega t - \frac{\omega\omega'}{c^2} \sin \omega t \cos Ct + \frac{\omega'}{c} \cos \omega t \sin Ct$$

$$k_{32} = -\frac{\omega'^2}{c^2} \sin \omega t - \frac{\omega^2}{c^2} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{\omega}{c} \cos \omega t \sin \omega t$$

$$k_{33} = \frac{\omega}{c} \sin \omega t \sin \omega t + \cos \omega t \cos \omega t$$

Se mediamo in un tempo sufficientemente lungo la velocità delle particelle si ottiene facilmente dalla (8) la relazione:

$$\vec{V} \text{ media} = \left[\frac{\omega^2}{c^2} X_0 - \frac{\omega \omega'}{c^2} Y_0 \right] \vec{i} \quad (9)$$

\vec{i} = versore unitario in direzione asse X

Si può facilmente annullare la parte proporzionale a $\frac{\omega \omega'}{c^2}$ facendo alternativamente ruotare il campo magnetico in un senso e poi nell'altro, cioè a tratti imponendo una ω positiva e negativa. Se il periodo t_r con cui si producono tali alternanze è tale che $\cos \omega t = 1$ e $\cos \omega t = -1$ sarà: $|X(t_r)| = |X_0|$ cioè si vede facilmente dalla (8) e quindi la velocità media nel periodo t_r successivo acquista il valore:

$$\vec{V} \text{ media} = \left[\frac{\omega^2}{c^2} X_0 + \frac{\omega \omega'}{c^2} Y_0 \right] \vec{i} \quad (9/1)$$

e su un periodo $2 t_r$ la velocità media diventa:

$$V \text{ media} = \frac{\omega^2}{c^2} X_0 \leq \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} \quad (9/2)$$

Se quindi $\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{\omega'^2 + \omega^2} \ll 1$, molto ridotta risulterà la velocità media residua di una particella rispetto alla sua velocità totale pari a $\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} = V$

Perciò la particella tenderà ad uscire dal sistema con velocità ridotta.

Integrando la equazione (8) abbiamo l'andamento degli spostamenti della particella. Il recipiente funziona come un contenitore di plasma a lenta espansione (vedi figura I.3).

Per ottenere formule semplici e utili ad un progett-

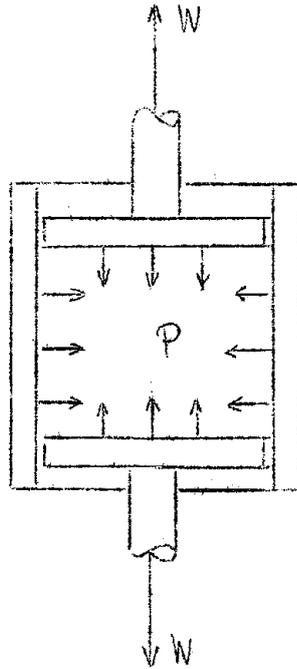


FIG. I.3

P = Pressione contrastante il plasma; uguale a $1/2 B^2/\mu_0$.

W = Velocità di espansione = $\left(\frac{\omega^2}{\omega'^2} \right) V$

to di un dispositivo rotatrone facciamo le seguenti ipotesi:

- $\omega' \gg \omega$
- $c \approx \omega'$
- $t > 2 \tau_r = 2/\omega$
- che ai tempi $n\tau_r$ per n intero si abbia inversione di rotazione. Si ottiene allora con facili semplificazioni dalla integrazione della (8):

$$\begin{aligned} \Delta X_{\max} &\leq \left[\frac{\omega^2}{\omega'^2} t + \frac{2}{\omega'} \right] V \\ \Delta Y_{\max} &\leq \frac{1}{\omega'} V \\ \Delta Z_{\max} &\leq \frac{1}{\omega} V \end{aligned} \quad (10)$$

Dalle (10) se si pone ancora $\frac{\omega^2}{\omega'^2} t \gg \frac{2}{\omega'}$ si può, semplificando, ottenere:

$$V_a = 2 \Delta X_{\max} \cdot 2 \Delta Y_{\max} \cdot 2 \Delta Z_{\max} = \frac{8V^3}{\omega'^2} t = \frac{V^3}{B_0^2} \frac{m^2}{e^2} t \quad (11)$$

ove V_{OI} rappresenta il volume 'utile' occupato dal campo magnetico nel cui punto centrale al tempo $t = 0$ si trova la particella, $V =$ velocità della particella, t il tempo in cui la particella rimane nel volume V , B campo magnetico.

La (11) si può scrivere in una forma più significativa

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{VB^2}{\mu_0} = 4 \frac{m^2}{e^2} \frac{1}{\mu_0} V^3 t \quad (12)$$

$E_m =$ energia magnetica immagazzinata nel dispositivo.

La (12) ci dice che l'energia magnetica che bisogna impiegare per confinare per un tempo t una particella di una certa velocità entro un rotatrone è costante cioè indipendente dal volume.

Nella tabella I e tabella II abbiamo riportato E_m in funzione di v e di t per protoni e il volume corrispondente per $B = 1 \text{ Wb/m}^2$.

4) Esempio numerico e preventivo indicativo per un dispositivo di prova.

Poniamo di voler concentrare ioni di idrogeno di energia pari a 5.000 eV per un tempo $t = 10^{-4}$ sec.

La velocità corrispondente a 5.000 eV è pari a $V = v = 10^6$ m/sec.

Dalla Tabella I otteniamo che per soddisfare il problema sono necessari 34.000 Joule.

Se assumiamo per B 1 Wb/m² otteniamo, interpolando i dati di tabella II, un volume pari a $2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$.

Inoltre risulterà $\omega' = 10^8 \text{ sec}^{-1}$

Assumendo per ω il valore $3 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$ otteniamo:

$$\Delta y_{\max} = 0,33 \text{ m}$$

$$\Delta z_{\max} = 0,33 \text{ m}$$

$$\Delta x_{\max} = 0,11 \text{ m}$$

(Le condizioni di approssimazione per cui è valida la teoria sono soddisfatte).

La disposizione schematica dell'impianto è indicata in fig. I.4.

Le parti principali del dispositivo sono:

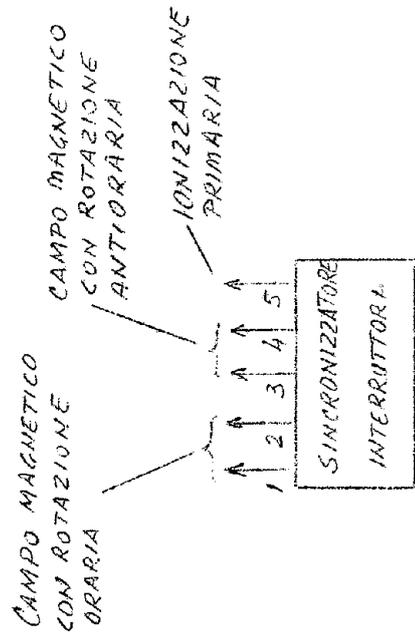
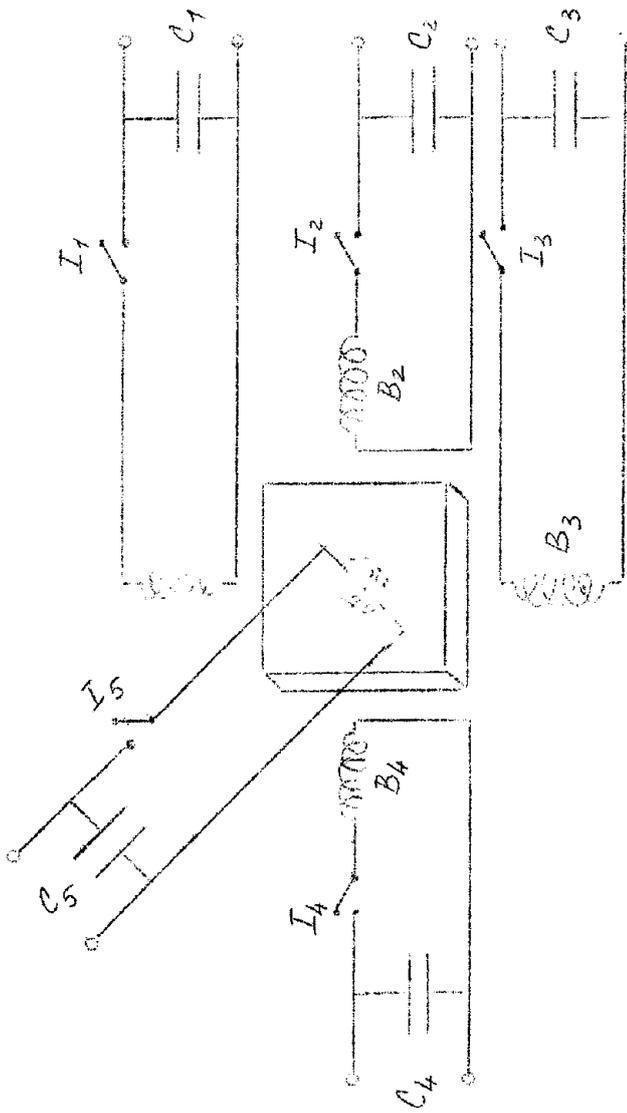
- 4 banchi di condensatori di 40.000 Jaule ciascuno.
- 1 banco di condensatori per la prima ionizzazione del gas la cui dimensione dipende dalla densità del gas.
- 4 interruttori e il dispositivo elettronico di sincronizzazione
- il circuito di carica dei condensatori
- dispositivi per la misura del campo e delle caratteristiche del gas
- il recipiente e bobine
- apparecchiature di controllo

