

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-58/29 (1958)

G. Sacerdoti, R. Toschi: POTENZIALE DI UN CAMPO ELETTROSTATICO
E TRAIETTORIE DI PARTICELLE CARICHE.

Estratto da: Alta Frequenza, 27, 108 (1958)

POTENZIALE DI UN CAMPO ELETTROSTATICO E TRAIETTORIE DI PARTICELLE CARICHE

GIANCARLO SACERDÒTI e ROMANO TOSCHI

Si espone un procedimento per calcolare le immagini di sorgenti di particelle cariche, moventisi in un campo elettrico che non presenta simmetria cilindrica. All'uopo si è sviluppato il calcolo per risalire al potenziale elettrico nell'intorno della traiettoria di una particella, noti che siano la sua equazione e il potenziale lungo i punti di essa. Per semplicità si tratta il problema piano, restando ovvia l'estensione al problema tridimensionale, per cui ad un punto immagine corrisponde in genere un segmento immagine. Nel caso di campi elettrici con simmetria cilindrica, tali problemi sono già stati ampiamente studiati e risolti: non altrettanto può dirsi nel caso in cui tale simmetria non esista. Si riporta un esempio numerico del procedimento.

1. - Moto di una particella in un campo elettrico.

Ci si propone di ricavare la relazione che lega il potenziale elettrico alla traiettoria di una particella carica, la quale in esso si muova. Come è noto, una particella di massa m , che si muove con velocità u , in un campo di forze che ammette un potenziale, per passare da un punto P_1 a un punto P_2 (del piano o dello spazio) percorre la traiettoria s che rende minima la grandezza:

$$[1] \quad \int_{P_1}^{P_2} m u \, ds .$$

In particolare se il campo di forza è un campo elettrico dotato di potenziale V e la particella possiede una carica e , la [1] si scrive (se le velocità non sono relativistiche):

$$[2] \quad \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{2 e m V} \, ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{V} \, ds .$$

Infatti, essendo $(1/2) m u^2 = e V$, si ha $m u = \sqrt{2 e m V}$.

Analogamente un raggio luminoso che attraversa un mezzo di indice di rifrazione N percorre una traiettoria che rende minima la grandezza:

$$[3] \quad \int_{P_1}^{P_2} N \, ds .$$

Dal confronto della [2] con la [3], si deduce che esiste una completa analogia fra l'ottica e il moto di particelle cariche in un campo elettrico qualora ad N si faccia corrispondere \sqrt{V} ⁽¹⁾. Questa analogia, che sta a fondamento dell'ottica elettronica, permette di trasportare allo studio del moto delle particelle cariche tutte le costruzioni grafiche usate in ottica, nonchè i concetti di lenti, fuochi, piani principali e via dicendo, familiari agli ottici; si può così parlare di ottica delle particelle ⁽²⁾.

Siano $y^* = y^*(x)$ l'equazione di una curva passante per i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, nonchè $V^* = V(y^*)$ il potenziale lungo essa. Possiamo scrivere:

$$y^* = y + a \eta,$$

ove sono:

$y = y(x)$ l'equazione della traiettoria di una particella passante per P_1 e P_2 , cioè l'equazione di quella particolare curva passante per P_1 e P_2 , lungo cui l'integrale [2] è minimo;

η una funzione di x che soddisfa alle condizioni:

$$[4] \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0;$$

a una variabile indipendente da x .

Ricordando la [2], il principio di minima azione si può allora esprimere dicendo che la funzione:

$$[5] \quad \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sqrt{V^* \left[1 + \left(\frac{dy^*}{dx} \right)^2 \right]} \right\} dx,$$

deve essere minima per $a = 0$. Pertanto la sua derivata rispetto ad a ⁽³⁾:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{da} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sqrt{V^* [1 + (y^{*'})^2]} \right\} dx = \\ & = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \left\{ \sqrt{V^* [1 + (y^{*'})^2]} \right\}}{\partial y^*} \eta + \frac{\partial \left\{ \sqrt{V^* [1 + (y^{*'})^2]} \right\}}{\partial y^{*'}} \eta' \right\} dx, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Il potenziale V deve essere riferito a quello del punto ove la particella ha velocità nulla.

⁽²⁾ O. KLEMPERER: *Electron Optic* - Cambridge University Press, Cambridge, 1953.

