Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-57/5 (30.4.57)

G. Diambrini: SULL'ESTRAZIONE DEL FASCIO DI ELETTRONI DEL SINCROTRONE ITALIANO MEDIANTE RISONANZA CON FASE DI INGRESSO A 90° NEL PEELER (METODO PING-PONG).

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE
Sezione Acceleratore.-

Relazione n° : T 31
30 Aprile 1957.-

G. DIAMBRINI: Sull'estrazione del fascio di elettroni del Sincrotrone Italiano mediante risonanza con fase di ingresso a 90° gradi nel peeler (Metodo ping pong)

- Sommario -

In questo lavoro vengono presentati gli elementi necessari per lo studio della estrazione del fascio di elettroni dal Sincrotrone Italiano mediante un nuovo adattamento del metodo cosiddetto del "peeler" e del "regenerator", chiameremo questo metodo, per brevità, metodo "ping-pong".

Si fa l'ipotesi di disporre di due peeler, (cioè due zone con indice di campo n_a alterato) una interno, l'altra esterno all'orbita stabile allo stesso azimut, vedi fig.1.

Prendendo per semplicità il caso di un sincrotrone circolare, con n=0,60 , si trova che solo con questa disposizione (che permette alle due zone alterate di agire sui massimi e sui minimi delle oscillazioni di betatrone) è possibile ottenere risonanze su due giri per le oscillazioni radiali con una fase di ingresso nella zona alterata $\vartheta_1 = 90°$. Facendo così coincidere la fase si ingresso effettiva con quella per cui si ha risonanza (lo spostamento di fase $\Delta\vartheta_2$ prodotto dalla zona alterata è una funzione della fase di ingresso nella zona stessa) si può ottenere l'estrazione degli elettroni ad un azimut ben definito senza sparpagliamento dei massimi ed eventuale fuoruscita ad azimut diversi da quelli in cui è stato posto il canale magnetico che attende gli elettroni. In questo modo non è necessario allargare l'orbita di equilibrio abbassando il valore della frequenza RF_2 (Dott. Turrin Relazione T 25) perchè a 180 gradi dalle zone alterate capitano solamente i nodi delle oscillazioni di betatrone. Si calcolano le intensità $T = (n - n_a)\vartheta_a$ dell'alterazione uguale per le due zone, e il guadagno di ampiezza per le oscillazioni radiali e per le verticali.

Si conclude che si deve avere T = 0,68 per le due zone, e a questi valori corrisponde un guadagno in risonanza go $\simeq$ 1,48 per le radiali. Le oscillazioni verticali si manterranno entro una semiampiezza di due cm. se si verificheranno le seguenti condizioni iniziali per le semiampiezze radiali A_r verticali A_v : $A_v \leq 1$ cm; A_r = 2 cm.

L'estrazione avverrà con queste condizioni iniziali in due giri e tre ingressi nella zona alterata. Il canale ma-

gnetico potrà restare fisso. Le zone alterate potranno forse essere realizzate con poli crenelé o con metodi analoghi ($n_a = - dB/dR \times R/B$ è positivo nella zona esterna e in quella interna).

---

§ 1 - E' possibile (Le Couter, Cohen e Crewe) trovare dei valori della zona alterata per cui il comportamento asintotico, cioè dopo molti giri, è quello di una crescita progressiva e discreta dell'ampiezza delle oscillazioni radiali di betatrone, mentre quelle verticali restano limitate.

Matematicamente questo insieme di valori è trovato imponendo la condizione che la traccia della matrice M che corrisponde a un giro della particella sia maggiore di $|2|$ per le oscillazioni radiali e minore di $|2|$ per le verticali. In questo caso, allora, si hanno autovalori λ reali e positivi della matrice M per le oscillazioni radiali. Se $\rho\,;\ \dot\rho = d\rho/d\theta$ sono lo spostamento dall'orbita di equilibrio della particella e la sua derivata rispetto all'angolo, si ha che:

$$(1)\quad \left|\begin{matrix}\rho\\ \dot\rho\end{matrix}\right|_{(n)} = M^n \left|\begin{matrix}\rho\\ \dot\rho\end{matrix}\right|_{(o)} = M^n(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha\lambda_1^n\bar{u} + \beta\lambda_2^n\bar{v}$$

dove:

