

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-58/11 (15. 9. 58)

P. G. Sona: OTTICA DEGLI ANALIZZATORI MAGNETICI NELL'APPROSSIMAZIONE DI GAUSS. APPLICAZIONE AD UN ANALIZZATORE DA 1000 MeV/c. CONSIDERAZIONI SULL'USO DELLA TECNICA DEL FILO PER LA TARATURA.

Nota interna: n°3  
15 Settembre 1958

P.G. Sona: OTTICA DEGLI ANALIZZATORI MAGNETICI NELL'APPROSSIMAZIONE DI GAUSS. APPLICAZIONE AD UN ANALIZZATORE DA 1000 MeV/c. CONSIDERAZIONI SULL'USO DELLA TECNICA DEL FILO PER LA TARATURA.

Riassunto.

Si espone la teoria dell'ottica degli analizzatori magnetici nell'approssimazione di gauss col metodo delle matrici. Si da esplicitamente la forma delle matrici che caratterizzano i tipi di campi magnetici più spesso usati negli analizzatori. Si applica il metodo delle matrici alla teoria dei diaframmi e di conseguenza al calcolo dell'apertura e del potere risolutivo. Vengono illustrate, a titolo di esempio, le caratteristiche di un analizzatore da 1000 MeV/c proposto per alcune esperienze con l'elettrosincrotrone. Infine si fanno alcune considerazioni sulla taratura degli analizzatori con la tecnica del filo.

1 - Introduzione

Un analizzatore magnetico è uno strumento costituito da uno o più magneti che con il loro campo selezionano e focheggiano quelle particelle cariche di un fascio incidente che hanno uno stesso rapporto fra carica e impulso<sup>(1)</sup>. I parametri principali che caratterizzano globalmente un analizzatore, e che dipendono dalla geometria dei magneti, dalla forma del campo, dalla geometria della sorgente, dei contatori, dei diaframmi posti lungo il cammino delle particelle analizzate, sono essenzialmente:

- a) l'apertura, cioè l'angolo solido raccolto  $\Delta\Omega$
- b) la larghezza utile della banda di impulsi raccolta
- c) il potere risolutivo, cioè la larghezza massima della banda di impulsi raccolta.

Vedremo più sott<sup>o</sup> le definizioni esatte di questi parametri e la distinzione fra il 2° ed il 3°.

Nel seguito vengono considerate solo le proprietà ottiche intrinseche dell'analizzatore, e non sono considerate le varie correzioni dovute alla perdita di energia, allo scattering ed al decadimento delle particelle analizzate, lungo il loro cammino (cioè nelle sorgenti, nei contatori o diaframmi, nei poli del magnete, nell'aria). Studieremo poi solo il caso (il più frequente) di analizzatori con un piano di simmetria (piano mediano) nei punti del quale il campo è normale al piano stesso.

Per comodità di linguaggio, e senza perdere per questo in generalità, assumeremo che il piano mediano sia orizzontale.

## § 2 - Teoria dell'ottica degli analizzatori nell'approssimazione di gaus

Sia  $T_0$  una traiettoria particolare delle particelle analizzate, giacente sul piano mediano dell'analizzatore, che prenderemo come linea di riferimento: essa deve soddisfare la condizione di passare nella zona centrale del canale magnetico definito dall'area utile dell'analizzatore (sul piano mediano). Consideriamo un punto  $P$  di una traiettoria  $T$  generica, ma abbastanza vicina a  $T_0$ . La posizione di  $P$  potrà essere definita dalle 3 coordinate costruite nel modo seguente (vedi Fig. 1)

Tracciamo da  $P$  il piano normale a  $T_0$ , e sia  $P_0$  l'intersezione di questo piano con  $T_0$ . Fissando su  $T_0$  un'origine degli archi  $\theta$  (posta circa nel centro della sorgente delle particelle analizzate), a  $P_0$  corrisponderà un certo arco  $\overline{OP_0}$  di lunghezza  $s(>0)$ . Se  $P'$  è il piede della perpendicolare condotta da  $P$  al piano mediano, sia  $x$  la distanza  $P_0P'$  ( $\geq 0$  secondo un verso di riferimento fissato convenzionalmente sulla normale a  $T_0$  nel piano mediano); e sia  $z$  la distanza  $P'P$  ( $\geq 0$  secondo un verso di riferimento fissato convenzionalmente sulla normale al piano mediano).

Le quantità  $s, x, z$  definiscono il punto  $P$ . La traiettoria  $T$  può essere assegnata mediante le funzioni  $x(s), z(s)$ ; a  $T_0$  corrisponderà  $x(s) \equiv 0, z(s) \equiv 0$ ; le funzioni

$$\frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{dz}{ds} = z'$$

rappresentano in ogni punto  $P$  le due componenti dell'inclinazione di  $T$  rispetto a  $T_0$ . L'approssimazione di Gauss è applicabile quando  $|x| \ll |\rho|, |z| \ll |\rho|, |x'| \ll 1, |z'| \ll 1$  per ogni valore di  $s$ , essendo  $\rho = \rho(s)$  il raggio di curvatura di  $T_0$  (variabile (\*) con  $s$ ).

Alla traiettoria  $T_0$  corrisponderà un certo impulso  $p_0$  delle particelle analizzate; alla traiettoria  $T$  corrisponderà un impulso  $p = p_0 + \Delta p$ , e ammetteremo  $|\frac{\Delta p}{p_0}| \ll 1$ .

Per la traiettoria  $T$ , sia  $x(0) = x_0, z(0) = z_0, x'(0) = x'_0, z'(0) = z'_0$ .

Le quantità che determinano la forma della traiettoria, una volta assegnata la distribuzione del campo magnetico nell'analizzatore, sono le condizioni iniziali  $x_0, z_0, x'_0, z'_0, \frac{\Delta p}{p_0}$ .

Sia  $B_z(s, x, z)$  la distribuzione del campo magnetico (più precisamente la componente normale al piano mediano).

Nell'approssimazione di Gauss si scriverà:

$$B_z(s, x, z) = B_z(s, 0, 0) + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)_0 z$$

essendo le due derivate parziali calcolate su  $T_0$ , cioè per  $x=0, z=0$ ; ma  $\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)_0 = 0$  per la simmetria (§1).

Sia  $B_x(s, x, z)$  la distribuzione della componente del campo parallela alla coordinata  $x$ ; sarà  $B_x(s, 0, 0) = 0$  e  $\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)_0 = 0$  su  $T_0$ , per le ipotesi fatte (§1); quindi, nell'approssimazione

(\*) NOTA - Avendo fissato convenzionalmente un verso per la normale a  $T_0$  nel piano mediano, il valore di  $\rho$  può essere  $\geq 0$  ( $> 0$  se il centro di curvatura è dalla parte indicata dalla normale).

di Gauss:

$$B_x = \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)_0 z$$

Sempre per le ipotesi fatte al §1, il campo non avrà altre componenti di cui si debba tener conto nell'approssimazione di Gauss. Dovendo essere  $\text{rot } \underline{B} = 0$ , si ha piú che, per ogni valore di  $s$

$$\left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)_0 = \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)_0$$

Così la distribuzione del campo, intorno a  $T_0$ , è definita dalle due funzioni

$$B_z(s, 0, 0) \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)_0$$

Se poniamo

$$- \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)_0 \cdot \frac{s^2 e}{c p_0} = n(s)$$

e se teniamo conto che

$$\frac{1}{s(s)} = - \frac{B_z(s, 0, 0) \cdot e}{p_0 c}$$

(assumendo che il verso posit. sull'asse  $z$  sia stato scelto in modo che il prodotto  $s B_z e$  sia  $< 0$  lungo  $T_0$ , perchè la definizione di  $n$  coincida anche in segno con quella che si dà usualmente nel caso dei campi magnetici delle macchine acceleratrici;  $e$  è la carica della particella considerata, col suo segno) la distribuzione del campo intorno a  $T_0$  si può pensare definita dalle due funzioni:

$$\frac{1}{s(s)} \quad , \quad n(s)$$

Le equazioni differenziali che permettono di calcolare la traiettoria  $\bar{T}$  dalle condizioni iniziali sono (2), (3):

$$[1] \begin{cases} \frac{d^2 x}{ds^2} + [1 - n(s)] \frac{x}{s^2(s)} = - \frac{1}{s(s)} \cdot \frac{\Delta p}{p_0} \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + n(s) \cdot z = 0 \end{cases}$$

Nel caso in cui si abbia una zona di campo nullo intorno a  $\overline{T_0}$ , le due equazioni diventano:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{ds^2} = 0 \\ \frac{d^2 z}{ds^2} = 0 \end{cases}$$

e  $\overline{T_0}$  naturalmente è una retta.

La soluzione di queste equazioni si può mettere facilmente in questa forma (3), (4):

$$\begin{vmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ \frac{\Delta p}{p_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & H_{13}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & H_{23}(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \frac{\Delta p}{p_0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{vmatrix}$$

dove i coefficienti  $H_{ij}(s)$ ,  $V_{ij}(s)$  dipendono dalle funzioni  $w(s)$ ,  $\xi(s)$  e si possono ricavare risolvendo le equazioni differenziali [1].

