Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-58/3 (10. 2. 58)

A. Turrin: SIGNIFICATO ED EFFETTI DELLA RISONANZA 2, 3, 0.

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE
Laboratori di Frascati

Relazione N°: T 36
10 Febbraio 1958.

A.Turrin: SIGNIFICATO ED EFFETTI DELLA RISONANZA - 2,3,0.

Sommario: Secondo le più recenti misure sul campo magnetico del Sincrotrone di Frascati in fase di montaggio, si trova che il valore dell'indice del campo tende a superare il valore nominale 0.61. Le misure in corrente continua a 650 gauss danno un valore dell'indice del campo uguale a 0.623. Poichè quando l'indice del campo assume il valore 0.635 si cade a cavallo della risonanza - 2,3,0 si analizza con un metodo di calcolo di prima approssimazione il comportamento delle orbite in un Sincrotrone circolare con indice di campo prossimo a quello di risonanza.

Si trova in detta approssimazione:

1) Per $n_o = n_{ris}$ tutte le orbite finiscono prima o dopo per divergere.
2) Con i dati sulle misure magnetiche finora disponibili, nella peggiore delle ipotesi la fluttuazione percentuale massima possibile delle ampiezze delle orbite non può superare il valore ± 6%.

<u>Introduzione</u>: La scelta del valore nominale dell'indice del campo

$$n_0 = -\left[\frac{r}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial r}\right]_{\substack{r=R \\ z=0}}$$

in un Sincrotrone è sempre determinata dal compromesso tra un insieme di diverse esigenze sulla macchina. Le principali sono generalmente le seguenti: evitare le risonanze principali (quelle a bassi indici), disporre di tratti privi di campo di lunghezza L proporzionata al raggio R (a sua volta individuato dalla massima energia voluta), con L di valore tale però che le irregolarità azimutali del campo non deformino l'orbita d'equilibrio di quantità comparabili con la larghezza e altezza della gap, ecc....

Nel caso del nostro progetto 31.x.55 il valore nominale fissato è $n_o = 0.61$ [1]. La bontà di tale scelta rispetto le risonanze è dimostrata considerando la figura 1 riportata qui dalla relazione n° T1 della Sezione Acceleratore [2], che rappresenta le rette di risonanza per i Sincrotroni a tratti rettilinei. Come si vede in questa figura (il valore di $\frac{L}{R}$ è nel nostro caso uguale a 0.335) il working point scelto giace tra le risonanze -1,-1,2 (n_o=0.593) e -2,3,0 (n_o=0.635). Si veda a questo proposito, anche la referenza [1]. La risonanza -1,4,-2, immediatamente prossima al working point scelto è da considerarsi molto meno pericolosa delle due nominate, in quanto avente un indice superiore a 3.

Recenti misure sul valore di n_o cioè del valor medio fatto sull'azimuth di n misurato sul cerchio di raggio R eseguito in c.c. sulla macchina in fase di montaggio, indicano che in detto valore tende ad essere apprezzabilmente maggiore di 0.61, cioè che a 650 Gauss è 0.623. Sorge pertanto il problema di studiare il comportamento delle orbite in prossimità della risonanza -2,3,0 (n_o=0.635) allo scopo di dare una stima di come si comportano le orbite in simili condizioni.

---

(1) I.N.F.N. - Sezione Acceleratore: Relazione N° T16

(2) E. Persico: Risonanze nelle oscillazioni di Betatrone

I) Il termine dello sviluppo di $n(x,\Theta,z=0)$ che rende conto della risonanza -2,3,0, e la corrispondente equazione del moto(3)

Non si conosce metodo alcuno per studiare le traiettorie in un Racetrack che presenti risonanza. Considereremo pertanto un Sincrotrone circolare in luogo del Racetrack per discutere la risonanza -2,3,0, e supporremo che le conclusioni tratte siano valide - in linea di massima - anche quando $\frac{L}{R}\neq 0$.

La denominazione risonanza -2,3,0 vuol dire semplicemente che due oscillazioni radiali di betatrone avvengono esattamente ogni tre rivoluzioni. Per il Sincrotrone circolare il valore di n_0 per cui ciò si verifica è $n_{ris} = \frac{5}{9}$.

Andiamo ora a considerare quale termine (di ordine sicuramente superiore al I) nell'equazione del moto radiale è responsabile della risonanza in istudio.