$\bar{U}$ e $\bar{V}$; λ_1 e λ_2 sono gli autovettori e gli autovalori della matrice di rango due M, n è il numero di giri della particella. Ciò che a noi importa è che se la intensità della zona alterata $T = (n - n_a)\,\theta_a$ è scelta in modo che la traccia t di M sia $t \leq -2$ oppure $t \geq +2$, allora si ha $\lambda_1 = e^{+\Lambda}$; $\lambda_2 = e^{-\Lambda}$ con Λ reale e tale che $2\cos\Lambda = t$. Il risultato è che dopo molti giri il secondo termine a ultimo membro di (1) diventa trascurabile e l'ampiezza aumenta stabilmente di e^{Λ} per giro. Questo accade perchè lo spostamento di fase causato dalla zona alterata è funzione della fase di ingresso in questa zona, e questa fase generalmente non è quella di risonanza per una data alterazione di campo. Perciò occorrono molti giri prima che la particella trovi la fase giusta. Ma questo fatto non è sufficiente a garantire un rendimento massimo di estrazione nel Sincrotrone Italiano. E' infatti noto che la zona utile di n al di fuori dell'orbita centrale, nel Sincrotrone Italiano sarà di 5 o 6 centimetri, mentre (Dr. A. Turrin - relazione n°. T 25) la zona alterata dovrebbe essere posta ancora due cm all'infuori per evitare che i massimi negativi (interni all'orbita stabile), escano dalla zona utile di n. Rimangono dunque 3 cm circa per l'aumento dell'ampiezza dell'oscillazione di betatrone. Con una intensità della zona alterata $(n - n_a)\,\theta_a$ tale da garantire come comportamento asintotico dopo molti giri un guadagno di almeno 1 cm per giro (non meno, per la necessità di superare con buon rendimento le pareti del canale magnetico), gli spo=

stamenti casuali ai primi giri possono già fare uscire la particella dai 3 cm. di zona utile ad un azimut qualsiasi fuori del canale magnetico. E' perciò interessante considerare la possibilità di ottenere una risonanza in corrispondenza di una fase di ingresso nella zona alterata di 90°. Si deve escludere la possibilità di ottenere questa risonanza per incontri con la zona alterata sia ad ogni giro che ad ogni due giri, cioè un giro si e uno no. Questa risonanza può essere ottenuta in un sincrotrone circolare con un giro si e due no, oppure con due zone alterate, una sulla zona esterna dell'orbita stabile e una sulla zona interna. Al fine di condurre in calcolo di questo dispositivo adotteremo un procedimento elementare strettamente aderente ai fatti fisici. A tale scopo saranno escluse le matrici. Il procedimento è il seguente. Si tratta di calcolare la variazione di $\dot{\rho}$, δ, e il corrispondente rapporto g tra le ampiezze di due successivi giri per cui il prossimo incontro nella zona alterata avvenga nella stessa fase. Una volta noto δ sarà immediato trovare l'intensità della zona di campo alterato necessaria per avere la risonanza. Cominciamo dunque a trovare δ e g. In fig. 1 si vede che, detti ρ_1 e $\dot{\rho}_1$ rispettivamente lo spostamento dall'orbita stabile all'ingresso della zona alterata e la derivata $d\rho/d\theta$ nello stesso punto, queste grandezze saranno espresse da:

Entrata nella zona alterata
$$\begin{cases} \dfrac{\dot{\rho}_0}{\omega_r} = \text{ampiezza dell'oscillazione radiale} \\ \rho_1 = \dfrac{\dot{\rho}_0}{\omega_r} \sin \omega_r \theta_1 \\ \dot{\rho}_1 = \dot{\rho}_0 \cos \omega_r \theta_1 \qquad \omega_r = \sqrt{1-n} \end{cases}$$

All'uscita della zona alterata (supposta di spessore trascurabile) si suppone che ρ_1 non sia mutato mentre a $\dot{\rho}_1$ si sia aggiunta la quantità δ.