Una cosa da notare è che, se si indicano con  $s_1, s_2$  due punti di  $\overline{T_0}$  con  $s_2 > s_1$ , si ha:

$$\| H_{ij}(s_2) \| = \| \overline{H}_{ij} \| \cdot \| H_{ij}(s_1) \| \quad \text{essendo } \| \overline{H}_{ij} \|$$

una matrice caratteristica che dipende solo dalla distribuzione del campo magnetico nel tratto  $\overline{s_1 s_2}$  e non negli altri tratti. Cioè se la distribuzione di campo dell'analizzatore si può spezzare, lungo  $\overline{T_0}$ , in più tratti in ciascuno dei quali si sanno risolvere le equazioni [1], allora per ottenere la matrice completa per tutto l'analizzatore basta moltiplicare ordinatamente fra di loro le matrici caratteristiche dei vari tratti, mettendo ogni volta a sinistra del prodotto di tutte le altre la matrice

del tratto che si aggiunge. Una cosa del tutto analoga si può dire per tutte le matrici //VII//.

Si può dimostrare in generale che le matrici  $H$  e  $V$  hanno sempre il determinante uguale ad 1.

In un punto  $Q_H$  di  $T_0$  per cui sia  $H_{12}(s) = 0$  s'incrociano tutte le traiettorie  $T$  del piano mediano che partono da  $s=0$  con  $x_0=0, \Delta p/p_0 = 0$  ed  $x'_0$  qualunque: cioè questo punto è un'immagine orizzontale reale di 0. Analogamente in un punto  $Q_V$  di  $T_0$  in cui sia  $V_{12}(s) = 0$  convergono tutte le traiettorie  $T$  che partono con  $z_0=0, z'_0$  qualunque e  $x_0=0, x'_0=0, \frac{\Delta p}{p_0}=0$ ; questo punto sarà un'immagine verticale di 0. Se la sorgente è estesa, si avrà in  $Q_H$  un'immagine orizzontale estesa e in  $Q_V$  un'immagine verticale estesa.

Nel punto  $Q_H$  : il valore di  $H_{11}$  rappresenta l'ingrandimento laterale orizzontale;  $H_{22}$  rappresenta l'ingrandimento angolare orizzontale; si ha  $H_{12} = 0$  ; il valore di  $H_{13}$  rappresenta la dispersione.

Nel punto  $Q_V$  : il valore di  $V_{11}$  rappresenta l'ingrandimento laterale verticale;  $V_{22}$  rappresenta l'ingrandimento angolare verticale; si ha  $V_{12} = 0$  .

Si può dimostrare che nel punto  $Q_H$  si ha:  $H_{11} \cdot H_{22} = 1$  ; e nel punto  $Q_V$  :  $V_{11} \cdot V_{22} = 1$  .

I punti  $Q_H, Q_V$  possono anche non esistere; possono coincidere; la loro posizione dipende dalla posizione della sorgente oltre che dall'analizzatore.

§ 3 - Espressioni delle matrici  $H, V$  nei casi particolari più importanti.

Vediamo ora che espressioni hanno le matrici  $H, V$  per le componenti più usuali di un analizzatore.

a) Per un tratto di  $T_0$  dove il campo è uniforme ( $u=0, \dots, s = \cos t = s_0$ ) e all'ingresso e all'uscita del quale  $T_0$  sia normale ai bordi (vedi fig.2), se  $\phi$  è l'angolo di deviazione(+), si ha

$$\|H\| \equiv \begin{vmatrix} \cos \phi & s_0 \sin \phi & s_0(1 - \cos \phi) \\ -\frac{1}{s_0} \sin \phi & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \|V\| \equiv \begin{vmatrix} 1 & s_0 \phi \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(+) NOTA -  $\phi = s/s_0$  , ha il segno di  $s_0$

b) Per un tratto di  $T_0$  dove si ha  $n = \cos t$ ,  $s = \cos t = s_0$ , e all'ingresso e all'uscita del quale  $T_0$  sia normale ai bordi (vedi figura 2, ma con  $n \neq 0$ ), se  $\phi$  è l'angolo di deviazione (\*), si ha:

$$\|H\| \equiv \begin{vmatrix} \cos \sqrt{1-n} \phi & \frac{s_0}{\sqrt{1-n}} \operatorname{sen} \sqrt{1-n} \phi & -s_0 \frac{1 - \cos \sqrt{1-n} \phi}{1-n} \\ -\frac{\sqrt{1-n}}{s_0} \operatorname{sen} \sqrt{1-n} \phi & \cos \sqrt{1-n} \phi & -\frac{\operatorname{sen} \sqrt{1-n} \phi}{\sqrt{1-n}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

per  $n < 1$

$$\|H\| \equiv \begin{vmatrix} \cosh \sqrt{|1-n|} \phi & \frac{s_0}{\sqrt{|1-n|}} \operatorname{sen} h \sqrt{|1-n|} \phi & -\frac{s_0}{1-n} [\cosh \sqrt{|1-n|} \phi - 1] \\ \frac{\sqrt{|1-n|}}{s_0} \operatorname{sen} h \sqrt{|1-n|} \phi & \cosh \sqrt{|1-n|} \phi & -\frac{1}{\sqrt{|1-n|}} \operatorname{sen} h \sqrt{|1-n|} \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

per  $n > 1$

$$\|V\| \equiv \begin{vmatrix} \cos \sqrt{n} \phi & \frac{s_0}{\sqrt{n}} \operatorname{sen} \sqrt{n} \phi \\ -\frac{\sqrt{n}}{s_0} \operatorname{sen} \sqrt{n} \phi & \cos \sqrt{n} \phi \end{vmatrix}$$

per  $n > 0$

$$\|V\| \equiv \begin{vmatrix} \cosh \sqrt{|n|} \phi & \frac{s_0}{\sqrt{|n|}} \operatorname{sen} h \sqrt{|n|} \phi \\ \frac{\sqrt{|n|}}{s_0} \operatorname{sen} h \sqrt{|n|} \phi & \cosh \sqrt{|n|} \phi \end{vmatrix}$$

per  $n < 0$

c) Per un tratto di  $T_0$  senza campo magnetico di lunghezza  $l$ :

$$\|H\| \equiv \begin{vmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\|V\| \equiv \begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(\*) - NOTA:  $\phi = s/s_0$ , ha il segno di  $s_0$ .

d) Per un tratto di  $T_0$  in cui il campo è nullo su  $T_0$  ma ha un gradiente  $(\partial B_z / \partial x)_0 \neq 0$  e costante (realizzabile fisicamente con un quadrupolo, vedi fig. 3) si ha:

$$\|H\| \equiv \begin{vmatrix} \cos \sqrt{A} \ell & \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{sen} \sqrt{A} \ell & 0 \\ -\sqrt{A} \operatorname{sen} \sqrt{A} \ell & \cos \sqrt{A} \ell & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{per } A > 0$$

$$\|H\| \equiv \begin{vmatrix} \cosh \sqrt{|A|} \ell & \frac{1}{\sqrt{|A|}} \operatorname{senh} \sqrt{|A|} \ell & 0 \\ \sqrt{|A|} \operatorname{senh} \sqrt{|A|} \ell & \cosh \sqrt{|A|} \ell & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{per } A < 0$$

$$\|V\| \equiv \begin{vmatrix} \cosh \sqrt{A} \ell & \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{senh} \sqrt{A} \ell & 0 \\ \sqrt{A} \operatorname{senh} \sqrt{A} \ell & \cosh \sqrt{A} \ell & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{per } A > 0$$

$$\|V\| \equiv \begin{vmatrix} \cos \sqrt{|A|} \ell & \frac{1}{\sqrt{|A|}} \operatorname{sen} \sqrt{|A|} \ell & 0 \\ -\sqrt{|A|} \operatorname{sen} \sqrt{|A|} \ell & \cos \sqrt{|A|} \ell & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{per } A < 0$$

essendo  $\ell$  la lunghezza del quadrupolo, ed

$$A = \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)_0 \cdot \frac{\ell}{c p_0}$$

e) Se  $T_3$  passa (entrando o uscendo) da una zona senza campo magnetico a una zona in cui il campo è simile a quello dei casi a), b)

con incidenza non normale (vedi Fig. 4) ai bordi, si può dimostrare<sup>(5)</sup> che, nell'approssimazione di Gauss, si tiene conto dell'incidenza non normale sostituendo al tratto con il campo magnetico le stesse matrici  $H$  e  $V$  che si hanno per l'incidenza normale, e inserendo nei prodotti fra matrici (vedi §2) un fattore per ognuno dei bordi, avente la forma:

$$\|H\| \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{t_0 \alpha}{\rho_0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\|V\| \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{t_0 \alpha}{\rho_0} & 1 \end{vmatrix}$$

essendo  $\rho_0$  il raggio di curvatura di  $T_0$  entro il tratto con campo magnetico, ed  $\alpha$  l'angolo d'incidenza di  $T_0$  rispetto al bordo (vedi fig.4) col segno di  $\underline{w} \times \underline{v}$ , essendo  $\underline{w}$  la normale al bordo diretta verso la regione con campo magnetico ed  $\underline{v}$  la normale a  $T_0$  fissata convenzionalmente sul piano mediano. Nella Fig. 4  $\alpha$  ed  $\alpha'$  sono i negativi, ma è da notare che anche  $\rho_0$  è negativo. Ripetiamo che l'espressione ora data per  $\|H\|$  e  $\|V\|$  vale, nei limiti dell'approssimazione di Gauss, anche quando il tratto con campo magnetico ha un gradiente  $(\partial B_z / \partial x)_0 \neq 0$ .

