

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-57/9 (10. 9. 57)

P. G. Sona: CINEMATICA DELLE REAZIONI RELATIVISTICHE A 2 CORPI.

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

Laboratori di Frascati

Relazione n° : T 32
10 Settembre 1957

P.G. SONA

'CINEMATICA DELLE REAZIONI RELATI-
VISTICHE A DUE CORPI. ='

Riassunto :

Si danno alcune formule per la cinematica relativistica delle relazioni e dei decadimenti a due corpi : viene illustrata una nota rappresentazione grafica degli impulsi delle particelle uscenti (§ 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 7). Al § 6 sono esplicitate le formule per l'energia di soglia \bar{E}_1 e per la energia $E_i^{(1)}$ (energia di transizione tra la produzione in avanti e la produzione in tutto l'angolo solido). Al § 8 si fanno alcune osservazioni per la generalizzazione delle formule alle reazioni con più di due particelle uscenti. Al § 9 si dà la formula di trasformazione per gli angoli solidi dal sistema del centro di massa al sistema del laboratorio. Al § 10 si dà la formula per l'energia di soglia contro una particella bersaglio non ferma nel laboratorio. Nei § 11 - 12 - 13 sono riportate le masse delle particelle elementari, i valori dell'energia di soglia per alcune reazioni di fotoproduzione e gli impulsi delle particelle uscenti da alcuni decadimenti. Nell'appendice si propone uno schema di calcolo di tabelle numeriche adatte per le esperienze con l'Elettrosincrotrone Nazionale da 1000 MeV.

§ 1) - Simboli usati (*)

sia (vedi fig. 1):

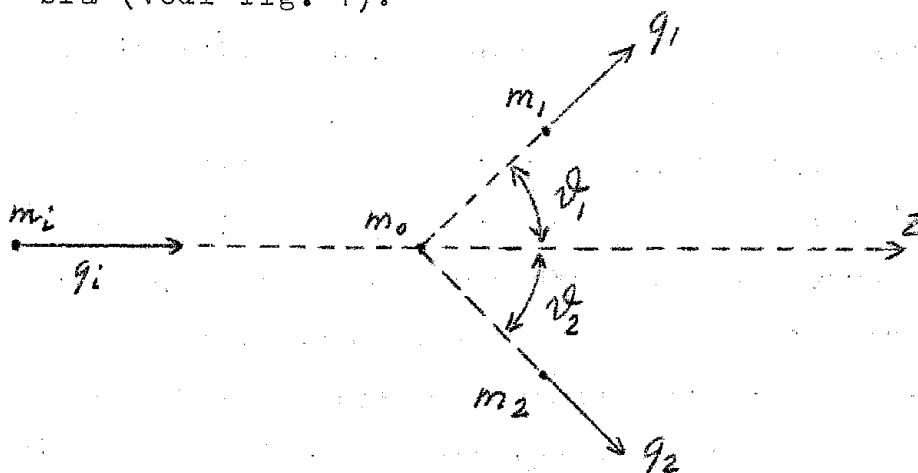


Fig. 1 - (Schema di una reazione a due corpi - Sistema del laboratorio).

m_i = massa di riposo della particella incidente

m_0 = massa di riposo della particella bersaglio (che si suppone ferma nel sistema del laboratorio,

tranne nel caso considerato al § 10)

$m_{1,2}$ = masse di riposo delle particelle 1,2 direttamente uscenti dalla reazione.

(z è la direzione della particella incidente, col verso positivo in avanti).

q_i = impulso della particella incidente

E_i = energia totale della particella incidente

$$r = \frac{m_i v_i}{m_0}$$

$$r_1 = \frac{m_1}{m_0} ; r_2 = \frac{m_2}{m_0}$$

$$s = r_1 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_0}$$

$$\epsilon = \frac{E_i}{m_0 c^2}$$

(*) In tutto quanto segue porremo c = velocità della luce = 1, e considereremo le masse, gli impulsi e le energie come grandezze omogenee. Il valore di c è (299792.9 ± 0.8) Km/sec (vedi Du Mond e Cohen - Rev. Mod. Phys. 25, 691 (1953)).

β_i = velocità lorentziana della particella incidente

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = \frac{E_i}{m_i}$$

β_0 = velocità lorentziana della particella bersaglio
($\neq 0$ al § 10)

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$$

$\beta_{1,2}$ = velocità lorentziana della particella 1,2

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{1,2}^2}}$$

$\vartheta_{1,2}$ = angolo di produzione della particella 1,2

$\bar{\vartheta}_{1,2}$ = valore del massimo di $\vartheta_{1,2}$ per una data E_i

$\bar{\vartheta}_{1,2\text{lim}}$ = valore limite di $\bar{\vartheta}_{1,2}$ per $E_i \rightarrow \infty$

$q_{1,2}$ = impulso della particella 1,2 (in valore assoluto)

$q_{z1,2}$ = componente dell'impulso parallela a z (col suo segno).

$q_{t1,2}$ = impulso trasverso (in valore assoluto)

$E_{1,2}$ = energia totale della particella 1,2

\bar{E}_i = energia totale della particella incidente, alla soglia della reazione con $\beta_0 = 0$ (bersaglio fisso)

\bar{E}_i^{\prime} = energia totale della particella incidente alla soglia della reazione, con $\beta_0 \neq 0$ (bersaglio non fisso).

$E_i^{(1)}$ = energia totale della particella incidente, corrispondente alla transizione fra la produzione in avanti e la produzione in tutto l'angolo solido della particella m_1 .

$d\Omega_{1,2}$ = elemento di angolo solido

$\sigma(\vartheta_{1,2}) d\Omega_{1,2}$ = sezione d'urto differenziale per la produzione della particella 1,2.

Tutti questi simboli s'intendono riferiti al sistema del laboratorio (tranne quelli che dipendono soltanto dalle masse di riposo); le quantità analoghe nel sistema del centro di massa verranno indicate con gli stessi simboli con un asterisco (*).

Inoltre porremo:

β (senza indici) = velocità lorentziana del centro di massa rispetto al laboratorio ($= \beta_0^*$ quando m_0 è ferma nel sistema del laboratorio).

$$\gamma \text{ (senza indici)} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$\bar{\beta}$ = valore limite di β vicino alla soglia.

$\bar{\gamma}$ = valore limite di γ vicino alla soglia.

W^* = energia totale (di tutte le particelle) nel sistema del centro di massa

q_0^* = impulso di m_0 nel sistema del centro di massa (valore assoluto, $q_0^* = q_i^*$)

E_0^* = energia totale di m_0 nel sistema del centro di massa

q_1^* = impulso massimo della particella 1 uscente da un decadimento a più di due corpi, nel sistema del centro di massa.

Nel sistema del centro di massa la reazione si può rappresentare come in fig. 2.

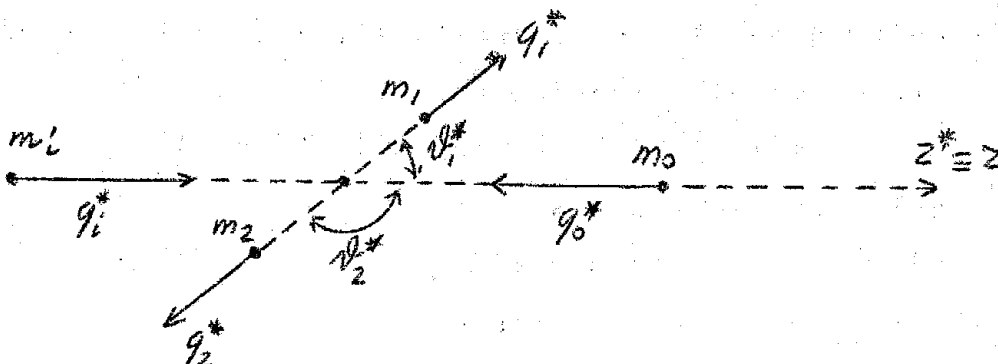


Fig. 2 - (Schema di una reazione a due corpi - Sistema del centro di massa).

Evidentemente:

$$\theta_1^* + \theta_2^* = \pi; \quad q_1^* = q_2^*; \quad q_2^* = q_0^*$$

§ 2) - Parametri che definiscono il tipo di reazione dal punto di vista cinematico.

Come parametri che definiscono il tipo di reazione dal punto di vista cinematico prenderemo:

$$\mathcal{E} = \frac{E_i}{m_0}$$

$$r = \frac{m_i}{m_0}$$

$$r_1 = \frac{m_1}{m_0}$$

$$r_2 = \frac{m_2}{m_0}$$

Porremo poi:

$$s = r_1 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_0}$$

Fissando l'attenzione sul comportamento di una sola delle particelle uscenti (per es. la particella m_1 , senza le correlazioni coll'altra), e volendo estendere certi risultati al caso in cui si abbiano tre o più particelle uscenti dalla reazione, conviene prendere come parametri indipendenti \mathcal{E}, r, r_1, s . Fissati questi, nel caso di una reazione a due corpi è determinata sia la velocità β nel baricentro rispetto al laboratorio, sia la velocità β_1^* della particella m_1 , nel sistema del centro di massa (infatti l'unica grandezza ancora libera è θ_1^* , cioè l'angolo di uscita di m_1 , nel sistema del c. di m., ma l'impulso del sistema del c. di m. ha un valore determinato).