Allora all'entrata in $\theta_2 - \theta_1$ noi avremo :

All'entrata in $\theta_2 - \theta_1$ ovvero all'uscita della zona alterata.
$$\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{\dot{\rho}_0}{\omega_r} \operatorname{sen} \omega_r \theta_1 \\ \dot{\rho}_1 = \dot{\rho}_0 \cos \omega_r \theta_1 + \delta \end{cases}$$

Noi ora vogliamo imporre che la particella intersechi l'orbita stabile in θ_2, cioè che in questo punto si abbia $\rho_1 = 0$.

Per conoscere quale sarà $\dot{\rho}_2$ in θ_2, e θ_2, noti ρ_1 e $\dot{\rho}_1$ in θ_2 non è strettamente necessario scrivere tutta la matrice di trasformazione. Basta pensare che se la particella fosse in θ_1 con $\rho = \rho_1$ ma con $\dot{\rho}_1 = 0$, la sua posizione in θ_2 sarebbe data da $\rho_2 = \rho_1 \cos \omega_r (\theta_2 - \theta_1)$ mentre se la particella fosse in θ_1 con $\dot{\rho} = \dot{\rho}_1$ e $\rho = 0$ la sua posizione in θ_2 sarebbe $\rho_2 = \frac{\dot{\rho}_1}{\omega_r} \operatorname{sen} \omega_r (\theta_2 - \theta_1)$.

Nel caso di entrambi ρ e $\dot{\rho}$ diversi da zero in θ_1, in

θ_2 si avrà

$$(3)\qquad \rho_2 = \rho_1 \cos\omega_r(\theta_2-\theta_1) + \frac{\dot\rho_1}{\omega_r}\operatorname{sen}\omega_r(\theta_2-\theta_1)$$

e quindi $\dot\rho_2 = -\rho_1\omega_r \operatorname{sen}\omega_r(\theta_2-\theta_1) + \dot\rho_1\cos\omega_r(\theta_2-\theta_1)$

noi ora sostituiamo (.) in (3) e imponiamo la condizione $\rho_2 = 0$, ottenendo così le due equazioni:

$$0 = \dot\rho_0 \operatorname{sen}\omega_r\theta_1 \cos\omega_r(\theta_2-\theta_1) + \dot\rho_0\cos\omega_r\theta_1\operatorname{sen}\omega_r(\theta_2-\theta_1) + \delta\operatorname{sen}\omega_r(\theta_2-\theta_1)$$

$$\dot\rho_2 = -\dot\rho_0\operatorname{sen}\omega_r\theta_1\operatorname{sen}\omega_r(\theta_2-\theta_1) + [\dot\rho_0\cos\omega_r\theta_1+\delta]\cos\omega_r(\theta_2-\theta_1)$$

Da queste due equazioni possiamo facilmente ricavare le due incognite δ e $g = |\dot\rho_2/\dot\rho_0|$. Si ottine infatti:

$$\delta = -\frac{\dot\rho_0\sin\omega_r\theta_1}{\sin\omega_r(\theta_2-\theta_1)}$$

$$g = \left|\frac{\dot\rho_2}{\dot\rho_0}\right| = \frac{\sin\omega_r\theta_1}{\sin\omega_r(\theta_2-\theta_1)} \qquad \theta_2 = \theta_2(\lambda, n)$$

λ = lunghezza d'onda di betatrone ; n= numero di giri tra un incontro e un'altro con la zona alterata.

Vediamo quāl'è l'intensità della zona alterata che ci conviene definire $T = (n-n_a)\theta_a$, con n_a e θ_a l'indice di campo e l'estensione azimutale della zona alterata, e con n= 0,6. Poichè l'impulso della forza deve essere uguale alla variazione del momento angolare della particella, $\bar F t = \bar P_2 - \bar P_1$, e poichè nel nostro caso, nella zona alterata si ha:

$F = m\omega_0^2(n-n_a)\rho_1$ dove: $\omega_0 = \frac{d\theta}{dt}$ velocità angolare , m massa della particella.

$t = \frac{(R+\rho_1)\theta}{\omega_0 R} = (1+\varepsilon)\frac{\theta}{\omega_0}$ dove $\varepsilon = \frac{\rho_1}{R}$; R = raggio dell'orbita stabile.

$$P = m\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}m = m\omega_0\frac{d\rho}{d\theta};$$

si ottine dunque:

$$-(n-n_a)\rho_1(1+\varepsilon)\theta = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)_2 - \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)_1$$

Essendo l'espressione a secondo membro δ , ed $\varepsilon \ll 1$ si ottine:

$$-T\rho_1 = \delta; \qquad T = -\frac{\delta}{\rho_1}$$

essendo T $(n - n_a)\vartheta_a$ l'intensità della zona alterata.