#### § 4 - Diaframmi

In questo paragrafo ci proponremo di stabilire in quali condizioni uno o più diaframmi posti lungo il cammino delle particelle analizzate (in piani normali a  $T_0$ ) definiscono una apertura e un potere risolutivo dell'analizzatore calcolabili delle dimensioni e dalle posizioni dei diaframmi stessi, supponendo nota la distribuzione del campo magnetico.

I diaframmi si possono realizzare fisicamente con dei contatti in coincidenza, anzi questo è preferibile nel caso di particelle di alta energia.

Naturalmente assumeremo che oltre ai contattori o ai diaframmi in esame, non ce ne siano altri che limitino ulteriormente il numero di particelle raccolte.

Nel caso degli analizzatori con un piano di simmetria qui con-

siderati, le deviazioni orizzontali e verticali delle traiettorie da  $T_0$  sono completamente indipendenti e disaccoppiate. Così anche il sistema dei diaframmi in generale si potrà realizzare, o almeno schematizzare, con 2 gruppi distinti di diaframmi: un gruppo avente il compito di definire e limitare le deviazioni sul piano orizzontale ma non in senso verticale; e l'altro gruppo avente il compito di limitare le deviazioni in senso verticale ma non sul piano orizzontale. Ci riferiremo quindi a dei contatori, che supporremo centrati su  $T_0$ , di lato  $2A_i$  (deviazioni orizzontali,  $i$  è l'indice che numera i contatori) o  $2B_j$  (deviazioni verticali;  $j$  è l'indice che numera i contatori).

Supporremo che la sorgente di particelle si trovi centrata su  $T_0$ , all'ascisse curvilinea  $s = 0$ , e distingueremo due casi:

- a) sorgente estesa lateralmente, in modo che sia il sistema dei contatori a limitare la parte della sorgente che contribuisce alle particelle contate;
- b) sorgente avente un contorno ben definito, che si comporta quindi come un diaframma e concorre con gli altri diaframmi a definire l'ampiezza massima delle deviazioni da  $T_0$ .

E' da notare che, per l'indipendenza delle deviazioni verticali e orizzontali, può verificarsi il caso a) per le uno e il caso b) per le altre, per esempio:

Assumeremo per di più che, quando si verifica il caso a) per un tipo di deviazioni (per es. orizzontali) la brillantezza dei vari punti della sorgente (numero di particelle di un certo intervallo di impulso  $\Delta p$  per unità di angolo solido, per unità di tempo e per unità di superficie di emissione normale a  $T_0$ ) sia indipendente dalla coordinata corrispondente (nell'esempio,  $x_0$ ) del punto di emissione.

Quando si verifica il caso b) lasciamo completamente indeterminata la distribuzione dell'intensità della sorgente. (+).

(+) NOTA - La sorgente sarà tridimensionale, in generale; nei casi pratici occorre immaginare tutti i suoi punti come giacenti sul piano normale a  $T_0$ , e calcolare l'intensità per unità di superficie con semplici ragionamenti geometrici.

Consideriamo prima il caso  $\alpha)$

Si vede facilmente che, nel caso generale per le oscillazioni orizzontali, occorrono tre diaframmi per limitare un canale magnetico ben definito, essendo 3 le condizioni iniziali che definiscono una traiettoria ( $x_0, x'_0, \Delta p/p_0$ ); mentre per le oscillazioni verticali ne occorrono 2 ( $z_0, z'_0$  sono le condizioni iniziali).

Si abbiano infatti 3 contatori di apertura orizzontale  $2A_1, 2A_2, 2A_3$  (vedi fig. 5), posti alle coordinate  $s_1, s_2, s_3$ .

La condizione che una particella passi per l'orlo di  $C_1$ , di  $C_2$  e di  $C_3$  simultaneamente si può scrivere:

$$[2] \begin{cases} H_{11}(s_1)x_0 + H_{12}(s_1)x'_0 + H_{13}(s_1)\frac{\Delta p}{p_0} = \pm A_1 \\ H_{11}(s_2)x_0 + H_{12}(s_2)x'_0 + H_{13}(s_2)\frac{\Delta p}{p_0} = \pm A_2 \\ H_{11}(s_3)x_0 + H_{12}(s_3)x'_0 + H_{13}(s_3)\frac{\Delta p}{p_0} = \pm A_3 \end{cases}$$

Queste equazioni formano un sistema lineare nelle 3 incognite  $x_0, x'_0, \Delta p/p_0$ . Dal sistema [2], supponendo noti  $H_{11}, H_{12}, H_{13}$ ,  $A_1, A_2, A_3$ , si ricavano tutte le proprietà importanti del canale magnetico così definito, e cioè: l'apertura, il potere risolutivo in impulso  $\frac{\Delta p}{p_0}$ , la larghezza della zona utile della sorgente, l'apertura angolare del fascio emesso dalla sorgente, e raccolto dai contatori.

La sorgente emetterà  $I \cdot dx_0 \cdot dx'_0 \cdot \frac{dp}{p_0}$  particelle per unità di tempo negli intervalli di condizioni iniziali  $dx_0, dx'_0, \frac{dp}{p_0}$  ( $I$  è l'intensità già integrata sulle variabili che riguardano le condizioni iniziali verticali). Le relazioni, analoghe alle [2].

$$[3] \begin{cases} H_{11}(s_1)x_0 + H_{12}(s_1)x'_0 + H_{13}(s_1)\frac{\Delta p}{p_0} = x_1 \\ H_{11}(s_2)x_0 + H_{12}(s_2)x'_0 + H_{13}(s_2)\frac{\Delta p}{p_0} = x_2 \\ H_{11}(s_3)x_0 + H_{12}(s_3)x'_0 + H_{13}(s_3)\frac{\Delta p}{p_0} = x_3 \end{cases}$$

che legano le variabili  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_i = x(s_i)$ , ecc.) allo  $x_0, x'_0, \frac{\Delta p}{p_0}$  stabiliscono una corrispondenza biunivoca lineare fra le due terne; così il rapporto fra i due elementi di volume  $dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$ ;  $dx_0, dx'_0, \frac{\Delta p}{p_0}$  negli spazi definiti delle due terne è dato dal determinante dei coefficienti:

$$dx_0 \cdot dx'_0 \cdot \frac{dp}{p_0} = \frac{1}{\Delta} dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$$

dove:

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_{11}(s_1) & H_{12}(s_1) & H_{13}(s_1) \\ H_{11}(s_2) & H_{12}(s_2) & H_{13}(s_2) \\ H_{11}(s_3) & H_{12}(s_3) & H_{13}(s_3) \end{vmatrix}$$

Da ciò segue:

$$\bar{I} dx_0 \cdot dx'_0 \cdot \frac{dp}{p_0} = \frac{\bar{I}}{\Delta} dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$$

e quindi il numero di particelle raccolte nel canale definito dai contatori sarà semplicemente, per unità di tempo:

$$\frac{\bar{I}}{|\Delta|} 2A_1 \cdot 2A_2 \cdot 2A_3$$

Come si vede, e come è naturale, questa espressione è simmetrica rispetto ai 3 contatori. In sostanza, essa definisce una 'apertura equivalente' del canale magnetico come:

$$[4] \quad \frac{2A_1 \cdot 2A_2 \cdot 2A_3}{|\Delta|}$$

Non si può scomporre questa espressione in un prodotto di due fattori, uno relativo all'apertura angolare, e l'altro relativo alla banda di impulsi raccolta, perchè le due cose sono completamente mescolate. E' anche da notare che per avere questo risultato non occorre fare nessuna ipotesi sulla posizione dell'immagine della sorgente.

Dal sistema [2] si ricavano i valori  $x_0, x'_0, \frac{\Delta p}{p_0}$  di una particella la cui traiettoria passa per l'orlo dei tre contatori:

$$\chi_o = \pm A_1 \frac{\Delta_{11}^{(1)}}{\Delta} \pm A_2 \frac{\Delta_{11}^{(2)}}{\Delta} \pm A_3 \frac{\Delta_{11}^{(3)}}{\Delta}$$

$$\chi_o' = \pm A_1 \frac{\Delta_{12}^{(1)}}{\Delta} \pm A_2 \frac{\Delta_{12}^{(2)}}{\Delta} \pm A_3 \frac{\Delta_{12}^{(3)}}{\Delta}$$

$$\frac{\Delta p}{p_o} = \pm A_1 \frac{\Delta_{13}^{(1)}}{\Delta} \pm A_2 \frac{\Delta_{13}^{(2)}}{\Delta} \pm A_3 \frac{\Delta_{13}^{(3)}}{\Delta}$$

dove  $\Delta_{ij}^{(1)}$ ,  $\Delta_{ij}^{(2)}$ ,  $\Delta_{ij}^{(3)}$  sono i complementi algebrici, nel determinante  $\Delta$ , di  $H_{ij}(s_1)$ ,  $H_{ij}(s_2)$ ,  $H_{ij}(s_3)$ .

