

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-59/2 (5. 1. 59)

C. Bernardini: CORREZIONI DERIVANTI DAI DECADIMENTI IN VOLO  
IN UN'ESPERIENZA CON MAGNETI E CONTATORI.

Nota interna: n° 8  
5 Gennaio, 1959

C. Bernardini: CORREZIONI DERIVANTI DAI DECADIMENTI IN  
VOLO IN UN'ESPERIENZA CON MAGNETI E CONTATORI.

Per illustrare il significato di queste correzioni conviene fare riferimento ad una esperienza particolare. Supponiamo di voler misurare il numero di mesoni  $\mu^-$  che provengono da una targhetta (in cui sono fotoprodotti in coppia  $\mu^+$ ,  $\mu^-$ ) ad un certo angolo e con un certo momento. Per questo predisporremo sul cammino targhetta-rivelatori uno o più magneti che selezionano il momento e contribuiscono, insieme con il telescopio di contatori, a selezionare l'angolo e l'angolo solido. Nello stesso canale possono essere raccolti mesoni  $\pi^-$ , i quali possono decadere in volo dando origine ad un mesone  $\mu^-$  che viene registrato con gli altri: se ci interessano solo i  $\mu^-$  prodotti in coppie nella targhetta dobbiamo calcolare qual'è il numero di  $\mu^-$ , nel canale, che proviene dal decadimento  $\pi - \mu$ .

Nel calcolo della correzione non è conveniente introdurre il numero di  $\pi^-$  primari che possono dar luogo ad eventi 'falsi'. Questo numero infatti dipende dai dettagli del dispositivo sperimentale: può essere quello di tutti i  $\pi^-$  prodotti in ogni modo a quell'angolo con quel

momento, oppure, se si dispone di una coincidenza sul canale positivo ( $\pi^+, \mu^+$ ), soltanto il numero dei  $\pi^-$  prodotti in coppia  $\pi^-; \pi^+$ . La quantità calcolata sarà invece la probabilità che un  $\mu^-$  di decadimento raggiunga il telescopio e venga registrato.

Se non vi fossero restrizioni provenienti dalla geometria del dispositivo di analisi e rivelazione, il calcolo sarebbe presto fatto: infatti, se  $\ell$  è la distanza targhetta-rivelatori (misurata lungo una possibile traiettoria)  $P$  il momento della particella che decade,  $m$  la sua massa e  $\tau_0$  la vita media a riposo, la probabilità  $w$  anzidetta sarebbe semplicemente

$$w = w_0 = 1 - \exp\left(-\frac{m\ell}{p\tau_0}\right) \quad (1)$$

In realtà solo una frazione delle particelle provenienti da decadimento ad una distanza  $S$  dalla targhetta giunge al telescopio a causa della selezione operata da magneti e contatori sulla distribuzione in angolo e in momento del decadimento stesso. In genere anzi l'andamento di  $w_0$  in funzione di  $p$  è molto diverso dall'andamento di  $w$  con  $p$  perchè il fattore geometrico cresce (almeno per  $p$  non molto elevati) rapidamente con l'energia: infatti al crescere dell'energia il numero dei decadimenti in avanti entro un angolo solido assegnato aumenta come  $p^2$  (decadimenti a due corpi).

Il calcolo si riduce a quello di una funzione

$$\eta(s, p) \quad (\text{fattore geometrico})$$

che rappresenta la frazione dei decadimenti, di primari di momento  $p$ , avvenuti in  $S$ , che raggiunge il telescopio.

Successivamente si calcola  $w(P)$  mediante l'integrale:

$$w(p) = \frac{m}{p\tau_0} \int_0^\ell \eta(s, p) \exp\left(-\frac{ms}{p\tau_0}\right) ds \quad (2)$$

Gli sviluppi analitici non implicano che il decadimento considerato sia il  $\pi - \mu$ . Le tabelle ed i grafici sono però riferite a questo caso; inoltre l'analizzatore considerato a titolo di esempio è quello illustrato da Sonna (1).