W. GLASER: *Grundlagen der Elektronenoptik* - Weber, Wien, 1952.

⁽³⁾ Per semplicità, le derivate prime e successive delle funzioni della sola x saranno rappresentate dalle stesse funzioni con uno o più apici.

deve essere nulla per $a = 0$, cioè:

$$[6] \quad \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial [V \sqrt{1+y'^2}]}{\partial y} \eta + \frac{\partial [V \sqrt{1+y'^2}]}{\partial y'} \eta' \right\} dx = 0,$$

ove $V = V(y)$ è il potenziale lungo la traiettoria $y = y(x)$. Con le condizioni [4] e integrando per parti il primo termine, la [6] si riduce a:

$$[7] \quad \int_{x_1}^{x_2} \eta' \left\{ \int_{x_1}^x \frac{\partial [V \sqrt{1+y'^2}]}{\partial y} dx - \frac{\partial [V \sqrt{1+y'^2}]}{\partial y'} \right\} dx = 0,$$

da cui si ottiene, dovendo la [7] essere soddisfatta per qualsiasi η' :

$$[8] \quad \frac{\partial [V \sqrt{1+y'^2}]}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial [V \sqrt{1+y'^2}]}{\partial y'} = 0.$$

Sviluppando i calcoli, la [8] si può infine così scrivere:

$$[9] \quad \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{2} y' \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{V y''}{1+y'^2} = 0.$$

Questa è la relazione fondamentale che lega il potenziale $V(y)$ e le sue derivate parziali alla traiettoria y della particella. La stessa relazione si può ottenere dalle equazioni della dinamica (si veda l'appendice).

2. - Immagini reali e virtuali di sorgenti di particelle.

Il problema che ci proponiamo è la determinazione delle immagini reali o virtuali di sorgenti di particelle, noti che siano l'equazione $y_0 = y_0(x)$ di una traiettoria di una particella uscente dalla sorgente e il potenziale $V_0 = V(y_0)$ sui punti di essa ⁽⁴⁾: chiameremo la $y_0(x)$ traiettoria prima e la sorgente punto oggetto P_1 con coordinante x_1, y_1 .

Per risolvere questo problema, dovremo determinare la traiettoria di un'altra particella uscente dal punto oggetto e deviata rispetto alla precedente, percorrente una traiettoria adiacente alla prima.

Si possono presentare due casi. Nel primo la traiettoria trovata intersechi la traiettoria prima: diremo che il punto di intersezione è l'immagine reale del punto oggetto. Nell'altro caso la traiettoria trovata non incontri mai la traiettoria prima: diremo allora che esiste una immagine virtuale del punto oggetto. Essa si può definire come il punto di incontro del prolungamento della traiettoria trovata sulla prima, quando quella, giunta nella zona dove il campo elettrico è molto debole, si fa rettilinea.

⁽⁴⁾ Ci si può chiedere se sia possibile fissare $V(y)$ e $y(x)$ arbitrariamente o se sia necessario che V e y soddisfino a relazioni differenziali. Sarebbe che, fissati

Ove il punto oggetto fosse all'infinito, tutte le traiettorie risulterebbero inizialmente parallele e l'immagine trovata sarebbe il fuoco del sistema ottico.

Se $y = y(x)$ è l'equazione della traiettoria incognita e $V = V(y)$ il potenziale sui punti di essa, possiamo scrivere:

$$[10] \quad y = y_0 + b \tau,$$

ove τ rappresenta una funzione di x che soddisfa alla condizione $\tau(x_1) = 0$; posto $\tau'(x_1) = 1$, b è una costante che dipende dalla pendenza della traiettoria incognita in P_1 .

Sostituendo la [10] nella [9], otteniamo:

$$[11] \quad \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{2} (y_0' + b \tau') \frac{\partial V}{\partial x} = \\ = \frac{V}{1 + y_0'^2 + 2 y_0' b \tau' + b^2 \tau'^2} (y_0'' + b \tau'') = 0.$$

Nell'ipotesi, ammissibile quando si studiano fasci focalizzati di particelle, che le due traiettorie in questione non si discostino troppo l'una dall'altra, il valore di b sarà sufficientemente piccolo per poter trascurare i termini ove compaiano le potenze di b maggiori di 2. Perciò

y e $V(y)$, si possa costruire un potenziale con laplaciano nullo compatibile con la traiettoria $y(x)$ e tale che assuma sui punti della traiettoria il valore $V(y)$. Infatti, disposte le armature di una serie di n condensatori ai lati della traiettoria,