Supponiamo di conoscere l'espressione di $n(x,\Theta,z)$ sul piano mediano, cioè di conoscere la funzione $n(x,\Theta,0)$. Essa può sempre pensarsi sviluppata in una somma di infiniti termini del tipo

$$a_{hk}\, x^h \sin(k\Theta+\gamma_k)$$

con h e k interi positivi o nulli.

Dimostreremo che il termine che è responsabile della risonanza qui considerata è il termine del primo ordine $(h=1, k=2)$

$$\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} x \sin(2\Theta+\gamma) .$$

Il coefficiente $\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2}$ costituisce il contributo di seconda armonica alla variazione azimutale del termine lineare dello sviluppo in serie di Mac-Laurin della $n(x,\Theta,0)$, nell'azimuth Θ, e pertanto a priori esso è molto minore di $\left|\frac{dn}{dx}\right|_{totale}$ in qua-

(3) Per gli argomenti trattati nei paragrafi I e II ringrazio sentitamente il Dott. Carlo Bernardini, in quanto a suo tempo mi ha introdotto in essi.

lunque azimuth.

Consideriamo dunque il moto della particella (oscillazioni radiali) quando $n(x,\Theta,0)$ è dato dalla

$$I.1) \quad n(x,\Theta,0)=\left(\frac{5}{9}-\delta\right)+\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} x \sin 2\Theta .$$

In essa $\frac{5}{9} = n_{ris}$; $\delta=n_{ris}-n_o<<1$, e non si perde nella generalità dell'analisi ponendo arbitrariamente la fase γ uguale a zero.

L'equazione delle oscillazioni radiali essendo[4]

$$I.2) \quad \frac{d^2x}{d\Theta^2}+\left[1-\frac{1}{x}\int_0^x n(x,\Theta,0)\,dx\right]x=0,$$

l'equazione dal moto da considerare è la:

$$I.3) \quad \frac{d^2x}{d\Theta^2}+\left(\frac{4}{9}+\delta\right)x=\frac{1}{2}\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} x^2 \sin 2\Theta,$$

che è una equazione non lineare a coefficiente periodico. Per far vedere che in essa è contenuta la risonanza che ci interessa studiare è sufficiente tentare di risolverla con il metodo delle approssimazioni successive (iterazione). Se, come detto, il secondo membro dell'equazione è molto minore di $\left(\frac{4}{9}+\delta\right)x$, l'iterazione consiste nel trascurarlo momentaneamente, da cui la soluzione di approssimazione zero con le condizioni $x_o(0)=a$, $\frac{dx_o(0)}{d\Theta}=0$

$$I.4_o) \quad x_o=a\cos\left(\sqrt{\tfrac{4}{9}+\delta}\,\Theta\right).$$

La soluzione di approssimazione uno si ottiene semplicemente sostituendo nel II° membro della I.3) la $I.4_o)$ e risolvendo l'equazione che ne risulta:

$$I.5) \quad \frac{d^2x_1}{d\Theta^2}+\left(\frac{4}{9}+\delta\right)x_1=\frac{1}{2}\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} a^2\cos^2\left(\sqrt{\tfrac{4}{9}+\delta}\,\Theta\right)\sin 2\Theta.$$

Con qualche manipolazione, questa equazione può scriversi

---

(4) A. Turrin - I.N.F.N. - Laboratori di Frascati - Relazione n° T 35

$$\text{I5}')\quad \frac{d^2x_1}{d\theta^2}+\left(\frac{4}{9}+\delta\right)x_1=\frac{1}{4}\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2}a^2\Big\{\sin 2\theta+$$
$$+\frac{1}{2}\sin\left[\left(2\sqrt{\tfrac{4}{9}+\delta}+2\right)\theta\right]-\frac{1}{2}\sin\left[\left(2\sqrt{\tfrac{4}{9}+\delta}-2\right)\theta\right]\Big\},$$

e la soluzione di approssimazione 1 è

$$\text{I.4}_1)\quad x_1=a\cos\left(\sqrt{\tfrac{4}{9}+\delta}\,\theta\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2}a^2\Big\{\frac{\sin 2\theta}{4-\left(\frac{4}{9}+\delta\right)}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\sin\left[\left(2\sqrt{\frac{4}{9}+\delta}+2\right)\theta\right]}{\left(2\sqrt{\frac{4}{9}+\delta}+2\right)^2-\left(\frac{4}{9}+\delta\right)}-\frac{1}{2}\frac{\sin\left[\left(2\sqrt{\frac{4}{9}+\delta}-2\right)\theta\right]}{\left(2\sqrt{\frac{4}{9}+\delta}-2\right)^2-\left(\frac{4}{9}+\delta\right)}\Big\}.$$