5) Alcune considerazioni critiche sui calcoli eseguiti.

Ci limiteremo a prendere in esame solo due punti:

- a) esame dell'azione del campo elettrico E
- b) esame dell'importanza del valore magnetico del campo, scelto ai fini della fusione.

- a) Esame dell'azione del campo elettrico E. L'azione del campo elettrico associato alla variazione di flusso calcolata nel paragrafo 1 è tutt'altro che trascurabile rispetto all'azione del campo magnetico: come è noto dalla teoria del betatrone, la forza esercitata mediamente dal campo elettrico sulla particella dell'ordine di $1/2$ di quella esercitata dal campo magnetico. Se però abbiamo una massa plasmatica nella cui parte centrale vi siano correnti che tendono quivi ad annullare B, il rappor-



REGOLAZIONE E
ALIMENTAZIONE
GAS

ALIMENTATORI
CONDENSATORI

to tra l'azione delle forze elettriche e magnetiche può scendere molto sotto $1/2$.

L'azione delle forze elettriche tende ad aumentare l'energia delle particelle e quindi a trasformare una parte dell'energia magnetica in energia di riscaldamento del gas.

b) Esame dell'importanza del valore del campo magnetico scelto ai fini della fusione.

Nel testo non compare l'importanza della scelta del campo magnetico.

Ora la scelta del valore è molto importante.

Se il valore è grande le particelle sono concentrate in più piccolo volume e possono quindi dare luogo più facilmente a reazioni nucleari (a parità di numero di particelle presenti).

Inoltre un campo alto contrasta meglio la pressione termodinamica del plasma. Se si prende in considerazione la pressione termodinamica del plasma i volumi indicati in tabella I devono essere certamente aumentati perchè la perdita di particelle sia contenuta in cifra ragionevole.

Cap. II°) - STUDIO DEL MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA NEL ROTATRONE TENUTO ANCHE CONTO DEL CAMPO ELETTRICO ASSOCIATO AL CAMPO MAGNETICO.

Riassunto

Nel presente capitolo sono ricavate le formule risolutive del moto di una particella carica nel campo del rotatrone.

La presenza del campo elettrico del quale si è tenuto esplicito conto modifica sostanzialmente i risultati già ottenuti tenendo conto del solo campo magnetico.

Appare che qualora la frequenza di rotazione del campo magnetico sia pari alla frequenza di ciclotrone della particella divisa per la radice quadrata di due si ha il confinamento della particella stessa qualunque siano le sue condizioni iniziali.

A prescindere da difficoltà tecniche si può quindi realizzare un dispositivo capace di confinare un plasma non relativistico e così rarefatto da poter trascurare la perturbazione introdotta dalle particelle nel campo guida.

1 - Introduzione

Il rotatrone come descritto nel cap. I è una macchina complessa concepita per confinare un gas ionizzato. L'elemento foccheggiante è costituito da un campo magnetico piano, uniforme e rotante con pulsazione ω costante.

Nei calcoli precedentemente svolti non si era tenuto conto del campo elettrico associato.

In questa sede il problema viene affrontato e trattato completamente con gli stessi metodi di calcolo e i risultati che si ottengono portano a conclusioni diverse da quelle già ottenute: mentre senza tener conto del campo elettrico appariva che lo spostamento medio delle particelle avveniva secondo la formula ω^2/ω'^2 t.v, tenendo conto del campo elettrico si ottiene che sotto particolari condizioni, si ha una completa azione di confinamento.

Il campo guida può essere realizzato o con bobine incrociate eccitate sinusoidalmente o con particolari tipi di cavità risonanti.

Va messo in evidenza che le frequenze in gioco sono comprese all'incirca tra 10^5 e 10^7 Hz.

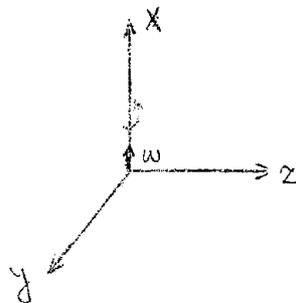
Le particelle sotto l'azione del campo elettromagnetico descrivono traiettorie non semplicemente descrivibili, come è dimostrato dalla complessità delle relazioni analitiche che si ricavano.

In generale percorreranno traiettorie che tendono ad allontanarle indefinitamente dalle posizioni iniziali subendo un processo assimilabile ad una centrifugazione funzione del rapporto e/m e quindi, generalmente parlando, del tipo di particella.

Nel caso sia soddisfatta la condizione $2\omega^2 = \omega'^2$, ove ω' è la pulsazione di ciclotrone della particella, si dimostra che il dispositivo ha la proprietà di contenere per un tempo indefinito la particella in questione.

2 - Descrizione del campo elettro-magnetico.

In figura II.1 è riportata la terna di assi di riferimento. L'asse di rotazione del campo magnetico è l'asse X e il senso di rotazione è quello antiorario.



Sistema di assi coordinati

FIG. II.1

Il campo magnetico è dato dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 & (B_x = 0 \\
 &) \\
 & (B_y = B_0 \cos \omega t \\
 &) \\
 & (B_z = B_0 \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{1}$$

Il campo elettrico associato è il seguente (+):

$$\begin{aligned}
 & (E_x = 0 \\
 &) \\
 & (E_y = - \omega B_0 x \cos \omega t \\
 &) \\
 & (E_z = - \omega B_0 x \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{2}$$

I calcoli che seguono partono dalle premesse ipotesi e vengono svolti per particelle non relativistiche.

3 - L'equazione del moto e la sua soluzione.