Poichè T è costante e (δ/ρ_1) = cost., e poichè $\delta/\rho_1 = \frac{1}{\omega_r}\Phi$ dove Φ è lo spostamento introdotto dalla zona alterata, risulta che quest'ultimo è indipendente dall'ampiezza.

Allora l'intensità T necessaria perchè una particella che incontri la zona alterata con fase di ingresso ϑ_1 intersechi l'orbita stabile in ϑ_2, è data da:

$$(4) \qquad T = -\frac{\delta}{\rho_1} = -\frac{\delta}{\frac{\delta}{\omega_r}\operatorname{sen}\omega_r\vartheta_1} = \frac{\omega_r \operatorname{sen}\omega_r\vartheta_2}{\sin\omega_r\vartheta_1 \sin\omega_r(\vartheta_2-\vartheta_1)}$$

Il guadagno relativo a certi ϑ_2 e ϑ_1 sarà dato da:

$$(5) \qquad g = \frac{\sin\omega_r\vartheta_1}{\sin\omega_r(\vartheta_2-\vartheta_1)}$$

Consideriamo di voler calcolare l'intensità Tr necessaria perchè si abbia esatta risonanza nell'incontro con la zona alterata 1 giro si e due no. Nel nostro caso si avrà:

$$\vartheta_2 = \frac{\pi}{\sqrt{1-n}} - \left(\frac{2\lambda}{R} - 3\cdot 2\pi\right) = 3\pi\left(2 - \frac{1}{\sqrt{1-n}}\right)$$

$$\omega_r\vartheta_2 = 3\pi\left(2\sqrt{1-n} - 1\right)$$

ponendo $\omega_r\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, si ottiene

$$T = (n-n_a)\vartheta_a = \frac{0.63 \sin\omega_r\vartheta_2}{1\cdot\operatorname{sen}[3\pi(2-1.6)-\pi/2]} = -\frac{0.63\sin 0.805}{\sin 0.88}$$

$$T = (n-n_a)\vartheta_a \simeq -0.59$$

Il guadagno sarebbe:

$$g = \frac{1}{\sin 0.88} = \frac{1}{0.77} \simeq 1.3$$

Questo sistema ha però lo svantaggio che al principio del giro la particella passa molto vicino alla zona alterata, per cui può facilmente entrarvi per ritardi di fase all'entrata $(\omega_r\vartheta_2 < \pi/2)$ vediamo ora di calcolare l'intensità $T_e = T_i$ delle due zone alterate necessarie a provocare la risonanza su un giro con fase di ingresso 90°. A questo scopo le due zone devono essere poste una internamente, l'altra esternamente all'orbita di equilibrio, nel modo visibile in fig. 1.

Le due zone di intensità T_i e T_e devono distare tra di loro della quantità $d \geq 2A$ dove A è la ampiezza delle oscillazioni di betatrone del fascio.

Vogliamo ora calcolare T_i e T_e adatti alla risonanza su due giri, e trovare le condizioni di non dispersione per le oscillazioni verticali.

L'intensità T_e deve essere tale da fare cadere il prossimo minimo (o massimo interno) dell'oscillazione radiale in coincidenza della zona alterata interna.

Si deve dunque avere:

$$\omega_r \theta_2 = \pi + (2\pi\sqrt{1-n} - \pi) = 2\pi\sqrt{1-n}$$

$$\omega_r \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad = \text{fase di ingresso.}$$

Sostituendo in (4) si ottiene

$$T = \frac{\omega_r \sin \omega_r \theta_2}{\sin \omega_r \theta_1 \sin \omega_r(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\omega_r \sin 2\pi\sqrt{1-n}}{1 \cdot \sin(2\pi\sqrt{1-n} - \frac{\pi}{2})} = -\omega_r \operatorname{tg}(2\pi\sqrt{1-n})$$