2 - Consideriamo un decadimento a due corpi. La distribuzione angolare nel baricentro (notazioni con apice) è isotropa; cioè gli eventi che si producono in un angolo solido  $d\Omega'$  sono

$$\frac{d\Omega'}{4\pi} \times \quad (\text{numero dei primari})$$

Prendendo come asse la linea di volo del primario

$$d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

Per piccoli angoli nel sistema del laboratorio (notazioni senza apice)

$$\theta \approx \frac{m}{p} \beta' \theta'$$

dove  $\beta'$  è una costante pari alla velocità della particella prodotta, nel baricentro. Segue che a piccoli angoli la distribuzione angolare nel laboratorio è

$$\approx \left( \frac{p}{m\beta'} \right)^2 \frac{\theta d\theta d\varphi}{4\pi}$$

Inoltre, se

$$\left( \frac{p}{m\beta'} \right)^2 \gg 1$$

i decadimenti sono tutti confinati a piccoli angoli e l'angolo massimo di produzione è

$$\theta_{max} \approx \frac{m\beta'}{p}$$

Si può dire sin d'ora che il fattore geometrico  $\eta$  di cui al § 1 avrà gran peso nel calcolo di  $w$  sino a che

l'analizzatore descritto da Sona (1).

3 - Prima di dare le formule che permettono il calcolo esatto di  $\eta(s,p)$  (da effettuarsi eventualmente mediante una calcolatrice) consideriamo ancora il caso di momenti così bassi che (v. formula 4).

$$|\varepsilon| \gg \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{analizzatore}}$$

Per esempio, nel caso  $\pi - \mu$  a  $100 \frac{\text{MeV}}{c}$  per il  $\pi$

$$|\varepsilon| = 75\%$$

In questo caso si può ancora ragionare in modo semplice: infatti, consideriamo una disposizione sperimentale generica in cui sia

$S_1$  = distanza targhetta - ingresso primo magnete

$S_2$  = distanza uscita ultimo magnete-telescopio

Inoltre siano  $B_1, R_1$  il campo ed il raggio di curvatura adatti al momento  $p$  nel primo magnete;  $B_2, R_2$  per l'ultimo magnete. Consideriamo ora p. esempio una particella madre che abbia attraversato tutto il dispositivo e decada all'interno dell'ultimo magnete; inoltre, chiamiamo  $\int_2$  il massimo angolo di deviazione, nel piano orizzontale, all'uscita dell'ultimo magnete, che permette ad una particella l'ingresso nel telescopio.

Con facili considerazioni geometriche (v. fig. 2) si vede che non arrivano al telescopio particelle figlie prodotte ad una distanza, dall'uscita dell'ultimo magnete ed all'interno di esso,  $\approx R_2 \frac{\int_2}{|\varepsilon|}$ . Con analoghe considerazioni si può trovare la massima distanza dal bordo d'ingresso all'inizio del primo magnete.

In conclusione, se  $|\varepsilon| \gg \frac{\Delta p}{p}$ , arrivano al telescopio:

- a) dal tratto  $0 - s_1$  della traiettoria principale particelle figlie provenienti da madri di momento  $p(1 + \varepsilon)$  con efficienza geometrica  $\Delta \Omega / \theta_{max}^2$ , dove  $\theta_{max}$  è calcolato per il momento  $p(1 + \varepsilon)$ .
- b) dal tratto  $s_1$  a  $s_1 + R_1 \frac{d_1}{|\varepsilon|}$ ; idem per i momenti ma con efficienza geometrica che va da  $\Delta \Omega / \theta_{max}^2$  all'ingresso a zero in  $s_1 + R_1 \frac{d_1}{|\varepsilon|}$  (per semplicità, linearmente).
- c) dal tratto  $l - R_2 \frac{d_2}{|\varepsilon|} - s_2$  a  $l - s_2$  particelle figlie provenienti da madri di momento  $p$ , con efficienza geometrica che cresce linearmente da 0 a  $\frac{\Delta \Omega_2}{\theta_{max}^2} - \Delta \Omega_2$  è ora il prodotto del massimo angolo all'uscita dell'ultimo magnete, nel piano verticale, accettato da telescopio, per  $\int_2$ .
- d) dal tratto  $l - s_2$  a  $l$ , idem per i momenti, con efficienza geometrica  $\approx \frac{\Delta \Omega_2}{\theta_{max}^2}$ .