Questo metodo, però, <u>non è applicabile</u> a questa equazione quando $\delta\to 0$. Infatti si vede subito che l'ultimo termine del secondo membro della soluzione I.4_1) <u>diverge</u> per $\delta\to 0$. Abbiamo dedotto la I.4_1) con questo metodo soltanto per dimostrare che nella I.3) è contenuta la risonanza che ci interessa studiare. Giunti a questo punto, si potrebbe essere tentati di portare a termine quest'analisi - che vuole essere puramente te indicativa - ragionando nel modo seguente:
Se nella I.4_1) si suppone $\delta\to 0$, il termine divergente si può derivare - a meno di quantità di ordine δ^2 - nella forma

$$\frac{1}{24\delta}\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2}a^2\,.$$

Rinunciando a conoscere il comportamento della soluzione per $\delta=0$, si potrebbe tagliar corto dicendo che la risonanza è completamente evitata quando l'ordine di grandezza di questo termine è molto minore del termine di approssimazione zero $a\cos\left(\sqrt{\frac{4}{9}+\delta}\,\theta\right)$, cioè che le orbite convergono <u>in approssimazione uno</u> quando

$$\text{I6})\quad \left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2}a\ll 24\delta\,.$$

Ciò è del tutto illusorio. Infatti se si spinge ancora il metodo iterativo fino all'approssimazione di ordine due si ricava una equazione della forma seguente:

$$\text{I5}'')\quad \frac{d^2x_2}{d\theta^2}+\left(\frac{4}{9}+\delta\right)x_2=\left(\text{II}^\circ\text{ membro della I.5}'\right)+$$
$$+a^3\left(\frac{dn}{dx}\right)^2_{1,2}\Big\{\text{funzioni periodiche di frequenza}\neq\sqrt{\tfrac{4}{9}+\delta}+$$
$$+f(\delta)\;\underline{\underline{\cos\left(\sqrt{\tfrac{4}{9}+\delta}\,\theta\right)}}\Big\},$$

cioè la soluzione di ordine due risulta divergente per qualunque δ, e la limitazione I.6 rimane una limitazione senza significato. Tutto ciò a causa della assoluta impotenza del metodo iterativo per quanto riguarda la sua applicazione ad equazioni del tipo I.3.

Pertanto, la strategia da addottare per ricavare corrette informazioni e limitazioni sulla risonanza in istudio è la seguente: Considerare valida - se si riesce a trovarla - soltanto quella soluzione della I.3 che già in prima approssimazione riesca a descrivere in tutto l'intervallo delle θ l'anadamento divergente o no della $x(\theta)$ anche nel caso di completa risonanza ($\delta = 0$).

II.) L'unico metodo capace di risolvere il problema.

L'unico metodo efficiente oggi disponibile alla soluzione di equazioni del tipo in esame è il metodo di N. Kryloff e N. Bogoliuboff[5], che consiste esenzialmente - nei riguardi della approssimazione addottata - nel sostituire al posto di un sistema di equazioni alle differenze finite un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Non lo descriveremo qui, ma forniremo direttamente la soluzione del caso in nostra considerazione, facilmente suscettibile di verifica.

La soluzione di approssimazione uno della I.3 è

$$x = a(\theta)\sin\left[\frac{2}{3}\theta + \phi(\theta)\right] \qquad (a(\theta) \geq 0) \tag{II.1}$$

(5) N. Kryloff and N. Bogoliuboff: Introduction to Non-Linear Mechanics - Princeton University Press.

in cui l'ampiezza a (Θ) e la fase Φ (Θ) sono determinate dal sistema di equazioni di primo ordine non lineare

$$\text{II.2}\qquad \begin{aligned} \frac{da}{d\Theta} &= \frac{3}{32}\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} a^2 \sin 3\Phi \\ \frac{d\Phi}{d\Theta} &= \frac{3}{32}\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} a \cos 3\Phi + \frac{3}{4}\delta \end{aligned}$$

