

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-58/2 (20. 1. 58)

A. Turrin: LARGHEZZA DELLA ZONA UTILE DEL CAMPO MAGNETICO NEI SINCROTRONI A FOCALIZZAZIONE DEBOLE.

Relazione n° : T 35
20 Gennaio 1958

A. Turrin: LARGHEZZA DELLA ZONA UTILE DEL CAMPO MAGNETICO
NEI SINCROTRONI A FOCALIZZAZIONE DEBOLE.-

Riassunto :
=====

La equazione del moto di oscillazione radiale è tale che la forza di richiamo a cui è soggetta la particella non è $[1 - n(x)]x$ ma bensì $[1 - \bar{n}(x)]x$ dove $\bar{n}(x)$ è il valor medio di $n(x)$ fatto tra l'orbita di equilibrio e la distanza x in cui si trova la particella. Si conclude pertanto che la larghezza della zona utile del campo magnetico può estendersi anche al di là del punto x in cui è $n(x) = 1$.

La presenza delle sezioni diritte nel Sincrotrone di Frascati non modifica apprezzabilmente questo risultato.

=====

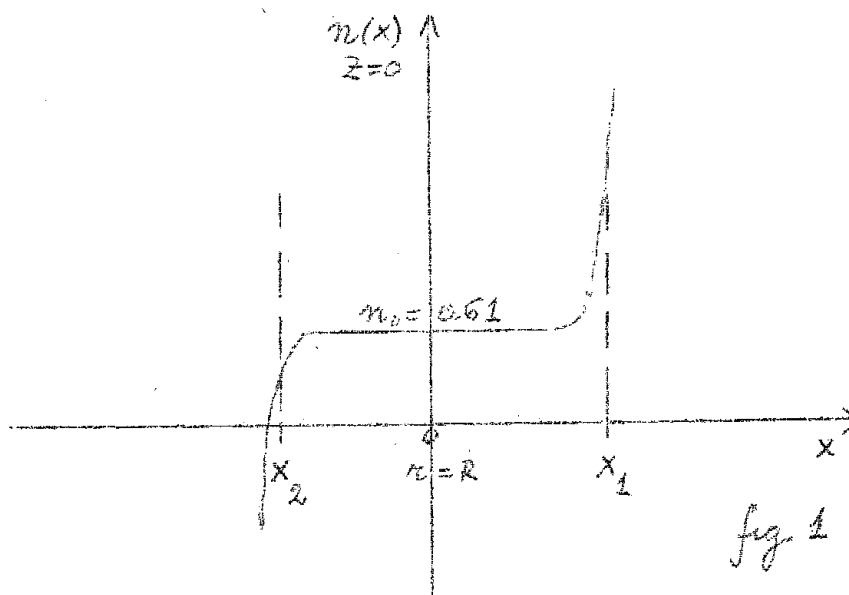
Introduzione

Ci riferiremo, tanto per fissare le idee, all'andamento del campo magnetico del Sincrotrone di Frascati (in cui ignoreremo in un primo tempo l'esistenza dei tratti rettilinei) ma la trattazione qui fatta può essere immediatamente adattata a qualunque altro elettro o protosincrotrone a focalizzazione debole o Sincrociclotrone.

Durante tutto il ciclo d'accelerazione l'indice del campo

$$n_{z=0} = - \left[\frac{1}{B} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right]_{z=0}$$

sul piano mediano della gap ha un andamento radiale del tipo illustrato in fig. 1.



Supporremo per semplicità la funzione $n(x)$ mai decrescente in tutto l'intervallo che ci interessa, ma ciò non è essenziale nelle conclusioni tratte.

Ci proponiamo qui di determinare gli eventuali confini x_2 ed x_1 entro i quali le oscillazioni radiali (quelle che avvengono sul piano mediano, cioè in assenza di oscillazioni verticali) permangono stabili. In questo calcolo ignoreremo qualunque altra perturbazione del campo.