Dato che β e β_1^* sono le due quantità che determinano la trasformazione degli angoli fra i due sistemi c. di m. — laboratorio, conviene darne subito l'espressione, in funzione di \mathcal{E} :

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - r^2}}{1 + \varepsilon} & \gamma &= \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon + r^2}} & \beta\gamma &= \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - r^2}{1 + 2\varepsilon + r^2}} \\
 \beta_1^* &= \sqrt{1 - \frac{4r_1^2(1 + 2\varepsilon + r^2)}{[1 + 2\varepsilon + r^2 + s(2r_1 - s)]^2}} \\
 \gamma_1^* &= \frac{1 + 2\varepsilon + r^2 + s(2r_1 - s)}{2r_1\sqrt{1 + 2\varepsilon + r^2}} \\
 \beta_1^* \gamma_1^* &= \sqrt{\frac{[1 + 2\varepsilon + r^2 + s(2r_1 - s)]^2}{4r_1^2(1 + 2\varepsilon + r^2)} - 1}
 \end{aligned}$$

(si può sostituire $s(2r_1 - s)$ con l'espressione equivalente $r_1^2 - r_2^2$ nel caso qui considerato di una reazione a due corpi).

Le (1) permettono di ricavare subito il valore di:

$$q_1^* = q_2^* = \beta_1^* \gamma_1^* m_1 = \beta_2^* \gamma_2^* m_2$$

$$E_1^* = \gamma_1^* m_1$$

$$E_2^* = \gamma_2^* m_2$$

$$E_0^* = \gamma m_0$$

$$q_0^* = \beta\gamma m_0$$

Queste formule diventano un po' più semplici quando la particella incidente ha massa nulla ($r = 0$). Le quantità più semplici da calcolare sono β e γ_1^* ; per passare alle altre conviene servirsi delle tavole trigonometriche, ricordando che β , γ , $\beta\gamma$, sono esprimibili mediante

$$\beta = \cos \phi$$

$$\gamma = \sec \phi$$

$$\beta\gamma = \tan \phi$$

essendo ϕ un angolo compreso fra 0 e $\pi/2$

§ 3) - Trasformazione di Lorentz (*) per gli angoli e per gli impulsi. Rappresentazione geometrica.

La relazione fra ϑ_1^* e ϑ_1 (angoli di produzione di m_1 nel sistema del c.d.i m.e del laboratorio rispettivamente) è :

$$(2) \quad \begin{aligned} \cotg \vartheta_1 &= \gamma \left(\frac{\beta}{\beta_1^* \sin \vartheta_1^*} + \cotg \vartheta_1^* \right) = \\ &= \frac{\gamma}{\sin \vartheta_1^*} \left(\frac{\beta}{\beta_1^*} + \cos \vartheta_1^* \right) \end{aligned}$$

Si può rappresentarla graficamente con la seguente semplice costruzione (2).

Nel disegno le lunghezze serviranno a rappresentare degli impulsi, e quindi si deve fissare una scala che dia il rapporto di trasformazione $\frac{\text{MeV} / c}{\text{cm}}$.

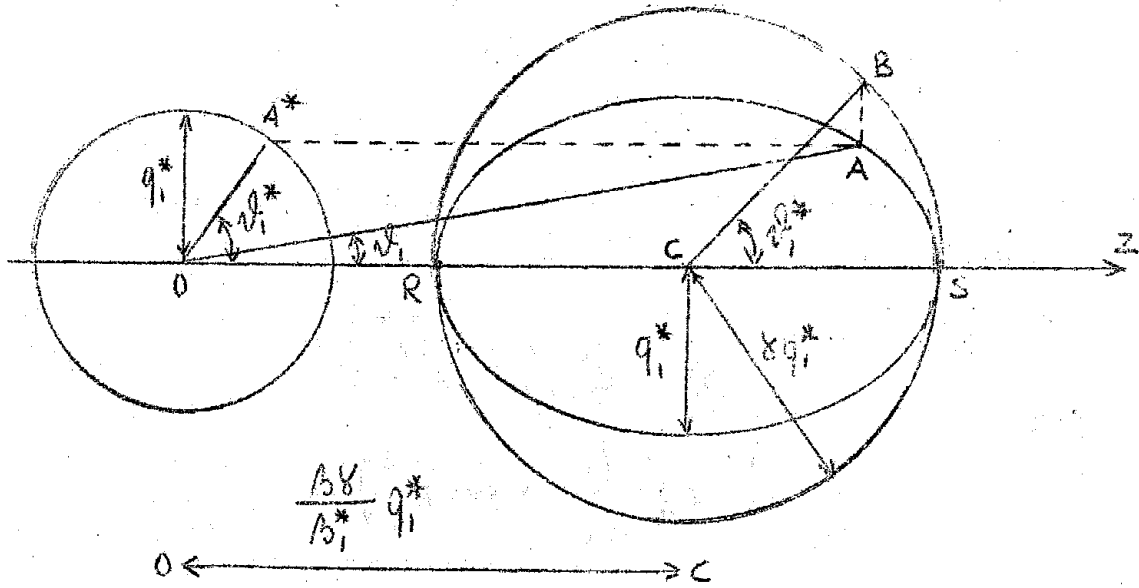
Disegniamo (vedi fig. 3) un cerchio di raggio q_1^* il cui centro O rappresenti la particella bersaglio (fissa nel laboratorio). L'asse z, nel piano del cerchio, rappresenta la direzione di moto della particella incidente.

Costruiamo poi un secondo cerchio, avente il centro C sull'asse Z ad una ascissa

$$z_c = \frac{\beta \gamma}{\beta_1^*} q_1^* = \beta \gamma \gamma_1^* m_1$$

e il raggio γq_1^* ; costruiamo inoltre un'ellisse con centro in C, semiasse maggiore parallelo a Z e di lunghezza $\gamma q_1^* = \beta_1^* \gamma_1^* \gamma m_1$, semiasse minore q_1^* .

(*) Per la teoria della cinematica relativistica vedere il capitolo II del libro di Møller - The Theory of relativity. (1)



$$OA^* : CS : OC = \beta_1^* \gamma_1^* : \beta_1^* \gamma_1^* \gamma_1^* : \beta_1^* \gamma_1^*$$

Fig. 3 -

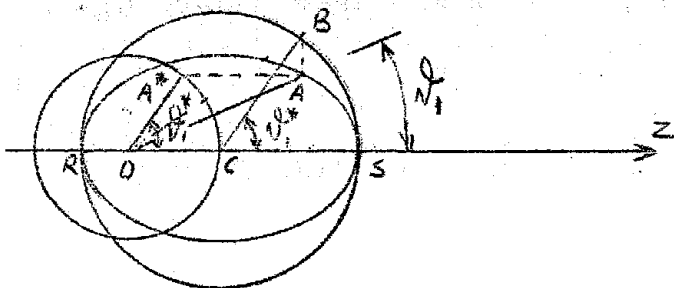
(Rappresentazione grafica degli impulsi di una particella uscente: caso della produzione in avanti).

Se nel sistema del centro di massa la direzione della particella m_1 è OA^* , cioè $\widehat{SOA^*} = \widehat{V^*}$, nel sistema del laboratorio la direzione di m_1 è OA ($\widehat{V}_1 = \widehat{SOA}$) e il punto A si trova sull'ellisse alla stessa distanza dall'asse Z del punto A^* .

Si può ottenere A, partendo da A^* , anche conducendo CB parallela ad OA^* , ed intersecando l'ellisse con la perpendicolare condotta da B all'asse Z.

Non è detto che il punto O sia esterno all'ellisse, cioè si può anche presentare il caso della figura 4.

Fig. 4 - (Rappresentazione grafica degli impulsi di una particella uscente: caso della produzione in tutto l'angolo solido).



L'equazione dell'ellisse è:

$$(3) \quad \gamma^2 q_{t1}^2 + (q_{z1} - \beta \gamma \gamma_1^* m_1)^2 = \beta_1^{*2} \gamma_1^{*2} \gamma^2 m_1^2$$

La stessa costruzione geometrica dà anche la trasformazione degli impulsi: il vettore OA^* rappresenta l'impulso di m_1 nel sistema del c. di m., il vettore OA rappresenta l'impulso di m_1 nel laboratorio.

Per eseguire la costruzione occorrono i valori di β e β_1^* (e dei numeri derivati γ , γ_1^* , perchè $q_1^* = \beta_1^* \cdot \gamma_1^* \cdot m_1$) che sono funzioni dell'energia della particella incidente.

L'impulso trasverso è lo stesso nei due sistemi di riferimento; il valore dell'impulso corrispondente al segmento OC (anche se non corrisponde ad un caso reale) è $\beta \gamma \gamma_1^* m_1$.

Se si costruiscono (vedi fig. 5) tutte e due le ellissi relative alle due particelle uscenti m_1 ed m_2 (con il cerchio di raggio OA^* identico per le due particelle, avendo esse lo stesso impulso nel sistema dei c. di m.), esse risulteranno uguali, ma sarà diversa la posizione dei loro centri C_1 e C_2 . Inoltre si può mostrare facilmente che la somma degli impulsi corrispondenti ai due segmenti OC_1 , OC_2 è l'impulso della particella incidente.