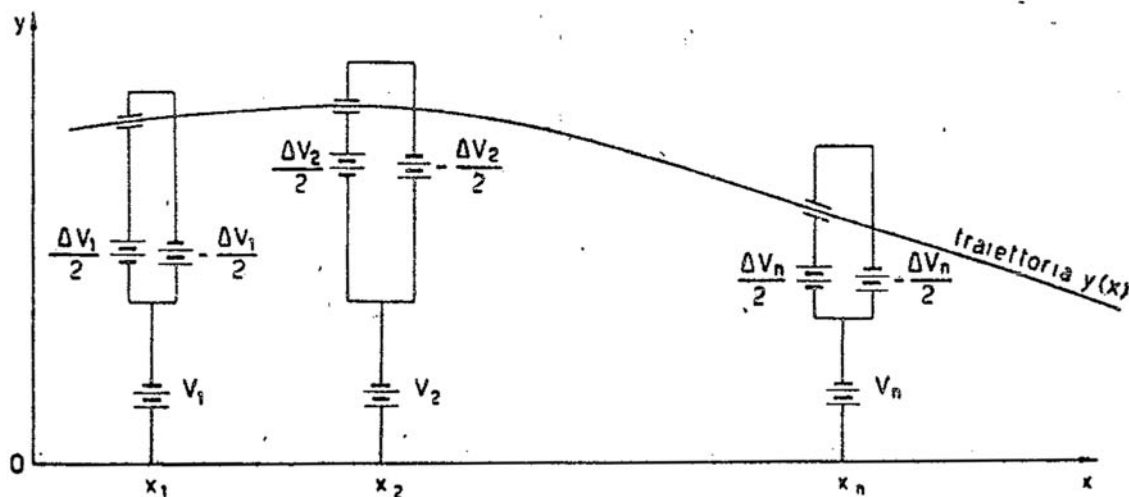


Fig. a. — Sistema possibile di deflettori per ottenere che una particella carica percorra una traiettoria $y(x)$, dato il potenziale sulla traiettoria.

si fissa la tensione media del condensatore $V(y)$ e tra le placche si stabilisce una differenza di potenziale tale da provocare la curvatura della traiettoria (fig. a). Ma questo ragionamento non è rigoroso, perchè non chiarisce che cosa succeda col passaggio al limite per $n \rightarrow \infty$.

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dy} &= \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} b \tau, \\
 \frac{dV}{dx} &= \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} b \tau, \\
 V &= V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} b \tau.
 \end{aligned}
 \tag{I2}$$

servendoci delle [I2], la [I1] diventa:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} b \tau - \frac{1}{2} (y_0' + b \tau') \cdot \\
 &\left(\frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} b \tau \right) - \frac{\left(V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} b \tau \right) (y_0'' + b \tau'')}{1 + y_0'^2 + 2 y_0' b \tau' + b^2 \tau'^2} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{I3}$$

Sviluppando i calcoli e mantenendo le ipotesi precedenti, la [I3] si può così scrivere:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} b \tau - \frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial x} y_0' - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} b \tau y_0' - \frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial x} b \tau' + \\
 &V_0 y_0'' + \frac{\partial V_0}{\partial y} b \tau y_0'' + V_0 b \tau'' \\
 &\frac{\quad}{1 + y_0'^2 + 2 y_0' b \tau'} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{I4}$$

L'ultimo termine della [I4] si può ancora così semplificare:

$$\begin{aligned}
 &\frac{V_0 y_0'' + \frac{\partial V_0}{\partial y} b \tau y_0'' + V_0 b \tau''}{1 + y_0'^2} \left(1 - \frac{2 y_0' b \tau'}{1 + y_0'^2} \right), \\
 \text{ossia:} \\
 &\frac{V_0 y_0'' + \frac{\partial V_0}{\partial y} b \tau y_0'' + V_0 b \tau''}{1 + y_0'^2} - \frac{2 V_0 y_0' y_0'' b \tau'}{(1 + y_0'^2)^2}.
 \end{aligned}$$

In definitiva, ordinando opportunamente i termini, la [I4] si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} - \frac{1}{2} y_0' \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} - y_0'' \frac{\frac{\partial V_0}{\partial y}}{1 + y_0'^2} \right) \tau + \\
 &-\left(\frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{2 V_0 y_0' y_0''}{(1 + y_0'^2)^2} \right) \tau' - \frac{V_0}{1 + y_0'^2} \tau'' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{I5}$$

La [15] è un'equazione differenziale del secondo ordine che, risolta rispetto a τ , consente di tracciare la traiettoria cercata. Poichè nella [15] non compare b , τ è indipendente dalla pendenza iniziale della tra-