Da questo si ricava:

a) che l'estensione utile della sorgente è:

$$[5] \quad \frac{2}{|\Delta|} [A_1 |\Delta_{11}^{(1)}| + A_2 |\Delta_{11}^{(2)}| + A_3 |\Delta_{11}^{(3)}|] = 2 \chi_o \max$$

b) che l'apertura angolare massima del fascio raccolto è:

$$[5'] \quad \frac{2}{|\Delta|} [A_1 |\Delta_{12}^{(1)}| + A_2 |\Delta_{12}^{(2)}| + A_3 |\Delta_{12}^{(3)}|] = 2 \chi_o' \max$$

c) che il potere risolutivo è:

$$[5''] \quad \frac{2}{|\Delta|} [A_1 |\Delta_{13}^{(1)}| + A_2 |\Delta_{13}^{(2)}| + A_3 |\Delta_{13}^{(3)}|] = 2 \frac{\Delta p}{p_o} \max$$

Come si vede, la [4] dice che l'apertura equivalente non è il prodotto delle 3 quantità a), b), c) ora calcolate.

Ragionando analogamente sulle oscillazioni verticali, si trova che, sempre nel caso  $\alpha$ ), due contatori posti in  $\bar{s}_1, \bar{s}_2$  definiscono un'apertura equivalente

$$[4'] \quad \frac{2 B_1 \cdot 2 B_2}{|\bar{\Delta}|} \quad \text{dove } |\bar{\Delta}| = \begin{vmatrix} v_{11}(\bar{s}_1) & v_{12}(\bar{s}_1) \\ v_{11}(\bar{s}_2) & v_{12}(\bar{s}_2) \end{vmatrix}$$

Se chiamiamo  $\bar{I} dx_0 dz'_0$  il numero di particelle omesse dalla sorgente per unità di tempo negli intervalli  $dx_0, dz'_0$  (intensità della sorgente già integrata in direzione orizzontale), il numero di particelle raccolte nel canale sarà per unità di tempo:

$$\bar{I} \cdot \frac{2B_1 \cdot 2B_2}{|\bar{\Delta}|}$$

Per essere più espliciti, si può dire che se  $I_0 \cdot d\Omega \cdot \frac{dp}{p_0}$  l'intensità della sorgente (supposta costante in tutti i punti della sua superficie  $\sigma$  normale a  $T_0$ ), e se siamo nel caso  $\alpha$ ) per tutte e due i tipi di deviazioni, verticali e orizzontali, allora il numero di particelle raccolte è:

$$I_0 \frac{2A_1 \cdot 2A_2 \cdot 2A_3}{|\Delta|} \cdot \frac{2B_1 \cdot 2B_2}{|\bar{\Delta}|}$$

Nel caso  $\alpha$ ) la larghezza verticale della sorgente sarà:

$$[6] \quad \frac{2}{|\bar{\Delta}|} \cdot [B_1 \bar{\Delta}_{11}^{(1)} + B_2 \bar{\Delta}_{11}^{(2)}] = 2 z_{0 \max}$$

e l'apertura angolare verticale del fascio raccolto uscente dalla sorgente sarà:

$$[6'] \quad \frac{2}{|\bar{\Delta}|} \cdot [B_1 \bar{\Delta}_{12}^{(1)} + B_2 \bar{\Delta}_{12}^{(2)}] = 2 z'_0 \max$$

dove  $\bar{\Delta}_{ij}^{(1)}, \bar{\Delta}_{ij}^{(2)}$  sono i complementi algebrici, in  $\bar{\Delta}$ , di  $V_{ij}(s_1), V_{ij}(s_2)$ .

Vediamo ora il caso  $\beta$ ); per quel che riguarda il potere risolutivo e le quantità analoghe (quelle definite dalle  $[5], [5'], [5''], [6], [6']$ ) tutto accade come se, rimanendo nel caso  $\alpha$ ), il primo dei contatori fosse immediatamente davanti alla sorgente (cioè ad  $s=0$ ) con una apertura uguale alla larghezza della sorgente.

Così nel caso  $\beta$ ) bastano due soli contatori, posti ad  $s \neq 0$  per definire orizzontalmente un canale magnetico, ed 1 per definire verticalmente. Valgono ancora le  $[5], [5'], [5''], [6], [6']$  dove si ponga  $2A_1, o 2B_1$  uguali alla larghezza orizzontale e verticale della sorgente, ed  $s_1, \bar{s}_1 = 0$  ; con questo nei

determinanti  $\Delta, \bar{\Delta}$  si ha  $H_{11}(s_1) = 1, H_{12}(s_1) = 0, H_{13}(s_1) = 0,$   
 $V_{11}(\bar{s}_1) = 1, V_{12}(\bar{s}_1) = 0.$

Per quel che riguarda l'apertura equivalente del canale magne-  
 tico, varrebbero ancora le espressioni [4], [4'] se l'intensità  
 della sorgente fosse distribuita uniformemente sulla sua superfi-  
 cie. Ma nel caso  $\beta)$  si può generalizzare la definizione di aper-  
 tura equivalente anche quando la distribuzione dell'intensità non  
 è uniforme: basta infatti sostituire nel prodotto (per le dev.  
 orizzontali):

$$\frac{I}{|\Delta|} 2A_1 \cdot 2A_2 \cdot 2A_3$$

il fattore  $I \cdot 2A_1$  con  $\int_{-A_1}^{+A_1} I(x_0) dx_0$

essendo  $I(x_0) dx_0 \frac{dp}{p_0}$  la funzione che rappresenta la distribu-  
 zione d'intensità della sorgente.

Analogamente per le deviazioni verticali, basterà fare la so-  
 stituzione

$$\frac{I}{|\Delta|} \cdot 2B_1 \cdot 2B_2 \rightarrow \int_{-B_1}^{+B_1} I(z_0) dz_0 = \frac{1}{|\Delta|} \cdot 2B_2$$

In questo caso però  $|\bar{\Delta}| = |V_{12}(\bar{s}_2)|$  e così si può dire che l'uni-  
 co contatore verticale determina una 'apertura verticale effica-  
 ce' di  $2B_2/|V_{12}(\bar{s}_2)|$ . (tranne che nel caso in cui  $V_{12}(\bar{s}_2) = 0,$   
 cioè quando l'immagine verticale cade sul contatore  $2B_2$  ).

Per le deviazioni orizzontali, consideriamo il caso in cui la  
 sorgente con due contatori delimitano il canale, o l'immagine del  
 la sorgente cada sul 2° contatore (vedi fig.6)

In questo caso particolare il prodotto:

$$\frac{I}{|\Delta|} \cdot 2A_1 \cdot 2A_2 \cdot 2A_3 \quad \text{prende la forma}$$

$$\int_{-A_1}^{+A_1} I(x_0) dx_0 \frac{2A_2}{|H_{12}(s_2)|} \frac{2A_3}{|H_{13}(s_3)|}$$

e così si può dire che il contatore  $2A_2$  funziona da 'iride' del sistema ottico per le deviazioni orizzontali, determinando un'apertura efficace orizzontale  $2A_2/|H_{12}(s_2)|$ ; e che il contatore  $2A_3$  determina una banda efficace di impulsi' raccolta data  $\frac{2A_3}{|H_{12}(s_3)|}$ .

E' chiaro che in tutto quanto procede si sono trascurati lo scattering e la perdita di energia delle particelle nella sorgente e nei contatori.

§ 5 - Esempio : un analizzatore magnetico per impulsi fino a 1000 MeV

Consideriamo a titolo di esempio un analizzatore ottenuto disponendo come indicato nella Fig. 7 due magneti uguali  $M_1$  e  $M_2$ , aventi le seguenti caratteristiche: zona utile del campo di pianta rettangolare 30 cm x 90 cm; lunghezza magnetica tale da dare un angolo di deflessione di  $15^\circ$  per un impulso di  $1000 \text{ MeV}/c$ , con un raggio di curvatura di 333.3 cm (con un campo di 10.000 gauss nel centro della gap, quindi); indice del campo  $n = -8$ : con buona approssimazione si può realizzarlo con un profilo iperbolico del polo, anche senza dare al polo la curvatura orizzontale; altezza della gap al centro 10 cm.

Se  $BC = 100 \text{ cm}$ , si trova in queste condizioni che il sistema dei due magneti da luogo in  $I$  ad un'immagine orizzontale di una sorgente posta in  $S$ , uguale in grandezza alla sorgente, quando  $\overline{SA} = 127.4 \text{ cm}$  e in questo caso anche  $\overline{DI} = \overline{SA}$ .