L'equazione cui obbedisce la particella si può scrivere vettorialmente come segue:

$$\vec{m}a = e\vec{V} \wedge \vec{B} + e\vec{E} \tag{3}$$

L'equazione (3) da luogo a 3 equazioni scalari: al tempo $t = 0$ queste scritte in forma incrementale valgono:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta v_x}{\Delta t} &= -\omega' v_z \\
 \frac{\Delta v_y}{\Delta t} &= -\omega \omega' x \\
 \frac{\Delta v_z}{\Delta t} &= \omega' v_z
 \end{aligned} \tag{4}$$

dove v_x ; v_y ; v_z sono le componenti della velocità lungo i 3 assi coordinati e ω' è come si è già detto eguale alla pul

(+) - La E_x si può considerare nulla almeno nella zona centrale del contenitore se la dimensione del contenitore nella direzione x è inferiore alle due altre dimensioni che è la nostra ipotesi di lavoro.

sazione di ciclotrone della particella

$$\omega' = \frac{eB}{m} \quad (5)$$

Le equazioni 4 si possono porre (5)(6)(7) in forma matricale nel modo seguente:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -\omega' \tau \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega' \tau & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} V_{x_0} \\ V_{y_0} \\ V_{z_0} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -\omega \omega' \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{array} \right| \quad (6) \\ \left[V_1 \right] \quad \quad \left[A \right] \quad \quad \left[V_0 \right] \quad \quad \left[B \right] \quad \quad \left[X_0 \right] \end{array}$$

ove è stato posto

$$\tau = \Delta t$$

$\left[V_1 \right]$ = matrice velocità riferita al sistema di laboratorio
 $\left[V_0 \right]$ = matrice della velocità iniziale nello stesso sistema
 $\left[X_0 \right]$ = matrice delle coordinate iniziali della particella nello stesso sistema.

Chiameremo adesso con $\left[V_1' \right]$ la matrice velocità al tempo τ riferita al sistema solidale al campo magnetico. Al tempo τ questo sistema risulta ruotato di un angolo $\omega \tau$.

Si avrà quindi:

$$\left[V_1' \right] = \left[R \right] \left[V_1 \right] = \left[W \right] \left[V_0 \right] + \left[Q \right] \left[X_0 \right] \quad (7)$$

dove:

$$\left[W \right] = \left[R \right] \left[A \right] \quad ; \quad \left[Q \right] = \left[R \right] \left[B \right]$$

e la matrice R è data da:

$$\left[R \right] = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega \tau \\ 0 & -\omega \tau & 1 \end{array} \right|$$

il che è lecito in quanto τ è infinitesimo.

Con lo stesso procedimento si può scrivere:

$$[x'_1] = [R] [x_0] + [R] [\tau] [v_0] \quad (8)$$

ove τ è la matrice avente gli elementi diagonali uguali a τ e gli altri uguali a zero.

Dalla (7) e dalla (8) si può scrivere:

$$[q'_1] = [M] [q_0] \quad (9)$$

ove $[q'_1]$ è la matrice ad una colonna della velocità e delle coordinate della particella al tempo τ mentre $[q_0]$ è la matrice ad una colonna della velocità e delle coordinate al tempo $t = 0$; $[M]$ è la matrice (riportata per esteso in appendice) che simbolicamente possiamo scrivere

$$[M] = \begin{vmatrix} [W] & [Q] \\ [R] [\tau] & [R] \end{vmatrix} \quad (10)$$

Dalla (9) possiamo ottenere la formula generale:

$$[q_n^n] = [M]^n [q_0^0] \quad (11)$$

ove $[q_n^n]$ è la matrice della velocità e delle coordinate al tempo $t = n\tau$ (+).

Per risolvere la (11) si usa il metodo convenzionale di diagonalizzazione della matrice e la (11) si scrive:

$$[q_n^n] = [m] [\lambda]^n [m^{-1}] [q_0^0] \quad (12)$$

ove:

$[m]$ è la matrice per cui $[m^{-1}] [M] [m]$ è matrice diagonale
 $[m^{-1}]$ è la matrice inversa di $[m]$ e $[\lambda]$ è la matrice che ha per elementi diagonali gli autovalori della matrice $[M]$ e gli altri termini nulli.

(+) Come si ritrova nelle citazioni bibl. (6 e 7) il procedimento è rigorosamente valido facendo tendere τ a zero ed $n\tau$ a t .

In appendice sono riportate le matrici $[m]$ ed $[m^{-1}]$. Gli autovalori trovati sono i seguenti:

$$\alpha_1 = 1 + i\omega\tau \quad \alpha_2 = 1 - i\omega\tau \quad \alpha_3 = 1 + i\omega\tau \quad \alpha_4 = 1 - i\omega\tau \\ \alpha_5 = 1 + i\omega\tau \quad \alpha_6 = 1 - i\omega\tau$$

Il fatto che due coppie di autovalori siano coincidenti porta degenerazione nella soluzione del problema e obbliga ad usare per risolvere il problema un metodo perturbativo.

Tale metodo si riduce a porre (+)

$$\lambda_3 = 1 + i(\omega + \vartheta)\tau \quad ; \quad \lambda_4 = 1 - i(\omega + \vartheta)\tau \quad ;$$

trovare i coefficienti di $[m^{-1}]$ e passare al limite per ϑ che tende a zero nei coefficienti della matrice

$$[F] = [m][\lambda]^n [m^{-1}] \quad (13)$$

che viene riportata in appendice.

La matrice $[F]$ rappresenta la soluzione del nostro problema; dall'esame di essa si ricavano tutte le proprietà del dispositivo.

Infatti le $[q_n^n]$ sono i componenti del vettore che rappresenta le coordinate generalizzate (velocità e posizione) nel sistema del laboratorio riferito ad un sistema rotante con il campo magnetico.

Per ottenere velocità e posizioni rispetto al sistema del laboratorio e riferite a questo, istante per istante, basta moltiplicare la matrice $[q_n^n]$ per una matrice di rotazione esprimibile in sintesi:

(+) Questo è lecito perchè gli elementi della matrice m che risultano con questa sostituzione annullano tutte e 36 le equazioni che servono a determinarli a meno di infinitesimi in ϑ di ordine superiore al I°.

$$C = \begin{vmatrix} [L] & [O] \\ [O] & [L] \end{vmatrix}$$

ove le $[L]$ sono le matrici di rotazione per un angolo $-\omega t$.

4) Analisi delle formule risolutive e condizioni di cattura.

Negli elementi della matrice $[F]$ vi sono coefficienti sinusoidali e coefficienti nei quali il tempo 't' compare anche come fattore moltiplicativo. Questo fatto è conseguenza diretta della degenerazione già vista: se il termine b_{21} che compare nella matrice $[B]$ (vedi formula (6)) che rappresenta il contributo del campo elettrico al moto della particella venisse leggermente modificato non si avrebbe degenerazione e nella $[F]$ comparirebbero solo termini sinusoidali.

Gli elementi nei quali compaiono termini con 't' a fattore sono F_{52} ; F_{53} ; F_{63} ; F_{54} ; F_{64} ; F_{62} e questi sono tutti del tipo

$$t \times \frac{1}{2} \times \frac{\omega'^2 - 2\omega^2}{\omega^2 - \omega'^2} \times \text{funzione sinusoidale} \quad (14)$$

quindi essendo questi coefficienti mediamente crescenti con il tempo non si ha azione di contenimento, pur rimanendo limitate le velocità dello particelle stesse, poichè la particella si allontana dalla posizione iniziale nel piano xy, se inizialmente è diversa da zero o X_0 o V_y o V_z :

Se invece vanno a zero i 6 termini citati, gli elementi di $[F]$ diventano puramente sinusoidali e quindi la particella oscilla in velocità e posizione intorno ai valori iniziali.

Si dimostra così che il rotatrone, nelle ipotesi fatte, è una vera e propria bottiglia magnetica.

I termini in questione vanno a zero quando è soddisfatta la 'relazione di rotatrone'

$$\omega'^2 = 2 \omega^2 \quad (15)$$

in forma esplicita la 15 diventa:

$$f = \frac{eB}{2 \sqrt{2} \pi m}$$

in cui 'f' è la frequenza di rotazione del campo.

Sotto la condizione (15) la matrice $[F]$ si semplifica nella matrice $[F^*]$ (riportata in appendice IV).

Dagli elementi della matrice $[F^*]$ si possono ricavare direttamente le dimensioni del contenitore attraverso il calcolo delle traiettorie.

Questo calcolo si presenta laborioso, anche se concettualmente facile, e non riteniamo questa la sede ove riportare grafici e tabelle in quanto queste sono direttamente legate al tipo di esperimento che ci si propone di fare.