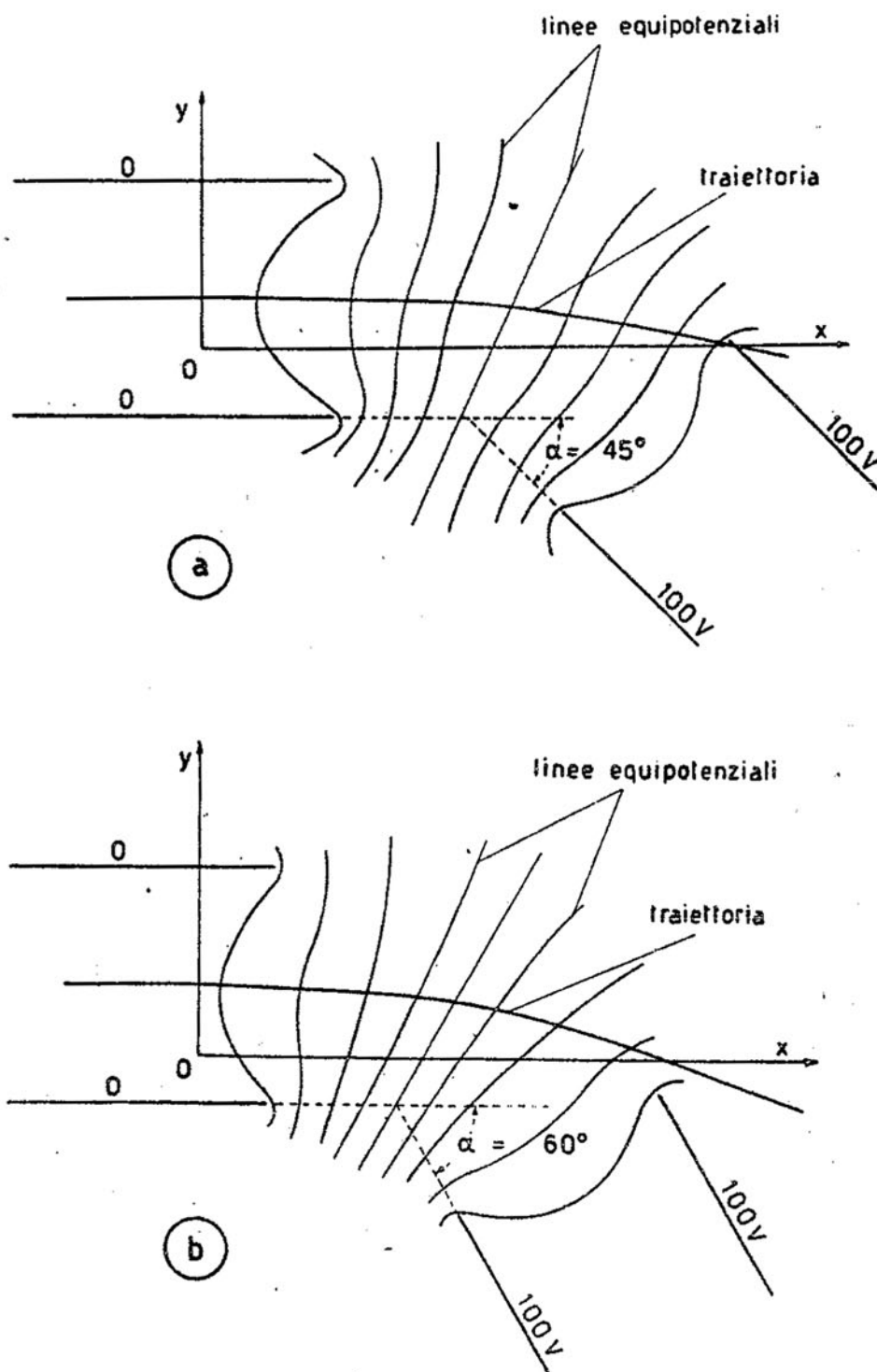


Fig. 1. — Traiettoria di una particella che si muove tra due coppie di elettrodi piani, fra le quali sia applicata una differenza di potenziale, per diversi valori dell'angolo α .

iettorina incognita. D'altronde, essendo ogni traiettoria descrivibile mediante un'espressione del tipo:

$$y(x) + b\tau(x),$$

è evidente che se esiste un punto $P_2 (x_2, y_2)$, per cui $\tau(x_2) = 0$, in quel punto tutte le traiettorie, deviate nel punto P_1 rispetto alla prima, convergono. Il punto P_2 si può quindi definire immagine reale del punto oggetto P_1 . Se non esiste un punto P_2 , in cui $\tau(x_2) = 0$, esiste, secondo la definizione data all'inizio del paragrafo, un'immagine virtuale del punto oggetto. Risulta che, nella zona ove il campo elettrico è debole,