Riassumiamo qui le caratteristiche geometriche della traiettoria:

$$\begin{aligned} \overline{SA} &= 127.4 \text{ cm} \\ \widehat{AB} &= \widehat{CD} = 87.3 \text{ cm} \\ \overline{BC} &= 100 \text{ cm} \end{aligned}$$

Lunghezza totale della traiettoria  $T_0 = 529,4 \text{ cm}$ .

Incidenza di  $T_0$  all'ingresso e all'uscita dei magneti :  $7^\circ 30'$

Angolo di deflessione di un magnete :  $15^\circ = 0,2618 \text{ rad}$

Raggio di curvatura medio di  $T_0$  dentro un magnete :  $333.3 \text{ cm} =$

Diamo qui le espressioni di  $\|H\|$  e  $\|V\|$  che determinano le forme delle traiettorie, per alcuni punti lungo  $T_0$  :

$A, B, C, D, I$  ( $\theta$  è il centro di  $BC$ ,  $A, B, C, D$  sono i punti d'ingresso e di uscita di  $\tau_0$  dei magneti, vedi fig. 7).

Per comodità di calcolo si è preso come unità di misura delle lunghezze il raggio di curvatura della traiettoria  $\tau_0$  nei magneti. Con questo le matrici  $\|H\|$  e  $\|V\|$  hanno le seguenti espressioni numeriche:

$$\|H_{IA}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0.3822 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \|H_{OI}\|$$

$$\|H_{AB}\| = \begin{vmatrix} 0.7381 & 0.2357 & 0.0325 \\ -1.9311 & 0.7381 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(include i bordi} \\ \text{d'ingresso e di usci} \\ \text{ta)} \end{array}$$

$$\|H_{CD}\| = \|H_{AB}\|$$

$$\|H_{SO}\| = \begin{vmatrix} 0.4485 & 0.5178 & 0.0685 \\ -1.9311 & 0 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\|H_{SD}\| = \begin{vmatrix} -0.3379 & 0.3822 & 0.1337 \\ -1.7321 & -1 & 0.2152 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(include il bordo d'uscita)}$$

$$\|H_{AD}\| = \begin{vmatrix} -0.3379 & 0.5114 & 0.1337 \\ -1.7321 & -0.3379 & 0.2152 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(include i bordi d'ingresso e di uscita)}$$

$$\|H_{SI}\| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0.2160 \\ -1.7321 & -1 & 0.2152 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\|H_{AO}\| = \begin{vmatrix} 0.4485 & 0.3464 & 0.0685 \\ -1.9311 & 0.7381 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(include il bordo di entrata)}$$

$$\|H_{OD}\| = \begin{vmatrix} 0.7381 & 0.3464 & 0.0325 \\ -1.9311 & 0.4485 & 0.2400 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(include il bordo di uscita)}$$

$$\|V_{SA}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0.3822 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \|V_{DI}\|$$

$$\|V_{AB}\| = \begin{vmatrix} 1.2492 & 0.2864 \\ 1.9572 & 1.2492 \end{vmatrix} = \|V_{CD}\| \quad (\text{include i bordi d'ingresso e di uscita})$$

$$\|V_{AO}\| = \begin{vmatrix} 1.5428 & 0.4738 \\ 1.9572 & 1.2492 \end{vmatrix} \quad (\text{include il bordo d'ingresso})$$

$$\|V_{OD}\| = \begin{vmatrix} 1.2492 & 0.4738 \\ 1.9572 & 1.5428 \end{vmatrix} \quad (\text{include il bordo d'uscita})$$

$$\|V_{AD}\| = \begin{vmatrix} 2.8545 & 1.1837 \\ 6.0392 & 2.8545 \end{vmatrix} \quad (\text{include i bordi d'ingresso e di uscita})$$

$$\|V_{SO}\| = \begin{vmatrix} 1.5428 & 1.0635 \\ 1.9572 & 1.9974 \end{vmatrix}$$

$$\|V_{SD}\| = \begin{vmatrix} 2.8545 & 2.2748 \\ 6.0392 & 5.1630 \end{vmatrix} \quad (\text{include il bordo di uscita})$$

$$\|V_{SI}\| = \begin{vmatrix} 5.1630 & 4.2484 \\ 6.0392 & 5.1630 \end{vmatrix}$$

$$\|V_{AI}\| = \begin{vmatrix} 5.1630 & 2.2748 \\ 6.0392 & 2.8545 \end{vmatrix} \quad (\text{include il bordo d'ingresso})$$

$$\|V_{OI}\| = \begin{vmatrix} 1.9974 & 1.0635 \\ 1.9572 & 1.5428 \end{vmatrix}$$

Abbiamo riportato molti valori numerici riguardanti singoli pezzi della traiettoria  $\tau_0$ , perchè possono servire a fare i calcoli quando si vogliono mettere i contatori in varie posizioni lungo  $\tau_0$ .

Calcoliamo ora l'apertura e il potere risolutivo assumendo che i contatori siano disposti così:

uno in O, che limiti le oscillazioni orizzontali (irido)  
uno in I, che limiti le oscillazioni orizzontali (determinando  
la banda di impulsi efficace) e anche la verticali.

Il contatore in O abbia dimensione orizzontale  $2A_0$  e verticale  
 $2B_0$ ; il contatore in I abbia dimensione orizzontale  $2A_I$  e  
verticale  $2B_I$ . La sorgente sia di altezza  $2B_s$  e di larghez-  
za  $2A_s$ .

Dalla matrice  $H_{SI}$  si vede che la dispersione è, in I :

$$\frac{\Delta p}{p_0} \frac{1}{\Delta x_I} = \frac{1}{333,3 \text{ cm} \cdot 0,2160} = 1,39 \% \text{ al cm}$$

Dalla matrice  $H_{S0}$  si vede che l'apertura orizzontale determi-  
nata dal contatore in O è:

$$\frac{1}{333,3 \text{ cm} \cdot 0,5178} = 0,58 \cdot 10^{-2} \frac{\text{radianti}}{\text{cm}}$$

Dalla matrice  $V_{SI}$  si vede che l'apertura verticale determi-  
nata dal contatore in I è

$$\frac{1}{333,3 \text{ cm} \cdot 4,2484} = 0,706 \cdot 10^{-3} \frac{\text{radianti}}{\text{cm}}$$

Il potere risolutivo è dato da:

$$2(A_s + A_I) \cdot 1,39 \% , \text{ se } A_s \text{ ed } A_I \text{ sono in centimetri.}$$

Riportiamo i risultati che si hanno per l'apertura e il pote-  
re risolutivo con due diversi set di valori delle dimensioni dei  
contatori e della sorgente:

1°) Larghezza $C_0$ = 24 cm	Altezza $C_0$ = 5 cm
Larghezza $C_I$ = 5 cm	Altezza $C_I$ = 10 cm
Larghezza sorg. = 5 cm	Altezza sorgente = 5 cm

Risulta:

Apertura orizzontale	0,145 rad. = 8,31°
Apertura verticale	$7,06 \times 10^{-3}$ rad = 0.404°
Angolo solido	$1.023 \times 10^{-3}$ sterad

Larghezza efficace della  
banda d'impulsi raccolta 6,95%  
Potere risolutivo 13,9%

Le oscillazioni radiali sono contenute in una fascia larga 25 cm.

Il contatore  $C_0$  non limita le traiettorie verticalmente (anche con la sua altezza di 5 cm)

2°) Larghezza $C_0 = 24$ cm	Altezza $C_0 = 2$ cm
Larghezza $C_I = 5$ cm	Altezza $C_I = 3,6$ cm
Larghezza sorgente = 5 cm	Altezza sorgente = 3,6 cm

L'apertura orizzontale, la banda di impulsi raccolta e il potere risolutivo sono identici alla disposizione precedente. L'apertura verticale è  $2.54 \times 10^{-3}$  rad =  $0.145^\circ$ ; l'angolo solido diventa  $0,368 \times 10^{-3}$  sterad.

Il contatore  $C_0$  non limita le traiettorie verticalmente.

Da notare:

- l'altezza di  $C_0$  non entra nei calcoli delle aperture perchè  <sup>$C_0$</sup>  non funziona da diaframma verticale per le traiettorie che partono dalla sorgente e arrivano in  $C_I$ ; ma conviene che quest'altezza sia piccola per eliminare le casuali.

- questi calcoli considerano trascurabile lo scattering nei contatori e nella sorgente, e la perdita di energia. Nei casi pratici queste due cause possono cambiare il potere risolutivo e l'apertura utile

- il 2° set di valori scelti da luogo ad una intensità più piccola di un fattore 0.13 rispetto al 1° set (perchè è più piccola l'apertura angolare e l'altezza della sorgente); ma è stato scelto in modo che i due contatori  $C_0$  e  $C_I$  delimitano verticalmente una fascia di traiettorie che non attraversa i poli di  $M_1$ : cioè il sistema di contatori non vede le particelle scatterate una volta sola dai poli di  $M_1$ ; questo può essere un vantaggio notevole quando queste contribuiscano al conteggio in modo apprezzabile.