Si noti che le particelle figlie di cui in c) e d) arrivano al telescopio con momenti diversi da quelli corrispondenti al canale magnetico e questo fatto può avere importanza nel progetto del telescopio.

L'espressione (2) di  $w$  diviene così la seguente:

$$\begin{aligned}
 w \approx \Delta \Omega \frac{p^2(1+\varepsilon)^2}{(m\beta')^2} \frac{\sigma[p(1+\varepsilon)]}{\sigma(p)} w_0 \left[ s_1 + \frac{1}{2} R_1 \frac{d_1}{|\varepsilon|}, p(1+\varepsilon) \right] + \\
 + \Delta \Omega_2 \frac{p^2}{(m\beta')^2} w_0 \left[ s_2 + \frac{1}{2} R_2 \frac{d_2}{|\varepsilon|}, p \right] \exp \left[ - \frac{m(l - s_2 - \frac{1}{2} R_2 \frac{d_2}{|\varepsilon|})}{p \tau_0} \right]
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Come nella (1),  $w_0(S, p)$  sta per  $1 - \exp(-\frac{mS}{p\tau_0})$ . Inoltre  $\sigma(p)$  sta per la sezione d'urto differenziale per produzione di particelle madri di momento  $p$  all'angolo considerato; il rapporto tra le sezioni d'urto va considerato come sopra indicato per correggere per il fat-

to che nel primo tratto le particelle madri che interessano hanno un momento diverso da quello del canale magnetico.

4 - Conviene riassumere brevemente questi risultati:

$\alpha$ ) se  $|\varepsilon| \gg \left(\frac{\Delta p}{p}\right)$  analizzatore, cioè per momenti bassi

$w(p)$  è dato dalla formula (5)

$\beta$ ) se  $|\varepsilon| < \left(\frac{\Delta p}{p}\right)$  analizz., ma  $p < \frac{m\beta'}{\sqrt{\Delta\Omega}}$

$w(p)$  è dato dalla formula (3)

$\gamma$ ) se  $p > \frac{m\beta'}{\sqrt{\Delta\Omega}}$ ,  $w(p) = w_0(p)$  secondo la (1).

Nel caso  $\pi - \mu$  si ha p.esempio, per  $\left(\frac{\Delta p}{p}\right)$  analizz. = 2%,  
 $\Delta\Omega = 10^{-3}$  sterad:

$\alpha$ ) formula (5) per  $p_\pi < 300$  MeV/c

$\beta$ ) formula (3) per  $300 \frac{\text{MeV}}{c} < p_\pi < 1100 \frac{\text{MeV}}{c}$

$\gamma$ ) formula (1) per  $p_\pi > 1100$  MeV/c

Va notato che se, nel caso  $\beta$ ),  $\frac{ml}{p\tau_0} \ll 1$ ,  $w$  è una funzione lineare crescente di  $p$

$$w(p) \approx \frac{l \Delta\Omega}{m\beta'^2 \tau_0} p$$

Per esempio, per  $l = 500$  cm,  $\Delta\Omega = 10^{-3}$  nel caso  $\pi - \mu$

$$w(p) \approx 7 \times 10^{-5} p_{\text{MeV}/c}$$

ed in ogni caso ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ))

$$w(p) \leq 8 \times 10^{-2}$$

Bisogna infine ricordare che tutte queste formule non danno che l'ordine di grandezza di  $w(p)$ . In particolare se l'astigmatismo dei magneti è molto forte, l'uso di  $\Delta\Omega$  nella (3) può essere troppo semplicistico se

per  $\Delta R$  s'intende il prodotto dei massimi angoli accettati, per particelle uscenti dal centro della targhetta, nei piani orizzontale e verticale dell'analizzatore.