Però allo scopo di dare una indicazione volutamente approssimata degli ingombri di un contenitore di questo tipo possiamo scrivere le seguenti relazioni

$$V_{\max} \cong 3,5 V_0 + 3,5 \omega X_0$$

$$R_{\max} \cong 6 \frac{V_0}{\omega} + 2,5 X_0$$

ove V_{\max} rappresenta circa l'estremo superiore della velocità entro il contenitore in funzione del modulo della velocità iniziale.

R_{\max} rappresenta l'ordine di grandezza del massimo spostamento della posizione iniziale della particella.

Allo scopo di avere una idea delle presumibili dimensioni del contenitore in esame se si considerano particelle di deuterio con velocità di circa 10^6 m/sec (corrispondenti a circa 10^4 e V) in un campo magnetico pari a 0,05 Weber/m² e con spostamenti assiali pari a $\sim 0,4$ metri si trova

$$R_{\max} \cong 4,5 \text{ metri}$$

$$V_{\max} \cong 6,10^6 \text{ m/sec}$$

5) Conclusioni

La 'macchina' proposta ci sembra quindi molto interessante sotto i punti di vista che qui vogliamo riassumere:

- 1) Si può ottenere azione di contenimento, qualora questo sia il punto voluto, (in vista di reazioni termonucleari) quando sia soddisfatta una precisa relazione tra ω e ω' .
- 2) Si può ottenere una azione efficace di separazione di isotopi con meccanismo diverso, ma molto più efficace, di quello degli spettrografi in quanto possono essere incanalate da un gradiente di pressione solo quelle particelle per le quali sia grossolanamente verificata l'azione di contenimento.

Siamo quindi d'opinione che convenga iniziare al più presto una sperimentazione sotto entrambi gli aspetti proposti.

Nota. Dato la particolare natura della matrice F può avvenire che le azioni mutue tra le particelle (azioni di pressione) con plasma denso provochino notevoli perdite delle particelle stesse: infatti la deviazione di traiettoria di una particella che parta dall'origine, provoca maggiori oscillazioni spaziali maggiore è la distanza in direzione X dall'origine. Questo fatto non rende isotropo lo spazio in cui si trova il plasma ed esalta la dispersione delle particelle per effetti termodinamici più di quanto avviene rispetto, per es., al caso di un cilindro infinito.

Cap. III°) - PROGETTO DI MASSIMA DEL 'DISPOSITIVO'

Introduzione

In base al formulario riportato in appendice si è fatto un progetto di massima per un 'rotatrone' con il compito di separare l'Uranio 235 dai suoi isotopi.

Tale dispositivo può trovare applicazione anche come contenitore di gas ionizzati. Date le difficoltà tecniche che si incontrano e il notevole impegno finanziario che tale impresa comporta proponiamo di sperimentare il meccanismo della macchina avendo come prima meta la costruzione di un separatore di isotopi.

Il dispositivo è illustrato nelle figure III.1 e III.2 ove in figura III.1 è dato l'assemblaggio generale della macchina; in figura III.2 lo schema dell' "alimentazione".

Il campo rotante è ottenuto mediante bobine incrociate. Ogni bobina è formata da due in parallelo come è mostrato nella figura III.1 e nello schema funzionale. Entro le bobine è sistemato il recipiente a tenuta di vuoto di materiale non conduttore e facilmente ispezionabile mediante finestre.

Entro tale recipiente entra un tubo di rame con pareti così spesse da schermare il campo; ed il cui interno, almeno per una certa lunghezza è diviso in settori per evitare una penetrazione assiale del campo elettromagnetico.

Questo tubo è la parte finale del dispositivo di iniezione per immettere al centro del contenitore gli atomi di uranio, semplicemente ionizzati, e di piccola energia.

All'esterno del campo magnetico; all'altro capo del tubo, vi è il crogiolo nel quale viene fatto evaporare l'uranio mediante riscaldamento a radiofrequenza. I vapori così prodotti vengono incanalati, dopo la ionizzazione. Per incanalare e foccheggiare il fascio di ioni abbiamo pensato di accelerare le particelle inizialmente con tensioni di 100-200 V.