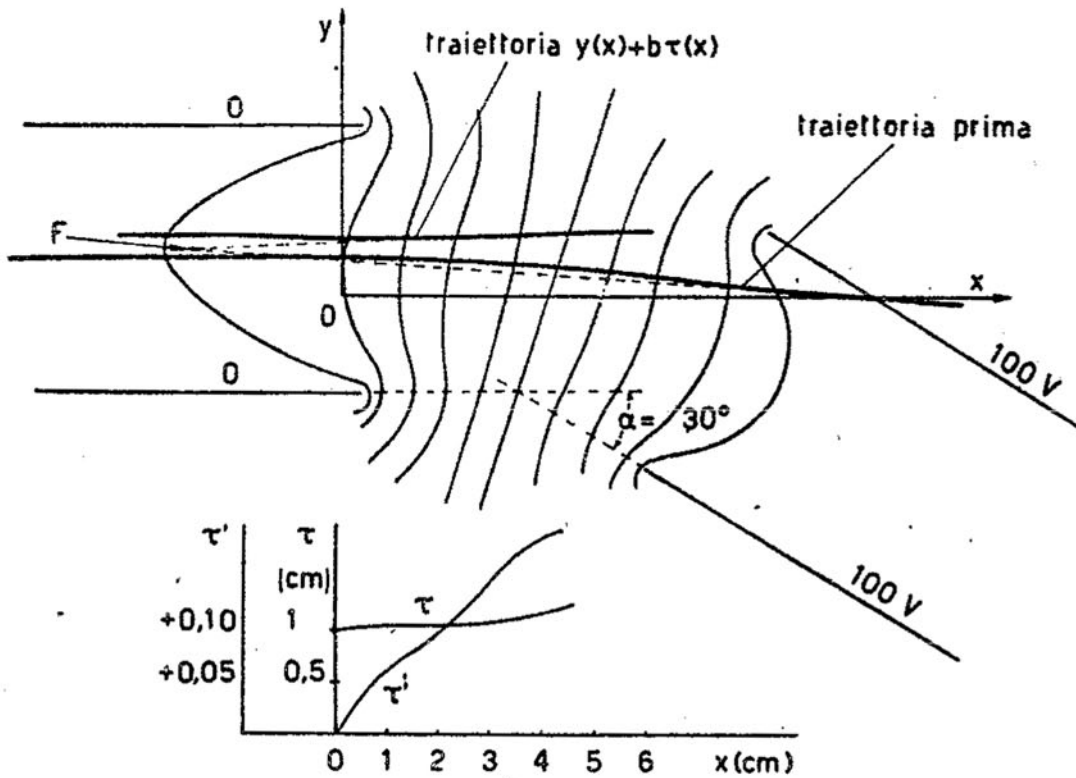


Fig. 2. — Valori di τ e di τ' per una particella uscente parallela alla traiettoria di base, nel caso di un angolo, tra gli elettrodi, di 30° .

i prolungamenti di tutte le traiettorie deviate si intersecano fra loro in uno stesso punto (immagine virtuale): infatti la distanza, da un punto generico (x_3) di riferimento posto sulla traiettoria prima, del punto di intersezione dei prolungamenti delle traiettorie deviate y, y_1, \dots è pari a:

$$\frac{b \tau(x_3)}{b \tau'(x_3)}, \quad \frac{b_1 \tau(x_3)}{b_1 \tau'(x_3)}, \dots,$$

quantità queste indipendenti da b, b_1, \dots .

3. - Calcolo dei coefficienti.

Per la determinazione dei coefficienti dell'equazione [15] si devono conoscere le derivate totali e parziali prime e seconde del potenziale della traiettoria prima, ossia occorre ricavare la configurazione del potenziale in prossimità della traiettoria prima.

Dall'equazione $y_0 = y_0(x)$ della traiettoria prima e dal potenziale V_0 sui punti di essa, che sono dati, si possono facilmente ricavare le funzioni:

$$y_0', y_0'', y_0''', \frac{dV_0}{dx}, \frac{d^2 V_0}{dx^2}, \frac{dV_0}{dy}, \frac{d^2 V_0}{dy^2},$$

che serviranno nei calcoli seguenti.

Vale la relazione:

$$[16] \quad \frac{dV_0}{dy} = \frac{\partial V_0}{\partial x} \frac{1}{y_0'} + \frac{\partial V_0}{\partial y}$$

Sostituendo la [9] nell'equazione precedente, si ottiene:

$$[17] \quad \frac{1}{2} \frac{dV_0}{dy} - \frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial x} \left(\frac{1}{y_0'} + y_0' \right) - \frac{V y_0''}{1 + y_0'^2} = 0.$$

Dalla [17] possiamo ricavare $\partial V_0 / \partial x$. Dalla relazione:

$$[18] \quad \frac{dV_0}{dx} = \frac{\partial V_0}{\partial y} y_0' + \frac{\partial V_0}{\partial x},$$

si deduce $\partial V_0 / \partial y$. Derivando la [9] e la [18] rispetto ad x ed eguagliando a zero il laplaciano del potenziale, si ottiene il seguente sistema:

$$[19] \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} y_0' - \frac{1}{2} y_0'' \frac{\partial V_0}{\partial x} - y_0' \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} y_0' \right) +$$

$$- \frac{y_0'''}{1 + y_0'^2} V_0 - 2 \frac{y_0'' y_0' V_0}{(1 + y_0'^2)^2} - \frac{y_0''}{1 + y_0'^2} \frac{dV_0}{dx} = 0,$$

$$[20] \quad \frac{d^2 V_0}{dx^2} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + 2 y_0' \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} + y_0'^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + y_0'' \frac{\partial V_0}{\partial x},$$

$$[21] \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} = 0.$$

Da esso si possono ricavare le tre incognite:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y},$$

che, unitamente alle funzioni precedentemente determinate, consentono il calcolo dell'equazione [15] ⁽⁵⁾.

(5) Può sembrare che, aggiungendo al sistema delle [20] e [21] l'equazione analoga alla [20], ottenuta derivando la [16] rispetto ad y , si possano ricavare le derivate parziali del secondo ordine della V_0 rispetto ad x e y . Ma ciò non è possibile, poichè, come facilmente si vede, la [20] e l'equazione derivata dalla [16] sono fra loro linearmente dipendenti.