5 - Il calcolo esatto di  $\eta(s, p)$ , da effettuare eventualmente con una calcolatrice, si basa sulla seguente formulazione: consideriamo una particella madre che decade in  $s$  essendo uscita dalla targhetta con coordinate

$$\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_0 \end{pmatrix} \quad \hat{z}_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$$

Seguirò le notazioni di Sona (1). Indichiamo con  $\hat{x}_s$  e  $\hat{z}_s$  le coordinate al punto in cui avviene il decadimento, per la particella madre. Per la figlia saranno:

$$\hat{x}_s + \delta \hat{x} = \begin{pmatrix} x_s \\ x'_s + \theta_1 \\ \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_0 - \varepsilon \end{pmatrix} \quad \hat{z}_s + \delta \hat{z} = \begin{pmatrix} z_s \\ z'_s + \theta_2 \end{pmatrix}$$

$\theta_1$  e  $\theta_2$  sono gli angoli, proiettati sui piani orizzontale e verticale del magnete, che definiscono la direzione in cui si muove la particella figlia rispetto alla linea di volo della particella madre. Per piccoli angoli

$$\theta^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2$$

Se ora indichiamo con  $H(s)$  e  $V(s)$  le matrici che trasportano, dalla targhetta, a distanza  $s$  da essa, e con  $H'(s)$ ,  $V'(s)$  le loro inverse, è facile vedere che la particella figlia con coordinate  $\hat{x}_s + \delta \hat{x}$ ,  $\hat{z}_s + \delta \hat{z}$  in  $s$  equivale ad una particella figlia generata in  $s = 0$  con coor

dinate iniziali

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 + H'(s) \int \hat{x} \\ \hat{z}_0 + V'(s) \int \hat{z} \end{aligned} \quad (6)$$

Conoscendo perciò le limitazioni imposte dalla geometria sulle coordinate iniziali, si può risalire per ogni valore di  $s$  alle equivalenti limitazioni su  $\theta_1, \theta_2, \epsilon$ .

Queste, che in generale dipenderanno dalle coordinate d'uscita  $\hat{x}_0, \hat{z}_0$  della particella madre, permetteranno di costruire il fattore geometrico relativo ad una targhetta puntiforme e poi, mediante una integrazione, quello relativo ad una targhetta estesa quando si conosca la distribuzione e l'intensità dei luoghi di produzione delle particelle madri.

In pratica le limitazioni sulle condizioni iniziali equivalenti (6) sono difficili da usare senza calcolatrice perchè ridondanti rispetto al numero delle variabili: tra di esse è necessario effettuare per ogni valore di  $s$  la scelta delle più stringenti. Il calcolo procede tuttavia come segue: si calcola, per ogni  $s$ ,

$$\Delta \Omega(s, \hat{x}_0, \hat{z}_0, \rho) = \left( \frac{\rho}{mH'} \right)^2 \iint \theta d\theta d\varphi$$

$\Delta \Omega$  è esclusivamente funzione dei limiti d'integrazione.

Si media quindi

$$\frac{d\Omega}{4\pi}$$

tramite la distribuzione dell'intensità di produzione delle particelle madri nella targhetta, che sarà una funzione del tipo  $I(\hat{x}_0, \hat{z}_0, \rho)$  normalizzata ad 1.

Simbolicamente

$$\eta(s, \bar{\rho}) = \frac{1}{4\pi} \int \dots \int I(\hat{x}_0, \hat{z}_0, \rho) \Delta \Omega(s, \hat{x}_0, \hat{z}_0, \rho) d\hat{x}_0 d\hat{z}_0$$

essendo  $\bar{\rho}$  il momento medio accettato dal canale magnetico.

In tutte queste considerazioni si usano le matrici inverse  $H'$ ,  $V'$  i cui elementi sono legati a quelli di  $H, V$  come segue:

$$H'_{11} = H_{22}, \quad H'_{12} = -H_{12}, \quad H'_{21} = -H_{21}, \quad H'_{22} = H_{11}$$

$$H'_{13} = H_{12}H_{23} - H_{22}H_{13}, \quad H'_{23} = H_{21}H_{13} - H_{11}H_{23}$$