I) - La forma assunta per il campo verticale sul piano mediano.-

Le equazioni di Maxwell e le condizioni di simmetria

$$\begin{cases} B_z(x, z) \equiv B_z(x, -z) \\ B_x(x, z) \equiv -B_x(x, -z) \\ B_y(x, z) \equiv 0 \end{cases}$$

permettono di individuare $B_z(x, z)$ e $B_x(x, z)$ quando sia dato $B_z(x, 0)$. Sceglieremo per $B_z(x, 0)$ l'espressione

I.1)

$$B_z(x, 0) = B_0 \left[1 - \bar{n}(x) \frac{x}{R} \right]$$

in cui $\bar{n}(x)$ non è da confondersi con $n(x)$ ma piuttosto è una grandezza di cui è bene precisare subito il significato. Allo scopo cominciamo con l'osservare che per quanto detto, $B_z(x, z)$ e $B_x(x, z)$ devono avere la forma

$$\begin{aligned} I.1') \quad B_z(x, z) &= B_0 \left[1 - \bar{n}(x) \frac{x}{R} + \sum_{1, k} \varphi_{2k}(x) \left(\frac{z}{R} \right)^{2k} \right] \\ B_x(x, z) &= -B_0 \left[\left(\bar{n}(x) + x \frac{d\bar{n}(x)}{dx} \right) \frac{z}{R} + \sum_{1, k} \psi_{2k+1}(x) \left(\frac{z}{R} \right)^{2k+1} \right] \end{aligned}$$

dove - supponendo $\bar{n}(x)$ una serie di potenze di x con coefficienti assegnati - le φ_{2k} e ψ_{2k+1} sono anch'esse serie di potenze in x con coefficienti ricavabili da quelli di $\bar{n}(x)$ mediante opportune formule ricorrenti.

Calcolando n dalla prima delle I.1' si trova

$$I.2) \quad n = - \left[\frac{x}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right]_{z=0} = \frac{1 + \frac{x}{R}}{1 - \bar{n}(x) \frac{x}{R}} \left(\bar{n}(x) + x \frac{d\bar{n}(x)}{dx} \right).$$

Se si suppone che $\bar{n}(x)$ sia una quantità il cui ordine di grandezza sia al massimo ~ 1 si ha - trascurando quantità dell'ordine $\frac{x}{R}$ rispetto l'unità -

I.2')

$$n = \bar{n}(x) + x \frac{d\bar{n}(x)}{dx}$$

ovvero

I.3

$$\bar{n}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x n(x) dx$$

cioè: la quantità $\bar{n}(x)$ di cui alla forma I.1 scelta per il campo B_z sul piano mediano è nient'altro che il valor medio di $n(x)$ fatto tra gli estremi 0 ed il punto x considerato.

Si osservi ancora che dalla seconda delle I.1' si ha - trascurando quantità dell'ordine $(\frac{x}{R})^2$ rispetto all'unità - $B_z(x, z) = -B_0 n_{z=0}(x) \frac{z}{R}$, cosicchè l'equazione del moto per le oscillazioni verticali si scrive - al I° ordine -

$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + n(x) z = 0$ di modo che la forza di richiamo per queste oscillazioni dipende dalla oscillazione $x(\theta)$.

II) - L'equazione del moto radiale

La forza di Lorentz a cui è sottoposta la particella nel piano mediano è

$$\text{II.1)} \quad m \ddot{x} = m v r \omega^2 - \frac{e}{c} \kappa \omega B_z(x, 0)$$

Tenendo conto che è - a meno della quantità $\frac{1}{r} (\frac{dx}{d\theta})^2$ -

$$\frac{\ddot{x}}{\omega^2} = \frac{d^2 x}{d\theta^2}, \quad \text{si ha dalla II.1}$$

$$\text{II.1')} \quad \frac{d^2 x}{d\theta^2} + \kappa \left(\frac{e B_z(x, 0) \kappa}{m v \omega_0 R} - 1 \right) = 0$$

ovvero, essendo

$$m v \omega_0 c = e B_0,$$

$$\text{II.1'')} \quad \frac{d^2 x}{d\theta^2} + \kappa \left(\frac{B_z(x, 0) \kappa}{B_0 R} - 1 \right) = 0.$$