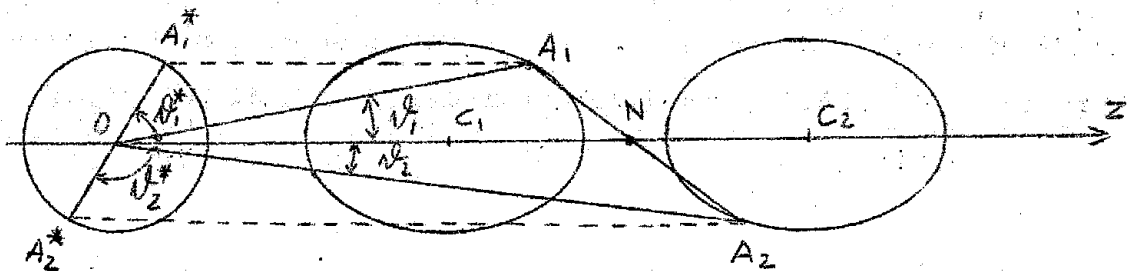


Fig.5 -

(Rappresentazione simultanea degli impulsi delle due particelle uscenti).

Nella fig. 5 i segmenti OA_1 , OA_2 rappresentano i due impulsi (anche in direzione) delle due particelle uscenti simultaneamente dalla reazione; ed N , intersezione di $\overline{A_1A_2}$ con Z , è il punto di mezzo fra C_1 e C_2 (costruzione geometrica per la correlazione angolare).

Naturalmente nello spazio tutte le ellissi diventano ellissoidi di rotazione allungati (perchè è sempre $\gamma > 1$ e γ è il rapporto fra i semiassi) intorno all'asse Z .

Se l'elliss. di m_1 non contiene il punto O , tutte le particelle m_1 escono (nel laboratorio) in un cono in avanti la cui semiapertura $\overline{\nu}_1$ è data da:

$$(4) \quad \text{sen } \overline{\nu}_1 = \frac{\beta_1^* \gamma_1^*}{\beta \gamma}, \quad 0 < \overline{\nu}_1 < \frac{\pi}{2} \quad (\text{vedi fig. 6})$$

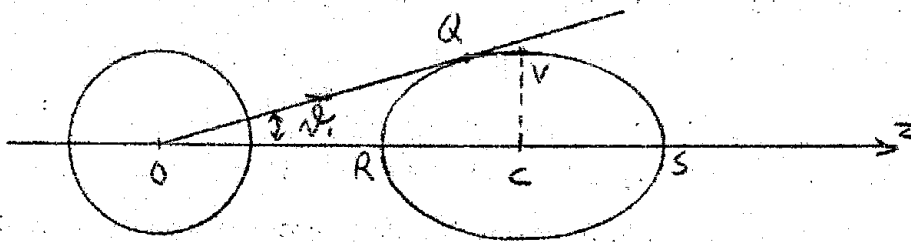


Fig. 6 - (Apertura del cono di produzione).

Questo avviene solo se $\beta \frac{1}{\gamma_1} < \beta_1$, altrimenti l'ellisse contiene il punto O e tutto l'angolo solido è permesso.

Nella Tabella 1 si danno i valori di $\frac{q_1}{m_1}$, $\frac{q_{z1}}{m_1}$, $\frac{q_{t1}}{m_1}$, $\frac{E_1}{m_1}$, $\text{sen } \nu_1$, $\text{cos } \nu_1$, $\text{tg } \nu_1$ e le quantità analoghe nel sistema di c. di m. per alcuni punti caratteristici dell'ellisse (quelli indicati in fig. 6; V, R, S sono 3 vertici, Q è il punto di contatto della tangente per O).

Aggiungiamo poi le seguenti formule riguardanti le particelle iniziali:

$$\left. \begin{aligned} q_0^* &= q_i^* = \beta \gamma m_0 \\ E_0^* &= \gamma m_0 \end{aligned} \right\} \text{ovvie} \quad E_i^* = \sqrt{1 + \frac{\beta^2 \gamma^2}{r^2}} m_i = \frac{\epsilon + r^2}{\sqrt{1 + 2\epsilon + r^2}} m_0$$

TABELLA 1

(Formule per alcuni punti caratteristici dell'ellisse).-

Per la spiegazione vedi alla pagina seguente.-

Punto	C	R	S	V	Q
q_1/m_1	$B \gamma \gamma_1^*$	$\pm(B-\beta_1^*) \gamma \gamma_1^*$	$(B+\beta_1^*) \gamma \gamma_1^*$	$\sqrt{\gamma^2 \gamma_1^{*2} - 1}$	$\gamma \sqrt{B^2 - \beta_1^{*2}}$
q_2/m_1	$B \gamma \gamma_1^*$	$(B-\beta_1^*) \gamma \gamma_1^*$	$(B+\beta_1^*) \gamma \gamma_1^*$	$B \gamma \gamma_1^*$	$\frac{\gamma \gamma_1^* (B^2 - \beta_1^{*2})}{B}$
q_{t_1}/m_1	0	0	0	$\beta_1^* \gamma_1^*$	$\frac{\beta_1^* \gamma_1^*}{B} \sqrt{B^2 - \beta_1^{*2}}$
E_1/m_1	$\sqrt{1+B^2 \gamma^2 \gamma_1^{*2}}$	$(1-\beta_1^*) \gamma \gamma_1^*$	$(1+\beta_1^*) \gamma \gamma_1^*$	$\gamma \gamma_1^*$	γ / γ_1^*
$\text{sen } \varphi_1$	0	0	0	$\frac{\beta_1^* \gamma_1^*}{\sqrt{\gamma^2 \gamma_1^{*2} - 1}}$	$\frac{\beta_1^* \gamma_1^*}{B \gamma}$
$\text{cos } \varphi_1$	+1	± 1	+1	$\frac{B \gamma \gamma_1^*}{\sqrt{\gamma^2 \gamma_1^{*2} - 1}}$	$\frac{\gamma_1^*}{B} \sqrt{B^2 - \beta_1^{*2}}$
$\text{tg } \varphi_1$	0	0	0	$\beta_1^* / B \gamma$	$\frac{\beta_1^*}{\gamma \sqrt{B^2 - \beta_1^{*2}}}$
q_1^*/m_1	0	$\beta_1^* \gamma_1^*$	$\beta_1^* \gamma_1^*$	$\beta_1^* \gamma_1^*$	$\beta_1^* \gamma_1^*$
q_2^*/m_1	0	$-\beta_1^* \gamma_1^*$	$\beta_1^* \gamma_1^*$	0	$\frac{\beta_1^{*2} \gamma_1^*}{B}$
$q_{t_1}^*/m_1$	0	0	0	$\beta_1^* \gamma_1^*$	$\frac{\beta_1^* \gamma_1^*}{B} \sqrt{B^2 - \beta_1^{*2}}$
E_1^*/m_1	1	γ_1^*	γ_1^*	γ_1^*	γ_1^*
$\text{sen } \varphi_1^*$	indeter= minato	0	0	+1	$\frac{1}{B} \sqrt{B^2 - \beta_1^{*2}}$
$\text{cos } \varphi_1^*$	indeter= minato	-1	+1	0	β_1^* / B
$\text{tg } \varphi_1^*$	indeter= minato	0	0	∞	$\frac{1}{\beta_1^*} \sqrt{B^2 - \beta_1^{*2}}$

Dove c'è il doppio segno \pm , il segno superiore si riferisce al caso in cui $B > \beta_1^*$ (l'ellisse non contiene 0), il segno inferiore al caso $B < \beta_1^*$ (l'ellisse contiene 0).-

Spiegazione della Tabella 1 alla pagina precedente.

La Tabella 1 ha due entrate. Ogni colonna corrisponde a un punto particolare dell'ellisse, fra quelli indicati nella fig. 6; il punto dell'ellisse individua l'angolo ν_1^0 di produzione della particella m_1 nel laboratorio e il suo impulso q_1 . Ogni riga corrisponde a una grandezza interessante la reazione, indicata nella prima colonna a sinistra. Alla casella intersezione fra una riga e una colonna si trova il valore assunto dalla grandezza che caratterizza la riga quando, la particella m_1 viene prodotta all'angolo ν_1 e con l'impulso q_1 definiti dal punto dell'ellisse che caratterizza la colonna. Questo valore è espresso mediante $\beta, \gamma, \beta_1^*, \gamma_1^*$; per avere $\beta, \gamma, \beta_1^*, \gamma_1^*$ occorre servirsi delle formule (1).

§4) - Espressione dell'energia totale W^* nel sistema del c. di m.

Si trova facilmente che:

$$W^* = \sqrt{m_i^2 + m_0^2 + 2E_i m_0}$$

§5) - Formule di correlazione fra le varie grandezze caratteristiche di una reazione a due corpi.