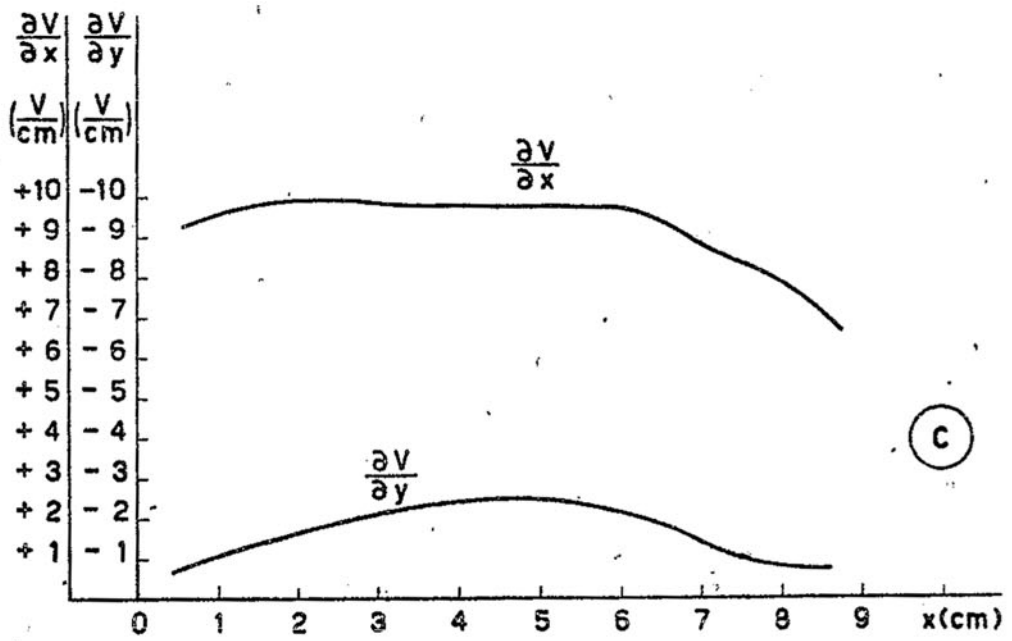
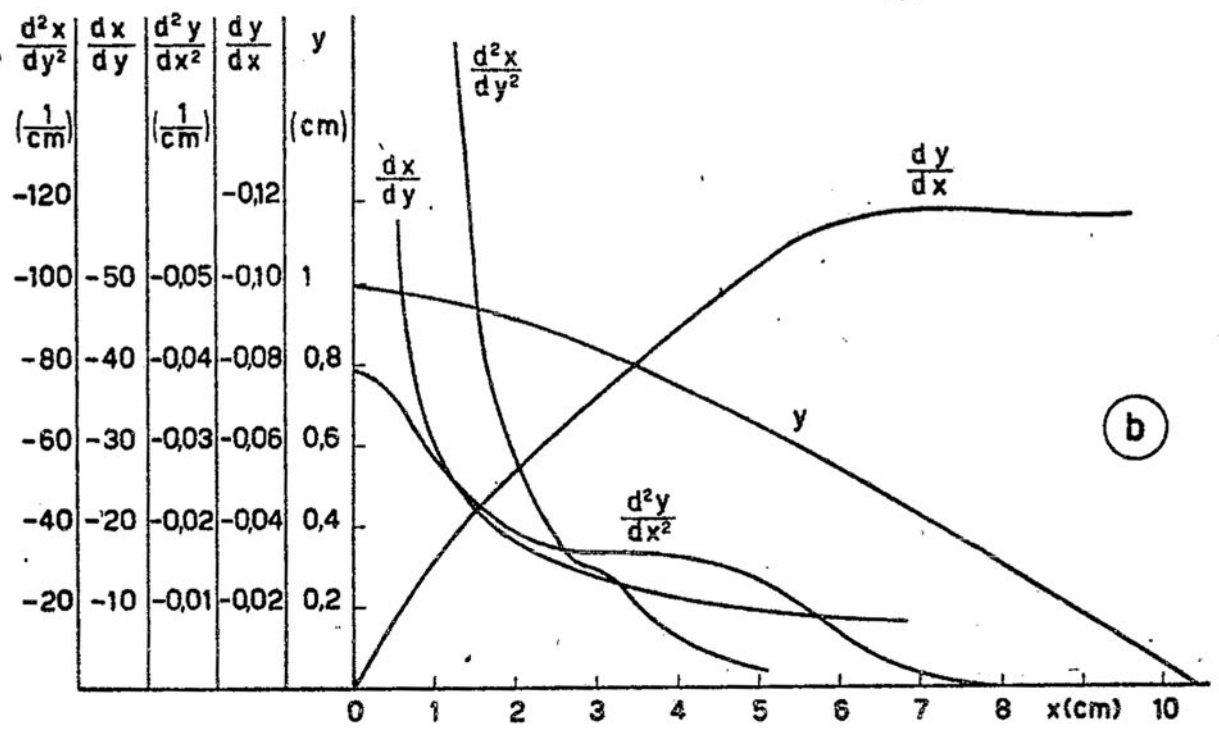
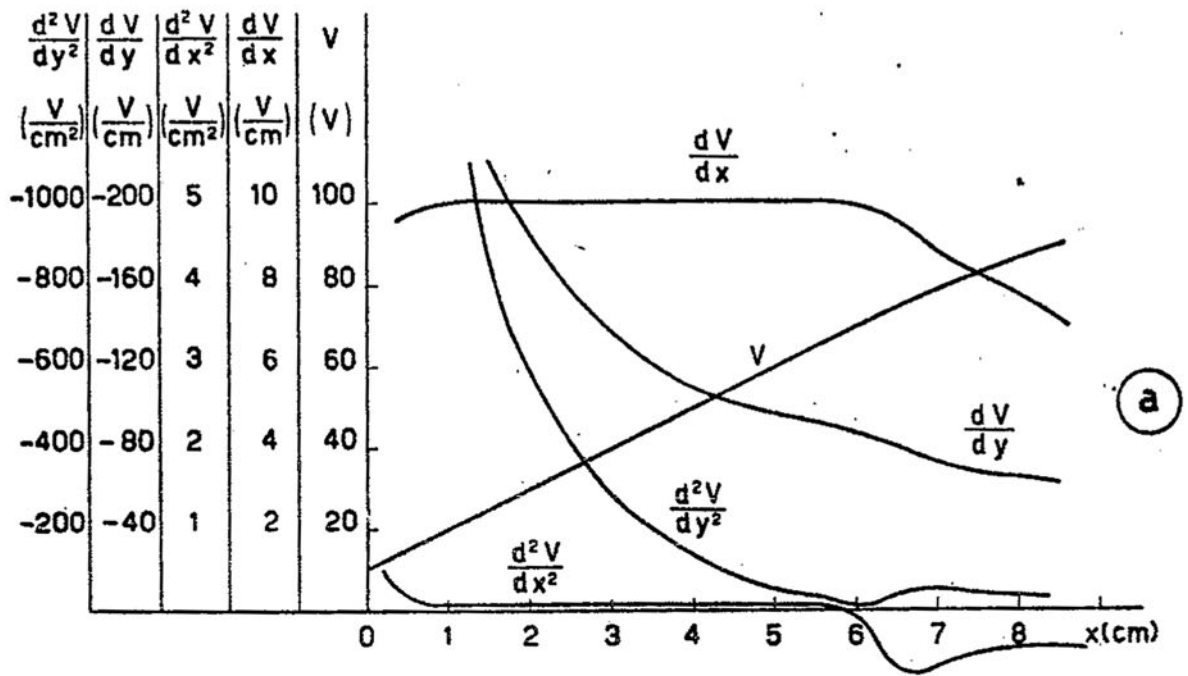