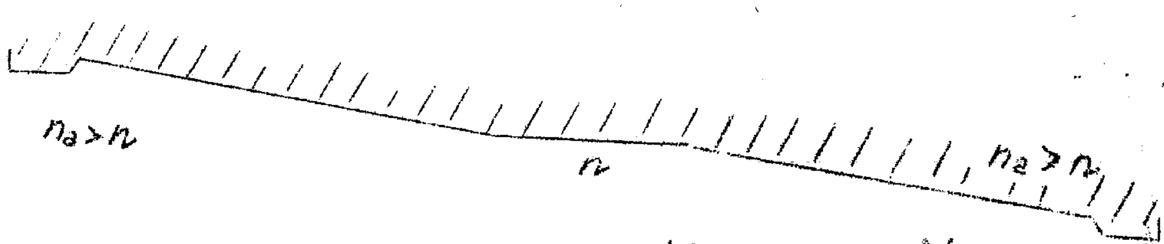
$$\boxed{T = -0{,}68 = (n - n_a)\,\theta_a}$$

Il guadagno corrispondente è :

$$g = \frac{\sin \omega_r \theta_1}{\sin \omega_r(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{1}{\sin[2\pi\sqrt{1-n} - \frac{\pi}{2}]} \simeq 1{,}48$$

Per avere lo stesso sfasamento nella zona alterata interna basterà porre $T = +\,0{,}68 = (n - n_a)\,\theta_a$.

Con questi valori delle due zone alterate la sezione dei poli (efficace a 9000 gauss) sarà del tipo



§ 2 - Ricaveremo ora le funzioni $\omega\theta_2 = f(\theta, \omega)$ e $g = f(\omega\theta_1)$ sia per le oscillazioni verticali che per le orizzantali. A tale scopo con alcuni passaggi algebrici possiamo ottenere dalla (4) :

$$\operatorname{cotg}\theta'_1 - \frac{\omega}{T\sin^2\theta'_1} = \operatorname{cotg}\theta'_2 \qquad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \omega = \omega_r = \sqrt{1-n} \simeq 0.63 \\ T = (n-n_a)\theta_a = -0.68 \end{array}\right\} \text{radiali} \\ \theta'_1 = \omega\theta_1; \quad \theta'_2 = \omega\theta_2 \\ \left.\begin{array}{l} \omega = \omega_v = \sqrt{n} \simeq 0.77 \\ T = (n-n_a)\theta_a = 0.68 \end{array}\right\} \text{verticali} \end{cases}$$

I risultati sono riportati in fig. 2.

Per le oscillazioni radiali dobbiamo notare che la intensità della zona alterata è tale da focalizzare in fase gli elettroni per fasi di entrata tra 20° e 110°. Più precisamente il meccanismo è il seguente. Supponiamo che un elettrone entri nella zona alterata con angolo di fase $\theta_1' = 90°$. Esso incontrerà la zona interna a 270°, cioè al minimo dell'oscillazione e così via, rimanendo sempre in fase. Se la incontra invece con $\theta_1' = 80°$ (cioè con 10° di anticipo) la zona alterata sposterà in avanti la fase di una quantità $\Delta\theta_2' = 41°$, invece di 47° 30', per cui la zona interna sarà incontrata con un anticipo di soli 10°-6° 30' = 3° 30' e così via.

Questo accadrà per ogni ritardo o anticipo di fase compresi nella zona lineare del grafico di fig. 2, cioè appunto con $10° \leq \theta_1' \leq 110°$.