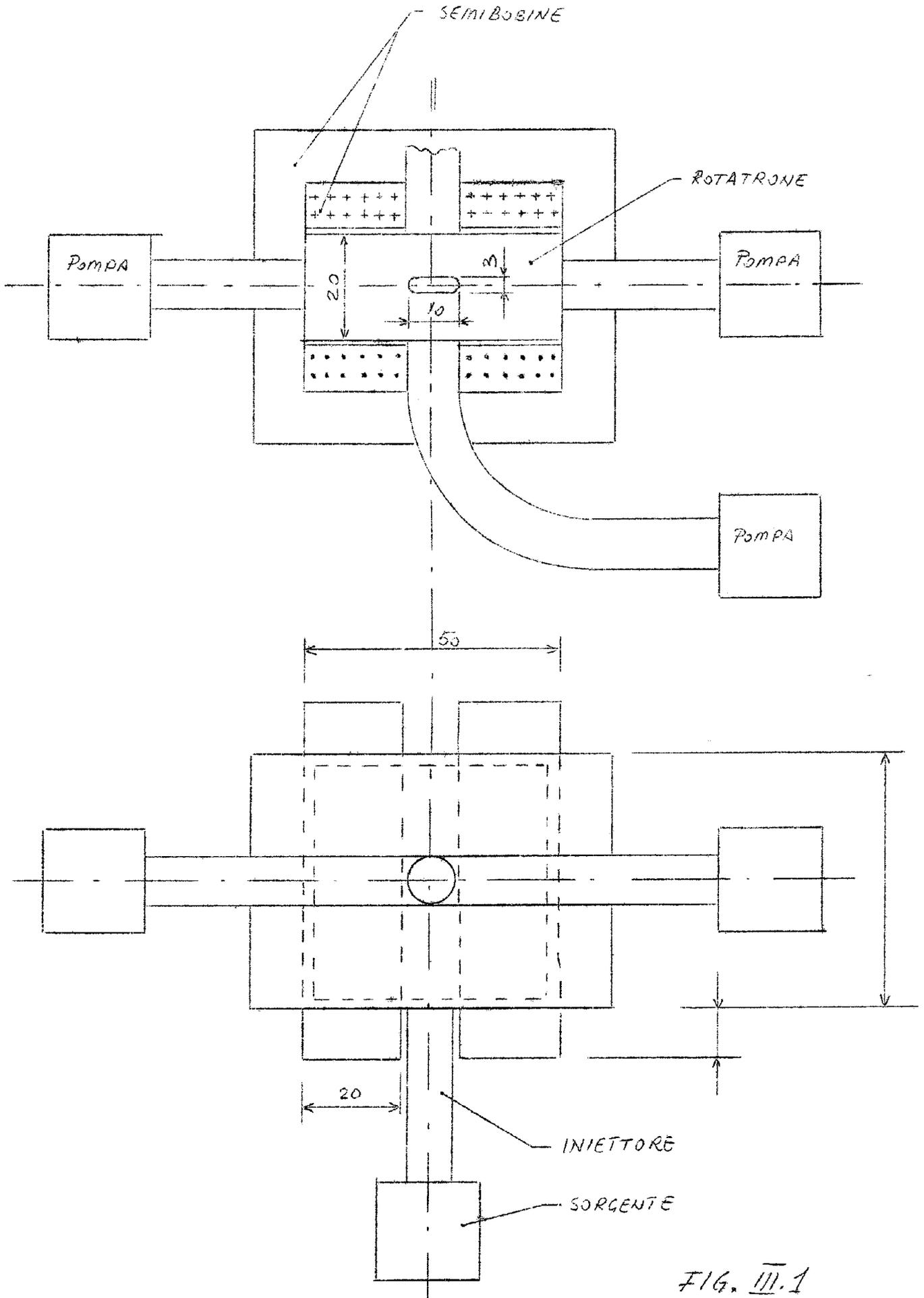


FIG. III.1

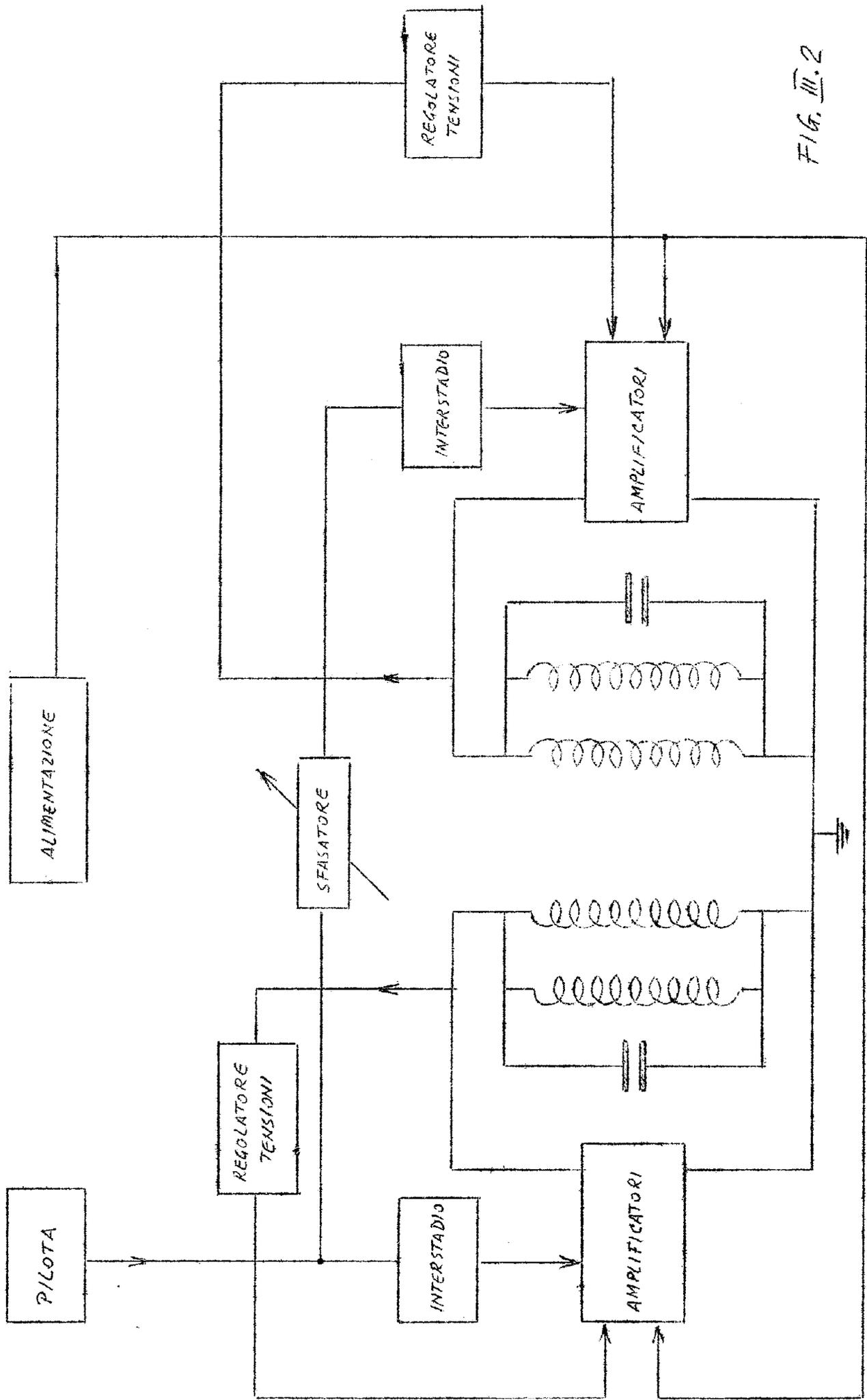


FIG. III.2

e fermarle poi, in modo che si trovino al centro del 'Rotatrone' con la voluta velocità, con un potenziale negativo inferiore di due o tre volt di quello già detto.

Sui dispositivi di iniezione e sui fasci molecolari vi è ampia letteratura.

Il circuito di alimentazione è costituito da due banchi di condensatori, uno per ogni bobina, tali da bilanciare la potenza reattiva in gioco nelle bobine; mentre il circuito di eccitazione di ciascuno dei due circuiti risonanti è fatto con triodi di potenza.

E' stata scelta l'eccitazione a triodi per garantire la stabilità della frequenza e del campo o meglio affinché i valori di ' ω ' e di ' B ' possano variare solamente in modo da rispettare la condizione di rotatrone con la precisione di uno su diecimila.

La differenza di massa tra U_{235} e U_{238} è circa l'1% e tale differenza si ritrova nelle due pulsazioni di ciclotrone. Se è soddisfatta la condizione di rotatrone per l' U_{235} entro la precisione indicata, per la matrice (19) la velocità di fuga del 235 è inferiore a $(e \cdot \text{massa} / 10.000) V_0$, mentre la velocità di fuga del 238 è dell'ordine di $(e \cdot \text{massa} / 100) V_0$, e cioè cento volte maggiore della velocità di fuga del 235. Si ha così un arricchimento della parte centrale del gas in U_{235} che andrà a depositarsi preferenzialmente sulle pareti del contenitore vicine al centro (le pareti sono raffreddate) mentre il 238 preferenzialmente andrà a depositarsi sulle pareti laterali e lontane dalla bocca di iniezione.

2) - Dimensionamento elettrico e meccanico

I parametri che abbiamo assunto come base di partenza sono: (per i simboli vedi appendice)

| | | |
|--|------|-----------|
| E_0 = (energia iniziale della particella | 2 - | 4 eV. |
| B = (campo magnetico) | 1000 | 1000 Gaus |
| A = (peso atomico) | 235 | 235 |

da questi dati si ottiene:

| | | |
|------------------------------------|----------------------|---------------------------|
| V (spira) = | 336 | 672 Volt |
| Σ (energia utile del campo) | 400 | 1130 Joule |
| W = (Potenza) | $1,24 \cdot 10^7$ | $3,45 \cdot 10^7$ Watt |
| ω' = | $4,25 \cdot 10^4$ | $4,25 \cdot 10^4$ rad/sec |
| ω = pulsaz. del campo | $3,05 \cdot 10^4$ | $3,05 \cdot 10^4$ |
| F = (frequenza) | $4,8 \cdot 10^3$ | $4,8 \cdot 10^3$ Hz |
| v_0 = (velocità di iniezione) | $1,3 \cdot 10^3$ m/s | $1,7 \cdot 10^3$ m/s |

Facciamo l'ipotesi come detto nella introduzione che le particelle vengano iniettate circa al centro della zona utile del contenitore ($x_0 = 0$). Dalle relazioni (2) della appendice III si ottiene:

| | | |
|--------------|-------|-------|
| X_{\max} = | 10 cm | 14 cm |
| R_{\max} = | 24 cm | 33 cm |

Per cui si ha che le interne utili del contenitore sono come da figura III.1

20 x 50 x 50 cm.

I dati relativi a 4 eV di energia di iniezione condurrebbero a

30 x 70 x 70 cm

Il contenitore può essere realizzato col materiale 'araldite quarzata; quarzo in polvere e indurenti' cotto in forno con metallizzazione interna costituita da strisce di acciaio inossidabile.

Le strisce di acciaio hanno saldato un tubo di rame per il raffreddamento, ed hanno il duplice compito di proteggere termicamente il contenitore di araldite e di impedire il localizzarsi di cariche.

Il dimensionamento delle bobine può farsi come segue.

Facendo 60 spire ogni semi bobina (due semi bobine in parallelo), si ha una tensione di alimentazione di 20.000 Volt massimi.