Fig. 3. — Grandezze calcolate per la determinazione dei coefficienti dell'equazione [15].

Si evita di dover risolvere il sistema precedente nei casi in cui:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} \approx \frac{d^2 V_0}{dx^2},$$

cioè quando la curvatura della traiettoria è poco accentuata, come nel caso dell'esempio numerico che verrà esposto. Infatti, sommando in tali casi alla [20] la [21] moltiplicata per 2, dividendo tutto per 4 e ordinando i termini così ottenuti, si ha:

$$[22] \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} - y_0' \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{4} \frac{d^2 V_0}{dx^2} - y_0'' \frac{\partial V_0}{\partial y} + (1 + y_0'^2) \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2}.$$

Per l'assunto precedente, i termini del secondo membro della [22] sono noti, il primo membro rappresenta i primi due termini del coefficiente di τ nella [15]; l'altro termine del coefficiente di τ , nonchè i termini dei coefficienti di τ' , τ'' , sono, per quanto precedentemente esposto, noti.

Secondo questo metodo semplificato si sono eseguiti i calcoli dell'esempio numerico.

Si potrebbe ritenere troppo laborioso, secondo il procedimento indicato nella presente nota, risalire, con il calcolo, dal potenziale lungo la traiettoria prima al potenziale nell'intorno di essa e da questo dedurre, al fine di individuare le immagini, le traiettorie vicine, dal momento che si dispone già, per rilevare il potenziale, di un mezzo sperimentale, cioè di quello di cui ci si è già serviti per rilevare il potenziale lungo la traiettoria prima. Si consideri però che, per ottenere la stessa precisione di risultati, nella determinazione delle immagini, con un procedimento diretto, cioè determinando la traiettoria vicina alla prima con costruzioni grafiche sulla mappa del potenziale, sarebbe necessaria una descrizione della mappa stessa di gran lunga più precisa di quella che occorre nel nostro caso. La qual cosa però sarà sempre difficile e spesso impossibile.

4. - Esempi numerici.

Ad illustrare i procedimenti indicati nei paragrafi precedenti, si riportano alcuni esempi.

Nelle figure 1 e 2 sono tracciate le traiettorie prime di particelle che si muovono tra coppie di elettrodi disposti come ivi è rappresentato, l'uno al potenziale 0 e l'altro al potenziale 100 V.