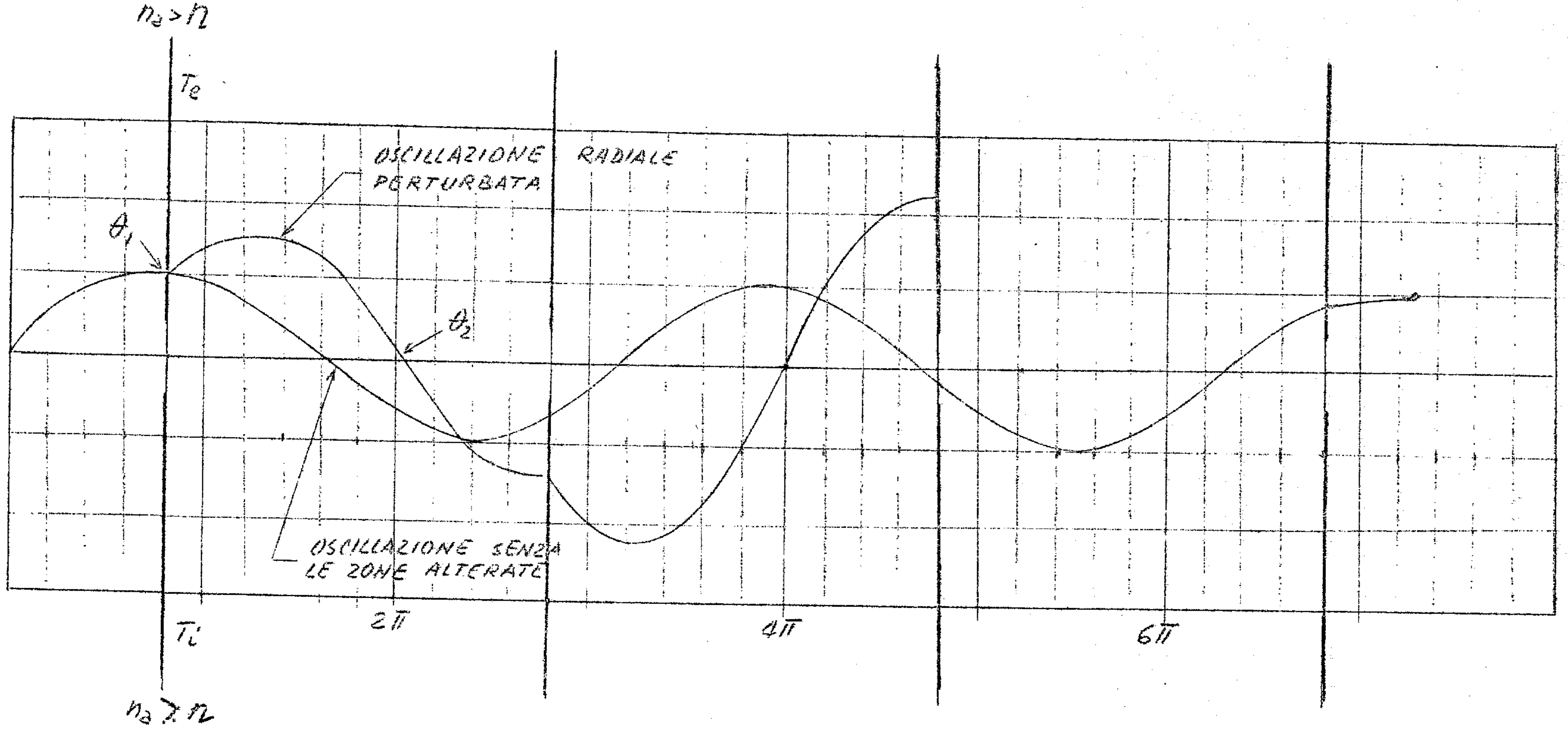
Il fatto che la risonanza si abbia per $\theta_1' = 90°$ permette però che la maggioranza degli elettroni all'ingresso nella zona alterata si trovi già molto vicini alla fase giusta di risonanza con una dispersione in azimut minore. Questo dovrà permettere un migliore rendimento di estrazione.

Per le oscillazioni verticali, tenuto conto del fatto che la zona alterata dà al massimo uno sfasamento di circa 50° contro i 97° necessari ad ottenere risonanza, si può stimare un guadagno medio ogni due giri di 1,2 contro 2,2 per le oscillazioni radiali. Se si realizzano le condizioni iniziali per le semiampiezze A_r, A_v delle oscillazioni di betatrone:

$$A_r = 2 \text{ cm.} \quad , \quad A_v \leq 1 \text{ cm.}$$

la estrazione potrà avvenire certamente in due giri e con tre sole azioni della zona alterata. In questo caso certamente nessun elettrone verrà perduto a causa delle oscillazioni verticali.

Ringrazio il Prof. Giorgio Salvini ed il Dr. Piergiorgio Sona per utili discussioni sull'argomento.