Si può mostrare che dai contatori  $C_0$  e  $C_I$  vengono viste solo le particelle che abbiano in  $A$  una  $|Z_A| < [0,446 B_I + 2,139 B_0]$

- in tutti e due i set (1°) e 2°) le aperture sono tali che il fascio di traiettorie definito dai contatori e dalla sorgente non tocca i poli dei magneti e non esce dalla zona utile del campo magnetico.

L'andamento delle traiettorie orizzontali e verticali è disegnato schematicamente nella fig. 8, in cui le scale delle dimensioni trasversali a  $T_0$  è stata arbitrariamente ingrandita.

Per ottenere il gradiente di campo corrispondente ad un indice  $n = -8$  su un raggio di curvatura di 333.3 cm, il profilo iperbolico del polo ha l'equazione:

$$Z_{mm} = 50 \frac{1}{1 + \frac{2,4}{1000} X_{mm}}$$

(per il significato delle coordinate  $x, z$  vedi fig.9: l'asse  $x$  è sul piano mediano ed  $O$  è il centro geometrico della gap). Quest'iperbole può venire approssimata con una spezzata a lati rettilinei; per avere un campo preciso al  $\pm 1\%$ , la spezzata è costituita da 5 segmenti, e le ascisse e le ordinate dei vertici sono le seguenti:

Punti	$x_{mm}$	$z_{mm}$
$v_1$	-200	94.91
$v_2$	-140	74.98
$v_3$	-80	61.56
$v_4$	0	49.68
$v_5$	+90	40.80
$v_6$	+200	33.34

Due magneti come quelli descritti nell'esempio dell'analizzatore sono stati già commissionati alla Ditta Ansaldo S. Giorgio (dimensioni del traferro 40 cm x 90 cm x 10 cm, campo massimo 16000 Gauss, pianta del polo rettangolare); saranno dotati di due coppie di poli: piani e paralleli, e con il profilo ora specificato. Il giogo è a forma di C, l'alimentazione è in c.c. -

stabilizzata al  $\pm 1\text{‰}$ ; potranno essere eccitati in serie.

E' previsto inoltre l'uso di una piattaforma rotante come supporto comune dei due magneti, disposti su di essa in modo da realizzare lo schema della fig.7; la piattaforma ruoterà intorno ad un asse verticale passante per  $S'$ , e si potrà disporre un'esperienza in modo che la sorgente delle particelle analizzate si trovi sullo stesso asse, all'altezza del piano mediano dei magneti. Gli stessi magneti potranno essere usati anche come parti di altri canali magnetici. (+)

I disegni costruiti relativi a questi magneti sono a disposizione presso l'archivio dei Laboratori Naz. del Sincrotrone di Frascati.

I dati costruttivi relativi a questi magneti e alla piattaforma rotante di supporto saranno oggetto di una prossima relazione dell'Ing. Toschi.

§ 6 - Considerazioni sull'uso della tecnica del filo

Come è noto un filo metallico flessibile e inestensibile, (6)- immerso in un campo magnetico costante nel tempo, percorso dalla corrente  $i$ , e sul quale agiscano solamente la forza dovuta all'azione del campo su  $i$ , e una tensione  $F$  applicata ai suoi estremi (per es. mediante un peso), assume una configurazione di equilibrio avente la forma di una traiettoria nello stesso campo magnetico di una particella di carica e di impulso

$$p = \frac{eF}{c}$$

Questa formula si può scrivere numericamente:

$$p \frac{\text{MeV}}{c} = 2939 \frac{F_{\text{grammi peso}}}{\text{cMA}}$$

se l'accelerazione di gravità ha il valore  $9.803 \text{ m sec}^{-2}$

---

(+) NOTA - Il progetto dell'analizzatore da 1000 MeV/c è stato fatto in collaborazione con l'Ing. R. Toschi ed il Dr. M. Benaventano.

Si possono quindi (+) trovare le traiettorie delle particelle in un analizzatore osservando le posizioni assunte dal filo nel campo magnetico, spostandone trasversalmente gli estremi, e variando il rapporto  $F/i$ .

Supponiamo di aver realizzato un dispositivo sperimentale che permetta di osservare le correlazioni fra gli scostamenti orizzontali e verticali degli estremi del filo rispetto a  $T_0$ , le variazioni di  $i$  per una  $F$  fissa, e le inclinazioni orizzontali e verticali del filo rispetto a  $T_0$  nei due estremi, (queste ultime possono osservarsi per es. mediante degli specchietti solidali col filo). Per l'analizzatore proposto al § 5 conviene fare una serie di misure sul tratto  $SO$  ed un'altra serie sul tratto  $OI$  (per evitare l'instabilità orizzontale che si avrebbe con un unico tratto  $SI$ , ed anche per misurare l'effetto del contatore posto in  $O$ ).

Quantità direttamente misurabili, connesse con gli elementi della matrice  $\|H_{30}\|$ , sono:

$$\left( \frac{\Delta x_0}{\Delta x_s} \right)_{\substack{\Delta i = 0 \\ \Delta x'_s = 0}} = H_{11} \quad (\text{per definizione})$$

$$\left( \frac{\Delta x_0}{\Delta x'_s} \right)_{\substack{\Delta i = 0 \\ \Delta x_s = 0}} = H_{12} \quad (\text{per definizione})$$

$$\left( \frac{\Delta x_0}{\Delta i/i} \right)_{\substack{\Delta x_s = 0 \\ x'_s = 0}} = -H_{13} \quad (\text{per definizione})$$

$$\left( \frac{\Delta x_s}{\Delta x_0} \right)_{\substack{\Delta x'_0 = 0 \\ \Delta i = 0}} = H_{22} \quad (\text{si dimostra})$$

$$\left( \frac{\Delta x'_0}{\Delta i/i} \right)_{\substack{\Delta x_s = 0 \\ \Delta x_0 = 0}} = h_{23} \quad \text{da cui (si dimostra):}$$

$$H_{23} = \frac{H_{22} \cdot H_{13}}{H_{12}} - h_{23}$$

---

(+) - NOTA - Occorre però rilevare che una posizione di equilibrio del filo può essere stabile o instabile: le osservazioni possono farsi solo quando è stabile. Vedi per es. citazione (9)

Il valore di  $H_{21}$  si ricava da:

$$H_{21} = - \frac{1 - H_{11} \cdot H_{22}}{H_{12}}$$

Così le formule ora scritte permettono di costruire tutte le matrici  $H_{SO}$  partendo da quantità direttamente misurabili. Il significato dei simboli  $\Delta x_0, \Delta x_S, \Delta x'_0, \Delta x'_S, \Delta l$  è abbastanza chiaro: per esempio per misurare

$$\left( \frac{\Delta x_0}{\Delta x'_S} \right)_{\substack{\Delta l = 0 \\ \Delta x_S = 0}} = H_{12}$$

si deve tener fissa la corrente

e la posizione dell'estremo del filo in  $S$  centrata su  $T_0$ , e misurare il rapporto fra lo scostamento laterale in  $O$  ( $\Delta x_0$ ) e la inclinazione in  $S$  ( $\Delta x'_S$ ). Nei limiti dell'approssimazione di Gauss, questo rapporto deve essere una costante, anche se  $x_S$  ha un valore  $\neq 0$  e  $l \neq l_0$  (purchè siano fissi in una misura); quindi per la misura deve essere sufficiente spostare l'estremo in  $O$  di una quantità fissata ( $\Delta x_0$ ), e misurare la deviazione del filo in  $S$  ( $\Delta x'_S$ ) corrispondente. Le altre misure sono analoghe. Per la precisione, occorre rilevare che volendo una precisione dell'1% su  $H_{12}$ , per es., occorre misurare con la stessa precisione  $\Delta x'_S$ , e quindi la sensibilità della misura angolare deve essere dell'ordine di  $\sim 1/100$  grado.

Analogamente per le oscillazioni verticali si potranno misurare

$$\left( \frac{\Delta z_0}{\Delta z'_S} \right)_{\substack{\Delta l = 0 \\ \Delta z_S = 0}} = V_{12} \quad (\text{per definizione})$$

$$\left( \frac{\Delta z_0}{\Delta z'_S} \right)_{\substack{\Delta l = 0 \\ \Delta z'_S = 0}} = V_{11} \quad (\text{per definizione})$$

$$\left( \frac{\Delta z'_S}{\Delta z_0} \right)_{\substack{\Delta z'_0 = 0 \\ \Delta l = 0}} = V_{22} \quad (\text{si dimostra})$$

Si calcola poi:

$$V_{21} = \frac{1 - V_{11} \cdot V_{12}}{V_{12}}$$

Queste misure sono indipendenti, e sono le informazioni minime che definiscono completamente l'ottica dell'analizzatore (per il tratto  $SO$ ). Le stesse misure si possono ripetere, nello stesso modo, per il tratto  $OI$ .