Le linee equipotenziali tracciate nelle figure sono state rilevate mediante analogia diretta. Si sono segnati con soluzione colloidale di argento i profili degli elettrodi su carta grafitata, e mediante un metodo di ponte si sono misurati i potenziali.

Le traiettorie descritte da particelle uscenti dalla mezzeria dell'elettrodo a potenziale zero con velocità iniziale nulla parallela alle armature

dell'elettrodo, sono state ricavate con una costruzione, semigrafica servendosi delle leggi ottiche di rifrazione.

Si è calcolata poi per un caso particolare (fig. 2) la traiettoria di una particella inizialmente parallela alla traiettoria prima, ma di ordinata diversa, e si è trovata l'immagine di un punto all'inizio, cioè il fuoco F .

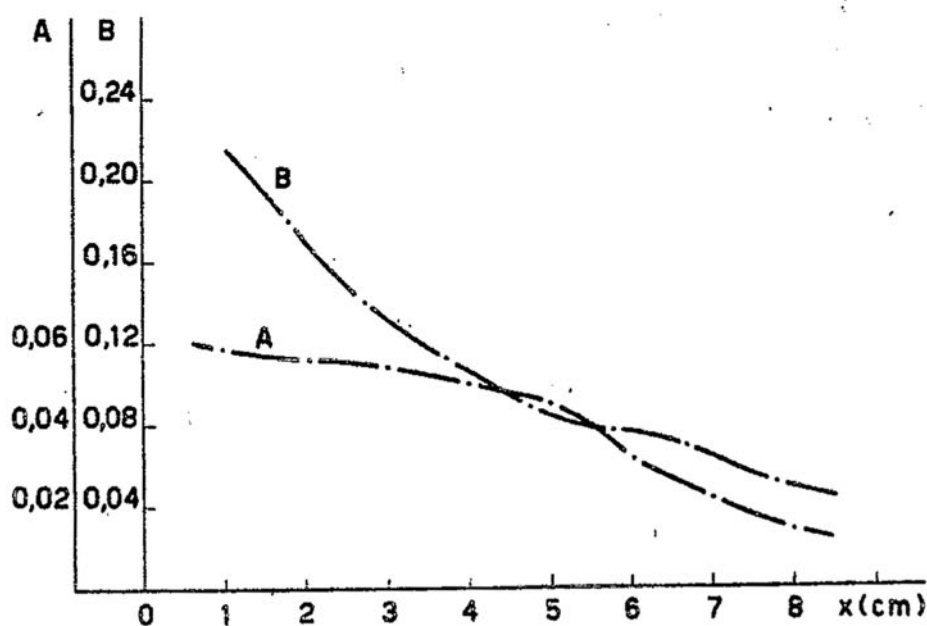


Fig. 4. — Coefficienti di τ e di τ' (A e B rispettivamente), divisi per il coefficiente di τ'' .

Nei grafici di figura 3 e di figura 4 si sono riportate le grandezze calcolate per ottenere il risultato. La V e la y sono state rilevate direttamente dalla traiettoria precedentemente costruita. Nella figura 4, A e B rappresentano rispettivamente i coefficienti di τ e di τ' , divisi per il coefficiente di τ'' , che intervengono nell'equazione [15].

Desideriamo esprimere al professore Paolo Lombardi ed al dottore Mario Francioni i più vivi ringraziamenti per i preziosi consigli con i quali ci hanno assistiti durante l'elaborazione e la stesura del presente articolo.

Roma - Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (Sezione Acceleratore).

APPENDICE

Si vuol ricavare dalle equazioni della dinamica l'equazione [9].

Scriviamo le seguenti ovvie eguaglianze (γ è l'angolo della tangente alla traiettoria $y = y(x)$, in un punto generico, con l'asse x):

$$[23] \quad y'' = \frac{\Delta \tan \gamma}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_y}{u_x} - \frac{u_y + \Delta u_y}{u_x + \Delta u_x} \right) =$$

$$= \frac{u_y}{u_x} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1 + \frac{\Delta u_y}{u_y}}{1 + \frac{\Delta u_x}{u_x}} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta u_x}{u_x} - \frac{\Delta u_y}{u_y} \right) \frac{u_y}{u_x}.$$

Sostituendo nella [23] le seguenti espressioni, le quali non sono altro che quelle cardinali della dinamica:

$$m \Delta u_y = - \frac{\partial V}{\partial y} e dt,$$

$$m \Delta u_x = - \frac{\partial V}{\partial x} e dt,$$

si ottiene:

$$[24] \quad e \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{u^2 x} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x} u_y}{u^2 x} \right) = y'' m.$$

Essendo $m u^2 = 2 e V$, possiamo scrivere:

$$[25] \quad \begin{cases} \frac{m u_x^2}{2 e} = \frac{V}{1 + y'^2} \\ \frac{m u_y^2}{2 e} = \frac{V y'^2}{1 + y'^2} \end{cases}$$

Sostituendo nella [24] le espressioni di u_x e u_y , ricavate dalla [25], si ottiene la [9].