Sostituendo in essa la I.1 e trascurando ancora quantità dell'ordine $\frac{x}{R}$ rispetto all'unità risulta

II.2)

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + [1 - \bar{n}(x)] x = 0,$$

che è un'equazione differenziale del moto valida anche nei punti x dove $n_{z=0}(x)$ è molto diverso da 0.61, cioè anche nei punti dove il campo $B_z(x, 0)$ decresce in modo decisamente non lineare.

III) - Esistenza di una seconda orbita d'equilibrio

Si vede subito che la II.2 ammette l'integrale particolare $x = x_1 =$ valore (costante) per cui $\bar{n}(x_1) = 1$.

Ciò vuol dire che il cerchio di raggio $R+x_1$ è, oltre al cerchio di raggio R , un'orbita di equilibrio.

Ciò si può vederlo anche cercando la distanza x_1 per cui è $B_0 R = B_{\frac{1}{2}}(x_1, 0)(R+x_1)$. Si trova - trascurando $\frac{x}{R}$ rispetto all'unità - che tale distanza è appunto quella in cui $\bar{n}(x)$ assume il valore 1.

Faremo vedere oltre che tale orbita è un'orbita di equilibrio instabile, cioè che x_1 è il limite esterno della zona di stabilità delle oscillazioni radiali.

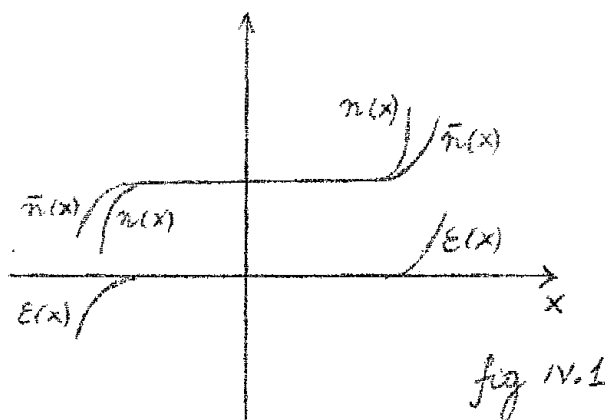
IV) - Intervallo di stabilità dell'equazione del moto radiale -

Riprendiamo l'equazione II.2 e poniamo in essa

$$IV.1) \quad \bar{n}(x) = n_0 + \varepsilon(x).$$

In fig. IV.1 sono rappresentate le curve

$$n(x), \bar{n}(x), \varepsilon(x).$$



Con la sostituzione IV.1) la II.2 diviene :

$$IV.2) \quad \frac{d^2 x}{d\theta^2} + (1 - n_0)x - \varepsilon(x)x = 0.$$

Si riesce a compiere una prima integrazione di questa equazione moltiplicando per dx ed integrando fra i limiti $(x_0, \frac{dx_0}{d\theta})$ e $(x, \frac{dx}{d\theta})$. Si trova

$$IV.2') \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} (1-n_0) x^2 - \int_0^x \xi(x) x dx = C_0,$$