La corrente di spira diventa di circa 400 A efficaci. Calcolando circa 5 amp per mm^2 e tenendo conto di un coefficiente di stipamento pari a 0.3, poichè il conduttore deve essere di treccia di rame trasposta con diametro massimo di ogni filo è di 2 decimi di millimetro, si ottiene una sezione totale di rame per semi-bobina pari a circa 2 decimetri quadri.

Le perdite in tali bobine saranno dell'ordine di circa 100 KW per ogni bobina (50 kW per ogni semibobina).

I condensatori per alimentare i due gruppi di bobine (i due banchi sono diversi e dovranno essere previsti con la possibilità di una regolazione della frequenza di risonanza) si calcolano dai dati della potenza reattiva e della tensione di lavoro. (circa 400 Joule; a 20.000 Volts; con frequenza di circa 5000 periodi; nel secondo caso ovviamente i banchi avranno l'energia di circa 1130 joule, la stessa tensione e frequenza).

Ciascuno dei due circuiti risonanti sopra descritti viene alimentato da un alimentatore a triodi termoionici comandato in frequenza da un auto-oscillatore di tipo stabile, ad esempio tipo 'clapp'; mentre è necessaria una regolazione sulla tensione uscente che mantenga questa tensione entro il più o meno uno per diecimila.

I due circuiti, che sono pilotati dallo stesso pilota attraverso una rete sfasatrice, devono essere dimensionati per una potenza erogabile continua di 400 kW.

Tale cifra, nettamente superiore a quanto risulta dai calcoli, è ritenuta cautelativa affinché i tubi elettronici stessi possano erogare anche la potenza reattiva.

La sorgente di ioni come abbiamo detto è costituito sostanzialmente da due parti; la sorgente vera e propria, fuori del campo magnetico e di tipo usuale, (vaporizzatore di uranio e fascio elettronico ionizzante) e da un tubo (di materiale conduttore) di adduzione che il duplice compito di schermare il campo magne -

tico quasi fino al centro del contenitore a quello di portare (senza che il fascio si disperda) alla energia voluta le particelle che devono essere separate.

La densità di corrente ionica è calcolata nell'ipotesi di avere una portata complessiva di circa 0.1 kg/ora di materiale. Ammettiamo che il tubo sia percorso da particelle accelerate ad alta tensione $\sim 200V$ come detto e rallentate fino all'energia di iniezione solo in prossimità della bocca di uscita. Ne risulta una velocità di circa $1,3 \cdot 10^4$ m/s. Il numero di particelle che quindi devono entrare al secondo è di $2,5 \cdot 10^{24}$ particelle al secondo.

Vi dovranno quindi essere $\sim 2 \cdot 10^{22}$ particelle per m^3 con sezione del tubo pari a un decimetro quadro. Queste alla temperatura di 1600° Kelvin (evaporazione dell'uranio) danno luogo ad una pressione di circa $4 \cdot 10^{-4}$ mm di Hg. ed una corrente pari a ~ 10 Amp.

Il dispositivo di vuotatura può essere ottenuto con due pompe a diffusione da 1000 litri ciascuna collegate ad una sola pompa rotativa. Queste pompe devono essere sistemate con il tubo di vuotatura nel piano yz. Una terza pompa a diffusione aspira direttamente dalla parte centrale del contenitore.

Tutto l'apparato descritto così sommariamente viene comandato da un sincronizzatore principale che agisce direttamente sull'apparato di alimentazione e che permette la variazione di tensioni e frequenze entro piccoli intervalli per ottimizzare le condizioni di funzionamento della macchina.

3) - Programma di lavoro.

a) Personale necessario.

I lavori più importanti sono 3

Costruzione della sorgente

Regolazione del sistema di alimentazione

Misure magnetiche e costruzione bobine

accanto a questi lavori vi è da dare ancora un notevole contributo al calcolo teorico.

Pensiamo che svolgere il lavoro così programmato occorra uno staf composto da:

Due Laureati per studiare la regolazione e l'alimentazione
(due anni)

Tre Laureati per la parte magnetica

Un laureato con tendenze fisiche matematiche per i calcoli

Due Laureati per la sorgente e la rivelazione delle proprietà ottiche del contenitore.

8 Tecnici così presumibilmente divisi: 3 alimentazione, 3 magneti, 2 sorgenti.

Si intende la collaborazione e l'appoggio dei servizi generali di Frascati.

Preventivo di spesa. Oltre le spese per il personale indicato possiamo fornire il seguente quadro.

L'impegno finanziario previsto è di L. 300.000.000 (personale escluso).

Codesto impegno risulta elevato sia in mezzi sia in personale per cui lo svolgimento del lavoro potrebbe essere fatto con altri istituti che a questo tipo di lavoro hanno mostrato interesse. Crediamo opportuno però che la responsabilità e direzione del lavoro sia affidata esclusivamente ai proponenti.

In linea di massima si prevede che il tempo di realizzazione sia di due anni per la costruzione dell'apparecchiatura.

Non è stimabile oggi il tempo successivo necessario alla sperimentazione.

TABELLA DELLA RIPARTIZIONE DELLE
SPESE

| | 60 | 61 | 62 | TOTALI |
|---|-------------|-------------|-------------|--------|
| Sorgente inflettore | 15.000.000 | | 10.000.000 | |
| Bobine e condensatori | 5.000.000 | | 30.000.000 | |
| Alimentatore | 60.000.000 | | 40.000.000 | |
| Comando e stabil. contenitore | 10.000.000 | | 10.000.000 | |
| Sistema di vuoto e accessori | 15.000.000 | | 25.000.000 | |
| Strumentazione speciale model. | 20.000.000 | | 10.000.000 | |
| Imprevisti e accessori | 20.000.000 | | 20.000.000 | |
| <hr/> | | | | |
| TOTALI | 145.000.000 | 145.000.000 | 290.000.000 | |

APPENDICE I

Calcolo del campo elettrico E associato al campo magnetico.

Si ha :

$$\text{rot } E = - \frac{dB}{dt}$$

da cui si ottiene con i valori di B della formula 1

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = \omega B_0 \cos \omega t$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\omega B_0 \sin \omega t$$

Da cui si vede che il campo elettrico E è il seguente

$$E_x = 0$$

$$E_y = -x \omega B_0 \cos \omega t$$

$$E_z = -x \omega B_0 \sin \omega t$$

Passaggi dei calcoli per determinare la traiettoria di una particella carica.

Dalla (4) e (5) si ottiene trascurando i termini in \tilde{c}^2

$$|R| |W| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\omega' \tilde{c} \\ 0 & 1 & -\omega \tilde{c} \\ \omega' \tilde{c} & \omega \tilde{c} & 1 \end{vmatrix}$$

Le radici della equazione secolare di $|R| |W|$ sono :

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2,3} = e^{\pm i \tilde{c} \sqrt{\omega^2 + \omega'^2}}$$

$$\text{chiamo } c = \sqrt{\omega'^2 + \omega^2}$$

La matrice $|M|$ che linearizza la $|R|$ $|W|$ e la sua inversa $|M^{-1}|$ sono rispettivamente :

$$|M| = \begin{vmatrix} \frac{i\omega}{c} & \frac{i\omega'}{c} & -\frac{i\omega'}{c} \\ -\frac{i\omega'}{c} & \frac{i\omega}{c} & -\frac{i\omega}{c} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|M^{-1}| = \begin{vmatrix} -\frac{i\omega}{c} & \frac{i\omega}{c} & 0 \\ -\frac{i\omega'}{2c} & -\frac{i\omega}{2c} & \frac{1}{2} \\ \frac{i\omega'}{2c} & \frac{i\omega}{2c} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Abbiamo inoltre : $|T| [|R| |W|]^n = |T| |M| |A|^n |M^{-1}| = |Q|$

ove

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\tilde{\omega}c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\tilde{\omega}c} \end{vmatrix}$$