Scriviamo ora alcune formule di correlazione fra le varie quantità che interessano in una reazione a due corpi. Se si considerano le 5 grandezze $E_i, q_1, q_2, \nu_1, \nu_2$ (nel sistema del laboratorio), ognuna di queste è funzione di due qualunque di esse. I legami possibili si riducono a 6, (a meno di uno scambio degli indici 1,2); ma solo 2 di questi legami possono scriversi in forma abbastanza semplice:

a) legame fra E_i , ν_1 , q_1 :

$$(5) \quad \cos \nu_1 = \frac{2(E_i + m_0) \cdot \sqrt{q_1^2 + m_1^2} - 2E_i m_0}{2q_1 \sqrt{E_i^2 - m_1^2} - \frac{(m_1^2 + m_2^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2q_1 \sqrt{E_i^2 - m_1^2}}}$$

b) legame fra E_i , q_1 , q_2 (ovvio):

$$E_i = \sqrt{q_1^2 + m_1^2} + \sqrt{q_2^2 + m_2^2} - m_0$$

Il legame a) può essere scritto servendosi delle quantità β , γ , β^* , γ^* al posto di E_i :

$$(5') \quad \gamma^2 q_1^2 \sin^2 \nu_1 + (q_1 \cos \nu_1 - \beta \gamma \gamma^* m_1)^2 = \beta_1^{*2} \gamma_1^{*2} \gamma^2 m_1^2$$

come si ricava dall'equazione dell'ellisse data nel § 3); questa formula si può scrivere ancora:

$$(5'') \quad q_1^2 (\gamma^2 \sin^2 \nu_1 + \cos^2 \nu_1) - 2q_1 \beta \gamma \gamma^* m_1 \cos \nu_1 + (\beta^2 - \beta_1^{*2}) \gamma^2 \gamma_1^{*2} m_1^2 = 0$$

che è un'equazione di 2° grado in q_1 e così per trovare i due valori di q_1 corrispondenti all'angolo ν_1 basta risolvere la (5''); risolvendola per es. per $\nu_1 = 0$ si hanno i valori dell'impulso corrispondenti ai punti R, S dell'ellisse.

Nel caso della fotoproduzione, essendo $m_i = 0$, $p_i = E_i$, la (5) può scriversi risolvendola rispetto ad E_i :

$$(5''') \quad E_i = m_0 \frac{1 + \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - 2 \frac{\sqrt{q_1^2 + m_1^2}}{m_0}}{2 \left(\frac{\sqrt{q_1^2 + m_1^2}}{m_0} - 1 - \frac{q_1}{m_0} \cos \nu_1 \right)} = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2 - 2m_0 \sqrt{q_1^2 + m_1^2}}{2 (\sqrt{q_1^2 + m_1^2} - m_0 - q_1 \cos \nu_1)}$$

Questa formula dà l'energia del quanto γ in funzione dell'impulso e dell'angolo di produzione di una delle due particelle uscenti.

Altre relazioni generali notevoli sono le seguenti, che legano gli angoli di produzione delle due particelle uscenti

$$(6) \quad (\cotg \vartheta_1 + \cotg \vartheta_2)^2 \frac{\beta_1^{*2} \beta_2^{*2}}{\beta^2} - (\beta_1^* \cotg \vartheta_1 - \beta_2^* \cotg \vartheta_2)^2 = \gamma^2 (\beta_1^* + \beta_2^*)^2$$

$$q_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 = q_2 \operatorname{sen} \vartheta_2 \quad (\text{ovvia})$$

$$(7) \quad q_1 = \frac{q_2 \operatorname{sen} \vartheta_2}{\operatorname{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad q_2 = \frac{q_1 \operatorname{sen} \vartheta_1}{\operatorname{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

Per l'uso pratico, per sintetizzare in poche tabelle o in pochi grafici tutto l'andamento di una reazione, conviene servirsi delle relazioni semplici fra l'angolo di produzione e l'impulso nel sistema del laboratorio con l'angolo di produzione nel sistema del c. di m.

I grafici più utili sono i quattro seguenti.

Nel 1° si disegnano, per diversi valori dell'energia E_1 , le curve che danno ϑ_1 in funzione di ϑ_1^* , servendosi della relazione (2) già scritta nel § 3 fra $\vartheta_1, \vartheta_1^*$ ed E_1

$$(2) \quad \cotg \vartheta_1 = \frac{\gamma}{\operatorname{sen} \vartheta_1^*} \left(\frac{\beta}{\beta_1^*} + \cos \vartheta_1^* \right)$$

Nel 2° si disegnano, per diversi valori di E_1 , le curve che danno q_1 in funzione di ϑ_1^* , secondo la formula

$$(8) \quad q_1 = \frac{q_2^* \operatorname{sen} \vartheta_1^*}{\operatorname{sen} \vartheta_1}, \quad \text{da intendersi calcolata insieme alla (2) oppure secondo l'altra formula:$$

$$(9) \quad q_1 = q_1^* \sqrt{\operatorname{sen}^2 \vartheta_1^* + \gamma^2 \left(\frac{\beta}{\beta_1^*} + \cos \vartheta_1^* \right)^2}$$

Nel 3° si disegnano, per diversi valori di q_1 , le cur-

ve che danno v_1 in funzione di E_i secondo la (5); nel caso della fotoproduzione è altrettanto comodo disegnare, per diversi valori di v_1 , le curve che danno E_i in funzione di q_1 secondo la (5^m).

Nel 4° si disegnano per diversi valori di E_i , le ellissi e i cerchi che ci sono serviti nel § 3 per la rappresentazione geometrica.

Le tabelle che riuniscono nel modo più semplice i dati su una reazione sono quelle in cui si danno q_1, v_1 in funzione di E_i, v_1^* .

§ 6) - Grandezze caratteristiche dell'andamento generale di una reazione.

Una reazione endotermica ($m_1 + m_0 < m_1 + m_2$) ha un'energia di soglia \bar{E}_1 , cioè c'è un valore minimo di E_i per il quale la reazione avviene.

Tale energia di soglia è data dalla formula:

$$(10) \quad \bar{E}_1 = \frac{1}{2} m_0 (s^2 - r^2 - 1)$$

Quando la reazione avviene con una E_i appena sopra la soglia, si ha che $q_1^* = q_2^* =$ impulso di m_1, m_2 nel sistema del c. di m. è molto piccolo, e nella rappresentazione geometrica i cerchi e le ellissi hanno dimensioni tendenti a 0. Tuttavia i valori di β, γ , tendono a un valore finito $\bar{\beta}, \bar{\gamma}$,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta} = \frac{\sqrt{(s^2 - r^2 - 1)^2 - 4r^2}}{s^2 - r^2 + 1} \\ \bar{\gamma} = \frac{s^2 - r^2 + 1}{2s} \\ \bar{\beta} \bar{\gamma} = \frac{\sqrt{(s^2 - r^2 - 1)^2 - 4r^2}}{2s} \end{array} \right.$$

Anche l'ascissa del centro C dell'ellisse tende al valore limite $\bar{\beta} \cdot \bar{\gamma} m_1 \neq 0$, mentre naturalmente $\beta_1^* \rightarrow 0$, $\gamma_1^* \rightarrow 1$.

Le due particelle uscenti vengono prodotte in avanti ($\nu_1 = \nu_2 = 0$) ed hanno la stessa velocità $\bar{\beta}$; così le (11) permettono di calcolare facilmente l'impulso e l'energia che esse hanno quando la produzione avviene alla soglia.

Al crescere dell'energia E_i , le ellissi crescono di dimensioni, ed anche il loro centro si sposta. Fissando l'attenzione su una sola delle due particelle uscenti, per esempio m_1 , possono darsi i due casi seguenti:

A) Crescendo E_i da \bar{E}_i all' ∞ , il cono di produzione di m_1 si allarga, ma la sua apertura tende ad un valore limitato $< \frac{\pi}{2}$, così che m_1 viene sempre prodotta in avanti.

Essendo l'apertura del cono $\bar{\nu}_1$ definita da

$$\text{sen } \bar{\nu}_1 = \frac{\beta_1^* \gamma_1^*}{\beta \gamma} \quad (\text{vedi } \S 3, \text{ formula (4)),$$

si ha questo caso quando $\lim_{E_i \rightarrow \infty} \frac{\beta_1^* \gamma_1^*}{\beta \gamma} < 1$; dalle (1) si ricava facilmente, facendo $E \rightarrow \infty$ che questo limite è uguale ad $1/r_1 = \frac{m_0}{m_1}$. Così si conclude: una particella uscente di massa maggiore della particella bersaglio, viene sempre prodotta in avanti in una reazione endotermica, e il suo angolo di produzione non supera mai il valore

$$(12) \quad \bar{\nu}_{1 \text{ lim}} = \text{arcsen } \frac{m_0}{m_1}$$

In questo caso l'impulso corrispondente al punto Q tende al valore limite

$$m_1 \sqrt{\gamma_1^2 - 1}$$

B) Quando $r_1 < 1$, crescendo E_1 , si raggiunge un certo valore $E_1^{(1)}$ per cui l'ellisse passa per il punto O (transizione tra il caso della fig. 3 e il caso della fig. 4); la produzione di m_1 avviene anche nel laboratorio in tutto l'angolo solido; questo valore $E_1^{(1)}$ è dato da:

$$(13) \quad \frac{E_1^{(1)}}{m_0} = \frac{s^2 - r_1^2 - 1 - 2r_1(s-1)}{2(1-r_1)} =$$

$$= \frac{\frac{E_1}{m_0} - r_1(s-1)}{1-r_1}$$

In tutti e due i casi A), B), per $E_1 \rightarrow \infty$, il centro dell'ellisse ed i vertici V, S si allontanano indefinitamente da O, mentre, il punto R (corrispondente alla produzione all'indietro nel sistema del c. di m.,

$\theta_1^* = 180^\circ$) tende all'ascissa limite

$$(14) \quad \frac{r_1^2 - 1}{2r_1} m_1$$

che è > 0 nel caso A), < 0 nel caso B).

Una reazione esotermica ($m_i + m_0 > m_1 + m_2$) non ha una soglia, cioè può avvenire anche con la particella incidente ferma, $E_1 = m_1$.