dove

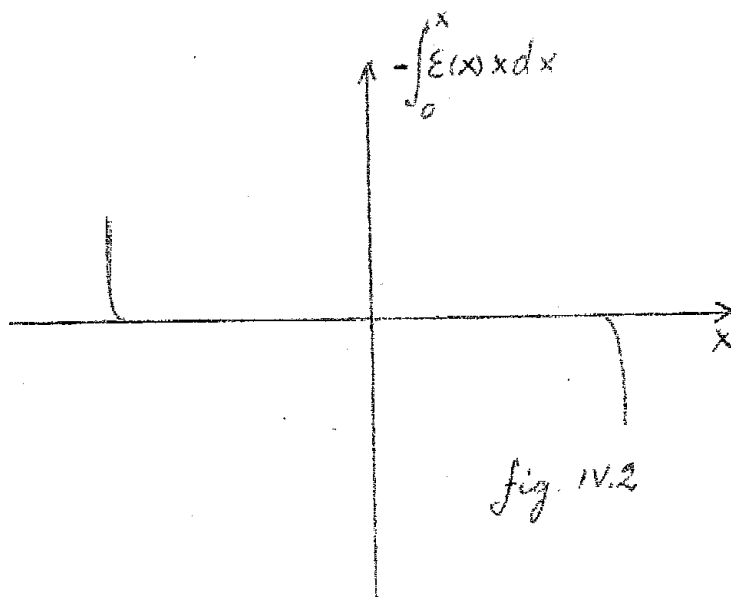
$$IV.2'') \quad C_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{dx_0}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} (1-n_0) x_0^2 - \int_0^{x_0} \xi(x) x dx.$$

Per limitarci a considerare soltanto soluzioni $x(\theta)$ reali (limitate o no), basterà limitarci a considerare le soluzioni $x(\theta)$ per cui è $\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 \geq 0$, cioè le soluzioni $x(\theta)$ per cui è

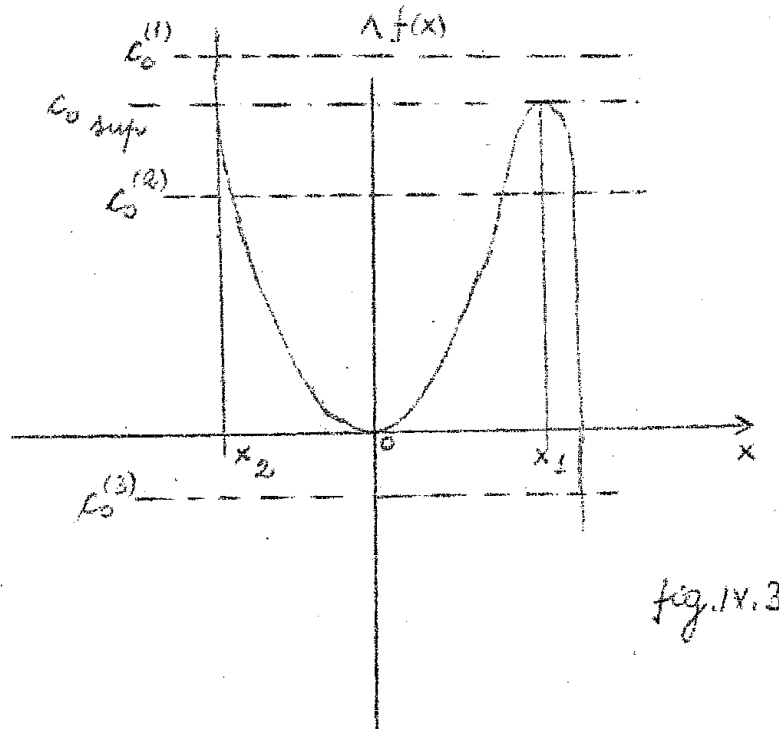
$$IV.2''') \quad f(\theta) \equiv \frac{1}{2} (1-n_0) x^2 - \int_0^x \xi(x) x dx \leq C_0.$$

In altri termini: le condizioni iniziali arbitrarie $(x_0, \frac{dx_0}{d\theta})$ individueranno la costante arbitraria C_0 (formula IV.2''); le soluzioni reali (limitate o no) $x(\theta)$ determinate da tali condizioni iniziali saranno tutte quelle per cui la funzione $f(x)$ (formula IV.2''') non supera il valore di questa costante arbitraria.