Si ha ponendo $n\tilde{\omega} = t$

$$|S| = |M| |A|^n = \begin{vmatrix} \frac{i\omega}{c} & \frac{i\omega' e^{ict}}{c} & -\frac{i\omega' e^{-ict}}{c} \\ -\frac{i\omega}{c} & \frac{i\omega e^{ict}}{c} & -\frac{i\omega e^{-ict}}{c} \\ 0 & e^{ict} & e^{-ict} \end{vmatrix}$$

$$|P| = |T||S| = \begin{vmatrix} \frac{i\omega}{c} & \frac{i\omega' e^{ict}}{c} & -\frac{i\omega' e^{-ict}}{c} \\ -\frac{i\omega'}{c} \cos \omega t & e^{ict} \left(\frac{i\omega'}{c} \cos \omega t + \sin \omega t \right) & e^{-ict} \left(-\frac{i\omega'}{c} \cos \omega t + \sin \omega t \right) \\ \frac{i\omega}{c} \sin \omega t & e^{ict} \left(-\frac{i\omega}{c} \sin \omega t + \cos \omega t \right) & e^{-ict} \left(\frac{i\omega}{c} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \end{vmatrix}$$

Si ottiene dalle matrici precedenti facilmente la matrice K che compare nella (8)

T A B E L L A I

ENERGIA MAGNETICA IN JAULE NECESSARIA A CONTENERE IONI DI IDROGENO
PER IONI DI DEUTERIO : NUMERI INDICATI VANNO MOLTIPLICATI PER 2 -

| | | | | | | | | |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| t sec. v m/sec | 10^{-6} | 5×10^{-6} | 10^{-5} | 5×10^{-5} | 10^{-4} | 2×10^{-4} | 5×10^{-4} | 10^{-3} |
| 10^4 | $3,4 \times 10^{-4}$ | 17×10^{-4} | $3,4 \times 10^{-3}$ | $1,7 \times 10^{-2}$ | $3,4 \times 10^{-2}$ | 7×10^{-2} | $1,7 \times 10^{-1}$ | $3,4 \times 10^{-1}$ |
| 5×10^4 | $1,25 \times 10^{-2}$ | $21,2 \times 10^{-2}$ | $4,25 \times 10^{-2}$ | $21,2 \times 10^{-1}$ | 4,25 | 8,5 | 21,2 | 42,5 |
| 10^5 | $3,4 \times 10^{-1}$ | 1,7 | 3,4 | 17 | 34 | 70 | 170 | 340 |
| 5×10^5 | 42,5 | 212 | 425 | 2120 | 4250 | 8500 | 21200 | 42500 |
| 10^6 | 340 | 1700 | 3400 | 17000 | 34000 | 70000 | 170000 | 340000 |
| 5×10^6 | $42,5 \times 10^{-3}$ | $2,12 \times 10^5$ | $4,25 \times 10^5$ | $2,12 \times 10^6$ | $4,25 \times 10^6$ | $8,5 \times 10^6$ | $21,2 \times 10^6$ | $42,5 \times 10^6$ |
| 10^7 | 340000 | $1,7 \times 10^6$ | 34×10^{-6} | 17×10^6 | 34×10^6 | 70×10^6 | 17×10^6 | 340×10^6 |

T A B E L L A II

VOLUME IN M³ CORRISPONDENTE ALL'ENERGIA MAGNETICA PER DIVERSI B

| E_B | 10^{-2} | 10^{-1} | 1 | 10 | 10^2 | 10^3 | 10^4 | 10^5 | 10^6 |
|-------|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 | $0,6 \times 10^{-8}$ | $0,6 \times 10^7$ | $0,6 \times 10^6$ | $0,6 \times 10^5$ | $0,6 \times 10^4$ | $0,6 \times 10^3$ | $0,6 \times 10^2$ | $0,6 \times 10^1$ | 0,6 |
| 5 | $2,4 \times 10^{-10}$ | $2,4 \times 10^9$ | $2,4 \times 10^8$ | $2,4 \times 10^7$ | $2,4 \times 10^6$ | $2,4 \times 10^5$ | $2,4 \times 10^4$ | $2,4 \times 10^3$ | $2,4 \times 10^2$ |
| 10 | $0,6 \times 10^{-10}$ | $0,6 \times 10^9$ | $0,6 \times 10^8$ | $0,6 \times 10^7$ | $0,6 \times 10^6$ | $0,6 \times 10^5$ | $0,6 \times 10^4$ | $0,6 \times 10^3$ | $0,6 \times 10^2$ |

APPENDICE II

Sono riportate le matrici (16) (17) (18) (19) (28) già citate nel testo.

N.B. : Per esigenze tipografiche l' ω è stata sostituita da w

$$\left| M \right| = \begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & -w^1 \zeta & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & w \zeta & -w w^1 \zeta & 0 & 0 \\
 w^1 \zeta & -w \zeta & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \zeta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & & w^2 \zeta & 0 & 1 & w \zeta \\
 0 & -w^2 \zeta & \zeta & 0 & -w \zeta & 1
 \end{array} \quad (16)$$

| | | | | | |
|---|--|--|---|---|--------------|
| $\cos w^2 t$ | $\frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{w^2 - w^2}$ | 0 |
| 0 | $\cos w^2 t$ | $\sin w^2 t$ | $\sin w^2 t$ | $w^2 \sin w^2 t$ | 0 |
| $\sin w^2 t$ | $\frac{2 w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{2 w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{2 w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{w^2 - w^2}$ | 0 |
| $\frac{\sin w^2 t}{w^2}$ | $\frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{w^2 - w^2}$ | 0 |
| $\frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $\frac{2w^2 - w^2}{2(w^2 - w^2)} \sin w^2 t + \frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{(w^2 - w^2)^2}$ | $\frac{2w^2 - w^2}{2(w^2 - w^2)} \cos w^2 t + \frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{(w^2 - w^2)^2}$ | A | B | $\sin w^2 t$ |
| $\frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{w^2 - w^2}$ | $t \frac{(2w^2 - w^2) \sin w^2 t}{2(w^2 - w^2)} + \frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{(w^2 - w^2)^2}$ | $t \frac{(2w^2 - w^2) \cos w^2 t}{2(w^2 - w^2)} + \frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{(w^2 - w^2)^2}$ | C | D | $\cos w^2 t$ |

(19)

| f'' | =

over A = $-t \frac{(2w^2 - w^2) \cos w^2 t}{2(w^2 - w^2)} + \frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{2w(w^2 - w^2)} + \frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{(w^2 - w^2)^2}$; B = $t \frac{(2w^2 - w^2) w^2 \sin w^2 t}{2(w^2 - w^2)^2} + \frac{w^2 \cos w^2 t - w^2 \cos w^2 t}{(w^2 - w^2)^2}$;

C = $t \frac{2w^2 - w^2}{2(w^2 - w^2)} \cos w^2 t + \frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{(w^2 - w^2)^2}$; D = $t \frac{(2w^2 - w^2) w^2 \cos w^2 t}{2w(w^2 - w^2)^2} + \frac{\sin w^2 t w^2 w^2}{2w(w^2 - w^2)^2} + \frac{w^2 \sin w^2 t - w^2 \sin w^2 t}{(w^2 - w^2)^2}$