$$H'_{33} = 1, \quad H'_{31} = H'_{32} = 0$$

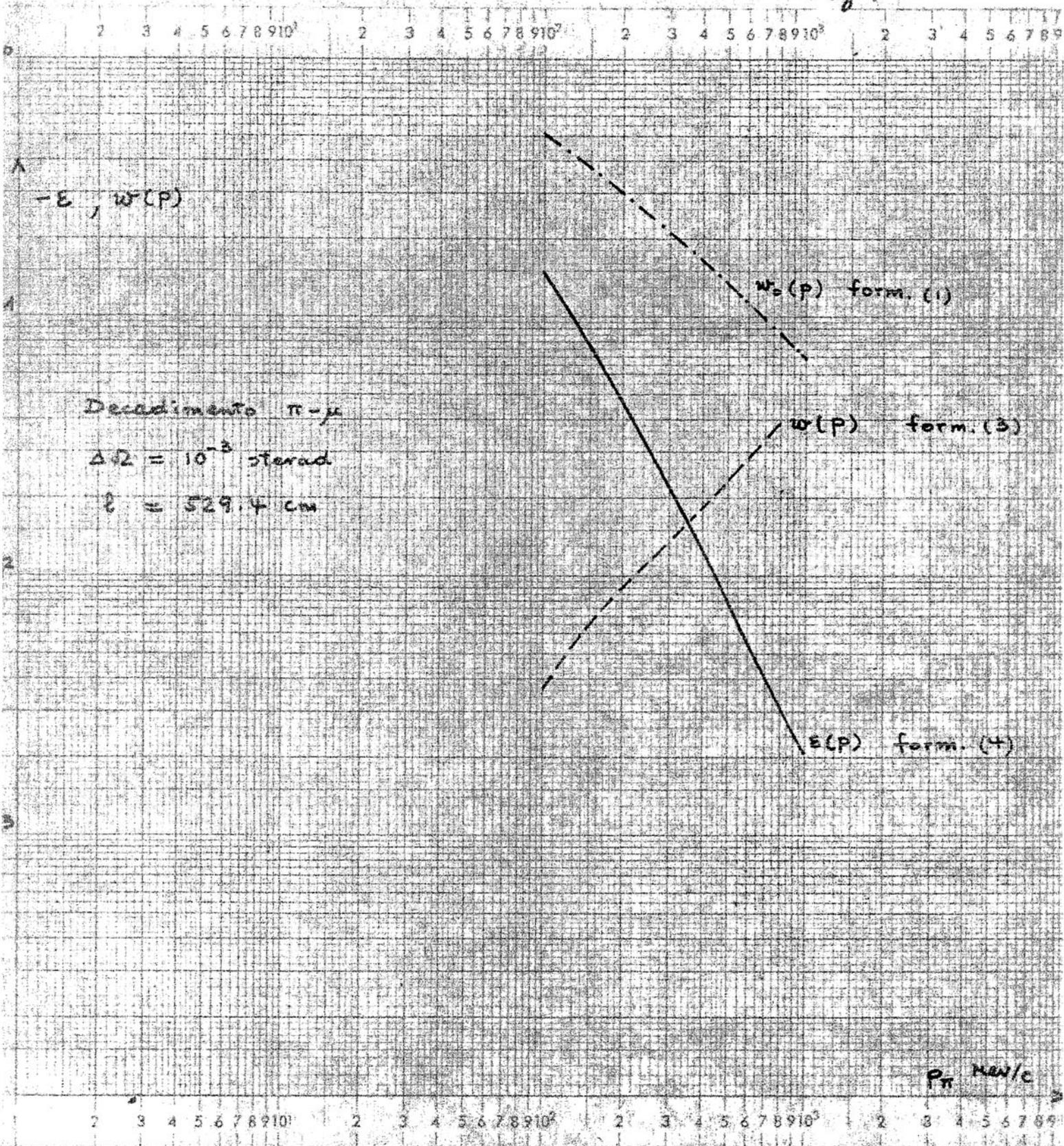
$$V'_{11} = V_{22}, \quad V'_{12} = -V_{12}, \quad V'_{21} = -V_{21}, \quad V'_{22} = V_{11}$$

tutte queste matrici s'intendono operanti sul tratto 0,s.