Se le condizioni di fuoco sono quelle teoricamente previste (§ 5), si deve ottenere in particolare:

$$H_{22}(SO) = 0 ; \quad H_{21}(SO) = - \frac{1}{H_{12}(SO)}$$

$$H_{11}(OI) = 0 ; \quad H_{22}(OI) = - H_{11}(SO)$$

$$H_{12}(OI) = H_{12}(SO)$$

$$H_{21}(OI) = H_{21}(SO)$$

e per la matrice  $\|H_{SI}\| = \|H_{OI}\| \cdot \|H_{SO}\|$

$$H_{11}(SI) = -1 ; \quad H_{22}(SI) = -1 ; \quad H_{12}(SI) = 0 ; \quad H_{21}(SI) < 0$$

Se queste condizioni non saranno verificate, ciò significa che manca una perfetta corrispondenza tra le previsioni teoriche e i risultati sperimentali; ma si potranno sempre utilizzare i risultati sperimentali ottenuti per  $\|H\|$  e  $\|V\|$  per calcolare, per es. gli effetti delle aperture dei contatori posti lungo  $T_0$ , secondo lo schema indicato al § 4.

Da quanto detto risulta che la tecnica del filo, se è possibile adoperarla con precisione sufficiente, può servire per definire 'operativamente' l'ottica di un analizzatore nell'approssimazione di Gauss con un numero di misure relativamente piccolo. Una causa di errore nelle misure colla tecnica del filo per le deviazioni verticali è costituita dal peso proprio del filo.

Si può mostrare però, che in prima approssimazione, questa causa non influisce se le misure sono fatte col criterio differenziale, cioè correlando differenze di quota con differenze di inclinazioni e con le variazioni della corrente  $\Delta i$ , come accennato sopra. Se si indica infatti con  $\Delta z(s)$  lo scostamento dalla

forma ideale dovuto al peso proprio del filo,  $\Delta z(s)$  soddisfa la seguente equazione differenziale:

$$[7] \quad \frac{d^2(\Delta z)}{ds^2} + i \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} \right)_0 \frac{1}{F} \Delta z = - \frac{Sg}{F} \quad (S = \text{densità lineare del filo})$$

che va risolta con le condizioni agli estremi  $s_1, s_2$  :

$$\Delta z(s_1) = 0 \quad ; \quad \Delta z(s_2) = 0$$

La soluzione dell'equazione lineare non omogenea ora scritta non dipende quindi dalla forma che avrebbe il filo se fosse senza peso, perchè questa non compare nell'equazione [7]. Se le misure sono fatte per differenza, la  $\Delta z(s)$  che risolve l'equazione [7] sparisce e non compare nei risultati che si ottengono per la matrice  $\|V\|$ .

Bibliografia

- (1) Cristiani, Lovati, Panetti.  
Relazione n° AS 8 della Sezione Acceleratore dell'INFN (1956)
- (2) H. Steinwedel - Report CERN 56 - 20 (1956), pag. 13 e 22
- (3) M.S. Livingston - Tecn. Report N°60 - MIT (1953) (Design study  
for a 15 BeV accelerator) pag. 133 e seguenti.
- (4) Caianello and Turrin - Nuovo Cimento 10,594 (1953)
- (5) E. Segrè - Experimental Nuclear Physics - Vol. I, pag. 578 e seg.
- (6) J. Loeb - Comptes Rendu 222,488 (19 6)
- (7) L. Cranberg - U.S. Atomic Energy Commission, AECU 1670
- (8) Symonds - Rep. on Progr. in Phys. 18,83 (1955)
- (9) C. Bernardini - Rond. Accad. Naz. Lincei - Serie VIII vol. XIX,  
297 (1955)

In (1) si trova anche raccolta la bibliografia che riguarda gli analizzatori magnetici; nei lavori ivi citati la trattazione dell'ottica lineare è fatta con metodi formalmente diversi da quello usato nella presente relazione.