In questo caso limite l'ellisse relativo alla particella m_1 , per es., è un cerchio di raggio finito $q_1^* = \beta_1^* \gamma_1^* m_1$ (che si ottiene dalle (1) ponendo $\epsilon = r$); si ha naturalmente $\beta = 0$, $\gamma = 1$, perchè il c. di m. non si muove rispetto al laboratorio.

Al crescere di E_1 da m_1 all' ∞ si possono avere ancora i due casi:

A') La particella m_1 , qualunque sia E_i , può venire sempre prodotta in tutto l'angolo solido: qualunque sia E_i l'ellisse contiene sempre il punto O.

B') C'è un certo valore $E_i^{(1)}$ di E_i per il quale l'ellisse passa per O: allora per $m_1 < E_i < E_i^{(1)}$ la produzione avviene in tutto l'angolo solido, mentre per $E_i^{(1)} < E_i$ la produzione avviene in avanti, entro un cono di apertura decrescente (al crescere di E_i) fino a un valore limite v_{lim} .

I due casi sono scambiati rispetto a quello che accade per una reazione endotermica: si ha il caso A') quando $r_1 = \frac{m_1}{m_0} < 1$, il caso B') quando $r_1 > 1$. Nel caso B'), la formula che dà $E_i^{(1)}$ è la stessa (13), e quella che dà v_{lim} = apertura del cono di produzione per $E_i \rightarrow \infty$ è ancora la (12). Per il caso A') si conclude: una particella uscente di massa m_1 minore della particella bersaglio, viene sempre prodotta in tutto l'angolo solido in una reazione esotermica.

In tutti e due i casi l'ascissa limite di R è data dalla (14).

§ 7) - Formule per i decadimenti in due corpi.

I decadimenti in due corpi (reazioni del tipo $m_i \rightarrow m_1 + m_2$) sono un caso limite, dal punto di vista formale, delle reazioni a due corpi. Basterebbe prendere il limite per $m_0 \rightarrow 0$ di tutte le formule finora scritte per le reazioni a due corpi, per avere le formule per i decadimenti. Poichè però abbiamo introdotto i parametri r, r_1, r_2, s, ϵ , la cui definizione richiede $m_0 \neq 0$, e poichè molte semplificazioni si ottengono quando $m_0 \rightarrow 0$, conviene scrivere a parte le formule più importanti.

La velocità del c. di m. rispetto al laboratorio coincide con la velocità della particella incidente; così'

è evidente che:

$$\beta = \frac{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}}{E_i} ; \quad \gamma = \frac{E_i}{m_i} ; \quad \beta\gamma = \frac{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}}{m_i}$$

L'impulso di m_1, m_2 nel sistema del c. di m. non dipende da E_i :

$$\begin{aligned} q_1^* &= q_2^* = \beta_1^* \gamma_1^* m_1 = \beta_2^* \gamma_2^* m_2 = \\ &= \frac{\sqrt{[m_i^2 - (m_1 + m_2)^2]} [m_i^2 - (m_1 - m_2)^2]}{2 m_i} \end{aligned}$$

e questa stessa formula dà immediatamente il valore costante di $\beta_1^* \gamma_1^* ; \beta_2^* \gamma_2^*$

Si ha poi

$$\beta_1^* = \sqrt{1 - \frac{4 m_1^2 m_2^2}{(m_i^2 + m_1^2 - m_2^2)}}$$

$$\gamma_1^* = \frac{m_i^2 + m_1^2 - m_2^2}{2 m_1 m_i}$$

Al variare di E_i , l'ellisse della particella m_1 ha un semi-asse minore costante = q_1^* , un semi-asse maggiore di lunghezza γq_1^* , e il centro all'ascissa

$$z_c = \beta \gamma \gamma_1^* m_1$$

proporzionale cioè all'impulso nel laboratorio $\beta \gamma m_1$ della particella che decade.

Con queste nuove espressioni per $q_1^*, \beta_1^*, \gamma_1^*$ valgono ancora tutte le formule: (2), (3), (4), (5), (5'), (5''), (6), (7), (8), (9) e la tabella 1 del § 3.

La (5) diventa notevolmente più semplice (legame fra

α_1, q_1, E_i):

$$(5''') \quad \cos \alpha_1 = \frac{2E_i \sqrt{q_1^2 + m_1^2} - (m_i^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2q_1 \sqrt{E_i^2 - m_i^2}}$$

Dal punto di vista dell'andamento generale della reazione per $E_i \rightarrow \infty$ i decadimenti si comportano come le reazioni esotermiche (vedi § precedente); quindi si ha sempre il caso B') per una particella uscente di massa m_1 non nulla; dalla formula (12) si vede che $\alpha_1 \lim = 0$, e il valore di $E_i^{(1)}$ si ricava dalla (13) :

$$(13') \quad E_i^{(1)} = \frac{m_i^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_1} = \gamma_1^* m_i$$

L'ascissa del punto R dell'ellisse tende a $+\infty$ per $E_i \rightarrow \infty$, quando $m_1 \neq 0$.

Un caso limite ancora più particolare si ha quando $m_1 = 0$: si trova che la particella m_1 può venire emessa in tutto l'angolo solido qualunque sia E_i .

I grafici e le tabelle più utili per rappresentare le relazioni fra le diverse grandezze che interessano in un decadimento a due corpi sono ancora quelli elencati alla fine del § 5.

§8) - Osservazioni sulla generalizzazione al caso di reazioni e decadimenti a più di due corpi.

Consideriamo una reazione a più corpi, per es.:



La costruzione grafica del cerchio e dell'ellisse relativo alla particella m_1 o all'energia incidente E_i , eseguita utilizzando le formule (1) del § 2, in cui si ponga:

$$S = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_0}$$

ha ancora un significato. Precisamente si può dimostrare che nel sistema del laboratorio solo i punti interni all'ellisse sono permessi per la particella m_1 , quando la particella incidente m_1 ha l'energia E_1 ; e un punto sul contorno dell'ellisse si ha quando tutte le altre particelle m_2, m_3, m_4 vengono prodotte ad uno stesso angolo con la stessa velocità (cioè si comportano come un'unica particella di massa $m_2 + m_3 + m_4$). Questo perchè nel sistema del c. di m. sono permessi per m_1 tutti i punti interni

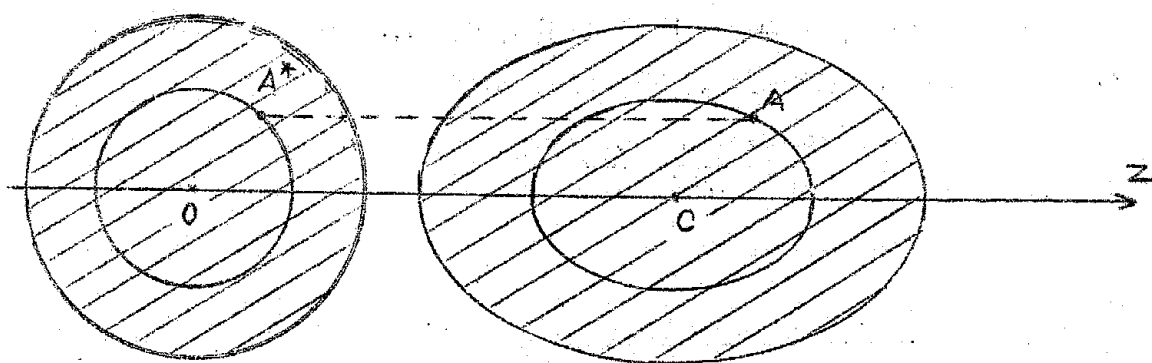


Fig. 7 - (Rappresentazione grafica degli impulsi di una particella uscente da una reazione a più di due corpi).

al cerchio di raggio q_1^{max} , essendo q_1^{max} = impulso massimo di m_1 nel sistema del c. di m.; il valore q_1^{max} si realizza appunto quando le altre particelle vengono emesse come se fossero un'unica particella.

Ad ogni emissione nel sistema del c. di m. con impulso $q_1 < q_1^{\text{max}}$ corrispondono nella rappresentazione grafica due punti come A^* ed A (vedi fig. 7), situati rispettivamente su un cerchio e su un'ellisse interni e concentrici ai primi due, e simili ad essi con il medesimo rapporto di similitudine. Se la particella m_1 viene emessa con velocità nulla nel sistema del c. di m., i punti che la rappresentano sono O e C.

I punti del contorno dell'ellisse determinano l'intervallo di impulsi in cui può venir prodotta la particella

m_1 ad un dato angolo e per una data E_i .

Fissato un valore di E_i , si possono costruire le ellissi relative a tutte le particelle uscenti: contrariamente al caso della reazione a due corpi, queste ellissi sono in generale diverse l'una dall'altra.

Per i decadimenti a più corpi valgono tutte le considerazioni analoghe.

Le considerazioni fatte mostrano quindi l'interesse che ha la rappresentazione grafica anche nel caso di reazioni a più corpi. Tutte le formule date al § 6, in particolare quella importante dell'energia di soglia, valgono anche per reazioni a più corpi, purchè si ponga

$$\Delta = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_0}$$

§ 9) - Trasformazione degli angoli solidi dal sistema del c. di m. al sistema del laboratorio. Altre espressioni differenziali importanti.