Il lettore che lo volesse potrebbe facilmente trovare che la II.1), sostituita nella I.3 tenendo conto delle condizioni II.2, soddisfa la I.3 entro quantità del I° ordine in $\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2}$ e δ limitatamente ai soli termini responsabili della risonanza (termini tipo sin ($\frac{2}{3}\Theta + \Phi(\Theta)$)). Compaiono in più nel corso di questa sostituzione termini termini del primo ordine in $\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2}$ che però non sono di risonanza. Ciò non pregiudica affatto la legittimità del calcolo, in quanto vicino alla risonanza questi termini danno un contributo trascurabile alla oscillazione x (Θ).

Poichè, per $\delta \to 0$, non esistono termini divergenti nel sistema II.2, possiamo dire che la soluzione di questo sistema ha i requisiti da noi imposti alla fine del paragrafo I, e pertanto potremo tranquillamente considerar valide e significative le conclusioni che da questa soluzione si trarranno.

III.) Soluzione dell'equazione del moto

α) Condizioni di perfetta risonanza ($\delta = 0$)

Nel caso δ =0 le variabili nel sistema II.2 si separano subito dividendo membro a membro tra loro le due equazioni. Si ricava:

$$\text{III.1)}\qquad \frac{da}{d\Phi} = a \, tg \, 3\Phi$$

da cui

$$\text{III.2}\qquad a = a_0 \sqrt[3]{\left|\frac{\cos 3\Phi_0}{\cos 3\Phi}\right|}$$

dove a_o e Φ_o sono le condizioni iniziali $a(o)$ e $\Phi(o)$.
Poichè prima e dopo $|\cos 3\Phi| \longrightarrow o$, segue che presto o tardi $a \longrightarrow \infty$. Risolvendo completamente il sistema si trovano per $a(\Theta)$ andamenti che prima o dopo assumono aspetto divergente.
Andiamo ora a considerare il problema dal punto di vista del le nostre esigenze.

β) Ricerca di soluzioni limitate ($\delta \neq o$)

Si tratta di stabilire se, nelle ipotesi

$$\text{III}.3) \quad a_o \left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} \ll 8\delta \ll 1$$

esistono soluzioni $a(\Theta)$ del sistema praticamente convergen ti, cioè tali che $a(\Theta) = (1 + \Delta(\Theta)) \cdot a_o$, con $|\Delta(\Theta)| \ll 1$.
Per concretare se simili ipotesi sono compatibili con il si stema II.2 basterà trasferi lo in esso e verificare che la sua soluzione è esente da contraddizioni. Facendo ciò, si tro va che entro il I° ordine in $\Delta(\Theta)$ il sistema diviene (anche $a_o \left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2}$ è $\ll 1$!)

$$\text{III}.4) \quad \begin{cases} \dfrac{d\Delta}{d\Theta} = \dfrac{3}{32}\left(\dfrac{dn}{dx}\right)_{1,2} a_o \sin 3\Phi \\[2ex] \dfrac{d\Phi}{d\Theta} = \dfrac{3}{4}\delta \end{cases} .$$

Risolvendo la seconda equazione e sostituendola nella prima si trova per la fluttuazione percentuale dell'ampiezza

$$|\Delta(\Theta)| \leq \frac{1}{12} \frac{\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} a_o}{\delta} < \frac{1}{8} \frac{\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} a_o}{\delta} \ll 1 .$$

L'ipotesi fatta è compatibile col sistema, perchè le soluzio ni che così si ottengono non perdono in coerenza.

IV.) La fluttuazione percentuale massima delle ampiezze è trascurabile secondo le prime misure eseguite sulla macchina

Le misure 22,23,24,25,26,27,28 sul campo magnetico del nostro Sincrotrone informano sull'andamento radiale di n a vari azimuth del quadrante w a 650 Gauss in corrente continua. Riportiamo qui (fig.2) un tipico grafico che riassume una di queste misure. L'errore sulla determinazione di n(x) è di ± 1% nel cosiddetto pianerottolo. Abbiamo adoperato questi dati per calcolare (estrapolando nella peggiore delle ipotesi i dati relativi a questo quadrante a tutto l'azimuth 2π) la fluttuazione delle ampiezze delle orbite. Si è trovato-tenendo conto degli errori di misura-che

n_o=0.623, e pertanto δ=0.012; nonchè

$$a_o\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2} = 0{,}009 \ll 1 .$$

Segue allora: $\dfrac{8\delta}{a_o\left(\frac{dn}{dx}\right)_{1,2}}$ =10.7>>1, per cui possono applicarsi le conclusioni del capo β del paragrafo III trovando per la fluttuazione massima possibile delle ampiezze delle orbite il valore ± 6%.