Tenendo conto che $\xi(x)$ ha la forma di cui alla figura IV.1), e che pertanto $-\int_0^x \xi(x) x dx$ deve avere la forma della figura IV.2



la $f(x)$ dovrà avere la forma di cui alla fig. IV.3 :



Si possono verificare i vari casi :

- I) $f_0 = f_0^{(1)}$: Tutte le soluzioni $X(\theta)$ non sono limitate.
 II) $f_0 = f_0^{(2)}$: Esiste un intervallo di soluzioni limitate e uno di soluzioni non limitate.
 III) $f_0 = f_0^{(3)}$: Tutte le soluzioni non sono limitate.

L'estremo limite destro di x per cui le soluzioni sono limitate è quello dove la $f(x)$ raggiunge il suo massimo. Calcolando questo massimo si trova che esso ha luogo nel punto X_1 dove $\varepsilon = 1 - n_0$, cioè ricordando la IV.1, dove

$$\boxed{\bar{n} = 1}$$

In conclusione : La larghezza utile della ciambella si estende fino al punto $x = X_1$ dove (ricordando la formula

I.1)

$$\boxed{\frac{B_0 - B_2(x, \theta)}{B_0} = \frac{x}{R}}$$

Da qui si vede che il confine esterno della zona utile si estende più all'infuori del punto dove $\bar{n} = 1$, mentre il confine interno X_2 (vedi fig. IV.3) resta determinato dal valore di x per cui $f(x_2) = f(x_1)$.

Per fissare le idee abbiamo calcolato la X_1 dal grafico

relativo alla misura 5A sull'indice del campo a 23 gauss in c.c. eseguita vicino alla testata del quadrante W del Sincrotrone in fase di montaggio. Come si vede (fig. IV.4) pur estendendosi il 'pianerottolo' di n di circa 5 cm. verso l'esterno, la larghezza utile agli effetti delle orbite (quando l'orbita di equilibrio è R) è di quasi 8 cm.

V) - Inserzione dei tratti rettilinei

E' molto difficile condurre un calcolo analitico del confine X_1 allorquando esistono tratti privi di campo di lunghezza L confrontabile con R .

Pur esistendo anche nel caso $L \neq 0$ un'orbita di equilibrio instabile di raggio $r = R + X_1$, la larghezza utile della ciambella non si estende a priori fino al punto X_1 relativo al caso $L = 0$.

Per valutare l'effetto dei tratti privi di campo ($L/R = 0.335$ nel nostro caso) è stato commissionato (23.I.56) un calcolo allo Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, che è stato eseguito mediante la calcolatrice elettronica FINAC, ed il cui risultato (1) è stato il seguente :

Si sono seguite le orbite corrispondenti a diverse condizioni iniziali $(x_0, \frac{dx_0}{d\theta})$ in certi casi per 32 rivoluzioni, in altri per 100 rivoluzioni, trovando così che il confine X_1 , limitatamente a questo numero di rivoluzioni, si restringe di $\approx 5\%$ del valore che avrebbe se fosse $L = 0$. Inoltre si è trovato che l'effetto dei tratti dritti è quello di rendere X_1 dipendente dai particolari valori delle condizioni iniziali. In altre parole il confine X_1 non è unicamente determinato dalla $1 - \bar{r}(x)$, ma anche dal modo con cui parte inizialmente una traiet-

(1) - Relazione n° T 34 archiviata presso la Sezione Acceleratore.

GRAFICO RICAVATO DALLA MISURA DI $n(x)$
 IN C.A. A 23 GAUSS SUL PIANO MEDIANO
 CON PEAKERS. POSIZIONE AZIMUTALE A
 $m 0,63$ NEL QUADRANTE W.
 (Misura n° 5A del 28.10.1957.)