La rappresentazione grafica della fig. 3 dà anche modo di conoscere a prima vista, almeno qualitativamente, il modo in cui si trasformano gli angoli solidi nel passare dal sistema del c. di m. al sistema del laboratorio. Infatti, se A_1^* e B_1^* (vedi fig. 8) corrispondono ad emissioni nel sistema del c. di m. con angoli ν_1^* , $\nu_1^* + d\nu_1^*$, e se i punti corrispondenti sull'ellisse sono A_1 e B_1 ad angoli

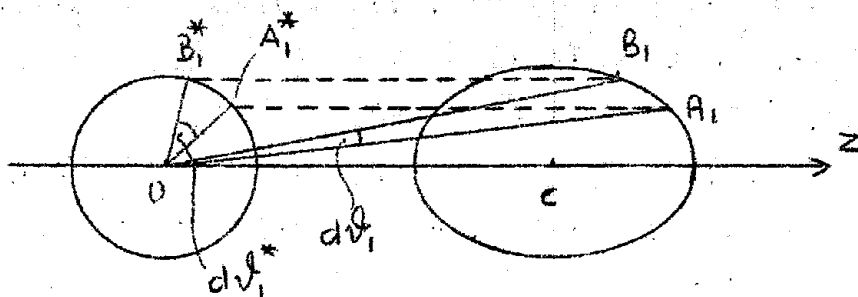


Fig. 8 - (Trasformazione degli angoli solidi)

(nel laboratorio) $\vartheta_1, \vartheta_1 + d\vartheta_1$, gli intervalli $d\vartheta_1^*, d\vartheta_1$ si corrispondono nella trasformazione. Poichè gli angoli solidi $d\Omega_1^*, d\Omega_1$ sono proporzionali a $\text{sen } \vartheta_1^* d\vartheta_1^*$, $\text{sen } \vartheta_1 d\vartheta_1$ rispettivamente, si ha che

$$\frac{d\Omega_1^*}{d\Omega_1} = \frac{\text{sen } \vartheta_1^* d\vartheta_1^*}{\text{sen } \vartheta_1 d\vartheta_1} = \frac{d \cos \vartheta_1^*}{d \cos \vartheta_1}$$

Se la sezione d'urto differenziale per la produzione della particella n_1 è $\sigma^*(\vartheta_1^*) d\Omega_1^*$ nel sistema del c. di m. e $\sigma(\vartheta_1) d\Omega_1$ nel laboratorio, si ottiene:

$$(15) \quad \sigma(\vartheta_1) = \sigma^*(\vartheta_1^*) \frac{d\Omega_1^*}{d\Omega_1} = \sigma^*(\vartheta_1^*) \frac{d \cos \vartheta_1^*}{d \cos \vartheta_1}$$

Il coefficiente $\frac{d \cos \vartheta_1^*}{d \cos \vartheta_1}$ è quindi un dato molto importante per le applicazioni (3), ed è conveniente, quando si studia una reazione particolare, avere dei grafici o delle tabelle che ne diano l'andamento in funzione, per es., di E_i e ϑ_1^* .

Si può dimostrare che:

$$(16) \quad \frac{\sigma(\vartheta_1)}{\sigma^*(\vartheta_1^*)} = \frac{d \cos \vartheta_1^*}{d \cos \vartheta_1} = \frac{\text{sen } \vartheta_1^* d\vartheta_1^*}{\text{sen } \vartheta_1 d\vartheta_1} = \frac{\text{sen}^3 \vartheta_1^*}{\text{sen}^3 \vartheta_1} \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{\beta}{\beta_1^*} \cos \vartheta_1^*\right)}$$

Altre grandezze che servono, specialmente nel caso in cui le particelle incidenti hanno uno spettro continuo di energia (come ad es. i fotoni uscenti da un elettrosincrotrone) sono:

$$\left(\frac{dq_1}{dE_i} \right)_{q_1 = \omega \sigma t} ; \left(\frac{dq_1}{d\vartheta_1} \right)_{E_L = \omega \sigma t} ; \left(\frac{d\vartheta_1}{dE_i} \right)_{q_1 = \omega \sigma t}$$

Le loro espressioni si ricavano differenziando la (5) e si trova:

$$(17) \quad \left(\frac{dq_i}{dE_i} \right)_{v_i = wst} = \frac{m_0 + \frac{q_i \cos \vartheta_i}{\beta_i} - E_i}{\beta_i (m_0 + E_i) - q_i \cos \vartheta_i}$$

$$(17') \quad \left(\frac{dq_i}{d\vartheta_i} \right)_{E_i = wst} = \frac{-q_i q_i \sin \vartheta_i}{\beta_i (m_0 + E_i) - q_i \cos \vartheta_i}$$

$$(17'') \quad \left(\frac{dv_i}{dE_i} \right)_{q_i = wst} = \frac{m_0 + \frac{q_i \cos \vartheta_i}{\beta_i} - E_i}{q_i q_i \sin \vartheta_i}$$

Un'altra quantità importante è:

$$(17''') \quad \frac{dq_i^*}{dE_i} = \frac{m_0}{4q_i^*} \left[1 - \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{1 + 2\varepsilon + r^2} \right)^2 \right]$$

§ 10) - Formula dell'energia di soglia per bersaglio non fermo.

In alcune esperienze si utilizzano dei nuclei anziché dei protoni come particelle bersaglio, allo scopo di abbassare l'energia di soglia di una reazione nel sistema del laboratorio; si approfitta del fatto che i nucleoni hanno nel nucleo una certa energia cinetica, e quindi la reazione avviene qualche volta per un urto della particella incidente con un nucleone che si sta muovendo in direzione opposta. L'energia cinetica dei nucleoni del nucleo non è costante, ma prende tutti i valori possibili da 0 ad una certa energia massima.

Se β_0 è (in valore assoluto) la velocità lorentziana della particella bersaglio in direzione opposta alla particella incidente, nel sistema del laboratorio, e $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - \beta_0^2}$,

si ha per l'energia di soglia \bar{E}_1' nel laboratorio:

$$\frac{\bar{E}_1'}{m_0} = \frac{1}{2} (\Delta^2 - \gamma^2 - 1) \gamma_0 - \beta_0 \gamma_0 \sqrt{\frac{\Delta^2 - \gamma^2 - 1}{4} - \gamma^2}$$

cioè

$$(18) \quad \frac{\bar{E}_1'}{m_0} = \left[\frac{\bar{E}_1}{m_0} - \beta_0 \sqrt{\frac{\bar{E}_1^2}{m_0^2} - \gamma^2} \right] \gamma_0$$

essendo \bar{E}_1 l'energia di soglia a bersaglio fisso.

Se la particella incidente ha massa nulla:

$$(18') \quad \begin{aligned} \frac{\bar{E}_1'}{m_0} &= \frac{\bar{E}_1}{m_0} \gamma_0 (1 - \beta_0) = \frac{\bar{E}_1}{m_0} \sqrt{\frac{1 - \beta_0}{1 + \beta_0}} = \\ &= \frac{\bar{E}_1}{m_0} \frac{1}{\gamma_0 (1 + \beta_0)} \end{aligned}$$

che si può scrivere, quando T_0 = energia cinetica della particella bersaglio $\ll m_0$ (cioè per velocità β_0 piccole del bersaglio):

$$\frac{\bar{E}_1'}{m_0} \approx \frac{\bar{E}_1}{m_0} (1 - \beta_0) \approx \frac{\bar{E}_1}{m_0} \left(1 - \sqrt{\frac{2T_0}{m_0}} \right)$$

§ 11) - Valori delle masse delle particelle elementari.

Diano nella tabella 2 i valori delle masse delle particelle elementari che riteniamo più adatti a tutt'oggi per il calcolo di tabelle cinematiche; essi sono desunti dall'articolo classico di Du Mond e Cohen⁽⁴⁾ per il protone, il neutrone, l'elettrone, e da un articolo riassuntivo di K.M. Crowe⁽⁵⁾ per i mesoni e gli iperoni. Si è applicato però il criterio di assumere esattamente uguali le masse di due particelle che entro gli errori sperimentali hanno la stessa massa (adottando quello dei due valori conosciuto con maggior precisione), nel caso in cui anche ragioni di simmetria suggeriscono che ci sia quest'uguaglianza.

TABELLA 2

(Masse delle particelle elementari)

Particella	Massa (in masse elettroniche)	Massa (in MeV)	Massa (in masse protoniche)
γ	0	0	0
ν	0	0	0
e^\pm	1	0.510984 ± 0.000016	$(0.544627 \pm 0.000017) \times 10^{-3}$
μ^\pm	206.86 ± 0.11	105.70 ± 0.06	0.11266 ± 0.00006
π^\pm	273.27 ± 0.11	139.64 ± 0.06	0.14883 ± 0.00006
π^0	264.37 ± 0.6	135.09 ± 0.3	0.14398 ± 0.0003
k^\pm	966.8 ± 0.43	494.0 ± 0.22	0.52655 ± 0.00023
e^0	965.0 ± 5.0	493.1 ± 2.6	0.5256 ± 0.0027
p	1836.13 ± 0.04	938.23 ± 0.02	1
n	1838.66 ± 0.04	939.53 ± 0.02	1.001378 ± 0.00002
Λ^0	2181.7 ± 0.4	1114.8 ± 0.2	1.1882 ± 0.0002
Σ^+	2328.3 ± 0.5	1189.7 ± 0.26	1.2681 ± 0.00027
Σ^-	2341.9 ± 0.7	1196.7 ± 0.36	1.2755 ± 0.00037
$[\Sigma^-]$	2585.0 ± 6.0	1320.9 ± 3.0	1.408 ± 0.003

Per il calcolo di tabelle è conveniente utilizzare come dati di partenza i numeri dell'ultima colonna e la massa del protone in MeV.-

Così si è assunto:

$$m_{\pi^+} = m_{\pi^-} ; m_{\mu^+} = m_{\mu^-} ; m_{k^-} = m_{k^+} = m_{\gamma^+}$$

Le masse della θ^0 e della $[-]$ hanno ancora un'incertezza troppo grande per utilizzarle in tabelle di grande precisione.