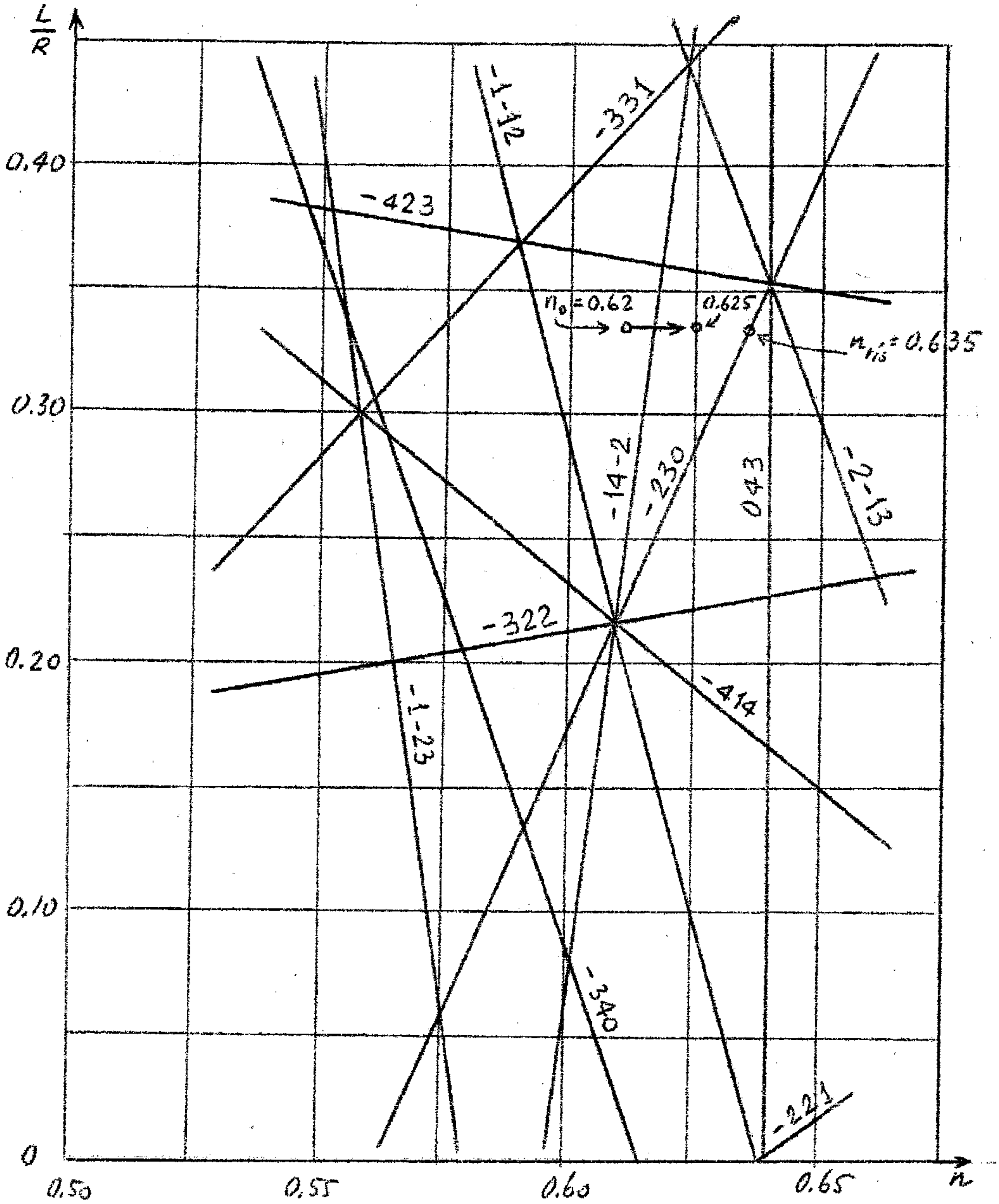
L/R
0.40
0.30
0.20
0.10
0
0.50
0.55
0.60
0.65
n
-423
-331
-1-12
n_0=0.62
0.625
n_{HS}=0.635
-14-2
-230
043
-2-13
-322
-414
-1-23
-340
-221