$n_2 > n$
T_e
OSCILLAZIONE RADIALE PERTURBATA
θ_1
θ_2
OSCILLAZIONE SENZA LE ZONE ALTERATE
T_i
2π
4π
6π
$n_2 > n$

FIG. 1-

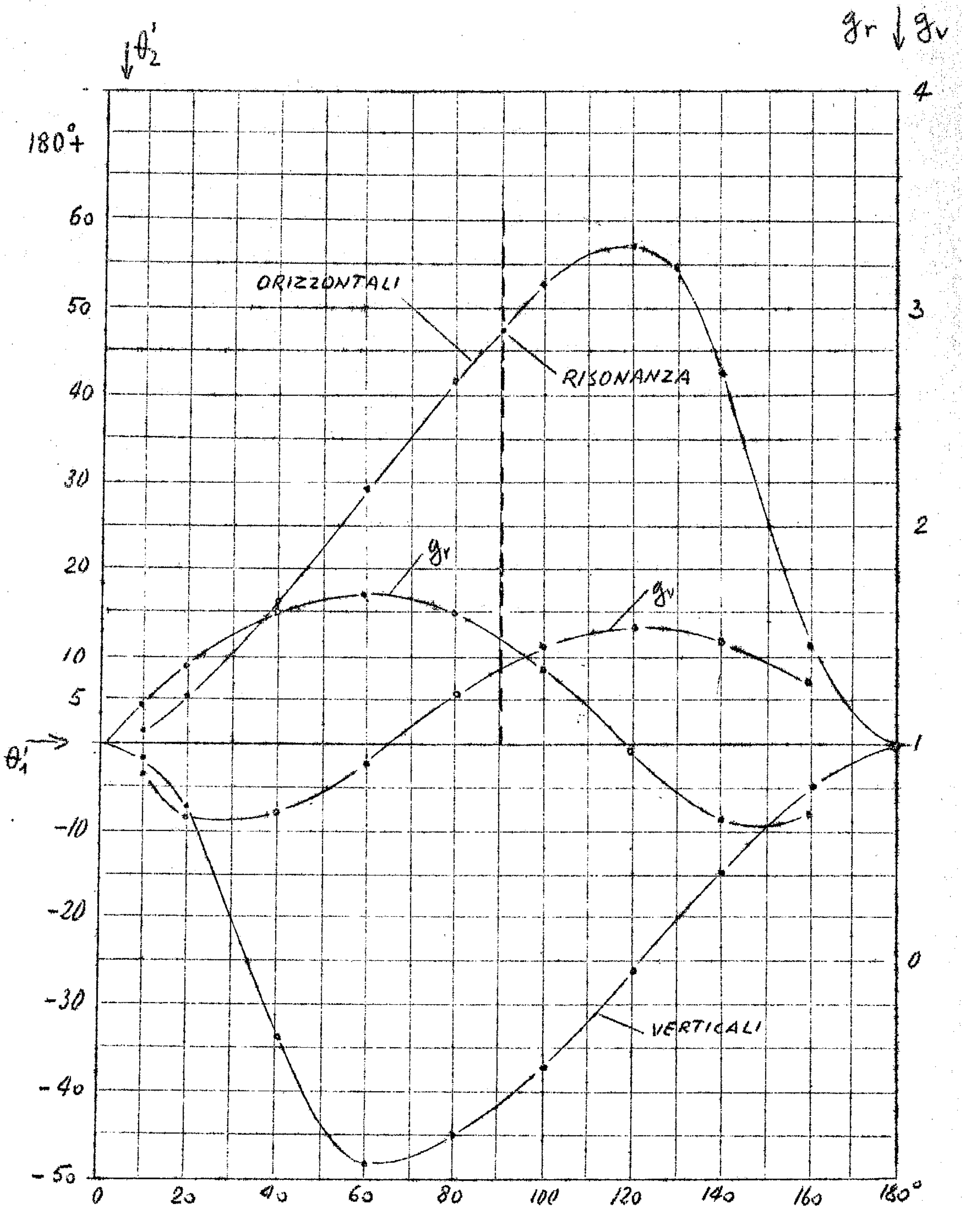


FIG. 2 - SFASAMENTI E GUADAGNI DI AMPIEZZA IN FUNZIONE DELLA FASE DI ENTRATA NEL PEELER PER OSCILLAZIONI DI BETATRONE VERTICALI E ORIZZONTALI.-