§ 12) - Valori numerici delle energie di soglia di alcune reazioni di fotoproduzione in idrogeno.

Dalla (10) del §6 e dai valori delle masse dati al § 11 si ricavano i valori delle energie di soglia per le più importanti reazioni di fotoproduzione in idrogeno, riportati nella tabella 3.

TABELLA 3

(Energie di soglia per la fotoproduzione in idrogeno (nel sistema del laboratorio) .
Gli errori indicati sono solamente approssimativi).

Reazione [$\gamma + p \rightarrow$]	Energia di soglia \bar{E}_γ (MeV)
$\pi^0 + p$	144.81 \pm 0.3
$\pi^+ + n$	151.51 \pm 0.08
$2\pi^0 + p$	309.07 \pm 0.8
$\pi^0 + \pi^+ + n$	316.62 \pm 0.4
$\pi^+ + \pi^- + p$	320.84 \pm 0.15
$3\pi^0 + p$	492.78 \pm 1.0
$2\pi^0 + \pi^+ + n$	501.17 \pm 0.9
$\pi^0 + \pi^+ + \pi^- + p$	505.86 \pm 0.5
$2\pi^+ + \pi^- + n$	514.30 \pm 0.25
$4\pi^0 + p$	695.94 \pm 1.7
$3\pi^0 + \pi^+ + n$	705.17 \pm 1.5
$2\pi^0 + \pi^+ + \pi^- + p$	710.33 \pm 1.2
$\pi^0 + 2\pi^+ + \pi^- + n$	719.62 \pm 1.0
$2\pi^+ + 2\pi^- + p$	724.81 \pm 0.5

(segue)

(segue tab.3)

Reazione $[\gamma + p \rightarrow]$	Energia di soglia \bar{E}_γ (MeV)
$5\pi^0 + p$	918.56 ± 2.5
$4\pi^0 + \pi^+ + n$	928.62 ± 2.0
$3\pi^0 + \pi^- + \pi^+ + p$	934.25 ± 1.5
$2\pi^0 + 2\pi^+ + \pi^- + n$	944.38 ± 1.2
$\pi^0 + 2\pi^+ + 2\pi^- + p$	950.03 ± 1.0
$3\pi^+ + 2\pi^- + n$	960.22 ± 0.6
$6\pi^0 + p$	1160.61 ± 3.5
$5\pi^0 + \pi^+ + n$	1171.53 ± 3.0
$4\pi^0 + \pi^+ + \pi^- + p$	1177.62 ± 2.5
$3\pi^0 + 2\pi^+ + \pi^- + n$	1188.59 ± 2.0
$2\pi^0 + 2\pi^+ + 2\pi^- + p$	1194.71 ± 1.5
$\pi^0 + 3\pi^+ + 2\pi^- + n$	1205.74 ± 1.0
$3\pi^+ + 3\pi^- + p$	1211.90 ± 0.8
$7\pi^0 + p$	1422.12 ± 4.5
$6\pi^0 + \pi^+ + n$	1433.88 ± 4.0
$5\pi^0 + \pi^+ + \pi^- + p$	1440.44 ± 3.5
$4\pi^0 + 2\pi^+ + \pi^- + n$	1452.25 ± 3.0
$3\pi^0 + 2\pi^+ + 2\pi^- + p$	1458.84 ± 2.5
$2\pi^0 + 3\pi^+ + 2\pi^- + n$	1470.71 ± 1.5
$\pi^0 + 3\pi^+ + 3\pi^- + p$	1477.34 ± 1.0
$4\pi^+ + 3\pi^- + n$	1489.27 ± 1.0
$k^+ + \Lambda^0$	910.26 ± 0.6
$\bar{\theta}^0 + k^+ + n$	1509.0 ± 6.0
$\bar{\theta}^0 + \theta^0 + p$	1505.0 ± 10.0
$k^- + k^+ + n$	1510.97 ± 1.0
$\theta^0 + \bar{\theta}^+$	1040.0 ± 6.0

§ 13) - Valori degli impulsi delle particelle uscenti da alcuni decadimenti nel sistema della particella che decade.

Diano prima questi valori per i decadimenti in due corpi, nella tabella 4.

TABELLA 4

(Impulsi dei prodotti di decadimenti a 2 corpi)

Decadimento	Impulso q^* nel sistema della particella primaria in MeV/c
$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu$	$q_\mu^* = q_\nu^* = 29.82 \pm 0.03$
$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma'$	$q_\gamma^* = q_{\gamma'}^* = 67.54 \pm 0.15$
$K^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^0$	$q_{\pi^\pm}^* = q_{\pi^0}^* = 205.28 \pm 0.3$
$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$	$q_p^* = q_{\pi^-}^* = 99.29 \pm 0.2$
$\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$	$q_n^* = q_{\pi^0}^* = 102.71 \pm 0.3$
$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$	$q_p^* = q_{\pi^0}^* = 189.39 \pm 0.5$
$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$	$q_n^* = q_{\pi^+}^* = 185.43 \pm 0.3$
$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$	$q_n^* = q_{\pi^-}^* = 192.36 \pm 0.4$

Nella tabella 5 diamo gli impulsi massimi per alcune particelle prodotte in decadimenti a 3 corpi, nel sistema della particella primaria.

TABELLA 5

(Impulsi massimi dei prodotti di decadimenti a 3 corpi)

Decadimento	Impulso massimo q_{max} nel sistema della particella primaria in MeV
$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + 2\nu$	$q_{e^{\pm}} = 52.85 \pm 0.03$
$k^{\pm} \rightarrow 2\pi^{\pm} + \pi^{\mp}$	$q_{\pi^{\pm}} = 125.60 \pm 0.3$
$k^{+} \rightarrow \pi^{+} + 2\pi^{0}$	$\left\{ \begin{array}{l} q_{\pi^{+}} = 133.05 \pm 0.6 \\ q_{\pi^{0}} = 132.32 \pm 0.4 \end{array} \right.$
$k^{+} \rightarrow \mu^{+} + \pi^{0} + \nu$	$\left\{ \begin{array}{l} q_{\mu^{+}} = 215.31 \pm 0.6 \\ q_{\pi^{0}} = 215.31 \pm 0.6 \end{array} \right.$

APPENDICE.-

Proposta per il calcolo di tavole cinematiche di utilità generale per le esperienze con l'elettrosincrotrone.-

1) Tavole di questo tipo sono state pubblicate nel 1953 da J.H. Malmberg e L.J. Koester: 'Tables of nuclear reaction kinematics at relativistic energies' - Urbana, Illinois. Sono state calcolate da una calcolatrice elettronica digitale (Illiac). Prendendo come modello lo schema di Malmberg e Koester si possono fare le seguenti osservazioni:

α) è conveniente avere delle tavole per un range di energie del fotone nel laboratorio dalla soglia della fotoproduzione di π^0 a 1000 MeV o più per le esperienze col nostro elettrosincrotrone. Le tavole di Illinois arrivano fino ad un valore massimo di $E_\gamma = 340$ MeV per la fotoproduzione di π^0 . (°)

β) i valori delle masse dei π e dei μ sono conosciuti ora con maggiore precisione e la differenza con i valori usati da M. e K. non è del tutto trascurabile (1,5 +2%).

γ) sarebbe utile avere delle tavole anche per la fotoproduzione dei K^+ , Λ^0 , e inoltre dei decadimenti a due corpi $\Theta^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$, $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$.

δ) tavole di utilità generale per processi a 3 corpi non sono facili da fare perchè sarebbero troppo grosse se fossero complete, e non ci sono criteri sicuri per una scelta delle più utili (l'utilità dipende dal tipo di esperienze che si fanno).

(°) Forse conviene estendere il range delle tabelle fino a 1200 MeV, se si può pensare di alzare un poco la energia massima del sincrotrone.

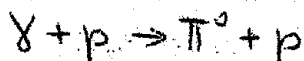
ε) la fotodisintegrazione del deutone è forse di interesse un po' minore alla alte energie del γ che non alle basse energie, e dovendo limitare il numero delle tavole si può pensare di lasciarla da parte.

ζ) Il decadimento $\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$ va tabulato solo fino a energie non troppo alte, (fino a che l'angolo massimo del μ nel laboratorio non è piccolo, $\sim 10^\circ$ sulle tabelle di M. e K.). Per energie più alte non ha molto interesse la cinematica dettagliata, e bastano delle formule asintotiche approssimate facilmente ottenibili.

η) per il decadimento $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, la cinematica è abbastanza facile; la breve vita media del π^0 fa sì che la distribuzione dei γ è sempre mediata su tutte le direzioni e le energie di produzione del π^0 ; le formule che si possono ricavare in altro modo per queste distribuzioni (6) sono quindi di maggiore utilità delle tabelle.

2) Da quanto detto le tavole di maggiore utilità per le esperienze con l'elettrosincrotrone sono quelle delle reazioni:

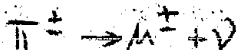
a) fotoproduzione singola di pioni in idrogeno.