| | | | | | |
|---|--|---|---|-------------------|-----------------|
| $\cos \sqrt{2} \omega t$ | $\sqrt{2} \cos \omega t - \sqrt{2} \cos \sqrt{2} \omega t$ | $\sqrt{2} \sin \omega t - 2 \sin \sqrt{2} \omega t$ | $(\sqrt{2} \sin \sqrt{2} \omega t - 2 \sin \omega t) \omega$ | 0 | 0 |
| 0 | $\cos \omega t$ | $\sin \omega t$ | $\sqrt{2} \omega \sin \omega t$ | 0 | 0 |
| $\sin \sqrt{2} \omega t$ | $\sin \omega t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2} \omega t$ | $2 \cos \sqrt{2} \omega t - \cos \omega t$ | $(\sqrt{2} \cos \omega t - \sqrt{2} \cos \sqrt{2} \omega t) \omega$ | 0 | 0 |
| $\frac{\sin \sqrt{2} \omega t}{\sqrt{2} \omega}$ | $\frac{\sqrt{2} \sin \omega t - \sin \sqrt{2} \omega t}{\omega}$ | $\frac{\sqrt{2} \cos \sqrt{2} \omega t - \sqrt{2} \cos \omega t}{\omega}$ | $2 \cos \omega t - \cos \sqrt{2} \omega t$ | 0 | 0 |
| $\frac{\sqrt{2} \sin \omega t - \sin \sqrt{2} \omega t}{\omega}$ | $+$ | $\frac{\sqrt{2} \sin \sqrt{2} \omega t - \sin \omega t}{\omega}$ | $\sqrt{2} \cos \sqrt{2} \omega t - \sqrt{2} \cos \omega t$ | $\cos \omega t$ | $\sin \omega t$ |
| $\frac{\sqrt{2} \cos \omega t - \sqrt{2} \cos \sqrt{2} \omega t}{\omega}$ | $+$ | $\frac{2 \cos \sqrt{2} \omega t - 2 \cos \omega t}{\omega}$ | $- 2 \sin \sqrt{2} \omega t$ | $- \sin \omega t$ | $\cos \omega t$ |

(20)

$|F^*| =$

APPENDICE III

FORMULARIO RELATIVO AL 'CONTENITORE'

$$\omega = \frac{eB}{m\sqrt{2}} = 7,1 \cdot 10^{-7} \frac{B}{A}$$

ove ω = pulsazione del campo

(1)

A = numero atomico dell'elemento considerato

$$\left. \begin{aligned} V_{max} &\cong 4V_0 + 3X_0 \omega \\ R_{max} &\cong 6 \frac{V_0}{\omega} + 2,5 X_0 \\ X_{max} &= 2,5 \frac{V_0}{\omega} + 2,5 X_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ove V_{max} è la massima velocità che può acquisire una particella.

R_{max} è il massima spostamento della particella nel piano yz cioè nel piano del campo rotante.

X_{max} è il massimo spostamento della particella in direzione normale al piano del campo.

Le formule (2) sono solamente indicative e sono ricavate direttamente per ispezione dalla matrice F^* .

$$E_0 = \frac{1}{2} m V^2 \frac{1}{e} \quad \text{ove } E_0 \text{ è la energia della particella (3)}$$

in elettron volt.

$$V = \omega B 4 R_{max} X_{max} \quad \text{ove } V \text{ è la (4)}$$

tensione 'di spira' per ogni bobina che crea il campo

$$E = \frac{1}{2} \int_V H B dV = 4K \frac{B^2}{\mu} R_{max}^2 X_{max} \quad \text{ove } E \text{ è l'energia (5)}$$

del campo mentre K è un coefficiente compreso tra 1 e 2 che con le dimensioni del contenitore può valere circa 1,25 + 1,5 e che tiene conto del flusso disperso.

$$W = \frac{dE}{dt} = \omega E \quad \text{è la potenza reattiva in gioco (6)}$$

$$W_A = \frac{\omega E}{Q} \quad \text{è la potenza attiva richiesta al circuito di alimentazione (7)}$$

Le formule (2) nelle quali si è posto per semplicità $X_0 = 0$ (e quindi valevoli esattamente solo per una particella al centro del rotatrone), combinate con le formule precedenti le trasformano nelle seguenti :

$$V(\text{spira})_{\max} = 4 \omega B \cdot 6 \cdot 2,5 \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2 \cong 168 E_0 \quad (8)$$

$$\mathcal{E} = 4K \frac{B^2}{\mu} 36 \frac{V_0}{\omega^2} \cdot 2,5 \frac{V}{\omega} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{(E_0 A)^{\frac{3}{2}}}{B} \quad (9)$$

$$W = 2,8 \cdot 10^5 \cdot E_0^{\frac{3}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$I_{\max} = 3,35 \cdot 10^{-3} \sqrt{E_0 A} \quad (11)$$

Se però la tensione V diventa NV in quanto N sono le spire allora la formula finale è :

$$I_{\text{bobina}} = \frac{3,35}{N} 10^3 \sqrt{E_0 A} \quad (12)$$

NOTA - Nelle formule precedenti si è tenuto conto del fatto che $\frac{m}{e} = 10^{-8} \text{ A}$.

APPENDICE IV

Se si introduce lungo l'asse x in un campo magnetico di induzione B_1 costante nel tempo la matrice M (16) diventa la matrice (16')

$$\text{ove } \omega'' = \frac{e B_1}{m}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\omega' \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega'' + \omega) \tau & -\omega' \omega \tau & 0 & 0 \\ \omega' \tau & -(\omega'' + \omega) \tau & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & \omega^2 \tau & 0 & 1 & \omega \tau \\ 0 & -\omega^2 \tau & \tau & 0 & -\omega \tau & 1 \end{vmatrix} \quad (16')$$

Con questa le radici della equazione secolare sono le seguenti :

$$(1 - \lambda) = \pm \tau \sqrt{\frac{-[(\omega'' + \omega)^2 + \omega'^2] \pm \sqrt{[(\omega'' + \omega)^2 + \omega'^2]^2 - 4\omega\omega'^2(\omega'' + \omega)}}{2}}$$

$$(1 - \lambda) = \pm j\omega\tau$$

Si vede così facilmente che si ha contenimento nella zona per la quale sia verificata la disuguaglianza

$$[(\omega'' + \omega)^2 + \omega'^2]^2 > 4\omega\omega'^2(\omega'' + \omega)$$

Questa disuguaglianza impone il valore sui campi perchè si abbia contenimento e cioè :

Radici tutte distinte ed immaginarie.

Per vedere come gioca la disuniformità del campo magnetico sul moto delle particelle facciamo l'ipotesi - semplificativa che la matrice 19 contenga solo i termini ove compare il tempo a fattore (questo può dare risultati indicativi sugli spostamenti medi della particella poichè tutti gli altri termini rappresentano termini perturbativi rispetto ai precedenti).

Tutto ciò premesso ed applicando la matrice di rotazione sulle coordinate si ottiene per $X_0 = 0$ la seguente relazione

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = -F V_{y_0} \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = -F V_{z_0} \end{cases}$$

ove

$$F = \frac{2\omega^2 - \omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2}$$

Se si pone in grossolana approssimazione $F = -\sqrt{1 - (K_y)^2}$ nella I e nella seconda $F = -\sqrt{1 - (K_x)^2}$ si ottiene genericamente

$$\frac{d\xi}{\sqrt{1 - (K\xi)^2}} = V_0 t$$

la cui soluzione è : $\xi = \sin \frac{V_0}{K} t$

Questo fatto indica che particolari forme di campo possono migliorare il foccheggiamento delle particelle, cioè anche se in un punto il campo non ha il valore voluto il gradiente del campo stesso può riflettere le partibelle.

B I B L I O G R A F I A

- 1 - Proceedings of the Second U.N. International Conference ecc. Sept. 58 - Vol. 31 - pag. 6 + 21; pag. 34 + 39 United Nation 1959.
- 2 - William P. Allyn : Nuclear Fusion - Van Nostrand 1960.
- 3 - L. Spitzer : Physic of fully ionised Gases pag. 2 + 5 1956 - Interscience Publiscer N.Y.
- 4 - G. Sacerdoti : Studio del moto di una particella carica in un campo magnetico ecc. Pres. Prof. Sartori : Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino - Vol. 93 (1958 + 60).
- 5 - G. Sacerdoti : Studio delle proprietà ottiche di un quadripolo elicoidale - Elettrotecnica. Maggio 1960.
- 6 - G. Sacerdoti : Un nuovo tipo di contenitore magnetico 'Il rotatrone'
- 7 - N. Margenau and G.M. Murphy : The matematics of Phisics and Chemistry - D. Van Nostrand Company, inc. - 1956.