Fig. 1

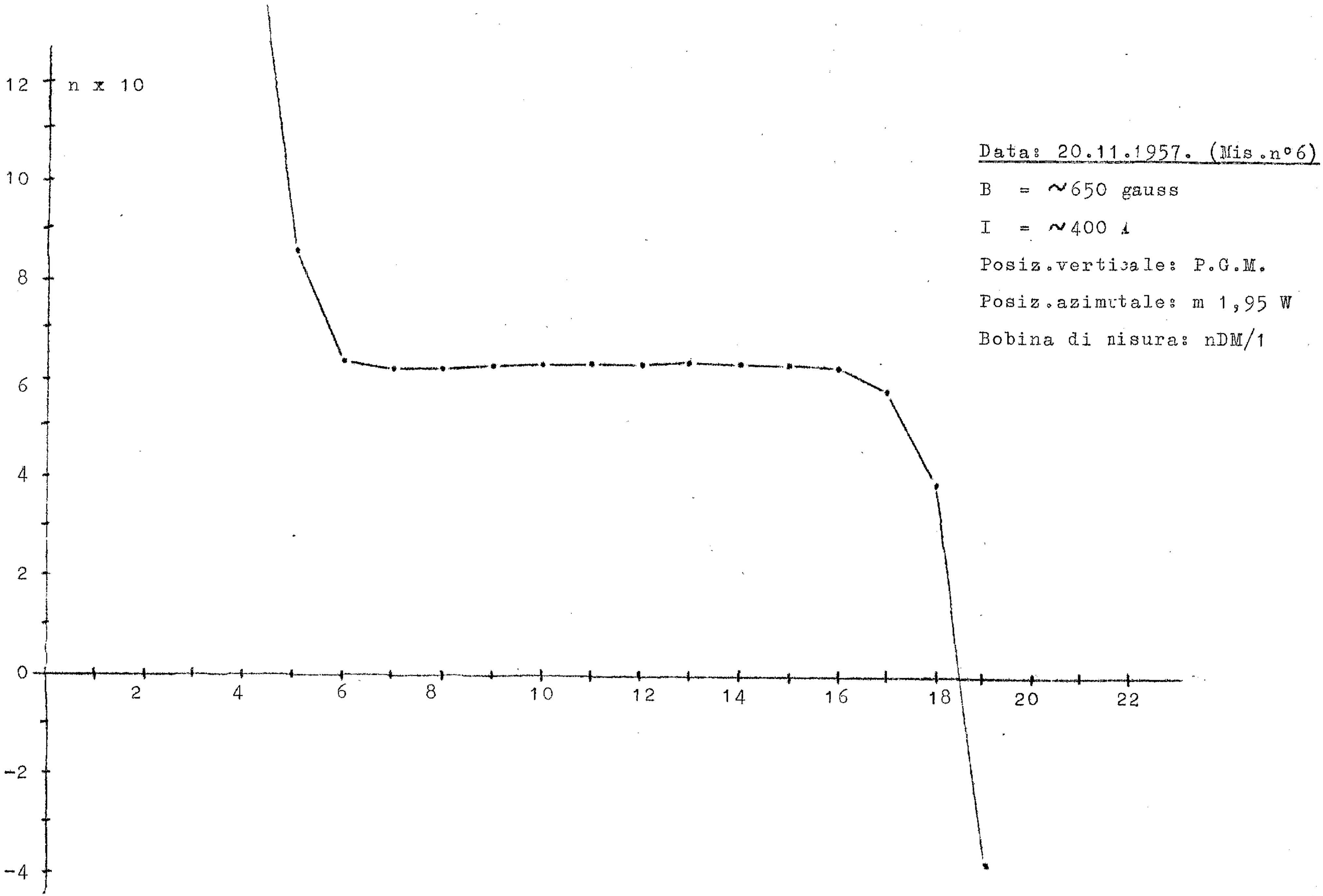

Fig. 2 - MISURA DI n IN CORRENTE CONTINUA
n vero = n misurato - 0,016 (correzione provvisoria)