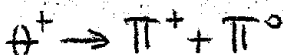
b) fotoproduzione di K^+ e di Λ^0 in idrogeno



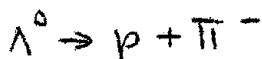
c) decadimento del π^{\pm}



d) decadimento del θ^+



e) decadimento della Λ^0



La fotoproduzione in idrogeno di iperoni più pesanti della Λ^0 ha una soglia > 1000 MeV.

Per le reazioni di fotoproduzione e per il decadimento della Λ^0 interessano i dati (angolo ed impulso) riguardanti tutt'e due le particelle uscenti; per il decadimento del π^+ non hanno interesse i dati riguardanti il neutrino; per il decadimento del θ^+ i dati sul π^0 hanno poca probabilità di applicazione pratica come tali (dipende dalla tecnica di rivelazione usata) e sono del resto piuttosto simili a quelli del π^+ che esce dallo stesso decadimento. Per molte esperienze si prevede l'uso di magneti deflettori; per facilitare i calcoli in questo caso è preferibile avere immediatamente dalle tabelle gli impulsi piuttosto che le energie cinetiche delle particelle che interessano. L'aver direttamente i valori dell'energie cinetiche faciliterebbe invece l'uso delle tavole range-energia. La cosa più conveniente è probabilmente tabulare i valori degli impulsi; ed aggiungere una tavola che dia per ogni particella la corrispondenza fra impulso ed energie cinetica.

- 3) I valori delle masse delle particelle elementari che entrano nelle reazioni a), b), c), d), e) sono conosciuti oggi con notevole precisione (4), (5), e si possono prendere come dati di partenza quelli della tabella 2, § 11. Nelle tabelle le energie e gli impulsi verranno dati in MeV (o MeV/c).
- 4) Come nelle tabelle di M. e K., un dato importante per la trasformazione delle sezioni d'urto tra il sistema del baricentro e il sistema del laboratorio è il rapporto $(d \cos \vartheta^*) / (d \cos \vartheta)$ (ϑ^* = angolo di produzione nel sistema del baricentro, ϑ = angolo di produzione nel sistema del laboratorio), che dà direttamente il rapporto fra

le sezioni d'urto differenziali (per unità di angolo solido) nei due sistemi. Gli intervalli tra i valori successivi di ν^* e tra i valori successivi di E_γ (che sono le due grandezze di 'input' delle tabelle) scelti da M. e K. ($\Delta\nu^* = 5^\circ$; $\Delta E_\gamma = 10$ MeV, o meno, vicino alla soglia delle reazioni) vanno bene anche nel nostro caso.

5) Come conclusione alle precedenti osservazioni si può quindi precisare il tipo di tabelle probabilmente più convenienti.

Si tabuleranno le 6 reazioni a), b), c), d), e), con i valori delle masse indicati sopra; per a) e b) i valori delle grandezze di 'input' (ν^* ed E_γ) saranno riportati in ogni pagina (una pagina per ogni valore di E_γ e per tutti i valori di ν^*) ad intervalli $\Delta\nu^* = 5^\circ$, $\Delta E_\gamma = 10$ MeV (o < 10 MeV vicino alle soglie), ed E_γ varierà dal valore di soglia a 1200 MeV. In ogni pagina saranno riportati (in testa) in valore di E_γ , l'energia totale nel sistema del c. di m., l'energia del δ nel sistema del c. di m., la velocità β e $\delta = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ del c. di m. rispetto al laboratorio.

Le grandezze di 'output' saranno gli impulsi di ciascuna delle particelle uscenti in MeV/c, gli angoli ϑ di produzione nel laboratorio, ed il valore di $(d \cos \nu^*) / (d \cos \vartheta)$; come nelle tavole di M. e K., sarà forse necessario fare una tabella separata per ciascuna delle particelle uscenti. Nella prima pagina di ogni tabella sarà riportato lo schema della reazione, le masse delle particelle che intervengono, il range dei valori di E_γ per cui è fatta la tabella, il significato dei simboli, e i valori degli steps $\Delta\nu^*$, ΔE_γ .

Per le reazioni c), d), e) si tabuleranno le stesse grandezze, con le sole seguenti differenze: ad E_γ si sostituirà l'impulso della particella che decade; il range di impulsi varierà da 0 a ~ 250 MeV/c per la c), da 0 a ~ 800

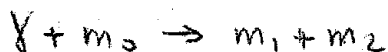
MeV/c per la d), da 0 a ~ 1200 MeV/c per la e); per i decadimenti lo step degli angoli può anche essere $\Delta\theta^* = 10^\circ$; non si tabuleranno i dati riguardanti il neutrino per la reazione c), e il π^0 per la reazione d).

Si aggiungeranno:

- una tabella con i valori delle masse di tutte le particelle considerate e con i Q dei decadimenti
- una tabella di passaggio degli impulsi alle energie cinetiche per tutte le particelle
- una tabella con le soglie di tutte le reazioni tabulate ed eventualmente anche di altre non tabulate (ad es. la fotoproduzione multipla di pioni)
- una tabella con le vite medie delle particelle considerate.

- 6) La catena di formule più conveniente per essere programmata su una calcolatrice digitale per ottenere la tabulazione voluta è probabilmente la seguente.

Per la reazione



poniamo:

$$\varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_0} \quad ; \quad r_1 = \frac{m_1}{m_0} \quad ; \quad r_2 = \frac{m_2}{m_0}$$

$$(1) \quad \beta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad ; \quad \gamma = \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+2\varepsilon}}$$

$$(2) \quad q_1^* = \frac{m_0}{2} \sqrt{\frac{[1+2\varepsilon - (r_1^2 + r_2^2)]^2 - 4r_1^2 r_2^2}{1+2\varepsilon}} \quad \left(= \text{impulso di } m_1 \text{ nel sistema del c. di m.} \right)$$

$$(3) \quad \eta_1^* = \frac{q_1^*}{m_1} \quad ; \quad \beta_1^* = \frac{\eta_1^*}{\sqrt{1+\eta_1^{*2}}} \quad \left(= \text{velocità di } m_1 \text{ nel sistema del c. di m.} \right)$$

$$(4) \quad \cotg \vartheta_1 = \gamma \left[\cotg \vartheta_1^* + \frac{\beta}{\beta_1^*} \operatorname{cosec} \vartheta_1^* \right] \quad (0 \leq \vartheta_1 \leq \pi)$$

$$(5) \quad q_1 = q_1^* \frac{\operatorname{sen} \vartheta_1^*}{\operatorname{sen} \vartheta_1} = \text{impulso di } m_1 \text{ nel laboratorio}$$

$$(6) \quad \frac{d \cotg \vartheta_1^*}{d \cotg \vartheta_1} = \frac{\operatorname{sen}^3 \vartheta_1^*}{\operatorname{sen}^3 \vartheta_1} \frac{1}{\gamma \left[1 + \frac{\beta}{\beta_1^*} \cotg \vartheta_1^* \right]}$$

$$W^* = \sqrt{1 + 2\varepsilon} m_0$$

$$(7) \quad E_\gamma^* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon}} m_0$$

Il significato dei simboli è il seguente:

ϑ_1 = angolo di m_1 nel sistema del laborat.

ϑ_1^* = angolo di m_1 nel sistema del c. di m.

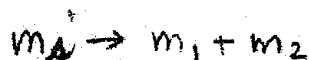
β = velocità relativa del c. di m. rispetto al laborat.

E_γ = energia del γ nel laborat.

E_γ^* = energia del γ nel sistema del c. di m.

W^* = energia totale nel sistema del c. di m.

Per la reazione (decadimento)



si possono adoperare formule deducibili dalle precedenti,

per $m_0 \rightarrow 0$; ne risulta un valore costante per q_1^* ,

β_1^* , ϑ_1^* , che potrà essere scritto nella prima pagina

della tabella. Prima delle tabelle si scriveranno tutte

le formule usate, e le loro espressioni asintotiche vi-

cine alle soglie e per valori grandi dell'impulso della

particella primaria.

Insieme alle formule ora scritte, sulla calcolatrice elet-

tronica ne andranno programmate anche altre che permettano il controllo dell'esattezza dei risultati.

- 7) Le tabelle verrebbero piuttosto voluminose rispetto a quelle di M. e K. specialmente per l'estensione del range di impulsi delle particelle primarie; si deve fare in modo che dalla calcolatrice i risultati escano già stampati, per evitare errori di trascrizione.

Bibliografia:

- (1) - C.Møller: THE THEORY OF RELATIVITY - Oxford University Press (1952)
- (2) - J.Blaton: ON A GEOMETRICAL INTERPRETATION OF ENERGY AND MOMENTUM CONSERVATION IN ATOMIC COLLISIONS AND DISINTEGRATION PROCESSES - Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat. Fys. Meddel. 24, 20 (1950)
- (3) - Malmberg e Koester: TABLES OF NUCLEAR REACTIONS KINEMATICS AT RELATIVISTIC ENERGIES - Urbana, Illinois (1953)
- (4) - Du Mond e Cohen: LEAST SQUARES ADJUSTMENT OF THE ATOMIC CONSTANTS, 1952 - Rev. Mod. Phys. 25, 691 (1953)
- (5) - K.M. Crowe: THE MASSES OF LIGHT MESONS, K-MESONS, AND HYPERONS IN 1956 - Nuovo Cimento, 5, 541, (1957)
- (6) - Bethe e De Hoffmann: MESONS AND FIELDS, vol. II° pag. 31 (1955)