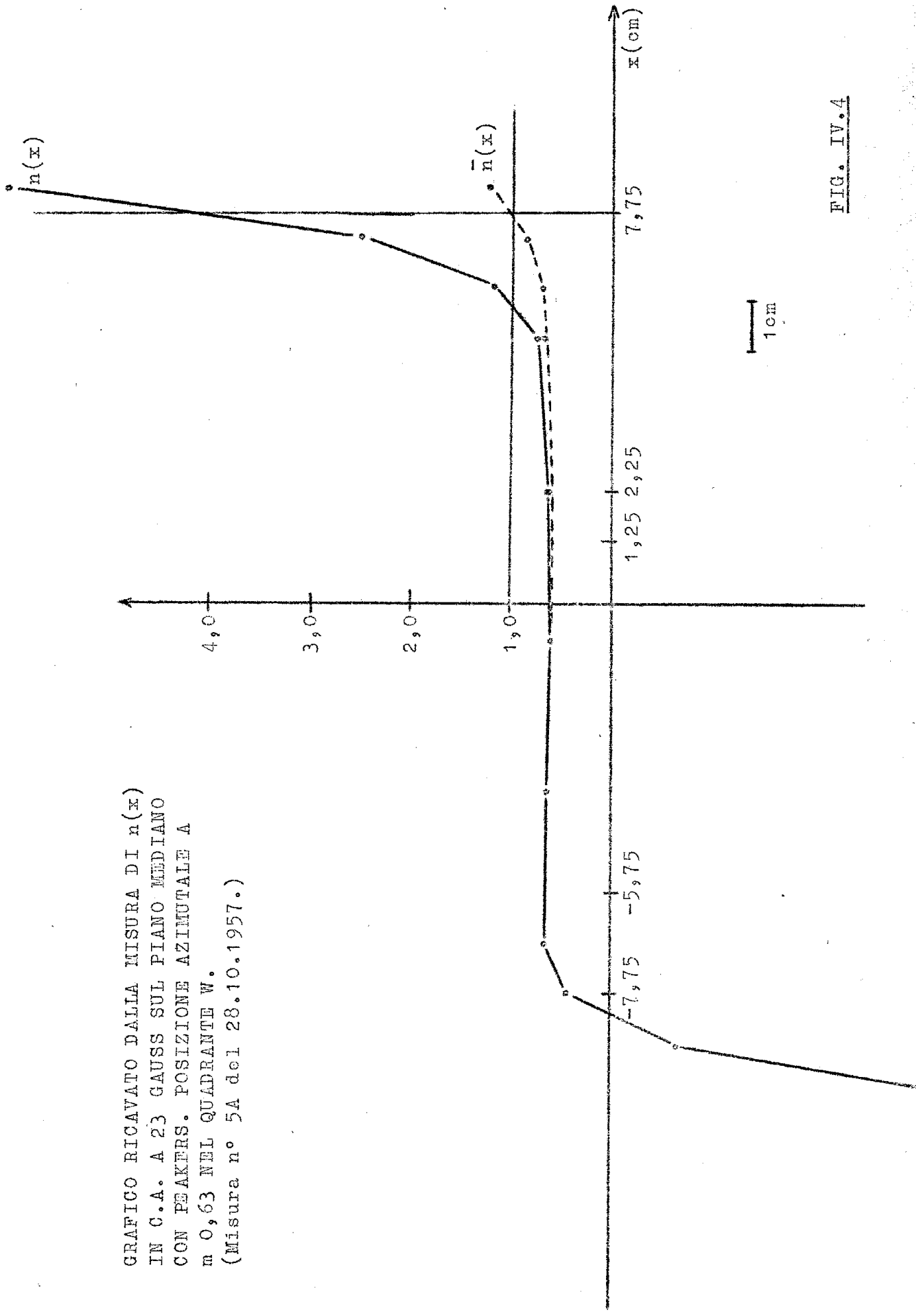


FIG. IV.4

toria. L'indeterminazione di x_2 è però percentualmente inapprezzabile.

Da tutto ciò segue che, con un $L/R = 0.335$, la larghezza della zona utile si restringe al più di qualche percento del valore calcolato supponendo $L = 0$.