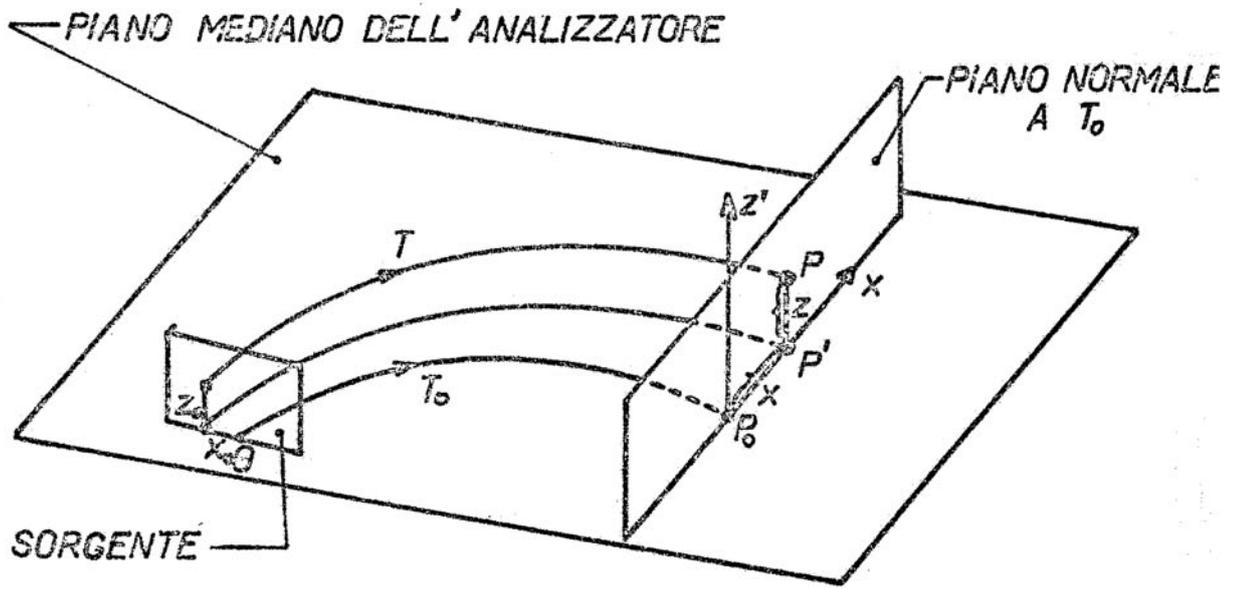


FIG. 1

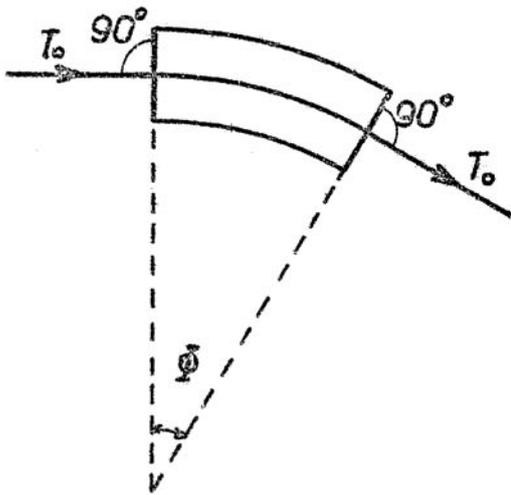


FIG. 2

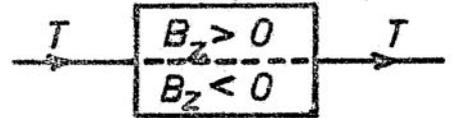


FIG. 3

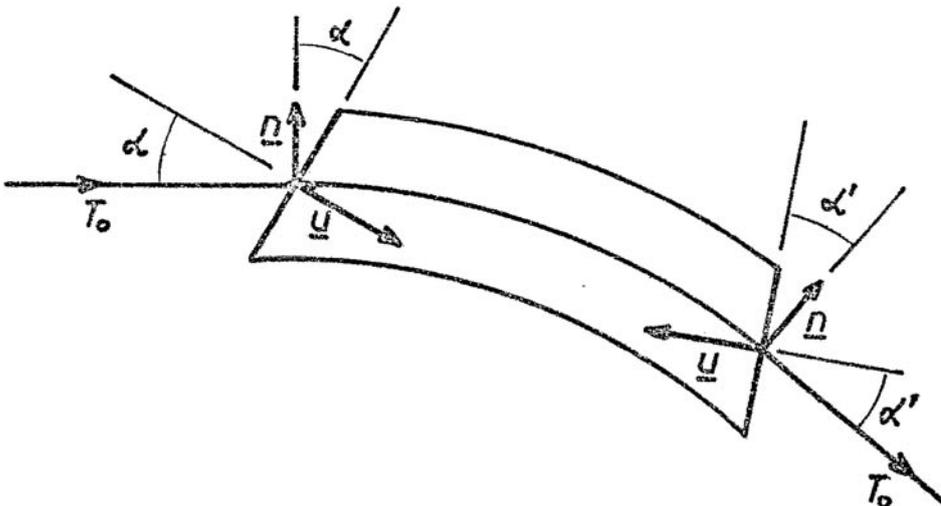


FIG. 4

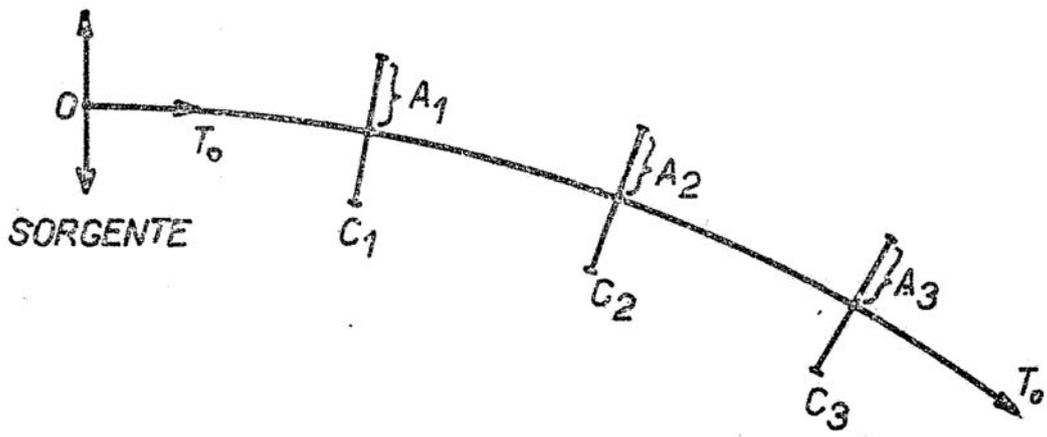


FIG. 5

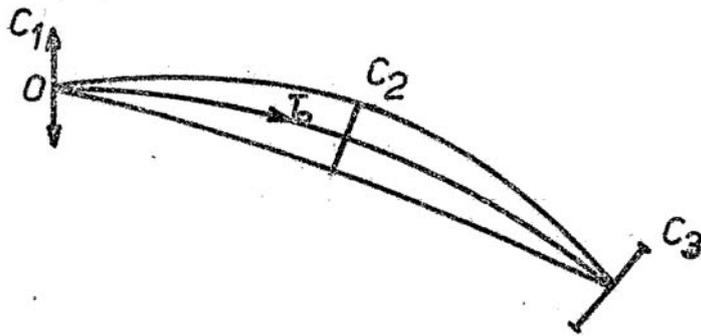


FIG. 6

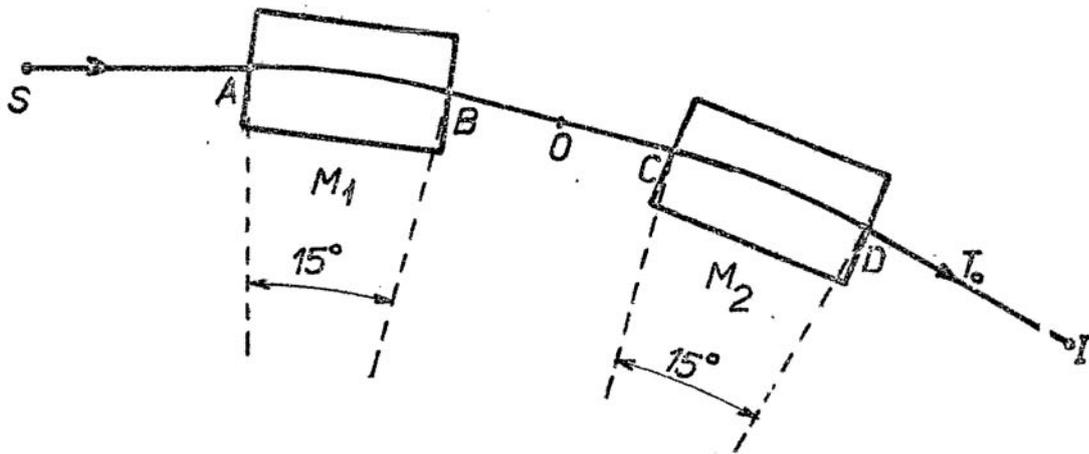


FIG. 7

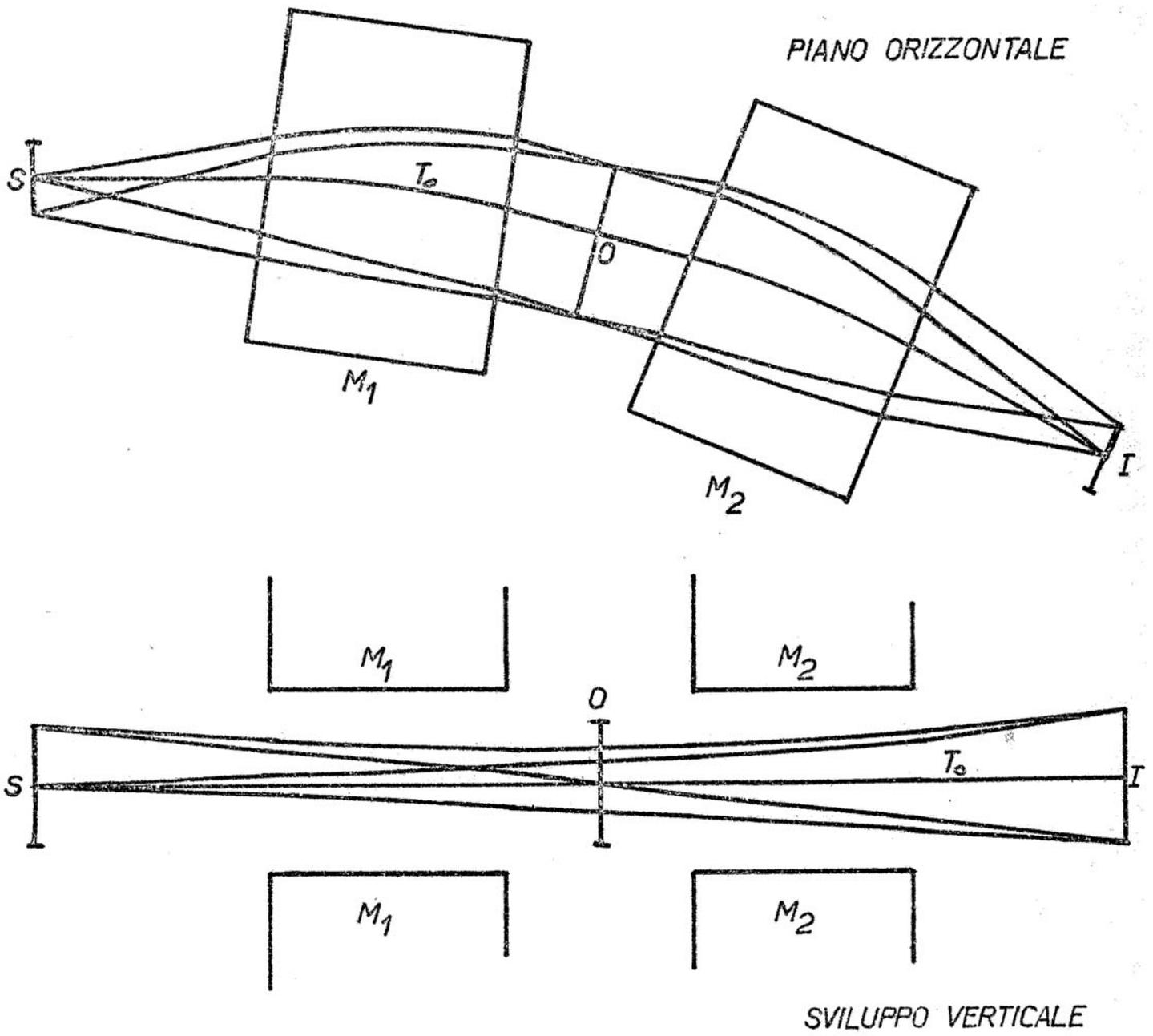


FIG. 8

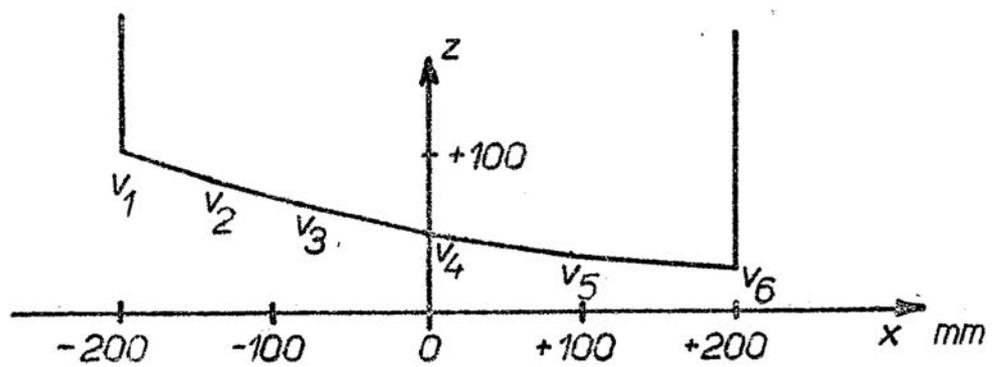


FIG. 9