---

(1) - P.G. Sona - Ottica degli analizzatori etc. I.N.F.N. sez. Acc. Nota interna n° 3 (1958), con particolare riferimento al § 5 per i dati numerici.

Fig 1



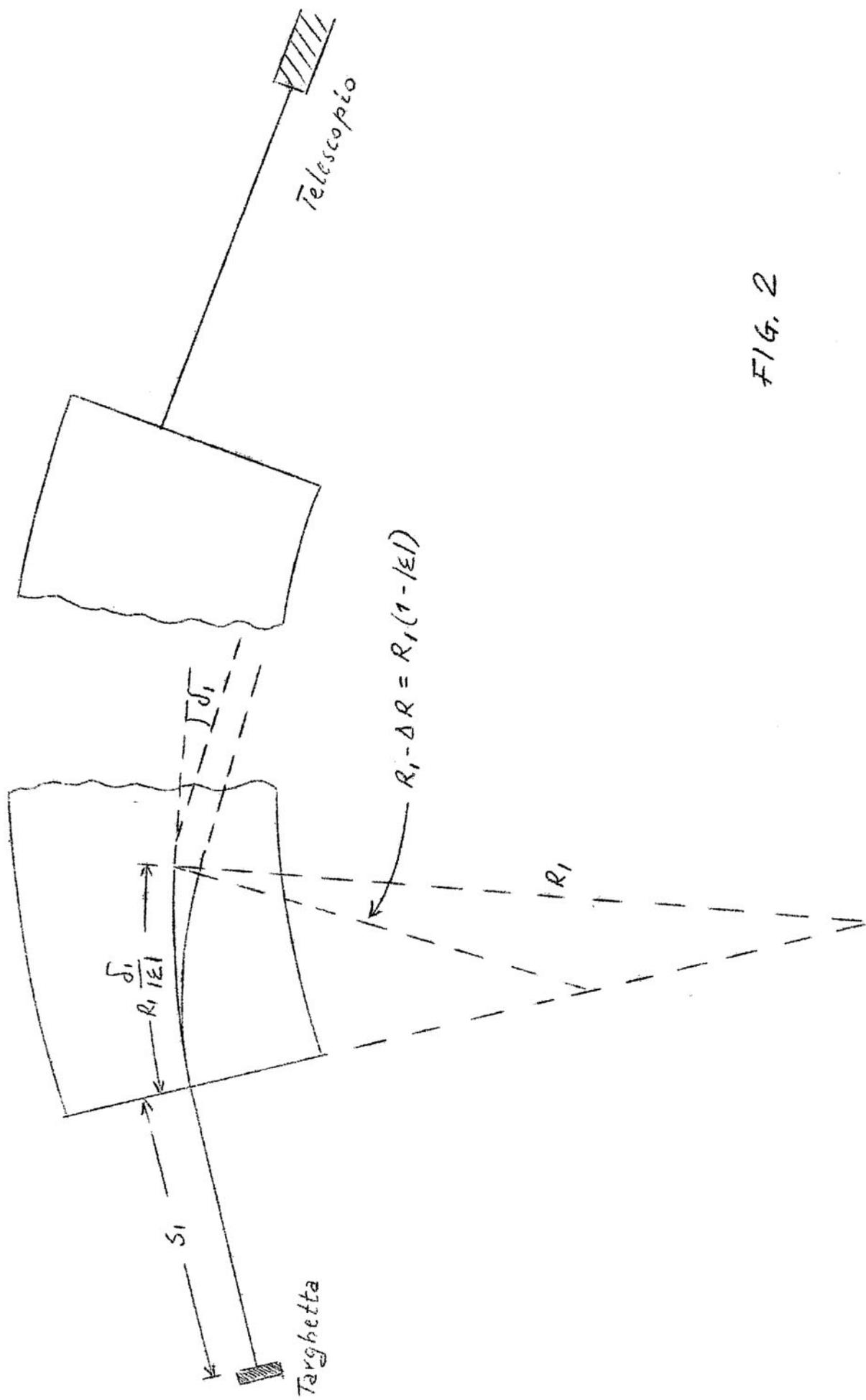


FIG. 2